



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Natália Verkinová

Vývoj magmatického oceánu ve slapově zahříváných terestrických exoplanetách

Katedra geofyziky

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Marie Běhounková,
Ph.D.

Študijný program: Fyzika

Študijný odbor: FOF

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

V prvom rade by som sa chcela poďakovať svojej vedúcej Doc. RNDr. Marii Běhounkovej, Ph.D. za trpezlivosť a ochotu pri konzultovaní diplomovej práce a za cenné rady a komentáre. Ďakujem svojej rodine za neustálu podporu pri štúdiu a špeciálne poďakovanie patrí Tomášovi, ktorý bol veľkou oporou a inšpiráciou. Touto formou by som sa chcela poďakovať aj celej katedre geofyziky a mojím spolužiakom za to, že na katedre vytvorili rodinnú atmosféru, kde človek rád chodil a odkiaľ sa bude ťažko odchádzať.

Názov práce: Vývoj magmatického oceánu ve slapově zahřívaných terestrických exoplanetách

Autor: Natália Verkinová

Katedra: Katedra geofyziky

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Marie Běhounková, Ph.D., Katedra geofyziky

Abstrakt: Diplomová práca je venovaná skúmaniu terestrických exoplanét, ktoré sú slapovo zahrievané, vďaka čomu môže dochádzať k vytvoreniu magmatického oceánu. Vplyv a vývoj magmatického oceánu a termálnu evolúciu skúmame pre dve telesá, teleso podobné Zemi a mesiacu Io. Modelujeme slapové zahrievanie a parametrický vývoj teploty, ktoré sú vzájomne previazané. V rámci diplomovej práce sme skúmali vplyv orbitálnych, reologických parametrov a vplyv teploty na povrchu na termálnu evolúciu pláštá. Zahrnuli sme škálovacie vzťahy pre konvekciu založené na parametrizácii modelov primárne zahrievaných zosponu a zvnútra. V prípade, že slapové zahrievanie je natoľko veľké, že sa v telese objaví natavená vrstva materiálu, tak dochádza k mechanickému oddeleniu časti pláštá, a teda sa výrazne zmení slapová odozva planéty a začne sa v nej disipovať menej energie. Boli uvažované dva možné osudy taveniny v pláštá. Prípad, kedy všetka tavenina ostáva v pláštá a prípad, kedy sa časť taveniny dostáva na povrch a tým dochádza k lepšiemu odvádzaniu tepla.

Kľúčové slová: exoplanety prenos tepla slapové zahrievání numerické metody

Title: Evolution of magmatic oceans in tidally heated terrestrial exoplanets

Author: Natália Verkinová

Department: Department of Geophysics

Supervisor: Doc. RNDr. Marie Běhounková, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: The thesis focuses on the study of terrestrial exoplanets that are tidally heated, which can give rise to the formation of magma oceans. The primary objective is to analyze the impact and evolution of the magma ocean and thermal processes in two distinct celestial bodies: an Earth-like body and an Io-like body. We model parametrical evolution of thermal and tidal dissipation that are coupled. As part of the thesis, we investigated the influence of orbital, rheological parameters and the effect of surface temperature on the thermal evolution of the mantle. We included scaling relations developed for models heated from below as well as from within. If the tidal heating is sufficiently intense to induce the presence of a molten layer within the body, then mechanical decoupling of part of the mantle occurs, and thus the tidal response changes and less energy starts to dissipate in the body. Two possible cases have been considered for melt distribution: the case where all the melt is retained in the mantle, and the case where some of the melt reaches the surface and hence more efficient heat transfer occurs.

Keywords: exoplanets heat transport tidal heating numerical methods

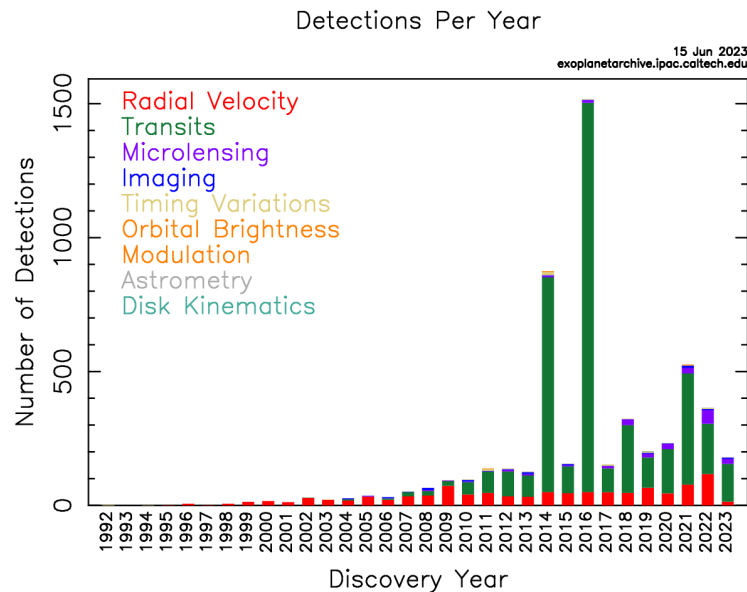
Obsah

Úvod	2
1 Model	7
1.1 Termálny vývoj	7
1.2 Rovnovážny stav	10
1.3 Advekcia taveniny	12
1.4 Slapy	13
1.5 Reológia	17
1.6 Porozita	18
1.7 Výpočetný algoritmus	19
2 ExoZem	22
2.1 Referenčný model ExoZeme	22
2.2 Vplyv reologických parametrov	23
2.3 Vplyv orbitálnych parametrov	26
2.4 Vplyv teploty	27
3 ExoIo	31
3.1 Referenčný model ExoIo	32
3.2 Vplyv reologických parametrov	32
3.3 Vplyv orbitálnych parametrov	36
3.4 Vplyv teploty	37
3.5 Rovnovážny stav bez advekcie taveniny	37
3.6 Rovnovážny stav s advekciou taveniny	38
Diskusia a Záver	42
Zoznam použitej literatúry	44
Zoznam obrázkov	49
Zoznam tabuliek	52
A Appendix: Výpočet slapovej deformácie	53

Úvod

Výskum a hľadanie exozemí je často motivované objavom Zemi podobného telesa, ktoré by mohlo hostiť život. V posledných rokoch sa zvyšuje počet objavených exoplanét. V súčasnosti je potvrdených 4058 planetárnych systémov, v rámci ktorých bolo potvrdených 5445 planét (ku dňu 5. januára 2023). Súčasný počet objavených exoplanét, ktoré sa nachádzajú v obývateľnej zóne je 63, z toho 23 planét je veľkosti Zeme (PHL The Habitable Exoplanets Catalog). Medzi najúspešnejšie detekčné metódy patrí metóda radiálnej rýchlosti, gravitačného mikrošoškovania, tranzitnej fotometrie a metóda priameho zobrazovania (NASA Exoplanet Archive), čo môžeme vidieť aj z grafu na obr. 1, ktorý zobrazuje počet detekcií planét danou metódou od roku 1992 (NASA Exoplanet Archive). Pri prvých detekciách patrila metóda radiálnej rýchlosti medzi úspešnejšie metódy, ale od roku 2011 sa ňou stala metóda tranzitnej fotometrie vďaka NASA Kepler misii (NASA Kepler's Launch).

Metóda tranzitnej fotometrie meria jas hviezdy. Aby bolo možné detekovať planétu touto metódou musí dochádzať k zákrytu hviezdy planétou. Pri prechode planéty popred hviezdu je pozorovaný malý pokles v jase hviezdy a sledovaním týchto poklesov je možné určiť, či okolo hviezdy obieha exoplanéta. Metódou je možné určiť polomer planéty a poskytnúť informácie o možnej atmosfére planéty (NASA What's a transit?). So zvyšujúcim sa polomerom planéty a znižujúcim sa polomerom hviezdy rastie veľkosť poklesu jasu hviezdy a zároveň sa zvyšuje pravdepodobnosť detekovateľnosti planéty.



Obr. 1: Graf zobrazujúci počet objavených exoplanét od roku 1992 po súčasnosť a detekčné metódy, ktorými boli objavené (NASA Exoplanet Archive).

Pri pozorovaní hviezd, okolo ktorých obieha planéta, si môžeme všimnúť, že tieto hviezdy sa pohybujú po malom orbite kvôli pôsobeniu planetárnej gravitácie, ako to poznáme z problému dvoch telies. Ak planéta neobieha v rovine kolmej k pozorovateľovi, tak sa hviezda hýbe smerom k a od Zemi, čím sa mení jej radiálna rýchlosť, ktorú je možné vypočítať z posunutia v spektrálnych čiarach hviezdy

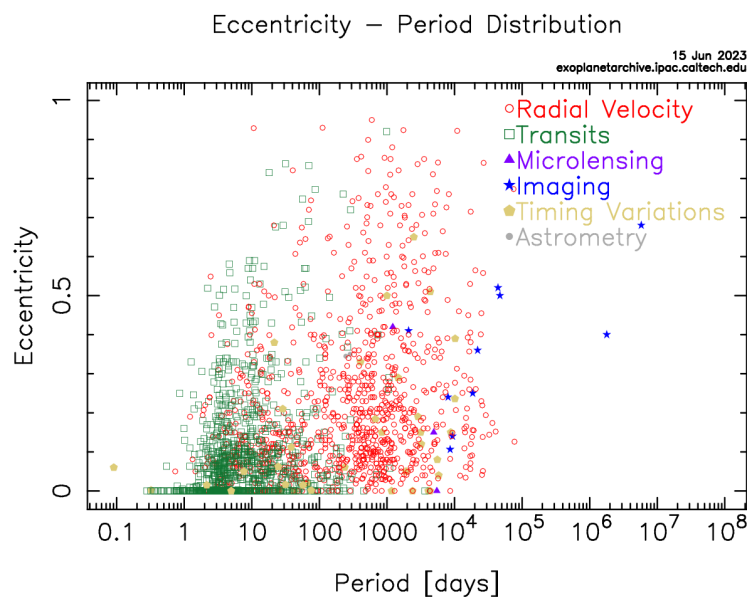
vdaka Dopplerovmu efektu (Murray a Dermott, 2000). Metóda radiálnej rýchlosti meria tieto variácie za účelom hľadania možných exoplanét (Lindgren a Dravins, 2003).

Relatívne veľký počet planét bolo objavených pomocou gravitačného mikrošoškovkovaia, ktoré je pozorovateľné, keď gravitačné pole hviezdy hrá rolu šošovky a tým zosilňuje jas hviezdy, ktorá sa nachádza za ňou. Tento fenomén je možné pozorovať len krátku dobu dní až týždňov (Wright a Gaudi, 2012).

Poslednou z úspešnejších metód je priame zobrazovanie. Aj napriek tomu, že planéty sú veľmi slabým svetelným zdrojom, ak obiehajú vo väčšej vzdialenosti od hviezdy je možné ich namerať pomocou ich tepelnej emisie. Metóda je lepšie aplikovateľná na sústavy bližšie k Slnku, a planéty o veľkosti aspoň Jupitera (Wright a Gaudi, 2012).

Najčastejšie detekované planéty sú planéty s krátkou orbitálnou periódou obiehajúce okolo málo hmotných hviezd kvôli ich ľahkej detekcii. Na obr. 2 je zobrazený graf objavených exoplanét a ich excentricita, perióda a metóda, ktorou boli objavené. Dve najúspešnejšie metódy hľadania krátko periodických planét sú metóda tranzitnej fotometrie a radiálnej rýchlosti, pretože sú na tieto planéty najcitlivejšie. Veľa objavených planét teda obieha v blízkej vzdialenosti málo hmotnej materskej hviezdy, kde sú gravitačné sily veľké, čím môže dochádzať k veľkej slapovej deformácii planét (Ma a Fuller, 2021). Pre málo hmotné hviezdy sa navyše habitabilná zóna posúva smerom k hviezde (Kaltenegger, 2017) a planéty v habitabilnej zóne môžu byť silne slapovo ovplyvňované. Vzhľadom k tomuto faktoru, sa v diplomovej práci venujeme planétam, ktoré sú slapovo deformované, a slapové zahrievanie je hlavným zdrojom tepla planéty.

S vylepšujúcou sa technológiou a lepšími detekčnými metódami dokážeme identifikovať čoraz menšie objekty. Kandidátmi takýchto objektov by mohli byť slapovo zahrievané exomesiace, akým je v slnečnej sústave napríklad Io. Slapové zahrievanie takých malých telies môže nataviť ich vnútro a môže mať za následok pozorovateľne vyššiu teplotu a teoreticky tým umožniť ich detekciu (Kleisoti



Obr. 2: Graf zobrazujúci excentricitu a periódy orbítu objavených exoplanét a detekčnú metódu, ktorou boli objavené (NASA Exoplanet Archive).

a kol., 2023). Zatiaľ čo Io je jedinečné v slnečnej sústave, vo vesmíre tomu tak vôbec nemusí byť (Rovira-Navarro a kol., 2021). Pochopenie procesu chladnutia u mesiaca Io by mohlo poskytnúť vhľad do rannej evolúcie terestrických planét, kedy sú ešte horúce s vysokým tepelným tokom (Steinke a kol., 2020).

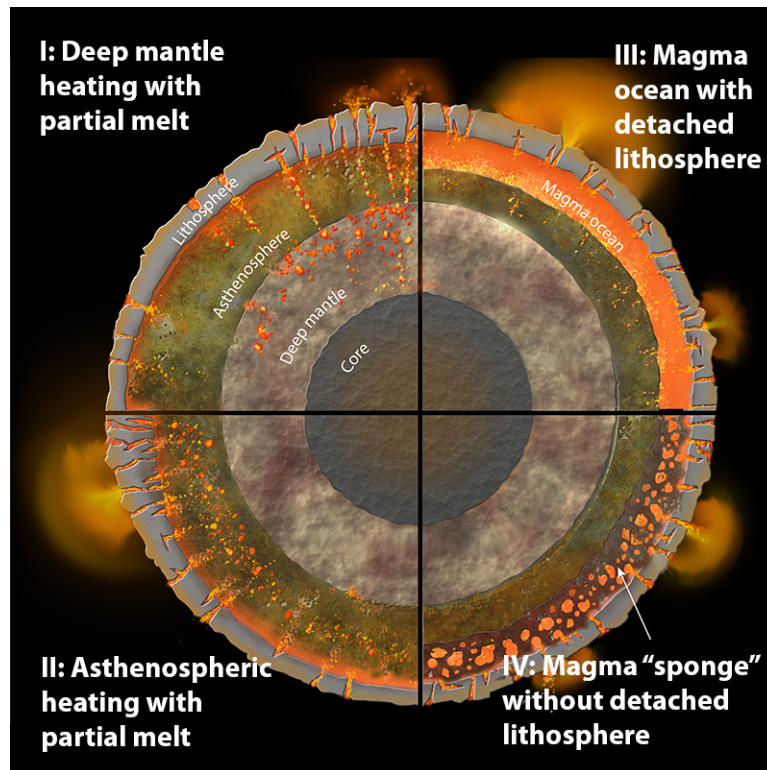
To, či si vie planéta udržať atmosféru, môže patriť medzi významné faktory pri hľadaní obývateľných planét (Vilella a Kaminski, 2017). Rovnako medzi uvažované faktory, ktorým je pri skúmaní obývateľnosti planéty venovaná pozornosť, je tektonický režim planéty a do akého rozsahu je možné udržať obývateľnosť bez platňovej tektoniky. Tektonický režim je dôležitý pri udržiavaní uhlíkovo-silikátového cyklu na geologických časových škálach (Tosi a kol., 2017). Vzhľadom k nedostatku informácií o exoplanétach, ani v prípade exoplanéty s rovnakou hmotnosťou, veľkosťou a vzdialenosťou od materskej hviezdy, by nebolo ľahké určiť, či je platňová tektonika práve úradujúcim tektonickým režimom na danom telese. Pri absencii detailnejšieho popisu o telese, je stagnant-lid režim považovaný za najčastejší tektonický režim terestrických telies. Vzhľadom na exponenciálnu závislosť viskozity na teplote, relatívne studené horné vrstvy silikátových planét majú prirodzene tendenciu byť tuhé a formovať nepohyblivú platňu (Tosi a kol., 2017). Predpokladá sa, že aj Zem vo svojom vývoji prešla viacerými tektonickými režimami, pričom jedným z nich mohol byť aj stagnant-lid režim (Stern, 2018).

Modelovanie termálnej konvekcie je dlhodobá výzva vzhľadom ku komplexnosti fyzikálneho problému a nedostatku dát. Dokonca aj pri Zemi, najpreskúmanejšom telese vo vesmíre, zostávajú niektoré otázky zatiaľ nezodpovedané (Vilella a Kaminski, 2017). Vzhľadom k malému počtu informácií o exoplanétach môžeme uplatňovať len metódy skúmajúce základné závislosti. Veľmi často sa preto využívajú škálovacie zákony (Tosi a kol., 2017; Stamenković a kol., 2012). Problém termálnej evolúcie pláštia môže byť napríklad riešený pomocou škálovacích zákonov založených na termálnej konvekcii. Medzi typy škálovacích zákonov, ktoré sa používajú patria hlavne modely primárne zahrievané zospodu alebo zvnútra (Deschamps a Vilella, 2021).

Termálna evolúcia planét s malým jadrom, alebo s teplotou pláštia blízko teploty jadra je lepšie modelovaná len s vnútorným objemovým zahrievaním (Vilella a Kaminski, 2017). Medzi vnútorné zahrievania môžu patriť rádioaktívne a slabové zahrievanie (Běhounková a kol., 2011; Vilella a Kaminski, 2017). Príkladom takýchto telies môžu byť malé planéty alebo exomesiace. Pri parametrizácii konvekcie v prípade veľkého toku z jadra, typicky pri väčších planétach ako Zem, sa používajú iné škálovacie vzťahy (Tosi a kol., 2017). V diplomovej práci sme použili oba typy škálovacích vzťahov. V prípade malého terestrického telesa, podobného mesiaca Io, sme sa pozerali na rovnovážny stav planéty získaný z termálnej evolúcie, kedy bol plášť zahrievaný zospodu a porovnávali sme to s rovnovážnym stavom pre čisto vnútorne zahrievanú planétu.

Teplo z vnútra Io je odvádzané čiastočne pomocou konvekcie (Moore a kol., 2007), avšak vzhľadom k vysokej teplote vnútri Io a nízkym tlakom sa v plášti nachádza natavený materiál, ktorý sa na povrch dostáva pomocou kanálov, čím efektívne ochladzuje vnútro mesiaca (Moore, 2001; Bierson a Nimmo, 2016).

Na obr. 3 sú zobrazené možné scenáre distribúcie zahrievania a magmy na mesiaci Io. Stále sa nevie, ako je tavenina na Io distribuovaná, či sa všetka tavenina nachádza pod litosférou vo vrstvičke, alebo či je lokalizovaná do oddelených zhlukov. V diplomovej práci budeme testovať a porovnávať rozloženie taveniny

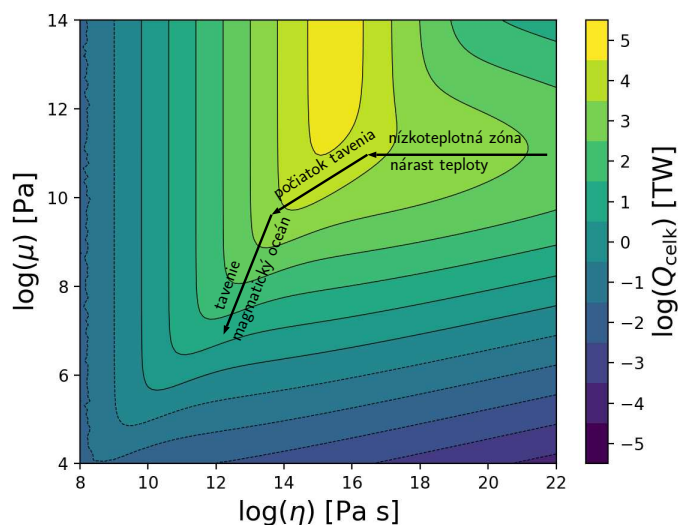


Obr. 3: Štyri možné scenáre distribúcie zahrievania a taveniny na mesiaci Io. Prezvané: Chuck Carter and James Tuttle Keane (Keck Institute for Space Studies).

a slapového zahrievania pre model uvažujúci prenos tepla pomocou tzv. heat piping, ktorý budeme ďalej označovať ako magmatické prieduchy (Moore, 2001, 2003; Spencer a kol., 2021), a budeme uvažovať aj model, v ktorom ostáva všetka tavenina vnútri telesa.

Reológia hrá dôležitú rolu pri popisovaní správania telies, ktoré sú počas svojej orbity slapovo deformované. Aj napriek tomu, že Maxwellov model je často používaným pri slapovo zahrievaných telesách (Segatz a kol., 1988; Moore, 2003; Henning a kol., 2009), nepopisuje správne komplexné správanie olivínu pozorované pri laboratórnych experimentoch (Jackson a kol., 2014; Rovira-Navarro a kol., 2021). Andreadov model je obzvlášť úspešný pri zachytávaní chovania slapovo zahrievaných telies (Walterová a Běhounková, 2017; Renaud a Henning, 2018). V práci uvažujeme prepojenie slapového a termálneho vývoja kvôli závislosti reologických parametrov najmä viskozity na teplote a citlivosť modulu torzie a viskozity na porozite. Na obr. 4 je schematické prepojenie slapového zahrievania s termálnym vývojom. Vplyvom vnútorného slapového zahrievania rastie teplota a klesá viskozita (nízkoteplotná zóna). V istom bode nad solidom, začne klesať modul torzie aj viskozita (počiatok tavenia), pričom zahrievanie je vysoké a môže aj rásť. Keď je natavený dostatok materiálu, aby sa vytvorila vrstva taveniny, tak nastáva náhly pokles modulu torzie, klesanie viskozity a taktiež pokles v zahrievaní (Moore, 2003). V skutočnosti riešime zložitejší prípad, tu sa mení viskozita a modul torzie v plášti ako celok a obrázok slúži ako motivácia.

Diplomová práca je štrukturovaná nasledovne: prvá kapitola je venovaná popisu modelu a je rozdelená do 7 podkapitol. V kapitole 1.1 je rozobraný teoretický popis termálneho vývoja planéty, ktorá sa skladá z jadra, plášte a stagnant-lidu.



Obr. 4: Schématické znázornenie vplyvu slapového zahrievania a jeho prepojenie s termálnym vývojom. Zahrievanie je vypočítané pre zemi podobné teleso s homogénnym plášťom a tekutým jadrom.

