

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jaroslav Jaroš

Gravitační signál modelů zemské kůry

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ondřej Šrámek, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

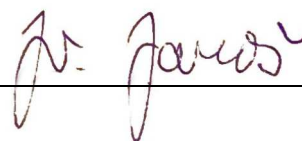
Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Gáni dne 06. 01. 2021

podpis

A handwritten signature in dark ink, appearing to read "M. Janos", written over a horizontal line.

Ďakujem za vedenie, cenné podnety a čas, ktorý mi pri vypracovávaní tejto bakalárskej práce venoval, RNDr. Ondřejovi Šrámkovi, Ph.D., Jeho trpezlivosť a rozvážnosť sú darom.

Rád by som poďakoval aj Dr. Mirkovi Reguzzonimu z Politecnico di Milano za láskavé poskytnutie dát z misie GOCE a RNDr. Jakubovi Velímskému, Ph.D. za poskytnutie výpočtových procedúr pre sférickú harmonickú analýzu.

Ďalej ďakujem Bohu, bez ktorého by som sa nikdy nerozhodol ísť študovať až do Prahy a nikdy by som sa nedostal až sem, keďže som to chcel vzdať asi tak stokrát. Jeho starostlivosť mi dodávala nádej a odvalu.

No a nakoniec, ďakujem za všetku podporu, povzbudenia a pomoc mojim milovaným rodičom, mojej priateľke Monke a všetkým priateľom, rodine a dobrodincom, ktorí pri mne stáli po celý čas môjho bakalárskeho štúdia. Medzi nimi by som rád spomenul menovite mojich spolubývajúcich Jakuba a Juriho, spolužiakov Andreja, Dejana, Sáru a Bejku, ako i priateľov Katku, Mareka, Zuzku, Martina, Bobu, Jurina a Eriku.

Nebyť týchto osôb, táto práca by nebola nikdy vznikla.

Název práce: Gravitační signál modelů zemské kůry

Autor: Jaroslav Jaroš

Katedra / Ústav: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ondřej Šrámek, Ph.D.

Abstrakt: Globální modely zemské kůry, jako např. CRUST1.0, popisují 3-D rozložení materiálové hustoty a rychlostí šíření seismických vln v kůře. Tyto modely jsou v geofyzikální komunitě široce užívány coby referenční modely pro lokální a regionální seismické studie, a také jsou základem současných predikčních modelů toku geoneutrin z litosféru. V této práci jsme se zaměřili na validaci seismického modelu CRUST1.0 pomocí gravitačních dat získaných misí GOCE. Spočetli jsme anomální gravitační potenciál a jeho první a druhou radiální derivaci, indukované ve výšce 250 km nad středním poloměrem Země rozložením hmoty v nejsvrchnější ~80 km mocné vrstvě Země, jak ji popisuje model CRUST1.0. Tuto predikci porovnáváme s daty modelu sestaveného na základě měření satelitní gravimetrické mise GOCE. Zjistili jsme, že ve smyslu RMS hodnoty (root mean square) má predikovaný signál ~4 krát větší amplitudu než měřená data. K tomuto nadhodnocení dochází konzistentně napříč sférickým harmonickým spektrem, přičemž spektrální korelace predikce vs. měření je slabá. Naše výsledky motivují potřebu zlepšení modelu CRUST1.0 a podobných modelů začleněním gravitačních dat v obrácené úloze při konstrukci modelu.

Klíčová slova: zemská kůra, model CRUST1.0, gravitační pole Zeme, GOCE, sférická harmonická analýza, geoneutrína

Title: Gravitational signal of Earth's crustal models

Author: Jaroslav Jaroš

Department: Department of Geophysics

Supervisor: RNDr. Ondřej Šrámek, Ph.D

Abstract: Global models of the Earth's crust, such as CRUST1.0, describe the 3-D distribution of seismic speeds and of material density in the crust. They are widely used in the geophysical community as reference models in local and regional seismic studies and are also the basis of current prediction models of geoneutrino flux from Earth's lithosphere. In this study we attempt to validate the seismology-based CRUST1.0 model using GOCE-derived gravity data. We calculate the anomalous gravitational potential and its first and second radial derivatives, induced at altitude of 250 km by the density distribution in the uppermost ~80 km thick shell of the Earth as described by CRUST1.0. We then compare the prediction with the GOCE model datasets inferred from the GOCE mission satellite gravity measurements. We find that the predicted signal is a factor of ~4 stronger than the measurement in terms of its root-mean-square value. The signal overestimation is consistent across the spherical harmonic spectrum and the spectral correlation of prediction vs. measurement is weak.

Our findings motivate the need for improvement of CRUST1.0 and similar models by incorporating gravity data in the model inversion.