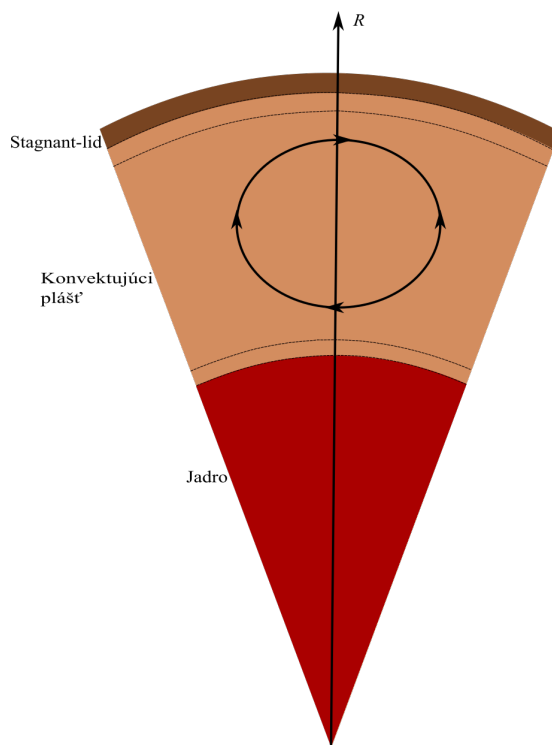
Hlavným zdrojom tepla je slapové zahrievanie. V podkapitole 1.2 rozoberáme výpočet rovnovážneho stavu pre telesá, ktoré sú čisto vnútorne zahrievané a uvádzame škálovacie vzťahy potrebné k výpočtom. Nasledujúca podkapitola je venovaná teórii prenosu taveniny pomocou magmatických prieduchov. V 1.4 sa venujeme teórii výpočtu slapového zahrievania za použitia viskoelastickej teórie pre self-gravitačné telesá (Peltier, 1974), pričom uvažujeme Andreadovu reológiu v plášti, ktorú popisujeme v kap 1.5. V podkapitole 1.6 rozpisujeme výpočet porozity a v poslednej kapitole opisujeme výpočetný algoritmus. V kapitolách 2 a 3 sme aplikovali teóriu z kap. 1 na dve rôzne telesá: exozem (kap. 2) a exoio (kap. 3). Najprv sme určili referenčné parametre pre obe planéty, pre ktoré sme následne vypočítali termálnu evolúciu plášťa. Ďalej sme študovali závislosť výsledkov na viacerých parametroch. V prípade exoio sme vypočítali aj rovnovážny stav planéty postupom uvedeným v kap. 1.2. Porovnávali sme zadržovanie taveniny v plášti, teda vplyv magmatického oceánu a vplyv prenosu taveniny magmatickými prieduchmi na slapové zahrievanie. Kapitola 4 je venovaná diskusii a záveru.

1. Model

Táto kapitola sa venuje teoretickému popisu rovníc, ktoré boli použité pri numerickej simulácii termálnej evolúcie terestrických exoplanét. Podkapitoly sa budú venovať popisu postupu pri určovaní termálnej evolúcie planéty, výpočtu rovnovážneho stavu planéty, možnému prístupu transportu taveniny z pláštá pomocou magmatických prieduchov, teoretickému popisu výpočtu slapového zahrievania pre planéty v 1:1 spin-orbitálnej rezonancii a reologickému modelu. V krátkosti bude uvedený výpočetný algoritmus.

1.1 Termálny vývoj

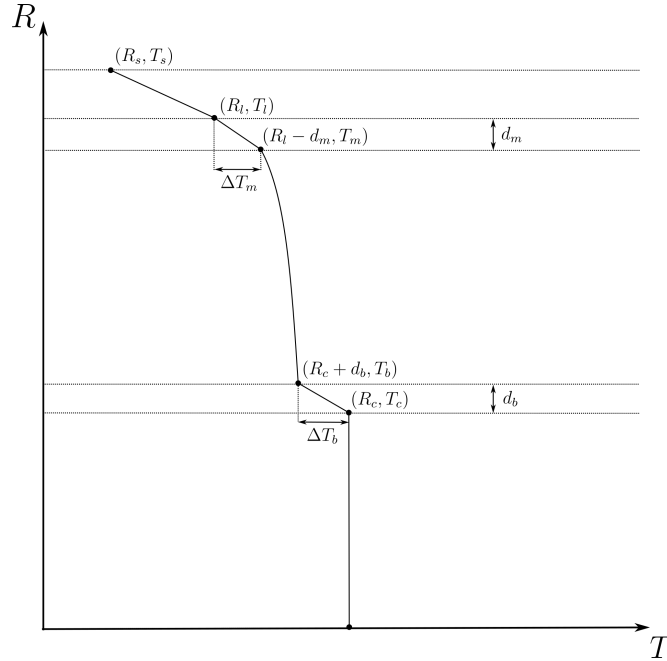
Pri simulácii termálnej evolúcie planéty sa konkrétne venujeme stagnant-lid konvekcii, pričom sme postupovali podľa článku Breuer a Spohn (2006); Tosi a kol. (2017), v ktorom použili 1D model parametrizovanej konvekcie. Na obr. 1.1 môžeme vidieť rozdelenie planéty do troch vrstiev: jadro, plášť a stagnant-lid.



Obr. 1.1: Rozdelenie planéty do troch vrstiev. Stagnant-lid, konvektujúci plášť a tekuté jadro. Čiarkovanými čiarami sú označené dve prechodové vrstvy (jedna pod stagnant-lidom, jedna nad CMB).

Pri výpočtoch vychádzame z počiatočného teplotného profilu pre celú planétu. Predpisujeme počiatočnú teplotu na povrchu T_s , hrúbku stagnant-lidu D_l , teplotu v plášti T_m a teplotu v jadre T_c . V konvektívnej časti pláštá je adiabatický profil, a v stagnant-lide predpisujeme konduktívny profil. Teplota na povrchu je predpísaná na hodnotu T_s , ktorá je buď držaná ako konštantná počas evolúcie alebo ju v prípade exozeme počítame pre privrátenu a odvrátenu stranu a pre

exoio počítame priemernú teplotu na povrchu. Rovnice na výpočet teploty na povrchu sú uvedené v kapitolách 2 a 3. Numericky riešime časovo závislé zákony zachovania energie pre jadro, plášť a stagnant-lid, ktoré nám vracajú teplotu na hranici jadro-plášť (CMB), teplotu plášťa pod lidom a hrúbku samotného lidu. Na obr. 1.2 je nakreslený teplotný profil planéty.



Obr. 1.2: Teplotný profil planéty. Konduktívne vedenie tepla v stagnant-lide, lineárny profil teploty v prechodových vrstvách, adiabatická teplota v plášti a adiabatická teplota v jadre. Parametre d_m a d_b označujú hrúbky hraničných vrstiev.

Zákon zachovania energie v jadre je daný rovnicou

$$\epsilon_c \rho_c c_c V_c \frac{dT_c}{dt} = -q_c A_c, \quad (1.1)$$

kde t je čas, ρ_c , c_c a V_c sú hustota, tepelná kapacita a objem jadra v danom poradí. Táto rovnica popisuje sekulárny vývoj jadra. ϵ_c v rovnici je konštanta dávajúca do vzťahu priemernú teplotu v jadre a teplotu T_c na CMB, a držíme ju konštantnú. Pre exozem je $\epsilon_c = 1.2$ a pre exoio je $\epsilon_c = 1$ (Stamenković a kol., 2012). T_c je teplota jadra, A_c je povrch jadra a q_c je tepelný tok z jadra do plášťa.

Zákon zachovania energie pod stagnant-lidom je daný rovnicou:

$$\epsilon_m \rho_m c_m V_l (1 + St) \frac{dT_m}{dt} = -q_l A_l + q_c A_c + Q_m V_l, \quad (1.2)$$

kde ρ_m a c_m sú hustota, tepelná kapacita plášťa. T_m teplota v plášti, Q_m je priemerné objemové zahrievanie v plášti a q_l je tepelný tok z konvektujúcej časti plášťa do stagnant-lidu. ϵ_m je konštanta dávajúca do vzťahu priemernú teplotu v plášti a teplotu T_m . Pre exozem je $\epsilon_m = 1.25$ a pre exoio je $\epsilon_m = 1$ (Stamenković a kol., 2012). Stefanovo číslo St riadi uvoľnenie/spotrebu latentného tepla počas tavenia alebo solidifikácie. Stefanovo číslo je určené zo vzťahu (Breuer a Spohn,

2006):

$$St = \frac{L}{c_m} \frac{d\Phi}{dT_m} \frac{V_a}{V_l}, \quad (1.3)$$

kde L je latentné teplo, V_a je objem nataveného materiálu a Φ je priemerná objemová porozita, ktorej výpočet je uvedený v podkapitole 1.6.

Termálna evolúcia má efekt na vnútornú štruktúru planéty a slapovú odozvu. Vzrast alebo pokles teploty na vrchu pláštá reguluje tepelný tok do litosféry a tým určuje akú hrúbku bude mať stagnant-lid. Evolúciu stagnant-lidu popisuje rovnica:

$$\rho_m c_m (T_m - T_l) \frac{dD_l}{dt} = -q_l - k_m \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_l}, \quad (1.4)$$

kde D_l je hrúbka stagnant-lidu, T_l je teplota na spodku stagnant-lidu, k_m je tepelná vodivosť pláštá a $\frac{\partial T}{\partial r}$ je radiálny teplotný gradient počítaný na spodnej hranici lidu ($r = R_l$). Gradient teploty počítame za predpokladu tepelnej kondukcie v rovnovážnom stave:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k_l \frac{\partial T}{\partial r} \right) + Q_l = 0, \quad (1.5)$$

kde r je vzdialenosť bodu od stredu telesa, k_l je tepelná vodivosť a Q_l je objemové zahrievanie stagnant-lidu.

Tepelné toky z jadra do pláštá q_c a z pláštá do stagnant-lidu q_l získame z teórie hraničnej vrstvy (boundary-layer theory), vďaka ktorej dostaneme hrúbky hraničných vrstiev zo škálovacích zákonov pre stagnant-lid konvekciu.

Tepelný tok vyvolaný konvekciou v sublitosferickom plášti je rovný $Ra^{1/3}$. Ra je Rayleighovo bezrozmerné číslo popisujúce chovanie tekutín a je definované ako

$$Ra = \frac{\rho_m \alpha g \Delta T (R_l - R_c)^3}{\eta \kappa}, \quad (1.6)$$

kde α je koeficient termálnej rozťažnosti, g je gravitačné zrýchlenie, κ je termálna difuzivita v plášti a η je viskozita v plášti, ktorej výpočet je uvedený v kapitole 1.5. ΔT je teplotný rozdiel, ktorý poháňa konvekciu a je daný vzťahom

$$\Delta T = \Delta T_m + \Delta T_b, \quad (1.7)$$

kde ΔT_m je teplotný skok cez hornú hraničnú vrstvu a ΔT_b je teplotný skok cez spodnú hraničnú vrstvu. Obr. 1.2 slúži na lepšiu vizualizáciu nasledujúcich hodnôt. Teplotné skoky sú rovné

$$\Delta T_m = T_m - T_l \quad \text{a} \quad \Delta T_b = T_c - T_b, \quad (1.8)$$

kde T_b je teplota tesne nad CMB a T_l je teplota tesne pod stagnant-lidom. Teplota T_b je určená za predpokladu, že plášť silne konvektuje, teda jeho radiálny teplotný profil je adiabatický, a za použitia teórie hraničnej vrstvy určíme hrúbku spodnej hraničnej vrstvy.

Teplota na hornej hraničnej vrstve T_l je daná ako teplota, za ktorej viskozita vzrastie o jednotku vo veľkosti vzhľadom na viskozitu konvektujúceho pláštá a je daná vzťahom (Tosi a kol., 2017):

$$T_l = T_m - \theta \frac{R_{plyn} T_m^2}{E^*}, \quad (1.9)$$

kde $\theta = 2.9$ je faktor (Reese a kol., 2005), ktorý započítava vplyv sférickej geometrie, R_{plyn} je molárna plynová konštanta a E^* je aktivačná energia.

Teplenné toky q_c a q_l sú dané vzťahmi:

$$q_l = k_m \frac{T_m - T_l}{d_m} \quad \text{a} \quad q_c = k_m \frac{T_c - T_b}{d_b}. \quad (1.10)$$

Hrúbky hraničných vrstiev d_m a d_b sú odvodené z teórie hraničnej vrstvy nasledovne:

$$d_m = (R_l - R_c) \left(\frac{Ra_{crit}}{Ra} \right)^{1/3}, \quad (1.11)$$

a

$$d_b = \left(\frac{\kappa_m \eta_c Ra_{i,crit}}{\alpha \rho_m g (T_c - T_b)} \right)^{1/3}. \quad (1.12)$$

Viskozita η_c je vypočítaná z priemernej teploty získanej na spodnej hraničnej vrstve s hrúbkou d_b ako:

$$\eta_c = \eta \frac{T_b + T_c}{2}. \quad (1.13)$$

kde η je viskozita daná vzorcom (1.53), Ra_{crit} je kritické Rayleighovo číslo pre plášť a $Ra_{i,crit}$ je lokálne kritické Rayleighovo číslo, pre ktoré platí:

$$Ra_{i,crit} = 0.28 Ra_i^{0.21}, \quad (1.14)$$

kde Ra_i je termálne Rayleighovo číslo pre celý plášť:

$$Ra_i = \frac{\rho_m \alpha g \Delta T_i (R_s - R_c)^3}{\eta \kappa_m}, \quad (1.15)$$

zmena teploty v celom plášti je daná vzťahom $\Delta T_i = (T_m - T_s) + (T_c - T_b)$.

V elastickej litosfére je teplo prenášané kondukciou, kde teplota klesá lineárne až k teplote na povrchu T_s . V prechodových vrstvách je lineárny teplotný profil a v konvektujúcej časti plášťa teplota sleduje adiabatú danú vzťahom Montoux a kol. (2016):

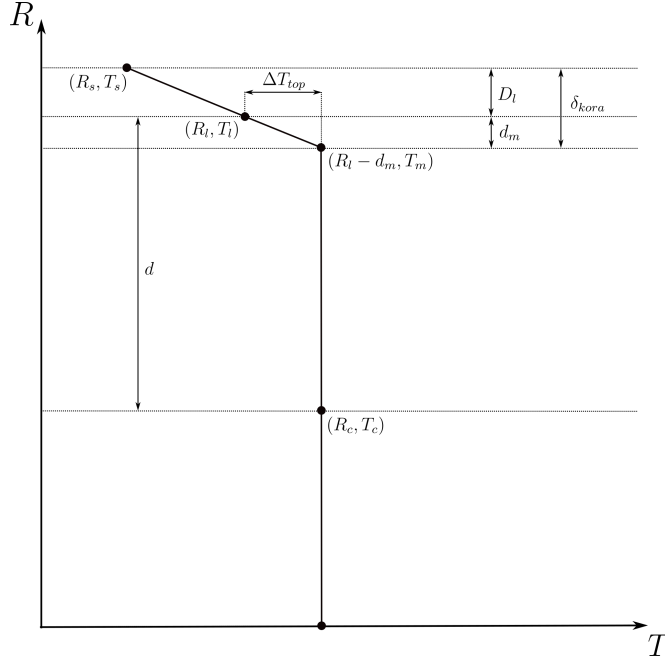
$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_S = - \frac{\alpha g}{c_p} T, \quad (1.16)$$

kde S je entropia.

1.2 Rovnovážny stav

V nasledujúcej kapitole je vysvetlený postup pri výpočte teplotného profilu pre čisto vnútorne zahrievané planéty, kde tepelný tok z jadra je nulový. Postup je inšpirovaný článkami Steinke a kol. (2020) a Vilella a Kaminski (2017). Laboratórne a numerické experimenty škálovacích vzťahov pre vnútorne zahrievané planéty ukazujú, že v takýchto planétach sa najpravdepodobnejšie nachádzajú miesta aktívne klesajúceho materiálu a pasívne stúpajúceho materiálu (Vilella a Kaminski, 2017; Parmentier a Sotin, 2000). Vedie to na sub-adiabatický teplotný profil, kde maximálnu teplotu pozorujeme pod hornou prechodnou vrstvou.

Rovnako ako v predchádzajúcej podkapitole predpokladáme, že plášť telesa je konvektujúci, nestlačiteľný a oddelený od povrchu stagnant-lidom. V lide uvažujeme konduktívny profil, v prechodovej vrstve lineárny profil, aj keď je súčasťou



Obr. 1.3: Teplotný profil planéty v rovnovážnom stave, keď uvažujeme vnútorne zahrievané planéty.

konvektujúceho plášťa a v plášti uvažujeme tiež lineárny profil. V jadre predpíšeme konštantnú hodnotu teploty, ktorá sa nemení.

Aby sme mohli určiť silu konvekcie alebo nárast teploty cez konvektujúci plášť musíme si vyjadriť Rayleigh-Robertsovo číslo (Steinke a kol., 2020). Rayleigh-Robertsovo číslo Ra_H poskytuje kritérium pre výskyt konvekcie v objemovo zahrievanom plášti a používa sa pri kvantifikovaní aktivity konvekcie v čiste vnútorne zahrievaných planétach. Je určené zo vzťahu

$$Ra_H = a_f \frac{\rho \alpha g Q_m d^5}{k \eta \kappa}, \quad (1.17)$$

kde Q_m je produkcia objemového zahrievania. Kritické Rayleigh-Robertsovo číslo $Ra_{H,krit}$ určuje, či je systém v konvektívnom alebo konduktívnom režime. Faktor a_f vystupujúci v rovnici je použitý na korekciu na sférickú geometriu

$$a_f = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_c}{R_c + d} + \left(\frac{R_c}{R_c + d} \right)^2 \right), \quad (1.18)$$

kde R_c je radiálna vzdialenosť od vnútra planéty po spodok konvektujúcej časti, v našom prípade je to polomer jadra a d je hrúbka konvektujúcej časti plášťa.

V planétach, ktoré sú čisto vnútorne zahrievané, môžeme teplotný skok cez konvektívnu vrstvu vyjadriť vo vzťahu k zahrievaniu ako:

$$\Delta T_H = a_f \frac{Q_m d^2}{k}. \quad (1.19)$$

Maximálny teplotný skok ΔT_{top} cez hraničnú vrstvu o hrúbke d_m je vypočítaný použitím škálovacieho vzťahu z Vilella a Kaminski (2017) ako

$$\Delta T_{top} = \frac{1}{2} \Delta T_H \left(\frac{Ra_{H,krit}}{Ra_H} \right)^{1/4}. \quad (1.20)$$

Maximálna teplota v plášti T_m je závislá na teplotnom skoku ΔT_{top} :

$$T_m = \left(\Delta T_{top} \frac{E^*}{2.9 R_{plyn}} \right)^{1/2}. \quad (1.21)$$

Hrúbka prechodovej vrstvy je určená zo škálovacieho vzťahu podľa Vilella a Kaminski (2017) ako

$$d_m = d \left(\frac{Ra_{H,krit}}{Ra_H} \right)^{1/4}. \quad (1.22)$$

Teplotu na spodku lidu určíme ako:

$$T_l = T_m - \Delta T_{top}. \quad (1.23)$$

Hrúbky lidu a kôry sú dané nasledovnými vzťahmi

$$D_l = k_l \frac{T_l - T_s}{Q_m d}, \quad (1.24)$$

$$\delta_{kôra} = D_l + d_m. \quad (1.25)$$

1.3 Advekcia taveniny

Moore (2001) prišiel s návrhom novej tepelnej bilancie, kedy teplo produkované slapovým zahrievaním je vynášané na povrch v magmatických prieduchoch. V rovnovážnom stave je slapové zahrievanie v rovnováhe s absorpciou latentného tepla, takže tok taveniny musí byť v rovnováhe s objemovou rýchlosťou produkcie taveniny. Advekciiu taveniny v čiastočne natavenej astenosfére môžeme popísať pomocou zákona zachovania hmoty a Darcyho zákona pre porózne médium (Moore, 2001)

$$\nabla \cdot (v_l \Phi) = s, \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot ((1 - \Phi)v_s) = -s, \quad (1.27)$$

kde v_s a v_l sú rýchlosti tuhého materiálu a tekutiny v danom poradí, s je rýchlosť produkcie taveniny a Φ je porozita.

Darcyho zákon riadi tok porózneho materiálu a môže byť vyjadrený vzťahom:

$$\Phi(v_l - v_s) = \frac{k_\Phi \Delta \rho g}{\eta_t}, \quad (1.28)$$

kde $\Delta \rho$ je rozdiel v hustotách tuhého a nataveného materiálu, η_t je viskozita taveniny a permeabilita k_Φ závisí na geometrii poróznej matice

$$k_\Phi = \frac{b^2 \Phi^n}{\tau}, \quad (1.29)$$

kde b je veľkosť zrna, n a τ sú konštanty závislé na geometrii matice.

Zákon zachovania energie dostaneme, ak dáme do rovnováhy rýchlosť tvorby taveniny a slapového zahrievania Q_m :

$$\rho L s = Q_m. \quad (1.30)$$

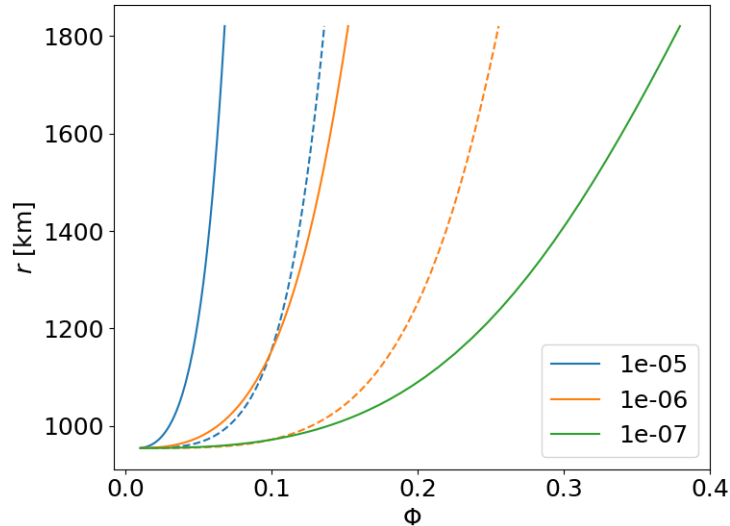
Kombináciou predchádzajúcich rovníc dostávame dve previazané rovnice prvého rádu pre rýchlosť taveniny v_l a porozitu Φ ako funkcie hĺbky:

$$\frac{d\Phi}{dr} (v_l + \gamma(n - (n + 1)\Phi)\Phi^n) = \frac{Q_m}{\rho L} - 2(1 - \Phi)\Phi \frac{v_l}{r}, \quad (1.31)$$

$$\frac{dv_l}{dr} = \frac{Q_m}{\Phi \rho L} - v_l \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dr} \right), \quad (1.32)$$

kde L latentné teplo, γ je škálovanie rýchlosti. Na výpočet sme použili Runge-Kuttovu metódu 5. rádu (SciPy documentation Runge-Kutta method). Integrovali sme smerom od spodnej hranice, kde sa nachádza tavenina (teplota dosahuje teplotu solidu), nahor, zadaním počiatočných podmienok na spodku $\Phi = 0.01$ a $v_l = 0 \text{ ms}^{-2}$.

Prenos tepla pomocou magmatických prieduchov závisí na dvoch parametroch: na škálovacej rýchlosti γ a exponente permeability n . Prenos tepla rastie s rastúcou γ a s klesajúcim n (Rovira-Navarro a kol., 2021). Obr. 1.4 ukazuje porovnanie s Moore (2001), výsledky vykazujú dobrú zhodu.