Keywords: Earth's crust, model CRUST1.0, Earth's gravity field, GOCE, spherical harmonics analysis, geoneutrinos

Názov práce: Gravitačný signál modelov zemskej kôry

Autor: Jaroslav Jaroš

Katedra / Ústav: Katedra geofyziky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Ondřej Šrámek, Ph.D

Abstrakt: Globálne modely zemskej kôry, ako je napr. CRUST1.0, popisujú trojrozmernú distribúciu seizmických rýchlostí a materiálovej hustoty v zemskej kôre. V rámci geofyzikálnej komunity sú široko rozšírené ako referenčné modely pri lokálnych či regionálnych seizmických štúdiách a sú tiež základom súčasných predikčných modelov toku geoneutrín z litosféry Zeme. V tejto práci sa snažíme validovať (na seizmologických dátach založený) model CRUST1.0 pomocou gravitačných dát zo sondy GOCE. Počítame anomálny gravitačný potenciál a jeho prvé a druhé radiálne derivácie, ktoré sú vo výške 250 km nad stredným zemským polomerom generované rozložením hustoty v najvyššej, približne 80 km hrubej vrstve Zeme, ako ju popisuje model CRUST1.0. Ďalej porovnáваме túto predikciu s dátovými súbormi modelu gravitačného poľa, ktorý bol odvodený z gravitačných meraní satelitnej misie GOCE. Zistili sme, že predikovaný signál je asi 4-násobne silnejší v zmysle kvadratických priemerov (RMS). Nadhodnotenie signálu je konzistentné naprieč všetkými sférickými koeficientami a korelačné spektrum porovnania nami získanej predikcie s meraniami je slabé. Naše zistenia motivujú potrebu po zlepšení modelu CRUST1.0 a podobných modelov začlenením gravitačných dát do inverzných úloh pri ich tvorbe.

Kľúčové slová: zemska kôra, model CRUST1.0, gravitačné pole Zeme, GOCE, sférická harmonická analýza, geoneutrína

Obsah

Úvod	1
1. Teoretické východiská práce	4
1.1. Motivácie a metodika práce.....	4
1.2. Globálne modely zemskej kôry všeobecne.....	4
1.3. Modely rodiny CRUST	6
1.4. Gravitačné pole Zeme	10
1.5. Meranie gravitačného poľa a misia sondy GOCE	11
1.6. Geoneutrína.....	12
2. Matematický popis úlohy o potenciáli.....	15
2.1. Newtonov gravitačný zákon	15
2.2. Poissonova rovnica.....	16
2.3. Určenie potenciálu v okolí Zeme	19
3. Výpočet gravitačného poľa z modelu CRUST1.0	22
3.1. Princíp programátorského riešenia výpočtu potenciálov V , V_r a V_{rr}	22
3.2. Analýza modelu CRUST1.0 a výpočet jednovrstvovej aproximácie.....	23
3.2. Získané výsledky pre jednovrstvovú aproximáciu.....	28
3.3. Spôsob výpočtu viacvrstvovej aproximácie	30
3.4. Konvergencia viacvrstvovej aproximácie	33
3.5. Získané výsledky vo viacvrstvovej aproximácii.....	36
3.6. Výkonové spektrá a korelačné koeficienty.....	36
3.7. Príprava dát zo sondy GOCE pre ich porovnanie s predikciou modelu.....	39
3.8. Porovnanie jednovrstvovej a viacvrstvovej aproximácie zemskej kôry	41
3.9. Porovnanie dát z misie GOCE s predikciou gravitačného poľa	44
3.10. Diskusia výsledkov.....	52
Záver	53
Zoznam použitej literatúry.....	54
Zoznam tabuliek	57
Zoznam obrázkov	58

Úvod

Gravimetria je jedným zo základných nástrojov štúdia Zeme, ako aj iných telies. Presnými meraniami gravitačného (resp. tiažového) poľa vieme študovať hustotné anomálie a variácie v zložení planét, ich mesiacov či v princípe akýchkoľvek vesmírnych objektov, ktoré nám vedia bližšie odhaliť nie len ich skladbu, ale aj dynamiku pod ich povrchom, či ich časový vývoj. Hoci vo všeobecnosti by sa dalo tvrdiť, že jej prínos je menší, než je ten z dát získaných zo seizmických meraní, keďže presne lokalizovať spomínané anomálie je náročnejšie, predsa satelitné misie (ako bola napr. misia sondy GOCE) nám dokážu z gravitačných meraní poskytnúť cenné dáta pre oblasti, kde dostatok iných dát nemáme. (Geolab, Earth crustal modelling) Pomocou gravimetrie sa dali tiež zlepšiť merania tvaru našej planéty aj na miestach, kde tradičné geodetické metódy aplikovateľné neboli. Ako uvádza Novotný (1998, str. 12), typicky tým máme na mysli oceány. Ak to zhrnieme, je celkom na mieste vysloviť tvrdenie, že zaradenie gravimetrie medzi štandardné nástroje geofyziky predstavovalo historicky veľmi dôležitú etapu vo vývoji štúdia fyziky Zeme. Jedným zo spôsobov, akým vieme gravimetriu využiť, je možnosť použiť jej zistenia na vytváranie modelov hustotných anomálií v Zemi (inverzný gravimetrický problém). Druhým je možnosť už existujúce modely, ktoré vznikli prevažne zo seizmických dát, pomocou nej verifikovať. V praxi to znamená vypočítať na ich základe predikciu toho, ako by malo vyzeráť gravitačné pole a porovnať to s meraniami.