Obr. 1.4: Hĺbkové profily vypočítané Runge-Kuttovou metódou zo vzťahov 1.31 a 1.32. Počiatočná podmienka pre v_l a Φ bola 0 a 0.01, krivky odpovedajú priemernému slapovému zahrievaniu v plášti $Q_m = 10^{-5} \text{ W/m}^3$. Obrázok slúžil ako kontrola s výsledkami z článku Moore (2001). Čiarkované čiary sú pre $n = 3$ a plné čiary pre $n = 2$. Každá farba odpovedá inej hodnote γ .

1.4 Slapy

Ako bolo spomenuté v úvode, v diplomovej práci sa venujeme planétam, pre ktoré je slapové zahrievanie hlavným zdrojom tepla. Slapové zahrievanie v telese vzniká v dôsledku vnútorného trenia, kedy teleso reaguje periodickou deformáciou na slapovú silu vyjadrenú pomocou slapovotvorného potenciálu. Periodické sily sú tvorené gravitačným pôsobením materského telesa na dané teleso konečnej veľkosti. Ak nie je teleso perfektne elastické, tak deformácia spôsobená periodickými

silami môže viesť k disipácii mechanickej energie. Deformácia telesa závisí na mineralogickom zložení a štruktúre planéty, teda na hustotnom profile a reológii, ktorá bude popísaná v podkapitole 1.5.

Pri výpočtoch slapového zahrievania vychádzame zo zákonov zachovania hybnosti, momentu hybnosti, hmoty, Laplaceovej rovnice a z reológie formulované v prírastkoch ako je uvedené v Sabadini a kol. (2016). Zákon zachovania hybnosti:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad (1.33)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je tenzor napätia, ρ je hustota telesa a \mathbf{F} sú objemové slapové sily pôsobiace na teleso. Zotrvačné sily zanedbávame.

Zákon zachovania hmoty pre nestlačiteľné teleso uvažujeme v tvare:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.34)$$

kde \mathbf{u} je posunutie.

Laplaceovu rovnicu pre prírastok potenciálu slapmi ϕ_1 v prípade nestlačiteľného telesa vyjadrujeme ako (Sabadini a kol., 2016):

$$\nabla^2 \phi_1 = 0. \quad (1.35)$$

V diplomovej práci používame klasickú metódu a teória výpočtu slapového zahrievania bola prevzatá z knihy Sabadini a kol. (2016). Predpokladáme sféricky symetrické teleso a slapovú deformáciu riešime pre celé teleso vrátane jadra. Riešenie využíva rozvoj do sférických harmonických funkcií v priestorovej oblasti a Fourierovu transformáciu do frekvenčnej oblasti. Rovnice, ktoré popisujú deformáciu je potom možné napísať ako sústavu diferenciálnych rovníc v tvare:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dr} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}, \quad (1.36)$$

kde \mathbf{Y} je vektor obsahujúci 6 funkcií: $y_1(r)$ a $y_2(r)$ predstavujú radiálne posunutie a napätie, funkcie $y_3(r)$ a $y_4(r)$ tangenciálne posunutie a napätie, $y_5(r)$ predstavuje gravitačný potenciál a $y_6(r)$ potenciálové napätie. Matica \mathbf{A} spolu s hraničnými podmienkami použitými pri výpočte sú uvedené v Appendixe 1. K výpočtu rovnice (1.36) sme použili propagátorovú metódu, ktorá je stručne popísaná v Appendixe 1. Výpočet bol implementovaný v Pythone a všetko bolo otestované proti Tobie a kol. (2005) s dobrou zhodou.

Ako už bolo spomenuté, pre popis deformácie je nevyhnutné zahrnutie vhodného reologického popisu. Preto sa teraz zameriame na popis lineárnej viskoelastickej/anelastickej reológie v spektrálnej (frekvenčnej) oblasti.

Hodnota deformácie v materiáli závisí na súčasnej a predchádzajúcej hodnote napätia. Preto operátor kompliance J mapujúci napätie σ_{ij} na deformáciu ϵ_{ij} je len integračný operátor, lineárny v malých deformáciách (Efroimsky, 2012):

$$2\epsilon_{ij} = J\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t J(t-t')\dot{\sigma}_{ij}(t') dt'. \quad (1.37)$$

Fourierov rozvoj reálnych funkcií napätia σ_{ij} a deformácie ϵ_{ij} môžeme napísať ako

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^\infty \bar{\sigma}_{ij}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad \text{a} \quad \epsilon_{ij}(t) = \int_0^\infty \bar{\epsilon}_{ij}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.38)$$

Komplexnú komplianciu $\bar{J}(\omega)$ zavádzame ako Fourierov obraz časovej derivácie kompliancie J :

$$\dot{J}(t) = \int_0^\infty \bar{J}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.39)$$

a jej inverziu:

$$\bar{J}(\omega) = \int_0^\infty \dot{J}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.40)$$

Celkovo teda dostávame vzťah medzi napätím a deformáciou vo frekvenčnej oblasti ako:

$$2 \int_0^\infty \bar{\epsilon}_{ij}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^\infty \bar{\sigma}_{ij} \bar{J}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.41)$$

a z toho dostávame reologický vzťah medzi napätím a deformáciou v spektrálnej oblasti:

$$2\bar{\epsilon}_{ij}(\omega) = \bar{\sigma}(\omega)_{ij} \bar{J}(\omega). \quad (1.42)$$

Pokiaľ prepíšeme rovnicu (1.42) do tvaru

$$\bar{\sigma}_{ij}(\omega) = 2\bar{\mu}(\omega) \bar{\epsilon}_{ij}(\omega), \quad (1.43)$$

kde

$$\bar{J}^{-1}(\omega) = \bar{\mu}(\omega), \quad (1.44)$$

dostávame analógiu Hookovho zákona pre lineárnu viskoelastickú reológiu v spektre; $\bar{\mu}$ je označovaná ako komplexná rigidita.

V praxi sú typické slapovo vynútené periódy dlhé niekoľko dní a planetárne telesá sa chovajú viskoelasticky. Najdôležitejším parametrom pre viskoelastickú odozvu je Maxwellovský čas (η/μ), definovaný pomerom viskozity k modulu torzie, teda veľkosť distribúcie zahrievania závisí na variácii modulu torzie a viskozity (Moore, 2003). Keď je slapová perióda menšia ako Maxwellov čas, tak sa teleso správa elasticky a keď je naopak väčšia, tak sa teleso správa ako viskózna tekutina.

Maxwellovská reológia je veľmi často používaná pri slapovo deformovaných telesách (Rovira-Navarro a kol., 2021). Je vhodná pri geofyzikálnych javoch odohrávaných na dlhých časových škálach. V prípade slapov je dobrá na popis v nízkych frekvenciách. Na relatívne vysokých frekvenciách sa stretávame s problémom, že Maxwellovská reológia podhodnocuje útlm v médiu a teda aj slapovú disipáciu (Efroimsky a Lainey, 2007).

Na reálnejší popis reológie slapovo zahrievaných telies sa zavádzajú viac komplexné reologické modely. Najpoužívanejší, Andradeov model, zahŕňa anelastické rozšírenie k jednoduchému Maxwellovmu modelu (Rovira-Navarro a kol., 2021).

Kompliancia pre spomínanú Maxwellovskú reológiu vyzerá nasledovne:

$$\bar{J}(\omega) = \frac{1}{\mu} - \frac{i}{\omega\eta}, \quad (1.45)$$

a pre Andradeovu reológiu:

$$\bar{J}(\omega) = \frac{1}{\mu} - \frac{i}{\eta\omega} + \frac{\mu^{\alpha-1}}{(i\zeta\eta\omega)^\alpha} \Gamma(1 + \alpha), \quad (1.46)$$

kde ω uhlová rýchlosť, η viskozita, α a ζ sú empirické parametre, ktoré charakterizujú tranzientný anelastický kríp.

Amplitúda slapovej deformácie a jej odpovedajúca energia sú tiež určené slapotvorným potenciálom $V(r, \theta, \varphi)$ a vnútorným zložením planéty. Tu uvažujeme slapotvorný potenciál pre telesá s 1:1 spin-orbitálnou rezonanciou, ktorý je daný vzťahom (Tobie a kol., 2005)

$$V(r, \theta, \varphi) = r^2 \omega^2 e \left[-\frac{3}{2} P_2^0(\cos \theta) \cos \omega t + \frac{1}{4} P_2^2(\cos \theta) (3 \cos \omega t \cos 2\varphi + 4 \sin \omega t \sin 2\varphi) \right], \quad (1.47)$$

kde r je polomer planéty, ω je uhlová frekvencia, e excentricita, θ a φ sú košírka a dĺžka, t je čas. P_2^0 a P_2^2 sú pridružené Legendrove polynómy.

Celková veľkosť slapovej deformácie, pre telesá v 1:1 spin-orbitálnej rezonancii, je vypočítaná z imaginárnej časti Loveovho čísla k_2 (Tobie a kol., 2005) viz Appendix 1:

$$Q_{\text{celk}} = -\frac{21}{2} \text{Im}\{k_2\} \frac{(\omega R_s)^5}{G} e^2, \quad (1.48)$$

kde G je gravitačná konštanta a R_s je polomer telesa. Hodnota $\text{Im}\{k_2\}$ závisí na vnútornom zložení telesa a slapovej frekvencii a môže byť vypočítaná pomocou viskoelastickej teórie self-gravitačných telies (Sabadini a kol., 2016), tak ako sme tu stručne zhrnuli.

Pri výpočte radiálnej distribúcie disipácie slapovej energie sme postupovali podľa článku Tobie a kol. (2005), ktorý dáva do vzťahu radiálnu distribúciu rýchlosti disipácie spriemerovanej v čase so sensitivitou distribúcie na viskoelastické parametre. Objemovú radiálnu rýchlosť disipácie vo vnútri telesa vieme vypočítať zo vzťahu:

$$H(r) = -\frac{21}{10} \frac{\omega^5 R_s^4 e^2}{r^2} H_\mu \text{Im}\{\bar{\mu}(\omega)\}, \quad (1.49)$$

kde H_μ predstavuje radiálnu sensitivitu na komplexnej rigidite $\bar{\mu}$ a závisí na radiálnych funkciách y_i , je daný vzťahom (Tobie a kol., 2005):

$$\begin{aligned} H_\mu = & \frac{4}{3} \frac{r^2}{\left|K + \frac{4}{3}\bar{\mu}\right|^2} \left| y_2 - \frac{K - \frac{2}{3}\bar{\mu}}{r} (2y_1 - l(l+1)y_3) \right|^2 \\ & - \frac{4}{3} r \text{Re} \left\{ \frac{dy_1^*}{dr} (2y_1 - l(l+1)y_3) \right\} \\ & + \frac{1}{3} |2y_1 - l(l+1)y_3|^2 + l(l+1)r^2 \frac{|y_4|^2}{|\bar{\mu}|^2} \\ & + l(l^2 - 1)(l+2)|y_3|^2. \end{aligned} \quad (1.50)$$

V diplomovej práci uvažujeme netlačiteľné médium, urobili sme limitu ($K \rightarrow \infty$) rovnice (1.50) a dostali sme:

$$\begin{aligned}
H_\mu &= \frac{4}{3} |(2y_1 - l(l+1)y_3)|^2 \\
&\quad - \frac{4}{3} r \operatorname{Re} \left\{ \frac{dy_1^*}{dr} (2y_1 - l(l+1)y_3) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{3} |2y_1 - l(l+1)y_3|^2 + l(l+1)r^2 \frac{|y_4|^2}{|\bar{\mu}|^2} \\
&\quad + l(l^2 - 1)(l+2)|y_3|^2.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Zo vzťahu (1.49) sme počítali priemerné objemové zahrievanie v plášti.

1.5 Reológia

Vzhľadom k tomu, že náš model aplikujeme na väčšie exoplanéty aj menšie telesá podobné Io, do diplomovej práce sme zahrnuli výpočet viskozity závislej nielen na teplote, ale aj na tlaku. Reologický model planét je zložený z elastickej litosféry, plášta s Andreadovou alebo Maxwellovou reológiou a z jadra s Maxwellovou reológiou. V jadre predpisujeme nízke hodnoty viskozity aj modulu torzie tak, aby sme napodobnili chovanie roztaveného jadra a zároveň dostali stabilné numerické riešenie. Použité hodnoty boli: $\mu = 10^2$ Pa, $\eta = 10^{16}$ Pas. Viskozitu vyjadrujeme nasledujúcim vzťahom (Stamenković a kol., 2012)

$$\eta(p, T) = \eta_{ref} \exp \left\{ \frac{E^*}{R_{plyn}} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) + \frac{1}{R_{plyn}} \left(\frac{pV_{ef}^*}{T} - \frac{p_{ref}V_{ef}^*}{T_{ref}} \right) \right\}, \tag{1.52}$$

kde V_{ef}^* je aktivačný objem. Predpokladáme, že aktivačná energia a aktivačný objem sú konštantné s hĺbkou. Hodnoty použité v jednotlivých modeloch sú uvedené v tab. 2.1 a tab. 3.1.

Modul torzie a viskozita musia byť opravené o vplyv prítomnosti nataveného materiálu, ktorý má iné vlastnosti. V momente, keď lokálna teplota prekračuje krivku solidu, horniny plášta sa začnú natavovať. Natavený materiál je spočiatku izolovaný v kapsách, kým sa medzi zrnami nevytvoria prepojené kanály a ako lokálna porozita dosahuje kritickú porozitu Φ_{krit} , to považujeme za hlavnú rolu v reológii. Pri dosiahnutí criticalkej porozity má za následok pokles o niekoľko amplitúd v oboch veličinách (Moore, 2003). Aby sme zahrnuli závislosť modulu torzie a viskozity na porozite, prebrali sme zjednodušený parametrický prístup z Walterová a Běhounková (2020). Viskozitu a modul torzie vyjadrujeme nasledovne

$$\eta = \eta^{1-F} \eta_{liq}^F, \tag{1.53}$$

$$\mu = \mu_{sol}^{1-F} \mu_{liq}^F, \tag{1.54}$$

kde η_{liq} minimálna viskozita určená len porozitou, μ_{sol} a μ_{liq} sú moduly torzie pre čisto tuhý a čisto natavený materiál. F je funkcia

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\Phi - \Phi_{krit}}{\Phi_{trans}} \right) + 1 \right), \tag{1.55}$$

kde Φ_{trans} je charakteristická hrúbka prechodu medzi pevnou a tekutou fázou.

1.6 Porozita

Prítomnosť taveniny môže mať za následok zmeny v reologických parametroch planéty a tým ovplyvniť efektívnosť disipácie energie. Teploty v plášti môžu presahovať teplotu solidu $T_{sol}(r)$, čo je krivka definujúca teplotu, za ktorej dochádza k taveniu materiálu. V každom bode r počítame lokálnu porozitu charakterizujúcu prítomnosť taveniny $\Phi(r)$, ktorá je závislá na lokálnej teplote $T(r)$ a na chemickej a mineralogickej kompozícii, ktoré určujú teploty solidu a liquidu v plášti. Porozita je daná vzťahom (Tosi a kol., 2017):

$$\Phi(r) = \frac{T(r) - T_{sol}(r)}{T_{liq}(r) - T_{sol}(r)}, \quad (1.56)$$

kde $T_{liq}(r)$ je teplota liquidu, ktorá definuje teplotu, za ktorou je všetok materiál natavený. Priemernú objemovú porozitu počítame ako objemový integrál z porozity predelený objemom taveniny V_a :

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{V_a} \int_{V_a} \Phi(r) dV. \quad (1.57)$$

Solidus a liquidus hrajú dôležitú úlohu pri skorom termálnom vývoji magmatického oceánu Monteux a kol. (2016). Krivky tavenia pre materiály v plášti za daných tlakov sú získané fitovaním laboratórnych dát. Pri exoplanétach nasledujeme výpočty z Monteux a kol. (2016), ktorý použil empirické dáta z dvoch experimentálnych štúdií v dvoch rôznych tlakových rozsahoch.

V prípade exoplanét pre tlaky pod $p = 20$ GPa, sme použili experimentálne určenú teplotu solidu a liquidu F-peridotitického plášťa (Monteux a kol., 2016):

$$T_{sol} = 1661.2 \left(\frac{p}{1.336 \cdot 10^9} + 1 \right)^{1/7.437}. \quad (1.58)$$

$$T_{liq} = 1982.1 \left(\frac{p}{6.594 \cdot 10^9} + 1 \right)^{1/5.374}. \quad (1.59)$$

Pre tlaky hlbšie v plášti nad $p = 20$ GPa boli použité teploty:

$$T_{sol} = 2081.8 \left(\frac{p}{101.69 \cdot 10^9} + 1 \right)^{1/1.226}. \quad (1.60)$$

$$T_{liq} = 78.74 \left(\frac{p}{4.054 \cdot 10^6} + 1 \right)^{1/2.44}. \quad (1.61)$$

Vzhľadom k tomu, že v menších telesách sa nedosahuje tak veľkých tlakov, pre výpočet kriviek tavenia sme použili prístup z článku Katz a kol. (2003):

$$T_{sol} = 273.15 + 1085.7 + 132.9p - 5.1p^2. \quad (1.62)$$

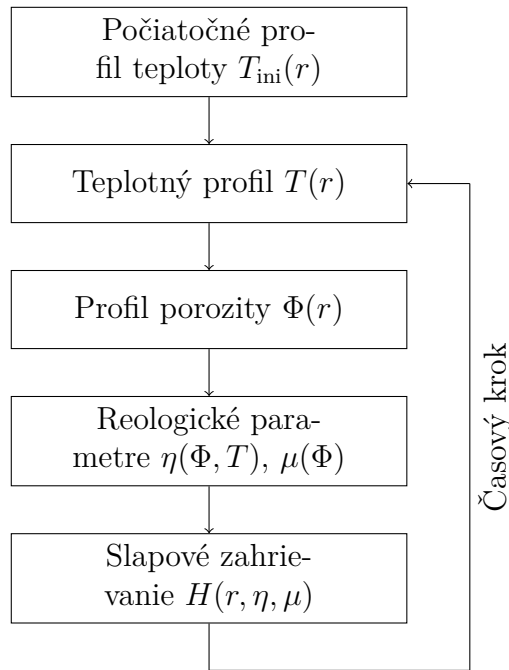
$$T_{liq} = 273.15 + 1780 + 45p - 2p^2. \quad (1.63)$$

Tabulka 1.1: Referenčné parametre pre výpočet porozity a vplyvu porozity na viskozitu a modul torzie

Parameter	ExoZem	ExoIo	Jednotka
η_{liq}	10^7	10^7	Pa s
μ_{sol}	$200 \cdot 10^9$	$60 \cdot 10^9$	Pa
μ_{liq}	10^3	10^3	Pa
Φ_{trans}	0.01	0.01	–
Φ_{krit}	0.3	0.3	–

1.7 Výpočetný algoritmus

Algoritmus na výpočet termálnej evolúcie bol implementovaný v Pythone. Výpočetná schéma je zobrazená na obr.1.5. Z počiatočných hodnôt alebo z predchádzajúceho kroku sa vypočíta teplotný profil. V prípade, že teplota je vyššia ako teplota solidu, určíme tiež porozitu zo vzťahu (1.56). Zo vzťahov (1.53) a (1.54) sa v každom kroku vypočíta viskózný profil a profil modulu torzie. Tieto profily sú použité k výpočtu slapového zahrievania podľa vzorca (1.49). Následne pokračujeme ďalším časovým krokom a postup sa opakuje. Výpočet robíme po dobu 10 Gyr.



Obr. 1.5: Iteračná schéma evolučného modelu. Vstupom do modelu je počiatočný profil teploty. Skúmaná doma evolúcie je 10 Gyr.

Pre výpočet časového vývoja máme jednoduchú schému, kde v časovom kroku $(i+1)$ updatujeme teplotu a hrúbku litosféry pomocou jednoduchej jednokrokovej schémy. Evolučné rovnice vyzerajú nasledovne

$$T_c^{i+1} = \frac{-q_c^i A_c}{\epsilon_c \rho_c c_c V_c} \Delta t + T_c^i, \quad (1.64)$$

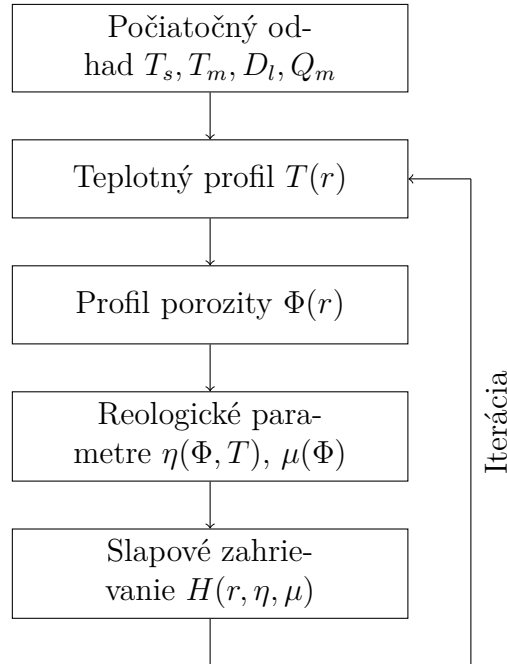
$$T_m^{i+1} = \frac{-q_l^i A_l^i + q_c^i A_c + Q_m^{i+\frac{1}{2}} V_l^i}{\epsilon_m \rho_m c_m V_l^i (1 + St)} \Delta t + T_m^i, \quad (1.65)$$

$$D_l^{i+1} = \frac{-q_l^i - k_m \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_l}}{\rho_m c_m (T_m^i - T_l^i)} \Delta t + D_l^i, \quad (1.66)$$

kde nultý krok je počiatkový teplotný profil a počiatková hrúbka litosféry. Priemerné slapové zahrievanie $Q_m^{i+\frac{1}{2}}$ je geometrický priemer medzi Q_m^i a Q_m^{i+1} , Q_m^{i+1} bolo určené iteratívnym algoritmom analogickým ako pre rovnovážny stav. Časový krok Δt sme volili tak, aby sa ΔT_c , ΔT_m a ΔD_l menili maximálne o 0.1%.

Pri počítaní rovnovážneho stavu pre čisto vnútorne zahrievané planéty (podkapitola 1.2) používame iný algoritmus. Program bol taktiež implementovaný v Pythone a využívame jednoduchú iteračnú schému viz obr.1.6. Vychádzame z počiatkového odhadu teplotného profilu a zahrievania v plášti a hľadáme rovnovážny stav. Iterujeme cez slapové zahrievanie a teplotu, pokiaľ je zmena v relatívnej lokálnej teplote väčšia ako 10^{-6} alebo v zahrievaní väčšia ako 10^{-2} , a do dosiahnutia maximálneho počtu iterácií $N_{\max} = 500$.