Týmito modelmi môžu byť napríklad globálne modely zemskej kôry. Tieto modely slúžia hlavne ako referenčné modely pri regionálnych či lokálnych seizmických štúdiách. Svoju dôležitú úlohu zohrávajú pri monitorovaní zemetrasení, či nukleárnych výbuchov (Laske a kol., 2013), kde je dôležité určiť ich magnitúdu a presnú lokáciu, k čomu je potrebné mať dobrý model rýchlosti šírenia seizmických vln v zemskej kôre. Ak chceme toto šírenie naozaj dobre pochopiť a študovať, je potrebné na regionálnej škále modelovať krátkoperiodické povrchové vlny a šírenie L_g vln (typ odrazených povrchových S-vln). Tento prístup je však veľmi citlivý na zmeny v štruktúre kôry (Laske a kol., 2013), a preto platí, že čím lepší, presnejší a detailnejší model máme, tým viac vieme náš výskum spresniť. Podrobnejšie sa globálnym modelom kôry venujeme v teoretickej časti práce.

Gravitačný signál modelov zemskej kôry má tak význam študovať v rámci geofyziky hneď z niekoľkých dôvodov. V prvom rade nám ponúka možnosť lepšie skúmať rozloženie hmoty v zemskej kôre a porovnávať syntetické predikcie rozloženia gravitačného poľa, ktoré by predpokladané rozloženie hmoty podľa modelu generovalo, s reálnymi výsledkami gravimetrie. Umožňuje nám však aj lepšie pochopenie tohto rozloženia, čo nám môže pomôcť zlepšiť predstavu o rozložení ťažkých, rádioaktívnych prvkov v zemskej kôre.

Časť týchto prvkov sa rozpadáva aj tzv. β rozpadmi. Ide o druh rádioaktívneho rozpadu, pre ktorý je charakteristické uvoľnenie istého množstva energie (tzv. rádiogenné teplo) a vznik málo interagujúcej častice, ktorú nazývame neutríno. Pre svoj pôvod a na odlišenie on neutrín prilietajúcich z iných vesmírnych zdrojov nazývame geoneutrína, ktoré vznikajú týmito rozpadmi v telese planéty Zem geoneutrínami. Ak by sme ich tok dokázali merať, vieme určiť to, koľkým takýmto rozpadom dochádza a aké veľké množstvo tepla sa ich rozpadmi generuje. Avšak, ak poznáme geometrické rozloženie hmotnostnej hustoty v zemskej kôre a rýchlosť šírenia seizmických vln, vieme dokonca uviesť istú predikciu množstva β rozpadov ťažkých prvkov, ku ktorým by v nej malo dôjsť a predikovať tok geoneutrín z kôry. Takto vieme zvoliť nie len najvhodnejšie miesta na stavbu detektorov, ale tiež odčítať toto množstvo od celkového nami nameraného toku za cieľom zistenia toho, koľko interakcii v našom detektore pochádza od geoneutrín s pôvodom v zemskom plášti – čo je aktuálne najhlavnejšou výzvou tohto pomerne mladého oboru.

Štúdium geoneutrín, najmä tých plášťových, nám vie poskytnúť viacero odpovedí. Spomeňme aspoň to, že nám môže pomôcť spresniť odhady množstva rádiogenného tepla, ktoré sa generuje pri už spomínaných rádioaktívnych β rozpadoch. Následne vieme tento zlepšený odhad použiť pri určení nerádiogénnych príspevkov tepelnej bilancie Zeme (predovšetkým tzv. primordiálneho tepla), ktoré získame tak, že celkové rádiogenné teplo odčítame od celkového tepelného toku z vnútra Zeme, ktorý už dnes metódy geofyziky umožňujú určiť pomerne presne.¹ Zlepšenie tohto odhadu nám pomôže nie len lepšie pochopiť podmienky, aké panovali na Zemi, keď vznikala, ale aj to, ako prebiehal jej postupný dynamický vývoj neskôr (najmä v oblasti zemského plášťa) a v neposlednom rade tiež môže pomôcť lepšie určiť dobu, počas ktorej tejto proces prebiehal, čiže inak povedané jej vek.