V každom iteračnom kroku počítame nielen rovnice (1.17)-(1.25), ale aj modul torzie a viskozitu potrebné na výpočet priemerného objemového zahrievania. Vplyvom vysokej závislosti výsledného stavu na zahrievaní bolo nutné behom iterácií zahrievanie relaxovať, aby sme potlačili numerické oscilácie.



Obr. 1.6: Iteračná schéma pre výpočet rovnovážneho stavu. Iterujeme cez slapové zahrievanie a teplotu. Počet iterácií sme nastavili na hodnotu 500.

Pri hľadaní riešenia rovnovážneho stavu s advekciou taveniny (podkapitola 1.3) uvažujeme predpísanú teplotu, ktorá sa počas výpočtu nemení. Rovnice (1.31)-(1.32) integrujeme od bodu, kedy teplotný profil pretína krivku solidu,

až k litosfére. Riešenie hľadáme rovnako ako v predchádzajúcom prípade a to iteratívne, kde ako počiatočný odhad volíme nulovú porozitu.

2. ExoZem

Zem patrí medzi najpreskúmanejšie planéty vo vesmíre. Výskum a hľadanie exozemí je motivovaný nájdením Zemi podobného telesa, ktoré by mohlo hostiť život. Preto potrebujeme dobre rozumieť tomu, aký majú na vývoj takýchto telies vplyv exotické podmienky, akými môžu byť napríklad menej hmotné hostiteľské hviezdy. Vo vesmíre sú potvrdené Zemi podobné planéty, medzi ktoré patria napríklad planéty TRAPPIST-1e, f a g, ktoré sa nachádzajú v obývateľnej zóne, obiehajú blízko materskej hviezdy o hmotnosti $0.089 M_{\odot}$ a pravdepodobne sú slapovo zahrievané O'Malley-James a Kaltenegger (2017); Barr a kol. (2018). V tejto kapitole sa zameriame na vývoj krátkoperiodickej exozeme (planéty obiehajúcej v blízkosti hviezdy s malou hmotnosťou), ktorá je silne slapovo zaťažovaná v modeli spojeného termálneho a slapového vývoja. Budeme predpokladať, že tavenina je zachytená v plášti a môže vytvoriť magmatický oceán. Budeme skúmať vplyv tohto oceánu na slapovú deformáciu. V našom modeli uvažujeme Andreadovskú reológiu v plášti a perfektne elastický stagnant-lid. Zem sme si zvolili ako referenčné teleso a v tejto kapitole budeme diskutovať výsledky numerických simulácií.

V tab. 2.1 sú uvedené parametre inšpirované Breuer a Spohn (2006); Tosi a kol. (2017), ktoré boli použité pri výpočtoch pre referenčný model. V podkapitole 2.1 sú obrázky evolúcie hĺbkových profilov študovaných parametrov pre referenčný model a vývoj daných parametrov v čase. Následne sme skúmali aj vplyv zmeny vybraných parametrov na priemerné objemové zahrievanie v plášti počítané zo vzťahu (1.49) a teplotu v plášti, kde ich porovnáваме s referenčnými hodnotami.

2.1 Referenčný model ExoZeme

Najprv sa zameriame na hlavné znaky vývoja slapovo zahrievaných planét. Budeme sa zaoberať evolúciou do doby 10 Gyr, teda dobu dlhšiu než je vývoj našej sústavy (NASA Our Solar System). Parametre sme zvolili tak, aby slapové zahrievanie bolo dôležitým zdrojom tepla na planéte.

Na obr. 2.1 začíname zobrazením vývoju teploty a porozity, ďalej reologických parametrov modulu torzie a viskozitou a ako posledný obrázok ukazujeme vývoj priemerného objemového zahrievania v plášti. Na ose y je polomer planéty, na ose x je skúmaná veličina a farebná škála odpovedá času a je v logaritmickom škále. Z obrázku teploty môžeme vidieť, že len veľmi malá časť plášťa je natavená, čomu odpovedá obrázok porozity, kde vidíme v danej oblasti porozitu až do hodnoty $\Phi = 1$, ktorá vzniká vďaka tomu, že uvažujeme zadržanie taveniny v plášti. K nataveniu materiálu tam dochádza vďaka rôznym sklonom krivky solidu a adiabatickému a konduktívnemu profilu teploty v plášti. Medzi solidom a liquidom uvažujeme lineárny nárast porozity. Z obr. 2.2a) vidíme, že teplota do času $2 \cdot 10^{-3}$ Gyr veľmi mierne rastie, následne začne väčší nárast. Teplota počas vývoja vzrástla z počiatočných 1800 K na ~ 2140 K. Nárast teploty zapríčiňuje klesanie viskozity, ktoré môžeme vidieť na obr. 2.1d). Keď teplota v plášti pretne krivku solidu začne sa tvoriť vrstvička taveniny. Keď porozita dosiahne kritickú porozitu Φ_{krit} , viskozita a modul torzie sa takmer skokovo znížia až na hodnotu liquidu, čo má za následok skokové zníženie v disipácii energie v plášti

Tabuľka 2.1: Referenčné parametre pre exozem (Breuer a Spohn, 2006; Tosi a kol., 2017).

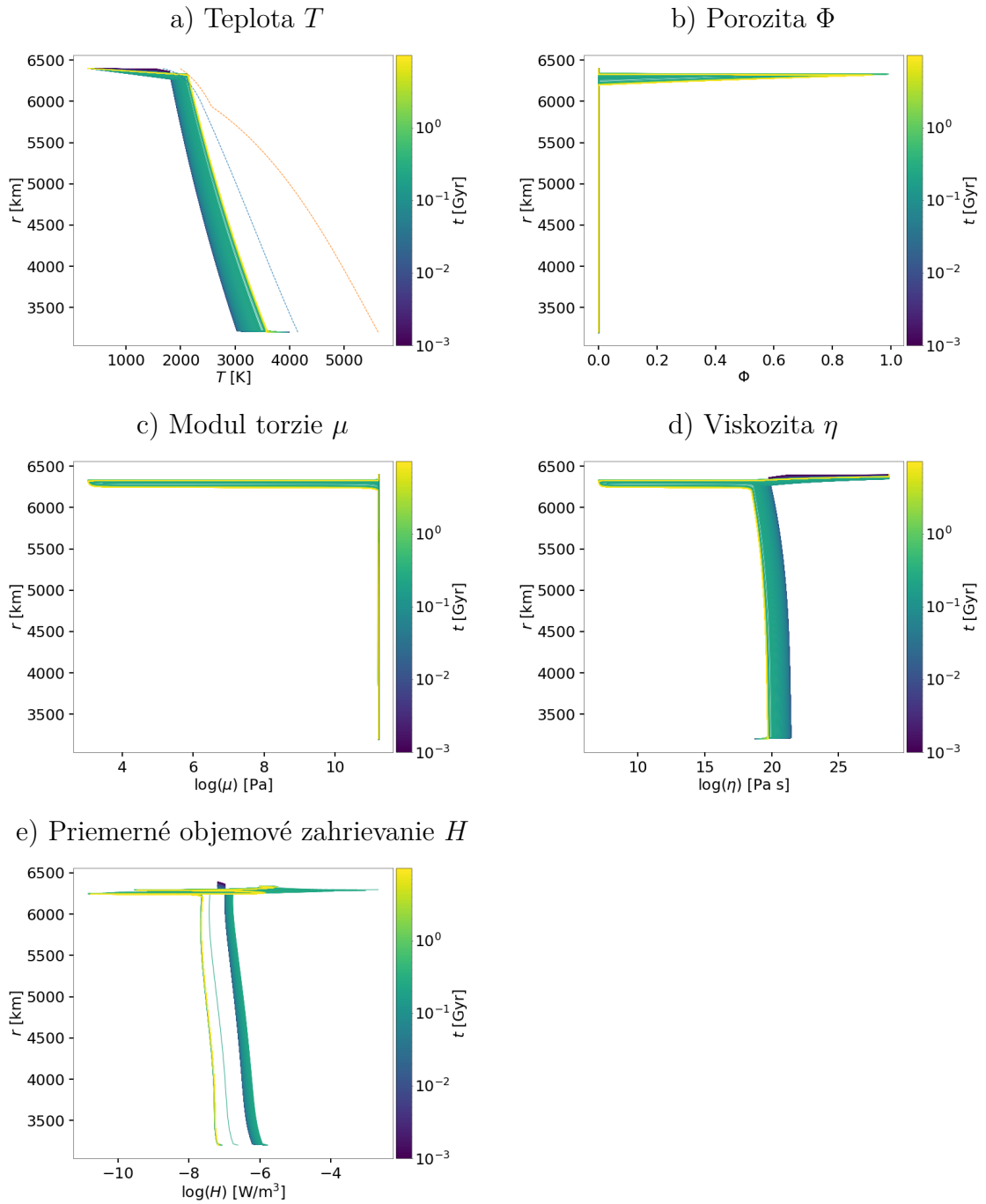
Parameter	Popis	Hodnota	Jednotka
e	Excentricita	0.03	–
P	Periódá	10	deň
η_{ref}	Viskozita pláštá	10^{21}	Pa s
α	Empirický parameter	0.2	–
ζ	Empirický parameter	1	–
E^*	Aktivačná energia	$3.35 \cdot 10^5$	J mol ⁻¹
p_{ref}	Referenčný tlak	0	Pa
T_{ref}	Referenčná teplota	1600	K
R_s	Polomer telesa	6400	km
R_c	Polomer jadra	3200	km
ρ_m	Hustota pláštá	4500	kg m ⁻³
ρ_c	Hustota jadra	12000	kg m ⁻³
c_m	Tepelná kapacita pláštá	1200	J kg ⁻¹ K ⁻¹
c_c	Tepelná kapacita jadra	800	J kg ⁻¹ K ⁻¹
k	Tepelná koduktivita pláštá	5	W m ⁻¹ K ⁻¹
κ	Tepelná difuzivita pláštá	10^{-6}	m ² s ⁻¹
g	Gravitačné zrýchlenie	10	ms ⁻²
T_s	Teplota na povrchu	300	K
T_m	Počiatočná teplota pláštá	1800	K
T_c	Teplota jadra	4000	K
D_l	Počiatočná hrúbka litosféry	10	km

(Moore, 2003; Rovira-Navarro a kol., 2021), pretože natavená vrstva materiálu mechanicky rozdelí plášť na dve vrstvy. Priemerné objemové zahrievanie kleslo z hodnoty 187 TW na hodnotu 58 TW.

Teplota v jadre sa podobne ako teplota v plášti v prvej polovici vývoja veľmi nemení, a od istého času sa jadro ochladzuje. Z pozorovania teploty v jadre môžeme povedať, že dochádza k sekulárnemu ochladzovaniu. Hrúbka stagnant-lidu rastie, následne v približne rovnakom čase v akom dochádza k nataveniu vrstvy materiálu začne klesať. Celkovo sa hrúbka stagnant-lidu zmenila z 10 km na 68 km. Z obrázkov je viditeľné, že ešte nie sme v rovnovážnom stave, pretože stále dochádza k vývoju teploty v plášti.

2.2 Vplyv reologických parametrov

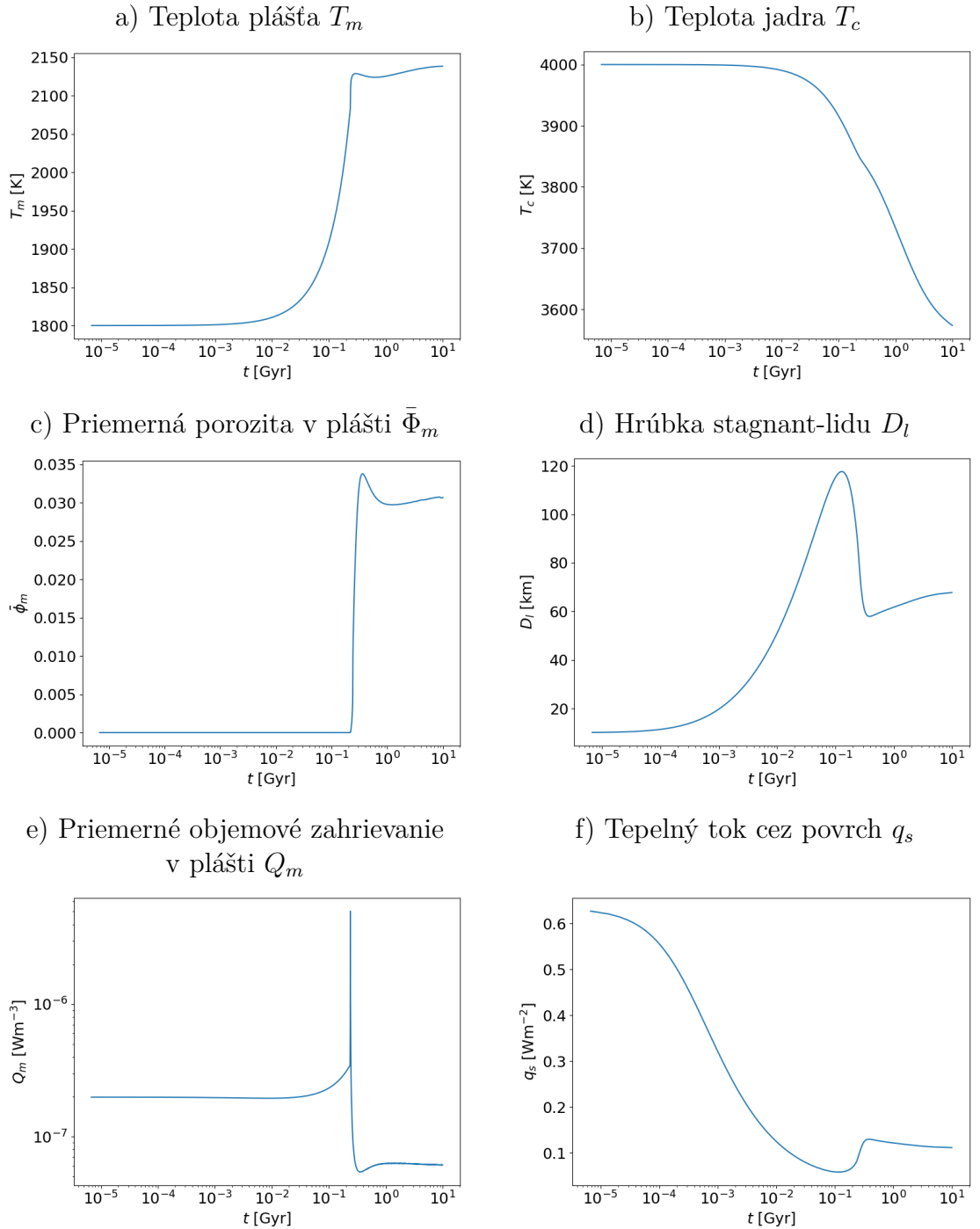
Štúdium vplyvu viskozity je v súlade s očakávaným výsledkom a je zobrazené na obr. 2.3. S rastúcou viskozitou sa v plášti menej disipuje energia. Celkové zahrievanie v plášti pre referenčnú hodnotu $\alpha = 0.2$ vidíme na obr. 2.5, kde pozorujeme, že pre skúmané viskozity $10^{19} - 10^{22}$ Pa s zahrievanie klesá s rastúcou viskozitou. Teplota v plášti pre modely s vyššou viskozitou bude aj skrz nižšie zahrievanie vyššia než pre modely s nižšou viskozitou, pretože v telesách s vyššou viskozitou sa menej efektívne odvádza teplo z vnútra planéty, čo má za dôsledok to, že si planéta udrží vyššiu teplotu pláštá aj pri menšom zahrievaní. Pre vyššie



Obr. 2.1: Referenčný model pre Zemi podobné teleso, $\eta = 10^{21}$ Pa s. Na grafoch sú zobrazené hĺbkové profily piatich najdôležitejších parametrov: a) teploty T , b) porozity Φ , c) modulu torzie μ , d) viskozity η a e) objemového slapového zahrievania v plášti. Vývoj profilov v čase je zachytený pomocou farebnej škály. Čiarkované čiary na obr. a) odpovedajú krivkám solidu a liquidu. Pri zobrazovaní hĺbkových profilov sme sa obmedzili na oblasť od povrchu k jadr.

viskozity pozorujeme v čase neskorší nárast zahrievania a dochádza k celkovo pomalšiemu vývoju vplyvom vyššej viskozity, teda menej viskózne telesá sa dostanú do rovnovážneho stavu v čase skôr.

Rozsah študovaných hodnôt parametru α sme volili od 0.1 - 0.4 podľa Walte-



Obr. 2.2: Časová závislosť vybraných parametrov pre referenčný model Zemi podobného telesa. a) Teplota v plášti T_m , b) teplota jadra T_c , c) priemerná porozita v plášti $\bar{\Phi}_m$, d) hrúbka stagnant-lidu D_l , e) objemové zahrievanie v plášti Q_m a f) tepelný tok povrchom q_s .

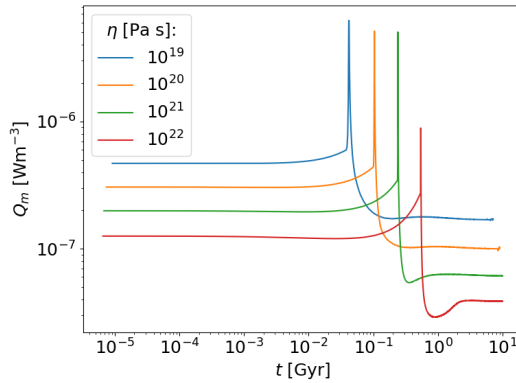
rová a kol. (2023). Vzhľadom na nedostatok vedomostí, skúmame parameter ζ v rozsahu $10^{-5} - 10^5$ (Walterová a kol., 2023).

Štúdium parametru α ukázalo, že so zväčšujúcim sa α sa zahrievanie znižuje pre danú viskozitu plášťa viz obr. 2.5. Ako referenčnú hodnotu sme si zvolili $\alpha = 0.2$. Pre zväčšujúce sa α dochádza neskôr k mechanickému oddeleniu vďaka

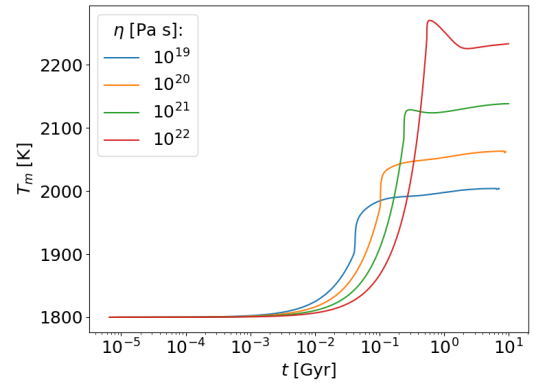
nižšiemu zahrievaniu v plášti. K nárastu teploty tiež dochádza neskôr, ale po poklese zahrievania sa dostávame do podobného stavu pre všetky skúmané α .

Ako referenčnú hodnotu ζ sme zvolili $\zeta = 1$, ktorá je rádovo očakávaná hodnota za difúzneho krípu. Avšak podľa Renaud a Henning (2018) vo veľa prípadoch slapovo zahrievaných planét môže dochádzať k inému krípu, čím by nebolo možné použiť hodnotu $\zeta = 1$. Závislosť zahrievania a teploty na výbere parametru ζ je zložitejšia, čo naznačujeme grafom na obr. 2.5b), ktorý zobrazuje celkové slapové zahrievanie dvojvrstvého telesa. Pre veľké ζ po 10 Gyr nedôjde k nataveniu vrstvičky, iba sa pozvoľna zvyšuje teplota viz obr. 2.4c) a d). Pre referenčnú hodnotu si môžeme povšimnúť, že maximum pri vzniku magmatického oceánu je dočasne vyššie aj keď zahrievanie pre $\zeta = 10^{-5}$ je takmer rádovo vyššie ako na počiatku tak aj na konci simulácie.

a) Priemerné objemové zahrievanie v plášti Q_m



b) Teplota plášťa T_m



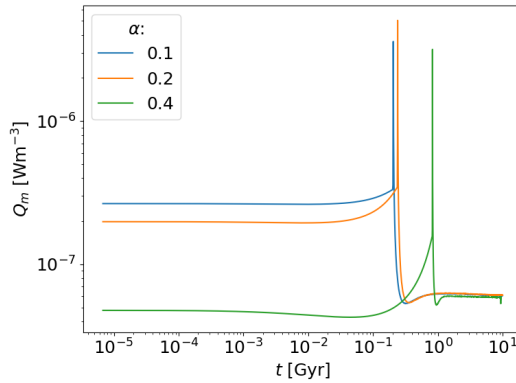
Obr. 2.3: Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách viskozity v plášti. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.

2.3 Vplyv orbitálnych parametrov

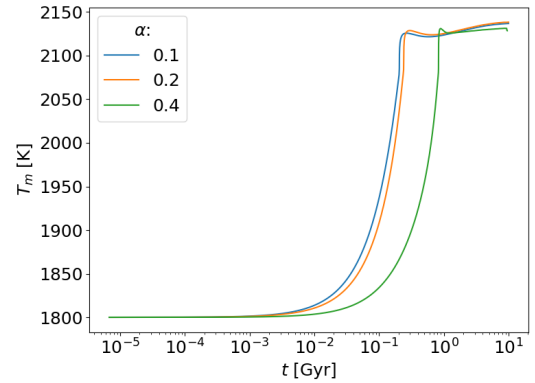
Závislosť zahrievania a teploty od voľby orbitálnych parametrov je zobrazená na obr. 2.6. Vplyv excentricity bol študovaný pre spin-orbitálnu rezonanciu 1:1 v rozsahu 0.01 - 0.03. Je dôležité podotknúť, že výsledky by vyzerali veľmi odlišne v prípade, ak by sme uvažovali inú spin-orbitálnu rezonanciu (Walterová a Běhouňková, 2020). Pre iné rezonancie sa stáva vplyv excentricity menej dôležitým. Pre 1:1 spin-orbitálnu rezonanciu zahrievanie rastie s excentricitou ako $\sim e^2$ viz (1.49). Vplyv excentricity je očakávaný, so zvyšujúcou sa excentricitou je teleso počas obehu viac deformované, disipuje sa v ňom viac energie a dosahuje vyššieho maxima. Teplota v plášti bude vyššia pre telesá s väčšou excentricitou, pretože sú viac zahrievané.

Zahrievanie klesá s periódou ako $\sim 1/T^5$ viz (1.49) pre slapovo uzamknuté teleso v 1:1 spin orbitálnej rezonancii. Je to veľmi silná závislosť, ale môže sa stať komplikovanou, keďže sa mení pomer $\text{Re}\{\bar{\mu}\}$ a $\text{Im}\{\bar{\mu}\}$. Pre periódu obehu platí, že čím menšia perióda, tým na teleso pôsobí väčšia sila, teleso je viac deformované

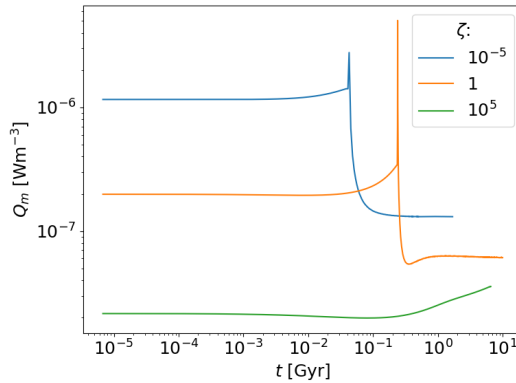
a) Priemerné objemové zahrievanie v plášti Q_m



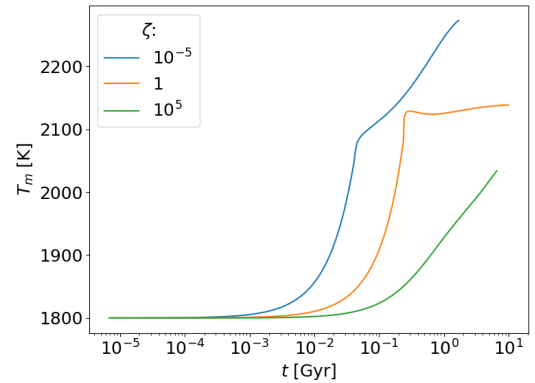
b) Teplota plášťa T_m



c) Priemerné objemové zahrievanie v plášti Q_m



d) Teplota plášťa T_m



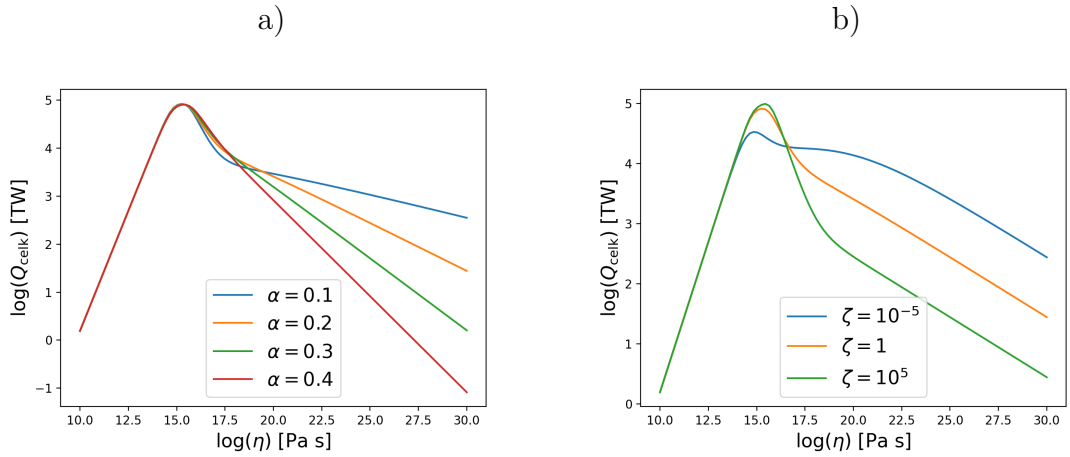
Obr. 2.4: Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách parametrov α a ζ . Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké pre referenčný model.

a zahrievanie bude vyššie a rovnako aj teplota v plášti. Pre model s najväčšou študovanou periódou pokles zahrievania vplyvom natavenej vrstvičky nie je dostatočný k dosiahnutiu rovnováhy, a preto pozorujeme stály nárast teploty v plášti a rovnako nárast hrúbky magmatického oceánu.

2.4 Vplyv teploty

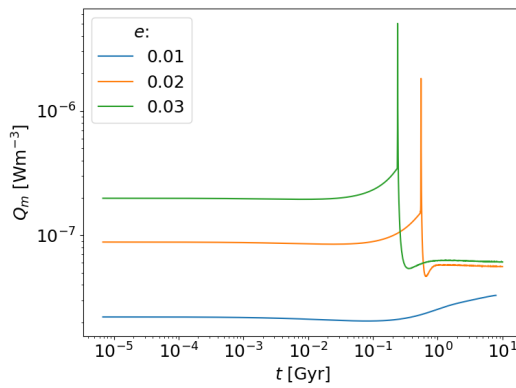
Štúdium zmeny teploty povrchu a teploty v jadre ukázalo, že tieto parametre málo vplyvajú na konečný stav planéty v našom modeli. Zmena teploty v jadre má na teplotu v plášti a na zahrievanie referenčného modelu minimálny vplyv, čo môžeme vidieť na grafoch na obr. 2.7, v ktorých sa po 10 Gyr modely, kde sme uvažovali hodnoty teploty jadra 3800 K, 4000 K (referenčný model) a 4200 K, dostali do porovnateľného stavu. Vplyv povrchovej teploty sa ukázal byť trochu viac signifikantný, ale stále menej dôležitý ako ostatné parametre.

V prípade exoplanéty bez atmosféry v 1:1 spin-orbitálnej rezonancii je teplota na povrchu iná na strane privrátenej k hviezde a na strane odvrátenej. Teplotu na privrátenej strane môžeme určiť za predpokladu, že planéta je čierne teleso s

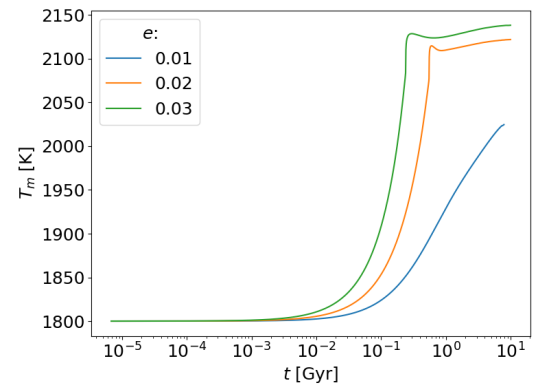


Obr. 2.5: Ilustrácia závislosti celkového objemového zahrievania na viskozite pláštá pre rôzne hodnoty empirických parametrov α a ζ . Uvažovaný je dvojrvtstvý model s homogénnym pláštóm a tekutým jadrom.

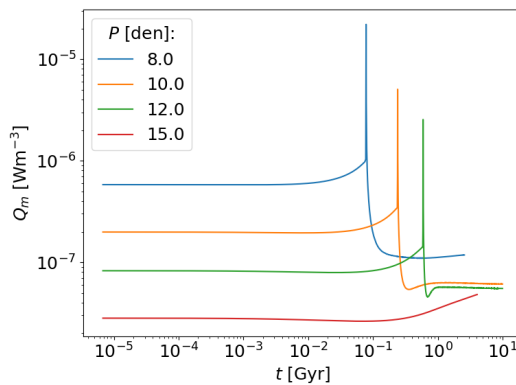
a) Priemerné objemové zahrievanie v pláštá Q_m



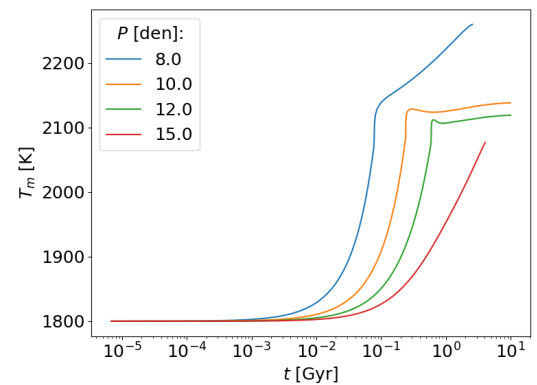
b) Teplota pláštá T_m



c) Priemerné objemové zahrievanie v pláštá Q_m



d) Teplota pláštá T_m



Obr. 2.6: Časový vývoj objemového zahrievania v pláštá a teploty v pláštá v závislosti na rôznych hodnotách excentricity a periódy. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.

teplotou na povrchu T_s ako (de Pater a Lissauer, 2015):

$$T_s = \left(\frac{(1-A)L}{4\pi a^2 \sigma} + \frac{q_s}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.1)$$

kde σ je Stefan-Boltzmannova konštanta, a je vzdialenosť medzi telesom a zdrojom slnečného žiarenia, A je albedo, L je luminozita a q_s je tepelný tok cez povrch telesa (de Pater a Lissauer, 2015).

Vzdialenosť medzi telesom a hviezdou a sme určili z tretieho Keplerovho zákona ako:

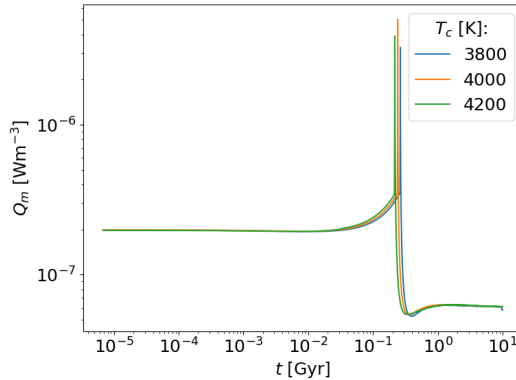
$$\frac{a^3}{P^2} \approx \frac{GM}{4\pi^2}, \quad (2.2)$$

kde M je hmotnosť hviezd, za ktorú sme dosadili hmotnosť hviezd TRAPPIST-1a. Teplota na odvrátenej strane sme určili za predpokladu minimálnej teploty T_{min}

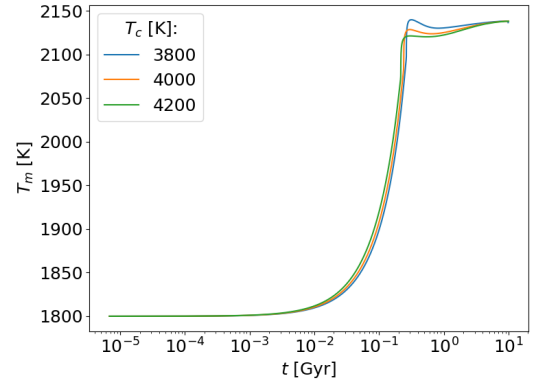
$$T_s = \left(T_{min}^4 + \frac{q_s}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.3)$$

Na obr. 2.8 je závislosť hrúbky stagnant-lidu na povrchovej teplote. Vidíme, že na odvrátenej strane od hviezd je hrúbka stagnant-lidu väčšia ako na prirátenej strane a teplota pláštá je tam vyššia kvôli menej efektívnemu prenosu tepla vplyvom tuhšieho stagnant-lidu.

a) Priemerné objemové zahrievanie v plášti Q_m

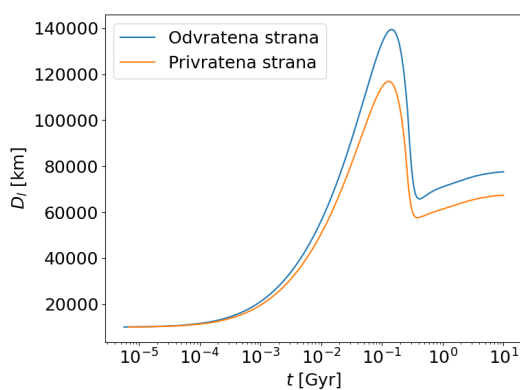


b) Teplota pláštá T_m

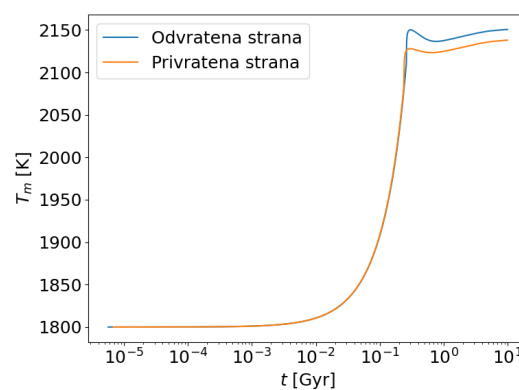


Obr. 2.7: Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách teploty v jadre. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.

a) Hrúbka stagnant-lidu D_l
v plášti Q_m



b) Teplota pláštá T_m



Obr. 2.8: Časový vývoj stagnant-lidu a teploty v plášti pre privrátenú a odvrátenú stranu planéty. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.

3. ExoIo

Na štúdium termálneho vývoja sme si vybrali aj jedno menšie teleso, kde sme predpokladali rýchlejší vývoj a kde bude menej dôležitý tok z jadra. V prípade menších telies má tok z jadra menší vplyv a adiabatický nárast teploty bude menej dôležitý. Príkladom takéhoto menšieho telesa môže byť mesiac Io. Io je najvulkanickejšie teleso v slnečnej sústave a je silne slapovo zahrievané (Moore, 2001, 2003; Steinke a kol., 2020; Rovira-Navarro a kol., 2021; Kervazo a kol., 2021). Io nám slúži ako archetyp kamenných planét a exomesiacov, ktoré sú slapovo zahrievané (Steinke a kol., 2020). Skúmaním telesa Io alebo telesu Io podobnému, môžeme nahliadnuť do rannej histórie planét. Budeme diskutovať výsledky termálneho vývoja, ale aj rovnovážny stav získaný zo škálovacích vzťahov pre model telesa zahrievaného čisto vnútorne. V rámci rovnovážneho stavu rozoberáme prípad, kedy je tavenina zadržovaná v plášti, ale aj keď sa dostáva na povrch pomocou magmatických prieduchov. Podobne ako pre exozem boli výpočty počítané za predpokladu Andreadovskej reológie v plášti a stagnant-lidu perfektne elastického. Pri voľbe referenčných parametrov sme sa inšpirovali spomínaným mesiacom Io. Pre menšie teleso sme zvolili menšiu viskozitu ako v prípade exozeme, a aj hustoty jadra a plášta sú menšie Kervazo a kol. (2021). Referenčné parametre sú uvedené v tab. 3.1.

Tabuľka 3.1: Referenčné parametre pre exoio (Breuer a Spohn, 2006; Tosi a kol., 2017).

Parameter	Popis	Hodnota	Jednotka
e	Excentricita	0.0041	–
P	Periódá	1.769	deň
η_{ref}	Viskozita plášta	10^{19}	Pa s
α	Empirický parameter	0.4	–
ζ	Empirický parameter	1	–
E^*	Aktivačná energia	$3.35 \cdot 10^5$	J mol ⁻¹
p_{ref}	Referenčný tlak	0	Pa
T_{ref}	Referenčná teplota	1600	K
R_s	Polomer telesa	1820	km
R_c	Polomer jadra	955	km
ρ_m	Hustota plášta	3200	kg m ⁻³
ρ_c	Hustota jadra	5150	kg m ⁻³
c_m	Tepelná kapacita plášta	1200	J kg ⁻¹ K ⁻¹
c_c	Tepelná kapacita jadra	800	J kg ⁻¹ K ⁻¹
k	Tepelná kooduktivita plášta	5	W m ⁻¹ K ⁻¹
κ	Tepelná difuzivita plášta	10^{-6}	m ² s ⁻¹
g	Gravitačné zrýchlenie	1.8	ms ⁻²
T_s	Teplota na povrchu	110	K
T_m	Počiatočná teplota plášta	1600	K
T_c	Teplota jadra	1800	K
D_l	Počiatočná hrúbka litosféry	10	km

3.1 Referenčný model ExoIo

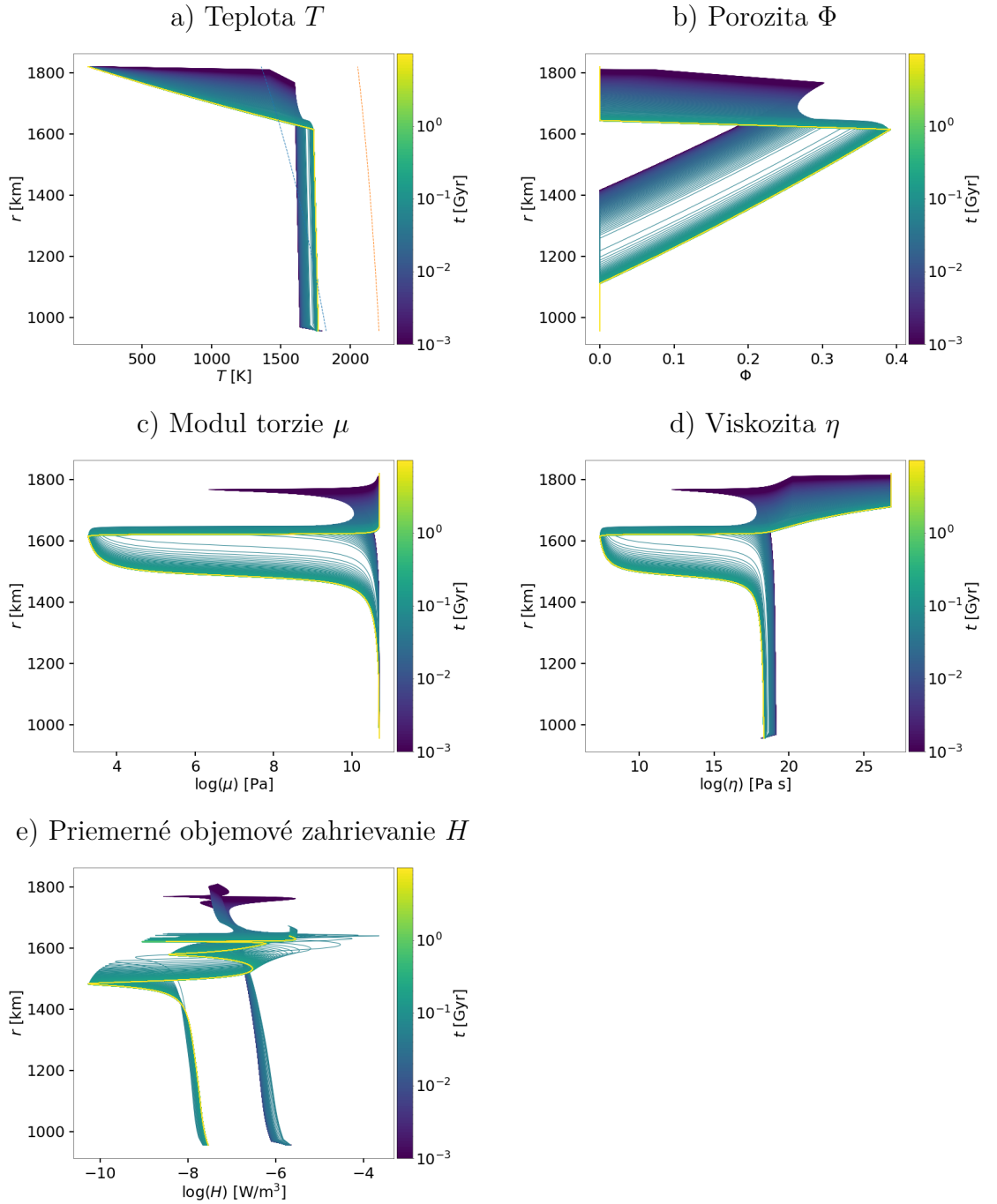
Rovnako ako v prípade exozeme sme najskôr študovali evolúciu planéty a zamerali sme sa na hlavné znaky slapovo zahrievanej planéty. Na obr. 3.1 je zobrazená evolúcia planéty do času 10 Gyr. Grafy sú štylizované rovnako ako v predchádzajúcej kapitole, teda na ose y je polomer planéty, osa x zobrazuje skúmaný parameter a farebná škála odpovedá času. Skúmame najdôležitejšie parametre, ktorými sú teplota, porozita, modul torzie, viskozita a priemerné objemové zahrievanie v plášti. V porovnaní s modelom exozeme, kde bola natavená len tenká vrstvička pod litosférou, vidíme, že v prípade exoio je značná časť plášťa natavená, čo súvisí s iným sklonom teplotného profilu a solidu pre nižšie tlaky. Rovnako pozorujeme, že po 10 Gyr vznikla v porovnaní s exozemou hrubá litosféra, čo môžeme vidieť aj na obr. 3.2d). Teplo z plášťa teda ťažšie uniká von a plášť ostáva teplý. Z grafu porozity môžeme vidieť, že medzi solidom a liquidom máme uvažovaný lineárny nárast porozity. Na grafoch modulu torzie a viskozity vidíme znížené hodnoty parametrov v oblasti taveniny. Na obr. 3.1e) je priemerné objemové zahrievanie, pri ktorom je nutné podotknúť, že zahrievanie pozorujeme až v oblasti pod stagnant-lidom, keďže litosféru uvažujeme perfektne elastickeú. Rovnako ako v prípade exozeme pozorujeme mechanické oddelenie plášťa pri prekročení kritickej porozity a náhle zníženie slapového zahrievania. Tento jav môžeme vidieť aj na obr. 3.2e).

Na grafoch na obr. 3.2 je zobrazený časový priebeh vybraných parametrov. Po 10 Gyr sa nachádza planéta v rovnovážnom stave, keďže sa teplota už nevyvíja, drží si konštantnú hodnotu okolo ~ 1740 K. Teplota v jadre je tiež v rovnováhe. Rovnako ako v prípade exozeme pozorujeme v prvej fáze vývoja zdanlivo nevyvíjajúcu sa teplotu ako v plášti tak aj v jadre. Hrúbka stagnant-lidu vzrástla z počiatočnej hodnoty 10 km na 175 km. Tepelný tok cez povrch sa za 10 Gyr znížil z hodnoty 0.65 W/m^2 na 0.039 W/m^2 vplyvom sekulárneho vývoja a ochladzovania. V čase okolo 0.1 Gyr pozorujeme maximum v priemernom objemovom zahrievaní 38 TW, pričom zahrievanie pokleslo z hodnoty 4 TW na 2 TW. V rovnakom čase pozorujeme nárast priemernej porozity v plášti.

3.2 Vplyv reologických parametrov

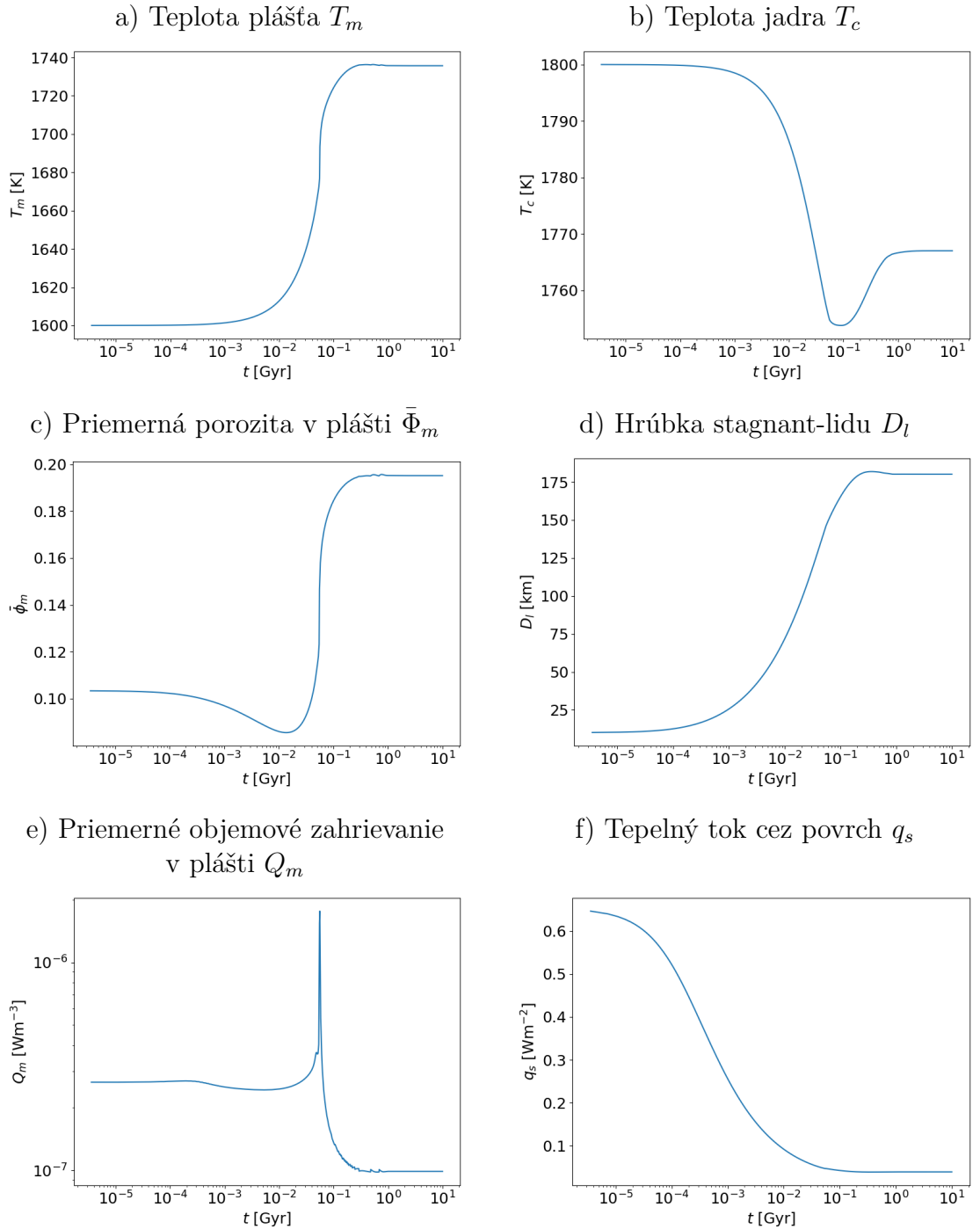
Štúdium viskozity ukazuje podobné výsledky ako v prípade exozeme. So znižujúcou sa viskozitou pozorujeme vyššie zahrievanie, pretože sa v telese disipuje viac energie. Na obr. 3.4 je zobrazená závislosť celkového objemového zahrievania na viskozite pri voľbe rôznych hodnôt parametrov α a ζ . Keď sa pozrieme na krivku s $\alpha = 0.4$ vidíme, že pre skúmané viskozity $10^{18} - 10^{20} \text{ Pa s}$ (obr. 3.3), celkové zahrievanie klesá so zvyšujúcou sa viskozitou s najrýchlejším poklesom. Telesá s nižšou viskozitou majú menšiu teplotu v plášti, pretože sa teplo ľahšie odvádza z telesa a do rovnovážneho stavu sa tieto telesá dostanú skôr.

Na obr. 3.4 sme skúmali vplyv empirických parametrov α a ζ . Rozsahy študovaných parametrov sú rovnaké ako v predchádzajúcej kapitole. Na grafoch na obr. 3.4a) a b) pozorujeme rovnakú závislosť zahrievania a teploty od voľby parametru α ako pri exozemi. Pre vyššie hodnoty α je zahrievanie v plášti menšie. Pre najmenšiu študovanú hodnotu α dochádza k nataveniu vrstvičky a poklesu zahrievania v čase rýchlejšie ako pre ostatné uvažované α .



Obr. 3.1: Referenčný model pre teleso podobné mesiacu Io, $\eta = 10^{19}$ Pa s. Na grafoch sú zobrazené hĺbkové profily piatich najdôležitejších parametrov: a) teploty T , b) porozity Φ , c) modulu torzie μ , d) viskozity η a e) objemového slapového zahrievania v plášti. Vývoj profilov v čase je zachytený pomocou farebnej škály. Čiarkované čiary na obr.a) odpovedajú krivkám solidu (modrá) a liquidu (oranžová). Pri zobrazovaní hĺbkových profilov sme sa obmedzili na oblasť od povrchu k jadrú.

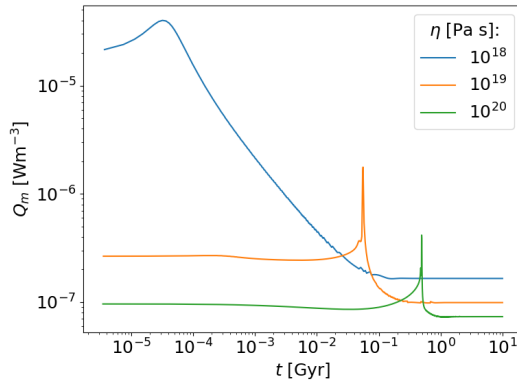
Ako bolo komentované pre štúdiu parametru ζ už v predošlej kapitole, závislosť výsledkov na tomto parametri je zložitá. So zvyšujúcou sa hodnotou empirického parametru ζ sa znižuje slapové zahrievanie v plášti. Zaujímavý jav



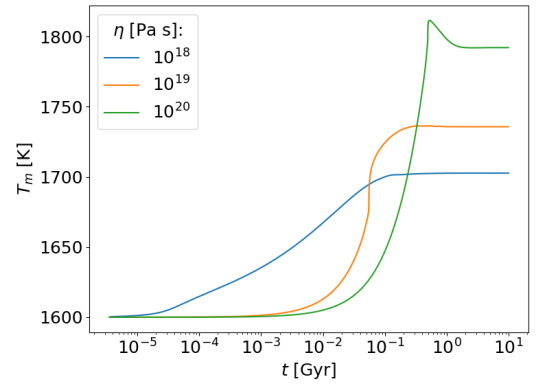
Obr. 3.2: Časová závislosť vybraných parametrov pre referenčný model pre teleso podobné mesiacu Io. a) Teplota v plášti T_m , b) teplota jadra T_c , c) priemerná porozita v plášti $\bar{\Phi}_m$, d) hrúbka stagnant-lidu D_l , e) objemové zahrievanie v plášti Q_m a f) tepelný tok povrchom q_s .

pozorujeme pre hodnotu $\zeta = 10^5$, kde sa teleso začalo veľmi ochladzovať až kým nedosiahne podkritickú hodnotu Rayleighovho čísla, konvekcia zastane a profil bude ďalej konduktívny. Pre ostatné študované hodnoty sa teleso dostalo do rovnovážneho stavu.

a) Priemerné objemové zahrievanie v plášti Q_m

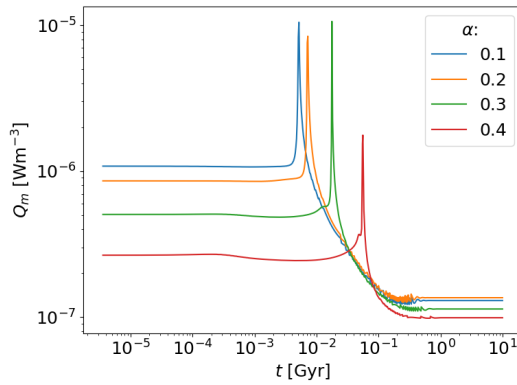


b) Teplota plášťa T_m

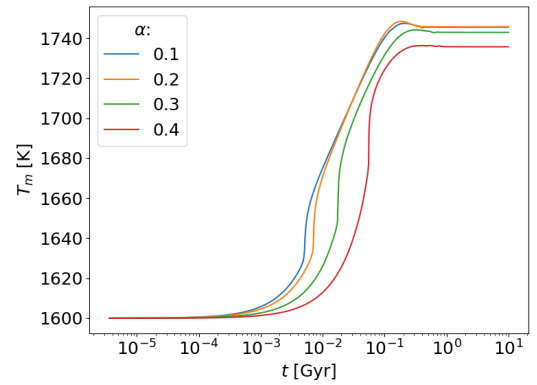


Obr. 3.3: Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách viskozity v plášti. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.

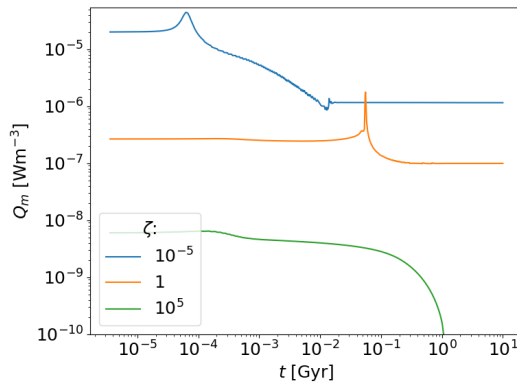
a) Priemerné objemové zahrievanie v plášti Q_m



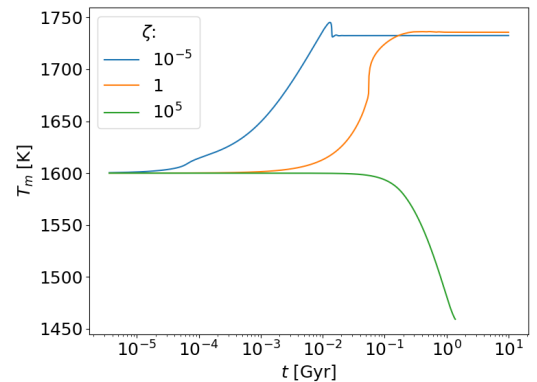
b) Teplota plášťa T_m



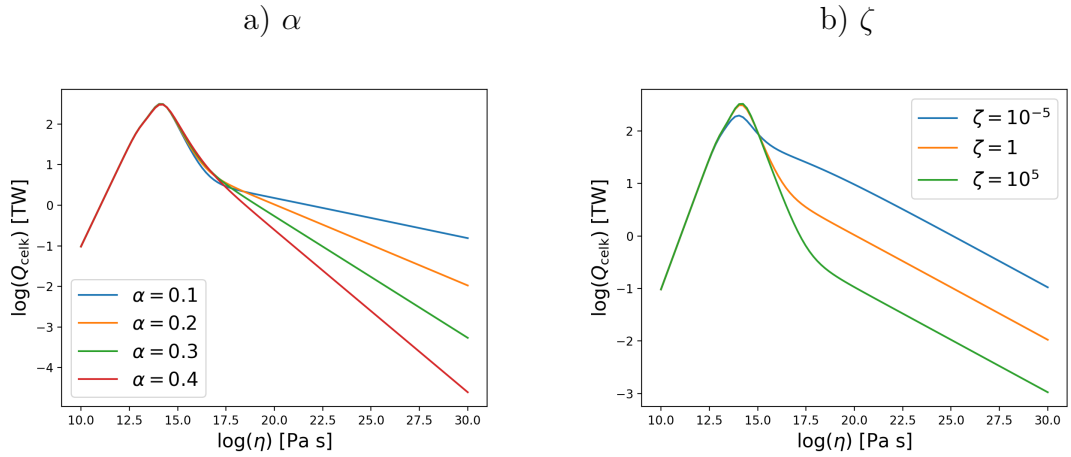
c) Priemerné objemové zahrievanie v plášti Q_m



d) Teplota plášťa T_m



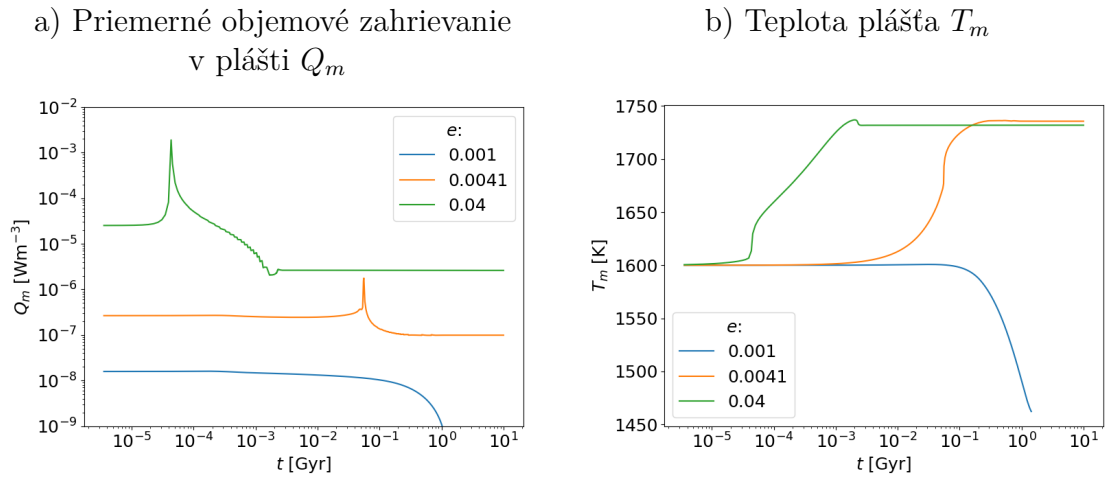
Obr. 3.4: Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách parametrov α a ζ . Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.



Obr. 3.5: Ilustrácia závislosti celkového objemového zahrievania na viskozite plášťa pre rôzne hodnoty empirických parametrov α a ζ . Uvažovaný je dvojvrstvový model s homogénnym plášťom a tekutým jadrom.

3.3 Vplyv orbitálnych parametrov

Excentricitu sme skúmali v rozsahu od 0.001 - 0.04 podľa Hussmann a Spohn (2004). Pri štúdiu vplyvu excentricity vidíme, že čím väčšia excentricita tým väčšie priemerné objemové zahrievanie v plášti. Zahrievanie rastie s e^2 avšak na obrázku teploty v plášti vidíme, že teplota pre excentricity 0.001 a 0.0041 je v rovnovážnom stave veľmi podobná. Pre excentricitu 0.04 sa teleso dostane do rovnovážneho stavu pomerne rýchlo v porovnaní s ostatnými modelmi. Pri modeli s excentricitou 0.001 je pravdepodobne excentricita natoľko malá, že sa v telese nedisipuje dostatočne veľa energie, a teda pozorujeme ochladzovanie telesa.



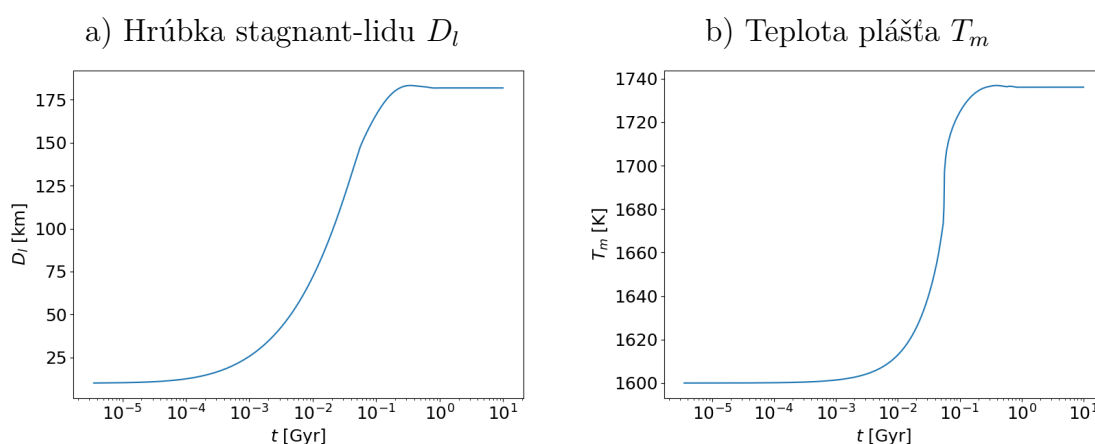
Obr. 3.6: Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách excentricity. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.

3.4 Vplyv teploty

Doteraz sme držali na povrchu konštantnú teplotu. Avšak chceli sme sa pozrieť ako by to vyzeralo, keby sa teplota povrchu mohla meniť. Na exomesiaci sme uvažovali priemernú teplotu na povrchu planéty, ktorú môžeme odhadnúť za predpokladu, že planéta/exomesiac je čierne teleso s povrchovou teplotou T_s nasledovne (Rovira-Navarro a kol., 2021)

$$T_s = \left(\frac{(1-A)L}{16\pi a^2 \sigma} + \frac{q_s}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.1)$$

Časový vývoj stagnant-lidu a teploty v plášti vyzera veľmi podobne ako na obr. 3.2d) a a), pričom vychádzajú aj veľmi podobné hodnoty.



Obr. 3.7: Časový vývoj stagnant-lidu a teploty v plášti v prípade priemernej povrchovej teploty. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.

3.5 Rovnovážny stav bez advekcie taveniny

Exomesiace sú malé telesá, pre ktoré môžeme aplikovať aj škálovacie vzťahy pre čisto vnútorne zahrievané planéty. V tejto podkapitole budeme diskutovať rovnovážny stav telesa, kedy všetka tavenina ostáva uväznená v plášti. Teoretické odvodenie je uvedené v podkapitole 1.2. Rovnovážny stav je počítaný iným algoritmom ako v predchádzajúcich podkapitolách, algoritmus je opísaný v kapitole 1.7. Pri výpočtoch používame referenčné hodnoty z tab. 3.1.

Na obrázkoch 3.8-3.10 sú zobrazené grafy rovnovážneho stavu. Na osi x je viskozita, na ose y sú veličiny: α , ζ a excentricita e a farebná škála zobrazuje priemerné objemové zahrievanie v plášti a teplotu v plášti. Biele časti v grafe sú miesta, kde nedochádzalo ku konvekcii v plášti. Rozsahy študovaných parametrov sme volili ako v predchádzajúcich podkapitolách, pričom vzhľadom k tomu, že výpočty rovnovážneho stavu boli rádovo kratšie ako výpočty termálnej evolúcie, mohli sme si dovoliť študovať väčšie rozsahy viskozít.

Prvou študovanou bola reologická závislosť, závislosť na viskozite ovplyvňujúca prenos tepla a veľkosť zahrievania a Andreadov parameter α ovplyvňu-

júci slapové zahrievanie viz obr. 3.8. Pozorujeme rovnaké závislosti ako v predchádzajúcich kapitolách a to, že pre danú viskozitu sa zahrievanie znižuje s rastúcou α a pre pevnú hodnotu α sa zahrievanie znižuje s rastúcou viskozitou. Pri porovnaní s obr. 3.3b), kde sme skúmali viskozity v rozsahu $10^{18} - 10^{20}$ Pa s, vidíme nárast v teplote 100 K pre dané hodnoty α , čo si odpovedá s obr. 3.8b). Pre menšie hodnoty viskozity môže byť závislosť komplikovanejšia, ako aj naznačuje obr. 3.8. Pri porovnaní s obr. 3.5a) pre viskozity menšie ako 10^{17} Pa s je závislosť na α minimálna a zahrievanie rastie po hodnotu viskozity $\sim 10^{14}$ Pa s, čomu odpovedajú aj výsledky na obr. 3.8. Najväčšie zahrievanie na obr. 3.8a) pozorujeme pre najmenšie viskozity, pre ktoré je ale aj najefektívnejší prenos tepla, a preto pre tieto hodnoty nedosahujeme najväčšie teploty v plášti. Pre pevnú hodnotu viskozity pozorujeme, že teplota v plášti sa v rovnovážnom stave veľmi nemení s voľbou α , podobná závislosť pozorovaná viz obr. 3.4b). Najväčšie teploty pozorujeme pre plášť s vysokou viskozitou a malým zahrievaním, kedy je Rayleighovo číslo relatívne malé viz 1.17.

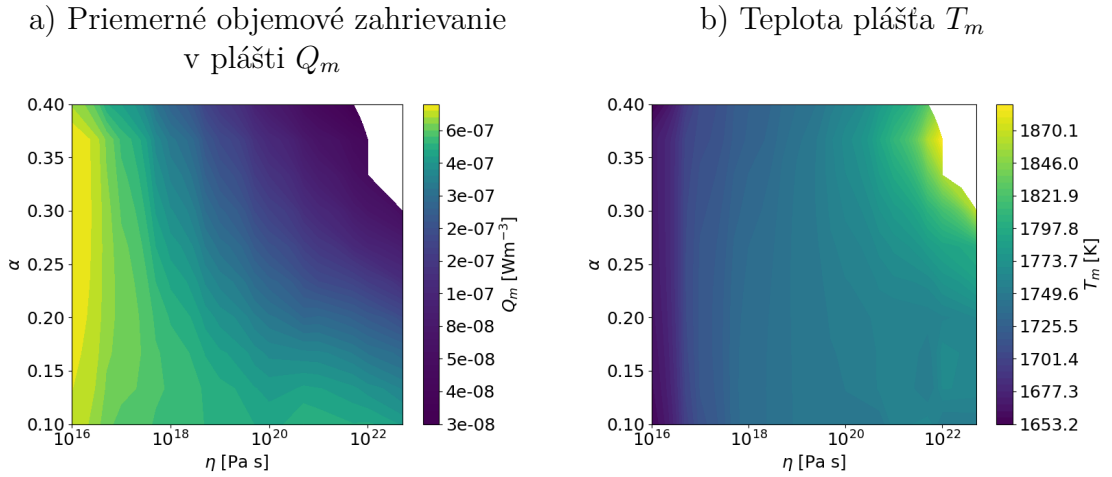
Zahrievanie v plášti sa ukázalo byť najvyššie pre nízke hodnoty ζ a nízku viskozitu, čo odpovedá aj závislosti na obr. 3.5b), kde pre viskozity vyššie ako 10^{16} Pa s pozorujeme najvyššie zahrievanie pre $\zeta = 10^{-5}$. Pre vysoké hodnoty ζ a vysokú viskozitu je v grafe oblasť, kde plášť nie je konvekcia. Podobné chovanie sme pozorovali aj pri termálnom vývoji viz obr. 3.4c) pre vysokú hodnotu ζ , kedy dochádzalo k chladnutiu plášte a kde sa teplo prenášalo kondukciou. Na obr. 3.4d) sme pre viskozitu 10^{19} Pa s pozorovali v rovnovážnom stave rovnakú teplotu pre $\zeta = 10^{-5}$ a 1, pričom na obr. 3.9b) teplota v plášti pre viskozitu 10^{19} Pa s klesá so zvyšujúcim sa ζ . Ako bolo komentované v predchádzajúcom odstavci, aj tu dochádza k najväčším teplotám v plášti pre vysokú viskozitu v plášti, kvôli závislosti Rayleighovho čísla na zahrievaní.

Pre teleso v 1:1 spin-orbitálnej rezonancii sme už rozoberali, že s rastúcou excentricitou rastie aj zahrievanie. Pre nízke hodnoty excentricity sa v telese nemusí disipovať dostatok energie. Pre pevne danú viskozitu pozorujeme s rastúcou excentricitou väčšie zahrievanie, čo odpovedá teoretickej závislosti viz vzťah (1.49) a odpovedá to aj obr. 3.6. Pre pevne danú hodnotu excentricity pozorujeme rastúce zahrievanie s klesajúcou viskozitou, keďže v telesách s vysokou viskozitou sa ťažšie disipuje energia.

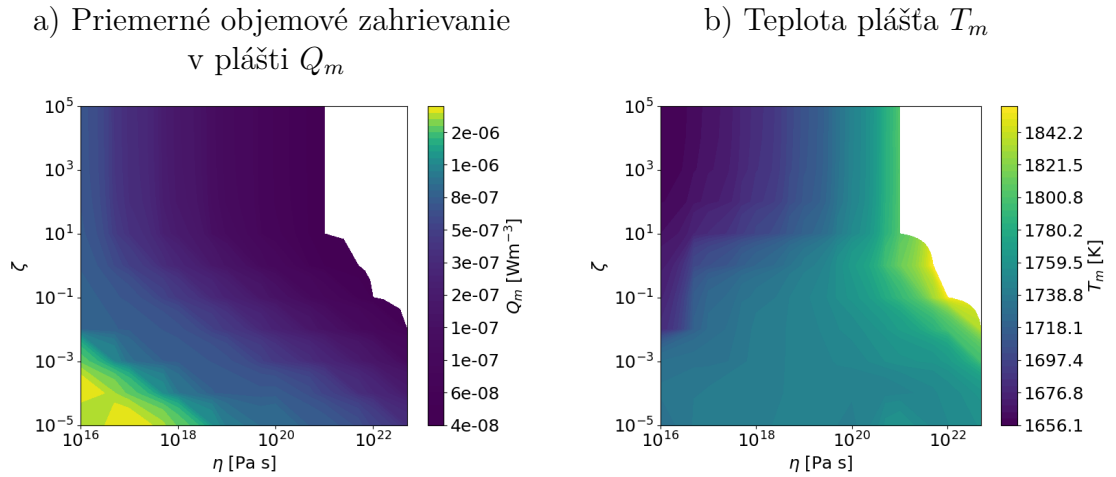
Pre porovnanie hodnôt Q_m a T_m pre referenčný model, vypočítaných pomocou termálnej evolúcie pre zahrievanie zospodu, a škálovacími vzťahmi pre model so zahrievaním zvnútra, bola vytvorená tabuľka 3.2, kde porovnávame dané parametre v rovnovážnom stave. Aj zahrievanie aj teplota v plášti vychádzajú o niečo väčšie pri modeli zahrievanom zvnútra.

3.6 Rovnovážny stav s advekciou taveniny

V tejto podkapile diskutujeme rovnovážny stav planéty v prípade, že poznáme teplotu a tavenina je odvádzaná na povrch pomocou magmatických prieduchov viz kap. 1.3. Výpočet teploty v plášti bol inšpirovaný článkom Bierson a Nimmo (2016), kde pre jednoduchosť uvažujú teplotu, ktorá sa nevyvíja v čase, a je daná parametricky vzťahom:



Obr. 3.8: Závislosť priemerného objemového zahrievania v plášti a teplote na rôznych hodnotách parametrov α a η . Biele časti v grafe sú miesta, kde nedochádzalo ku konvekcii v plášti.



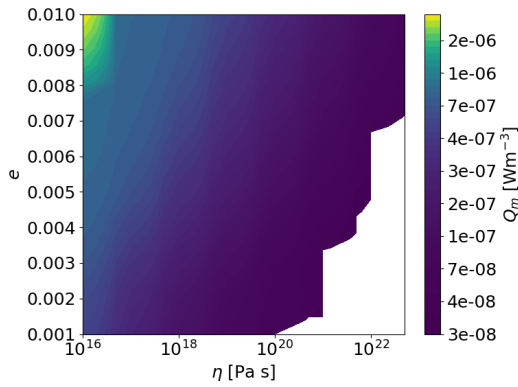
Obr. 3.9: Závislosť priemerného objemového zahrievania v plášti a teplote na rôznych hodnotách parametrov ζ a η . Biele časti v grafe sú miesta, kde nedochádzalo ku konvekcii v plášti.

$$T(r) = T_s + (T_m - T_s) \tanh\left(\frac{z}{D_1}\right), \quad (3.2)$$

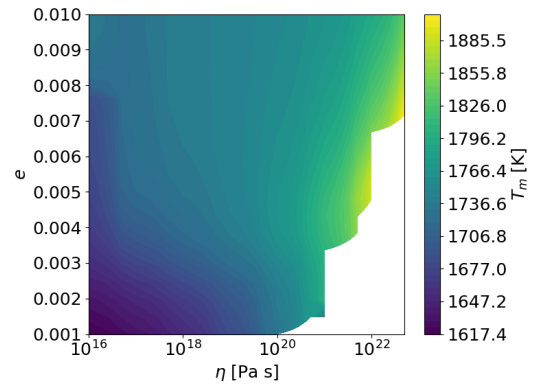
kde z je hĺbka.

Na obr. 3.11 sme zobrazili grafy rovnovážneho stavu. Opäť zobrazujeme najdôležitejšie parametre. Výsledný rovnovážny stav študujeme pre 4 rôzne teploty v plášti. Teplota je daná parametricky a počas iterácií sa nemení. Na grafe na obr. 3.11b) je zobrazený hĺbkový priebeh porozity v plášti. V tomto prípade uvažujeme zložitejší priebeh porozity ako v predchádzajúcich prípadoch, kedy porozita medzi solidom a liquidom rástla lineárne. Porozita je počítaná z previazaných rovníc (1.31) a (1.32). Taktiež si môžeme povšimnúť, že aj napriek výrazne vysokej teplote v plášti, porozita neprekročí ani v jednom prípade kritickú porozitu, pretože na vrchu natavenej zóny predpokladáme, že sa prúd usmerňuje do zlomov,

a) Priemerné objemové zahrievanie
v plášti Q_m



b) Teplota pláštá T_m

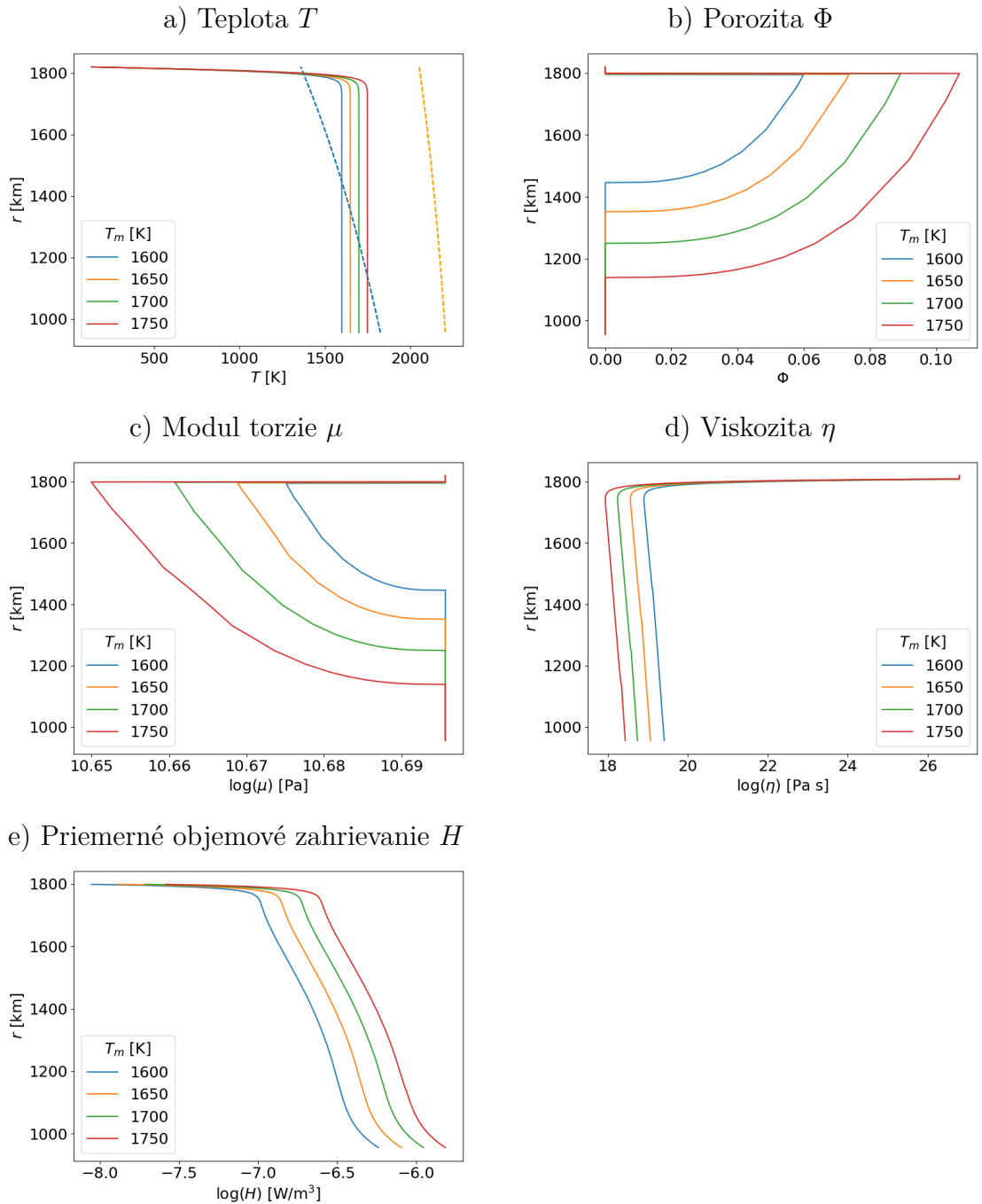


Obr. 3.10: Závislosť priemerného objemového zahrievania v plášti a teplote na rôznych hodnotách parametrov e a η . Biele časti v grafe sú miesta, kde nedochádzalo ku konvekcie v plášti.

ktoré umožňujú tavenine vstúpať cez litosféru na povrch (Moore, 2001). Z grafu modulu torzie, ktorý je závislý na porozite vidíme, že vzhľadom k tomu, že porozita sa veľmi nemení, tak modul torzie je takmer konštantný v plášti. Zaujímavé je, že priemerné objemové zahrievanie v plášti je v rovnovážnom stave vyššie ako v predchádzajúcich podkapitolách pre porovnateľnú teplotu. Vďaka odvádzaniu taveniny na povrch nedochádza k mechanickému oddeleniu pláštá a zahrievanie v plášti je preto vyššie. Pre študovaný rozsah teplôt vidíme, že zahrievanie je najväčšie pre najvyššiu teplotu. Tavenina sa v tomto prípade stále tvorí a vďaka stále veľkej slapovej deformácii a zahrievaniu môže mať táto vysoká hodnota vplyv na vývoj excentricity, ktorá môže v prípade odvádzania taveniny rýchlejšie klesať. Porovnanie výsledkov s predchádzajúcimi modelmi je v tab. 3.2.

Tabuľka 3.2: Porovnanie rovnovážneho stavu pre referenčný model získaný troma rôznymi spôsobmi.

Typ zahrievania	Q_m [Wm^{-3}]	T_m [K]
Zahrievanie zosrodu	$9.89 \cdot 10^{-8}$	1736
Zahrievanie zvnútra	$1.48 \cdot 10^{-7}$	1740
Zahrievanie zvnútra s advekciou	$5.09 \cdot 10^{-7}$	1750



Obr. 3.11: Rovnovážny stav pre 4 rôzne hodnoty teploty v plášti za predpokladu prenosu tepla magmatickými prieduchmi. Na grafoch sú zobrazené hĺbkové profily piatich najdôležitejších parametrov: a) teploty T danej parametricky, b) porozity Φ , c) modulu torzie μ , d) viskozity η a e) objemového slapového zahrievania v plášti. Čiarkované čiary na obr.a) odpovedajú krivkám solidu (modrá) a liquidu (oranžová). Pri zobrazovaní hĺbkových profilov sme sa obmedzili na oblasť od povrchu k jadrú.

Diskusia a záver

Cieľom diplomovej práce bolo skúmanie termálnej evolúcie planét, ktorých hlavným zdrojom tepla je slapové zahrievanie a skúmanie vplyvu prítomnosti a vývoja magmatického oceánu na slapovo termálny vývoj. Pri vývoji termálnej evolúcie sme sa inšpirovali článkom Tosi a kol. (2017). Ukázalo sa, že slapový vývoj planét je extrémne komplexný a že slapy dokážu veľmi ovplyvniť vývoj a tiež štruktúru telesa. V prípade, že sa objaví tavenie, môže dochádzať k mechanickému oddeleniu časti plášte, čím sa v telese začne disipovať oveľa menej energie a zahrievanie plášte poklesne. Spomínaný jav bol pozorovaný aj pri exozemi aj exomesiaci. Pri exozemi bol pokles zahrievania trojnásobný, zatiaľ čo pri exomesiaci dvojnásobný. Pre oba telesá sme zobrazili hĺbkové profily referenčného modelu vyvíjajúce sa v čase.

Tepelný tok pozorovaný v súčasnosti na mesiaci Io je 2 Wm^{-2} (Moore, 2001), zatiaľ čo v našom prípade pozorujeme pre referenčný model, ktorý sa dostal po 10 Gyr do rovnováhy tok o veľkosti 0.14 Wm^{-2} . Referenčný model mal maximálny tok 0.91 Wm^{-2} , teda aj maximálny tok bol dvakrát menší ako súčasne pozorovaný tok na Io. Rozdiely môžu byť spôsobené viacerými faktormi, ako napríklad naším zjednodušeným modelom uvažujúcim stagnant-lid konvekciu a zadržanie taveniny v plášti, voľbou iných referenčných parametrov alebo možnou príčinou môže byť, že mesiac Io v súčasnosti nie je v rovnovážnom stave (Moore, 2003).

V rámci diplomovej práce sme skúmali aj vplyv viacerých parametrov na termálny vývoj planéty. Dôležitými parametrami, ktoré ovplyvňujú časový vývoj teploty v plášti a slapové zahrievanie, sa podľa očakávaní ukázali byť viskozita, reologické parametre popisujúce Andreadovu reológiu α a ζ , a orbitálne parametre tj. perióda a excentricita pre telesá v 1:1 spin-orbitálnej rezonancii. Podobné závislosti sme pozorovali pri oboch telesách. Čas termálneho vývoju bol 10 miliárd rokov, a zatiaľ čo exoio za ten čas dosiahol rovnovážny stav, exozem sa stále vyvíja.

Pre exomesiac sme sa v práci neobmedzili len na termálny vývoj, ale porovnali sme ho aj s rovnovážnym stavom, ktorý bol vypočítaný pomocou škálovacích vzťahov pre čisto vnútorné zahrievané planéty. Teória bola inšpirovaná článkami Vilella a Kaminski (2017); Steinke a kol. (2020), pričom my sme uvažovali zjednodušený 1D model, zatiaľ čo Steinke a kol. (2020) uvažovali 3D efekty. Vzhľadom k výpočetnej nenáročnosti, sme si dovolili skúmať väčší rozsah viskozít. Porovnaním týchto dvoch modelov sme chceli zistiť, či sú modely, termálneho vývoja pre veľké časy a rovnovážneho stavu kompatibilné pri rovnakých predpokladoch. Aj napriek vyšším pozorovaným hodnotám zahrievania v plášti a teploty v plášti pre referenčný model zahrievaný zvnútra, sme dospeli k veľmi podobným výsledkom.

V práci uvažujeme veľmi zjednodušený model rozloženia taveniny. Uvažovali sme prípad, kedy tavenina ostáva uväznená v plášti, kedy sme v rovnovážnom stave pozorovali podobné hodnoty a chovanie ako pre rovnovážny stav po termálnej evolúcii. Uvažovali sme však aj možnosť, že sa tavenina dostáva na povrch magmatickými prieduchmi, kde sme sa inšpirovali článkom Moore (2001), kedy sme najprv otestovali správnosť výpočtov s výsledkami z článku a následne sme tento postup implementovali do nášeho modelu. V modeli rovnovážneho stavu s advekciou taveniny sme použili veľmi zjednodušenú parametrizáciu teploty podľa

Bierson a Nimmo (2016). Pre porovnateľnú teplotu v plášti sme však pozorovali takmer päťkrát väčšie zahrievanie v plášti ako pri modeloch termálnej evolúcie a rovnovážneho stavu bez advekcie taveniny.

Skutočné rozloženie taveniny nie je až tak jednoduché ako sme uvažovali v našich modeloch. Skúmanie vývoju planét, v ktorých môže dochádzať k nataveniu materiálu vplyvom slapov, je zatiaľ len v počiatkoch. Modely obvykle uvažujú zadržanie taveniny v plášti (Walterová a Běhounková, 2020); okamžitý odvod taveniny (Běhounková a kol., 2021) alebo uvažujú priemerovanie cez plášť (Shoji a Kurita, 2014). K fyzikálnejšiemu popisu by bolo nutné zahrnúť dvojfázovú konvekciu (Moore, 2001; Bierson a Nimmo, 2016; Spencer a kol., 2021) a zároveň by bolo nutné uvažovať 3D efekty v slapoch (Steinke a kol., 2020). Ďalšiu komplikáciu predstavuje správny popis slapovej deformácie a slapového zahrievania v prítomnosti natavenej vrstvy alebo oceánu, kedy veľkosť zahrievania môže extrémne vzrásť najmä pre tenké oceány (e.g. Tyler a kol., 2015; Beuthe, 2016; Matsuyama a kol., 2018).

Ďalším veľkým zjednodušením v našom modeli je, že neuvažujeme prepojenie slapového, orbitálneho a rotačného vývoju telesa. Reologická štruktúra planéty určuje jej náchylnosť na slapovú deformáciu a v dôsledku toho sa podieľa na formovaní jej obežnej dráhy. Orbitálne parametre naopak riadia rýchlosť slapovej disipácie a môžu viesť k podstatným zmenám vo vnútri telesa (e.g. Hussmann a Spohn, 2004; Neveu a Rhoden, 2019; Walterová a Běhounková, 2020). Vďaka slapovom teda dochádza k prepojeniu vnútorného, orbitálneho a rotačného vývoja, ktorý môže byť extrémne komplexný najmä v prípade prítomnosti viacerých telies a dráhových rezonancií.

Zoznam použitej literatúry

NASA exoplanet archive. <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>.

PHL the habitable exoplanets catalog. <https://phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog>.

NASA kepler's launch. https://www.nasa.gov/mission_pages/kepler/launch/index.html.

SciPy documentation runge-kutta method. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.RK45.html>.

NASA our solar system. <https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/our-solar-system/in-depth/>.

NASA what's a transit? <https://exoplanets.nasa.gov/faq/31/whats-a-transit/>.

BARR, A. C., DOBOS, V. a KISS, L. L. (2018). Interior structures and tidal heating in the TRAPPIST-1 planets. *Astronomy & Astrophysics*, **613**, A37. doi: 10.1051/0004-6361/201731992. URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731992>.

BEUTHE, M. (2016). Crustal control of dissipative ocean tides in enceladus and other icy moons. *Icarus*, **280**, 278–299. ISSN 0019-1035. doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.08.009>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103516304730>. MicroMars to MegaMars.

BIERSON, C. J. a NIMMO, F. (2016). A test for io's magma ocean: Modeling tidal dissipation with a partially molten mantle. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **121**(11), 2211–2224. doi: <https://doi.org/10.1002/2016JE005005>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2016JE005005>.

BREUER, D. a SPOHN, T. (2006). Viscosity of the martian mantle and its initial temperature: Constraints from crust formation history and the evolution of the magnetic field. *Planetary and Space Science*, **54**, 153–169. doi: 10.1016/j.pss.2005.08.008.

BĚHOUNKOVÁ, M., TOBIE, G., CHOBLET, G. a ČADEK, O. (2011). Tidally induced thermal runaways on extrasolar earths: Impact on habitability. *The Astrophysical Journal*, **728**(2), 89. doi: 10.1088/0004-637X/728/2/89. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/728/2/89>.

BĚHOUNKOVÁ, M., TOBIE, G., CHOBLET, G., KERVAZO, M., MELWANI DASHWANI, M., DUMOULIN, C. a VANCE, S. D. (2021). Tidally induced magmatic pulses on the oceanic floor of jupiter's moon europa. *Geophysical Research Letters*, **48**(3), e2020GL090077. doi: <https://doi.org/10.1029/2020GL090077>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2020GL090077>. e2020GL090077 2020GL090077.

- DE PATER, I. a LISSAUER, J. J. (2015). *Planetary Sciences*. Cambridge University Press, 2 edition. doi: 10.1017/CBO9781316165270.
- DESCHAMPS, F. a VILELLA, K. (2021). Scaling laws for mixed-heated stagnant-lid convection and application to europa. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **126**(10), e2021JE006963. doi: <https://doi.org/10.1029/2021JE006963>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2021JE006963>. e2021JE006963 2021JE006963.
- EFROIMSKY, M. (2012). Tidal dissipation compared to seismic dissipation: In small bodies, earths, and super-earths. *The Astrophysical Journal*, **746**(2), 150. doi: 10.1088/0004-637x/746/2/150. URL <https://doi.org/10.1088/0004-637x/746/2/150>.
- EFROIMSKY, M. a LAINEY, V. (2007). On the theory of bodily tides. *AIP Conference Proceedings*, **886**, 9. doi: 10.1063/1.2710050.
- HENNING, W. G., O'CONNELL, R. J. a SASSELOV, D. D. (2009). Tidally heated terrestrial exoplanets: Viscoelastic response models. *The Astrophysical Journal*, **707**(2), 1000. doi: 10.1088/0004-637X/707/2/1000. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/707/2/1000>.
- HUSSMANN, H. a SPOHN, T. (2004). Thermal-orbital evolution of io and europa. *Icarus*, **171**(2), 391–410. ISSN 0019-1035. doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2004.05.020>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103504001952>.
- JACKSON, I., FAUL, U. H. a SKELTON, R. (2014). Elastically accommodated grain-boundary sliding: New insights from experiment and modeling. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **228**, 203–210. ISSN 0031-9201. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2013.11.014>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031920113001738>. High-Pressure Research in Earth Science: Crust, Mantle, and Core.
- KALTENEGGER, L. (2017). How to characterize habitable worlds and signs of life. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **55**(1), 433–485. doi: 10.1146/annurev-astro-082214-122238. URL <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-082214-122238>.
- KATZ, R. F., SPIEGELMAN, M. a LANGMUIR, C. H. (2003). A new parameterization of hydrous mantle melting. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, **4**(9). doi: <https://doi.org/10.1029/2002GC000433>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2002GC000433>.
- KERVAZO, M., TOBIE, G., CHOBLET, G., DUMOULIN, C. a BĚHOUNKOVÁ, M. (2021). Solid tides in io's partially molten interior: Contribution of bulk dissipation. *Astronomy Astrophysics*, **650**. doi: 10.1051/0004-6361/202039433.
- KLEISIOTI, E., DIRKX, D., ROVIRA-NAVARRO, M. a KENWORTHY, M. A. (2023). Tidally heated exomoons around ϵ eridani b: Observability and prospects for characterization.

- LINDEGREN, L. a DRAVINS, D. (2003). The fundamental definition of “radial velocity”. *Astronomy & Astrophysics*, **401**(3), 1185–1201. doi: 10.1051/0004-6361:20030181. URL <https://doi.org/10.1051%2F0004-6361%3A20030181>.
- MA, L. a FULLER, J. (2021). Orbital decay of short-period exoplanets via tidal resonance locking. *The Astrophysical Journal*, **918**(1), 16. doi: 10.3847/1538-4357/ac088e. URL <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac088e>.
- MATSUYAMA, I., BEUTHE, M., HAY, H., NIMMO, F. a KAMATA, S. (2018). Ocean tidal heating in icy satellites with solid shells. *Icarus*, **312**. doi: 10.1016/j.icarus.2018.04.013.
- MONTEUX, J., ANDRAULT, D. a SAMUEL, H. (2016). On the cooling of a deep terrestrial magma ocean. *Earth and Planetary Science Letters*, **448**, 140–149. ISSN 0012-821X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2016.05.010>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012821X16302199>.
- MOORE, W. B. (2003). Tidal heating and convection in io. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **108**(E8). doi: <https://doi.org/10.1029/2002JE001943>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2002JE001943>.
- MOORE, W. (2001). The thermal state of io. *Icarus*, **154**, 548–550. doi: 10.1006/icar.2001.6739.
- MOORE, W. B., SCHUBERT, G., ANDERSON, J. D. a SPENCER, J. R. (2007). *The interior of Io*, pages 89–108. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-540-48841-5. doi: 10.1007/978-3-540-48841-5_5. URL https://doi.org/10.1007/978-3-540-48841-5_5.
- MURRAY, C. D. a DERMOTT, S. F. (2000). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139174817.
- NEVEU, M. a RHODEN, A. (2019). Evolution of saturn’s mid-sized moons. *Nature Astronomy*, **3**. doi: 10.1038/s41550-019-0726-y.
- O’MALLEY-JAMES, J. T. a KALTENEGGER, L. (2017). UV surface habitability of the TRAPPIST-1 system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, **469**(1), L26–L30. ISSN 1745-3925. doi: 10.1093/mnrasl/slx047. URL <https://doi.org/10.1093/mnrasl/slx047>.
- PARMENTIER, E. M. a SOTIN, C. (2000). Three-dimensional numerical experiments on thermal convection in a very viscous fluid: Implications for the dynamics of a thermal boundary layer at high rayleigh number. *Physics of Fluids - PHYS FLUIDS*, **12**, 609–617. doi: 10.1063/1.870267.
- PELTIER, W. (1974). Impulse response of a maxwell earth. *Reviews of Geophysics - REV GEOPHYS*, **12**, 649–669. doi: 10.1029/RG012i004p00649.
- REESE, C., SOLOMATOV, V. a BAUMGARDNER, J. (2005). Scaling laws for time-dependent stagnant lid convection in a spherical shell. *Physics of the*

- Earth and Planetary Interiors*, **149**(3), 361–370. ISSN 0031-9201. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2004.11.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031920104003942>.
- RENAUD, J. P. a HENNING, W. G. (2018). Increased tidal dissipation using advanced rheological models: Implications for io and tidally active exoplanets. *The Astrophysical Journal*, **857**(2), 98. doi: [10.3847/1538-4357/aab784](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab784). URL <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aab784>.
- ROVIRA-NAVARRO, M., VAN DER WAL, W., STEINKE, T. a DIRKX, D. (2021). Tidally heated exomoons around gas giants. *The Planetary Science Journal*, **2**(3), 119. doi: [10.3847/PSJ/abf6cb](https://doi.org/10.3847/PSJ/abf6cb). URL <https://dx.doi.org/10.3847/PSJ/abf6cb>.
- SABADINI, R., VERMEERSEN, B. a CAMBIOTTI, G. (2016). *Global Dynamics of the Earth: Applications of Viscoelastic Relaxation Theory to Solid-Earth and Planetary Geophysics*. ISBN 978-94-017-7550-2. doi: [10.1007/978-94-017-7552-6](https://doi.org/10.1007/978-94-017-7552-6).
- SEGATZ, M., SPOHN, T., ROSS, M. a SCHUBERT, G. (1988). Tidal dissipation, surface heat flow, and figure of viscoelastic models of io. *Icarus*, **75**(2), 187–206. ISSN 0019-1035. doi: [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(88\)90001-2](https://doi.org/10.1016/0019-1035(88)90001-2). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0019103588900012>.
- SHOJI, D. a KURITA, K. (2014). Thermal-Orbital Coupled Tidal Heating and Habitability of Martian-sized Extrasolar Planets around M Stars. , **789**(1):3. doi: [10.1088/0004-637X/789/1/3](https://doi.org/10.1088/0004-637X/789/1/3).
- SPENCER, D., KATZ, R. a HEWITT, I. (2021). Tidal controls on the lithospheric thickness and topography of io from magmatic segregation and volcanism modelling. *Icarus*, **359**, 114352. ISSN 0019-1035. doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2021.114352>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103521000488>.
- STAMENKOVIĆ, V., NOACK, L., BREUER, D. a SPOHN, T. (2012). The influence of pressure-dependent viscosity on the thermal evolution of super-earths. *The Astrophysical Journal*, **748**(1), 41. doi: [10.1088/0004-637X/748/1/41](https://doi.org/10.1088/0004-637X/748/1/41). URL <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/748/1/41>.
- STEINKE, T., HU, H., HÖNING, D., VAN DER WAL, W. a VERMEERSEN, B. (2020). Tidally induced lateral variations of io’s interior. *Icarus*, **335**, 113299. ISSN 0019-1035. doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.05.001>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103518307632>.
- STERN, R. J. (2018). The evolution of plate tectonics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **376**(2132), 20170406. doi: [10.1098/rsta.2017.0406](https://doi.org/10.1098/rsta.2017.0406). URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.2017.0406>.

- TOBIE, G., MOCQUET, A. a SOTIN, C. (2005). Tidal dissipation within large icy satellites: Applications to europa and titan. *Icarus*, **177** (2), 534–549. ISSN 0019-1035. doi: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2005.04.006>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103505001582>. Europa Icy Shell.
- TOSI, N., GODOLT, M., STRACKE, B., RUEDAS, T., GRENFELL, J. L., HÖNING, D., NIKOLAOU, A., PLESA, A.-C., BREUER, D. a SPOHN, T. (2017). The habitability of a stagnant-lid earth. *Astronomy & Astrophysics*, **605**, A71. doi: [10.1051/0004-6361/201730728](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201730728). URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201730728>.
- TYLER, R. H., HENNING, W. G. a HAMILTON, C. W. (2015). Tidal heating in a magma ocean within jupiter’s moon io. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **218**(2), 22. doi: [10.1088/0067-0049/218/2/22](https://doi.org/10.1088/0067-0049/218/2/22). URL <https://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/218/2/22>.
- VILELLA, K. a KAMINSKI, E. (2017). Fully determined scaling laws for volumetrically heated convective systems, a tool for assessing habitability of exoplanets. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **266**, 18–28. ISSN 0031-9201. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2017.02.001>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031920117300092>.
- WALTEROVÁ, M. a BĚHOUNKOVÁ, M. (2017). Tidal effects in differentiated viscoelastic bodies: a numerical approach. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **129**(1-2), 235–256. doi: [10.1007/s10569-017-9772-x](https://doi.org/10.1007/s10569-017-9772-x).
- WALTEROVÁ, M. a BĚHOUNKOVÁ, M. (2020). Thermal and orbital evolution of low-mass exoplanets. *The Astrophysical Journal*, **900**(1), 24. doi: [10.3847/1538-4357/aba8a5](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aba8a5). URL <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aba8a5>.
- WALTEROVÁ, M., BĚHOUNKOVÁ, M. a EFROIMSKY, M. (2023). Is there a semi-molten layer at the base of the lunar mantle? *Journal of Geophysical Research: Planets*, **n/a**(n/a), e2022JE007652. doi: <https://doi.org/10.1029/2022JE007652>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2022JE007652>. e2022JE007652 2022JE007652.
- WRIGHT, J. a GAUDI, B. (2012). Exoplanet detection methods. *Planets, Stars and Stellar Systems. Volume 3: Solar and Stellar Planetary Systems*. doi: [10.1007/978-90-481-8818-5_59](https://doi.org/10.1007/978-90-481-8818-5_59).

Zoznam obrázkov

1	Graf zobrazujúci počet objavených exoplanét od roku 1992 po súčasnosť a detekčné metódy, ktorými boli objavené (NASA Exoplanet Archive).	2
2	Graf zobrazujúci excentricity a periódy orbitu objavených exoplanét a detekčnú metódu, ktorou boli objavené (NASA Exoplanet Archive).	3
3	Štyri možné scenáre distribúcie zahrievania a taveniny na mesiaci Io. Prevzané: Chuck Carter and James Tuttle Keane (Keck Institute for Space Studies).	5
4	Schématické znázornenie vplyvu slapového zahrievania a jeho prepojenie s termálnym vývojom. Zahrievanie je vypočítané pre zemi podobné teleso s homogénnym plášťom a tekutým jadrom.	6
1.1	Rozdelenie planéty do troch vrstiev. Stagnant-lid, konvektujúci plášť a tekuté jadro. Čiarkovanými čiarami sú označené dve prechodové vrstvy (jedna pod stagnant-lidom, jedna nad CMB).	7
1.2	Teplotný profil planéty. Konduktívne vedenie tepla v stagnant-lide, lineárny profil teploty v prechodových vrstvách, adiabatická teplota v plášti a adiabatická teplota v jadre. Parametre d_m a d_b označujú hrúbky hraničných vrstiev.	8
1.3	Teplotný profil planéty v rovnovážnom stave, keď uvažujeme vnútorné zahrievané planéty.	11
1.4	Hĺbkové profily vypočítané Runge-Kuttovou metódou zo vzťahov 1.31 a 1.32. Počiatočná podmienka pre v_l a Φ bola 0 a 0.01, krivky odpovedajú priemernému slapovému zahrievaniu v plášti $Q_m = 10^{-5} \text{ W/m}^3$. Obrázok slúžil ako kontrola s výsledkami z článku Moore (2001). Čiarkované čiary sú pre $n = 3$ a plné čiary pre $n = 2$. Každá farba odpovedá inej hodnote γ	13
1.5	Iteračné schéma evolučného modelu. Vstupom do modelu je počiatočný profil teploty. Skúmaná doma evolúcie je 10 Gyr.	19
1.6	Iteračné schéma pre výpočet rovnovážneho stavu. Iterujeme cez slapové zahrievanie a teplotu. Počet iterácií sme nastavili na hodnotu 500.	20
2.1	Referenčný model pre Zemi podobné teleso, $\eta = 10^{21} \text{ Pa s}$. Na grafoch sú zobrazené hĺbkové profily piatich najdôležitejších parametrov: a) teploty T , b) porozity Φ , c) modulu torzie μ , d) viskozity η a e) objemového slapového zahrievania v plášti. Vývoj profilov v čase je zachytený pomocou farebnej škály. Čiarkované čiary na obr. a) odpovedajú krivkám solidu a liquidu. Pri zobrazovaní hĺbkových profilov sme sa obmedzili na oblasť od povrchu k jadru.	24
2.2	Časová závislosť vybraných parametrov pre referenčný model Zemi podobného telesa. a) Teplota v plášti T_m , b) teplota jadra T_c , c) priemerná porozita v plášti $\bar{\Phi}_m$, d) hrúbka stagnant-lidu D_l , e) objemové zahrievanie v plášti Q_m a f) tepelný tok povrchom q_s	25

2.3	Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách viskozity v plášti. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	26
2.4	Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách parametrov α a ζ . Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	27
2.5	Ilustrácia závislosti celkového objemového zahrievania na viskozite plášte pre rôzne hodnoty empirických parametrov α a ζ . Uvažovaný je dvojvrstvový model s homogénnym plášťom a tekutým jadrom.	28
2.6	Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách excentricity a periódy. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	28
2.7	Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách teploty v jadre. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	29
2.8	Časový vývoj stagnant-lidu a teploty v plášti pre privrátenú a odvrátenú stranu planéty. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	30
3.1	Referenčný model pre teleso podobné mesiacu Io, $\eta = 10^{19}$ Pa s. Na grafoch sú zobrazené hĺbkové profily piatich najdôležitejších parametrov: a) teploty T , b) porozity Φ , c) modulu torzie μ , d) viskozity η a e) objemového slapového zahrievania v plášti. Vývoj profilov v čase je zachytený pomocou farebnej škály. Čiarkované čiary na obr.a) odpovedajú krivkám solidu (modrá) a liquidu (oranžová). Pri zobrazovaní hĺbkových profilov sme sa obmedzili na oblasť od povrchu k jadru.	33
3.2	Časová závislosť vybraných parametrov pre referenčný model pre teleso podobné mesiacu Io. a) Teplota v plášti T_m , b) teplota jadra T_c , c) priemerná porozita v plášti $\bar{\Phi}_m$, d) hrúbka stagnant-lidu D_l , e) objemové zahrievanie v plášti Q_m a f) tepelný tok povrchom q_s .	34
3.3	Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách viskozity v plášti. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	35
3.4	Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách parametrov α a ζ . Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	35
3.5	Ilustrácia závislosti celkového objemového zahrievania na viskozite plášte pre rôzne hodnoty empirických parametrov α a ζ . Uvažovaný je dvojvrstvový model s homogénnym plášťom a tekutým jadrom.	36
3.6	Časový vývoj objemového zahrievania v plášti a teploty v plášti v závislosti na rôznych hodnotách excentricity. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	36
3.7	Časový vývoj stagnant-lidu a teploty v plášti v prípade priemernej povrchovej teploty. Ostatné parametre použité pre výpočet boli rovnaké ako pre referenčný model.	37

3.8	Závislosť priemerného objemového zahrievania v plášti a teplote na rôznych hodnotách parametrov α a η . Biele časti v grafe sú miesta, kde nedochádzalo ku konvekcií v plášti.	39
3.9	Závislosť priemerného objemového zahrievania v plášti a teplote na rôznych hodnotách parametrov ζ a η . Biele časti v grafe sú miesta, kde nedochádzalo ku konvekcií v plášti.	39
3.10	Závislosť priemerného objemového zahrievania v plášti a teplote na rôznych hodnotách parametrov e a η . Biele časti v grafe sú miesta, kde nedochádzalo ku konvekcií v plášti.	40
3.11	Rovnovážny stav pre 4 rôzne hodnoty teploty v plášti za predpokladu prenosu tepla magmatickými prieduchmi. Na grafoch sú zobrazené hĺbkové profily piatich najdôležitejších parametrov: a) teploty T danej parametricky, b) porozity Φ , c) modulu torzie μ , d) viskozity η a e) objemového slapového zahrievania v plášti. Čiarkované čiary na obr.a) odpovedajú krivkám solidu (modrá) a liquidu (oranžová). Pri zobrazovaní hĺbkových profilov sme sa obmedzili na oblasť od povrchu k jadrú.	41
A.1	Teleso je rozdelené na N vrstiev, indexujeme od stredu telesa. . .	53

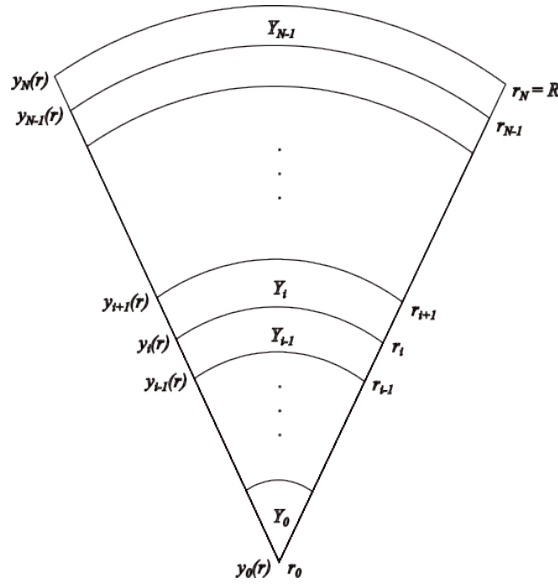
Zoznam tabuliek

1.1	Referenčné parametre pre výpočet porozity a vplyvu porozity na viskozitu a modul torzie	19
2.1	Referenčné parametre pre exozem (Breuer a Spohn, 2006; Tosi a kol., 2017).	23
3.1	Referenčné parametre pre exoio (Breuer a Spohn, 2006; Tosi a kol., 2017).	31
3.2	Porovnanie rovnovážneho stavu pre referenčný model získaný troma rôznymi spôsobmi.	40

A. Appendix: Výpočet slapovej deformácie

Táto kapitola je venovaná skrátenému popisu metódy propagátorovej matice, ktorá je použitá na výpočet imaginárneho Loveovho čísla k_2 . Detailný popis metódy propagátorovej matice je uvedený v Sabadini a kol. (2016). Na rozdiel od Sabadini a kol. (2016), v našom programe indexujeme od jadra po povrch, preto sa rovnice môžu mierne líšiť. Pre každú vrstvu (i) musíme vyriešiť rovnicu

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dr} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}. \quad (\text{A.1})$$



Obr. A.1: Teleso je rozdelené na N vrstiev, indexujeme od stredu telesa.

Matica \mathbf{A} je daná ako:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{r} & \frac{l(l+1)}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{4}{r} \left(\frac{3\mu}{r} - \rho_0 g \right) & -\frac{l(l+1)}{r} \left(\frac{6\mu}{r} - \rho_0 g \right) & 0 & \frac{l(l+1)}{r} & -\frac{\rho_0(l+1)}{r} & \rho_0 \\ -\frac{1}{r} \left(\frac{6\mu}{r} - \rho_0 g \right) & \frac{2(2l^2+2l-1)\mu}{r^2} & -\frac{1}{r} & -\frac{3}{r} & \frac{\rho_0}{r} & 0 \\ 4\pi G \rho_0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l+1}{r} & 1 \\ -\frac{4\pi G \rho_0(l+1)}{r} & \frac{4\pi G \rho_0 l(l+1)}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{l-1}{r} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

kde $g = 4\pi G \rho_0 r / 3$ a l je stupeň sférickej harmoniky, ktorý je rovný 2 pre slapové pôsobenie.

Pokiaľ uvažujeme vrstevnaté teleso, kde je konštantná viskozita a reologické parametre, potom riešenie v i -tej vrstve môžeme napísať ako

$$\mathbf{y}^{(i)}(r_{i+1}, s) = \mathbf{Y}^{(i)}(r_{i+1}, s) \mathbf{C}^{(i)}, \quad (\text{A.3})$$

kde \mathbf{C} je vektor integračných konštánt a \mathbf{Y} je tzv. fundamentálna matica, ktorá je vyjadrená nasledovne:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{l r^{l+1}}{2(2l+3)} & r^{l-1} & 0 \\ \frac{(l+1)r^{l+1}}{2(2l+3)(l+1)} & \frac{r^{l-1}}{l} & 0 \\ \frac{(l\rho_0 g r + 2(l^2 - l - 3)\mu)r^l}{2(2l+3)} & (\rho_0 g r + 2(l-1)\mu)r^{l-2} & -\rho_0 r^l \\ \frac{l(l+2)\mu r^l}{(2l+3)(l+1)} & \frac{2(l-1)\mu r^{l-2}}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -r^l \\ \frac{2\pi G \rho_0 l r^{l+1}}{2l+3} & 4\pi G \rho_0 r^{l-1} & -(2l+1)r^{l-1} \\ \frac{(l+1)r^{-l}}{2(2l-1)} & r^{-l-2} & 0 \\ \frac{(2-l)r^{-l}}{2l(2l-1)} & -\frac{r^{-l-2}}{l+1} & 0 \\ \frac{(l+1)\rho_0 g r - 2(l^2 + 3l - 1)\mu}{2(2l-1)r^{l+1}} & \frac{\rho_0 g r - 2(l+2)\mu}{r^{l+3}} & -\frac{\rho_0}{r^{l+1}} \\ \frac{(l^2-1)\mu}{l(2l-1)r^{l+1}} & \frac{2(l+2)\mu}{(l+1)r^{l+3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^{l+1}} \\ \frac{2\pi G \rho_0 (l+1)}{(2l-1)r^l} & \frac{4\pi G \rho_0}{r^{l+2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Vďaka spojitosti polí y_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) na rozhraní, vieme vyjadriť y na (i)-tej hranici a na ($i+1$)-ej hranici nasledovne:

$$\mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{y}^{(i+1)}, \quad (\text{A.5})$$

kde

$$\mathbf{y}^{(i+1)}(r_{i+1}, s) = \mathbf{Y}^{(i+1)}(r_{i+1}, s) \mathbf{C}^{(i+1)}. \quad (\text{A.6})$$

So spomínanými rovnicami je možné vyjadriť vektor konštant $\mathbf{C}^{(i)}$ pomocou $\mathbf{C}^{(i+1)}$:

$$\mathbf{C}^{(i+1)} = \left(\mathbf{Y}^{(i+1)}(r_{i+1}, s) \right)^{-1} \mathbf{Y}^{(i)}(r_{i+1}, s) \mathbf{C}^{(i)}. \quad (\text{A.7})$$

Ak berieme tekuté jadro za prvú vrstvu, potom môžeme vyjadriť podmienky na CMB vzťahom:

$$\mathbf{C}^{(1)} = \left(\mathbf{Y}^{(1)}(r_c, s) \right)^{-1} \mathbf{I}_c \mathbf{C}_c, \quad (\text{A.8})$$

kde maticou \mathbf{I}_c môžeme vyjadriť podmienky na rozhraní jadro-plášť ako

$$\mathbf{I}_c = \begin{pmatrix} -\frac{r_c^{l-1}}{A_c} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 A_c r_c \\ 0 & 0 & 0 \\ r_c^l & 0 & 0 \\ 2(l-1)r_c^{l-1} & 0 & 3A_c \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Vektor riešení na povrchu $y^{(N)}(R)$ je možné vypočítať propagáciou riešení na hranici jadro-plášť R_c na povrch R vďaka spojitosti na hraniciach

$$y^{(N)}(R) = \left(\prod_{i=N-1}^1 \mathbf{Y}^{(i)}(r_{i+1}, s) \mathbf{Y}^{(i)-1}(r_i, s) \right) \mathbf{I}_c \mathbf{C}_c. \quad (\text{A.10})$$

Hraničné podmienky na povrchu:

$$y_2(R_s) = 0 \quad y_4(R_s) = 0 \quad y_6(R_s) = \frac{2l+1}{R_s}, \quad (\text{A.11})$$

a hraničné podmienky v strede telesa:

$$y_1(0) = 0 \quad y_3(0) = 0 \quad y_5(0) = 0, \quad (\text{A.12})$$

teda radiálne a tangenciálne napätia sú nulové na povrchu, gravitačný potenciál je spojitý; a radiálne a tangenciálne posunutia, gravitačný potenciál sú nulové pre $r = 0$.

Pri výpočte slapového zahrievanie v rovnici (A.1) sa využíva Loveovo číslo k_2 , ktoré v našom prípade môžeme jednoducho vypočítať pomocou funkcie y_5 ako

$$k_2 = -y_5(R, \omega) - 1. \quad (\text{A.13})$$

Komplexná hodnota potenciálového Loveovho čísla je úmerná rýchlosti disipácie slapovej energie a závisí na rigidite a viskozite (Bierson a Nimmo, 2016).