¹ Jeho typicky uvádzanou hodnotou je 46 ± 3 TW (Jaupart a kol., 2015).

Hlavným cieľom práce je teda validovať globálne modely zemskej kôry pomocou meraní gravitačného poľa Zeme. V práci postupne vysvetľujeme hlbšie teoretické pozadie motivácie, opisujeme a stručne uvedieme použitý matematický aparát ako aj predpoklady, z ktorých sme vychádzali. Uvádzame tiež postup a nakoniec v závere zhŕňame výsledky a interpretujeme ich.

1. Teoretické východiská práce

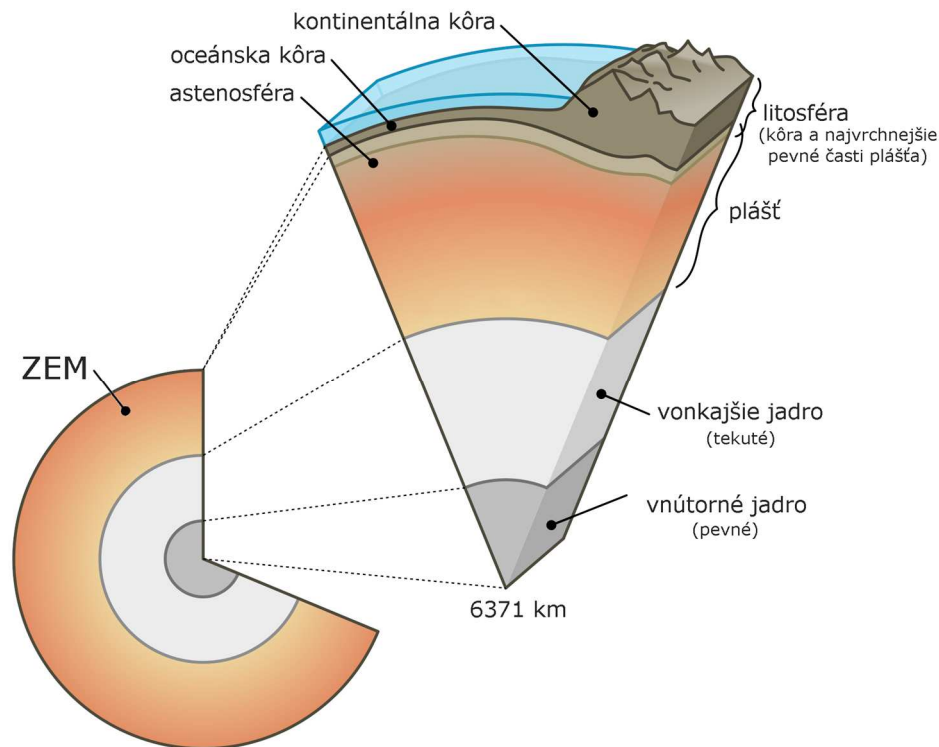
1.1. Motivácie a metodika práce

Motiváciou našej práce bolo hlavne overiť, či súčasné poznatky o geometrickom rozložení hustoty hmotných más v zemskej kôre sú naozaj dobre použiteľné pre štatistické spracovanie a zmysluplnú interpretáciu merania geoneutrín. Preň je poznanie zloženia zemskej kôry v okolí detektorov kľúčové, keďže jedným z jeho hlavných cieľov je meranie signálu (toku) geoneutrín prichádzajúceho zo zemskeho plášťa. Ako hlavný cieľ sme si teda stanovili validáciu globálneho modelu zemskej kôry z rodiny modelov CRUST pomocou gravitačného poľa. Viedol nás k tomu samotný fakt, že modely rodiny CRUST v sebe žiadnu gravitačnú informáciu nemajú a je celkom užitočné sa pozrieť na to, či vôbec gravitačný signál, ktorý predikujú zodpovedá realite, t.j. meraniam.

Metodikou pre nami predkladanú a vypracovanú prácu bolo teda najmä študovanie rozloženia hmoty v zemskej kôre tak, ako ju predpokladajú globálne modely zemskej kôry z rodiny modelov CRUST a po vypočítaní gravitačného potenciálu, ktorý by týmto modelom pre zemskú kôru zodpovedal, ich porovnanie s družicovými dátami, ktoré by sme následne diskutovali. V nasledujúcich podkapitolách sa pokúsime tu použité pojmy trochu priblížiť a vysvetliť.

1.2. Globálne modely zemskej kôry všeobecne

Zem je predmetom skúmania prírodovedných odborov azda od nepamäti. Hoci spočiatku sme sa ako ľudstvo skôr zameriavali len na naše bezprostredné okolie, a teda nás zaujímali prírodné javy pozorovateľné len na jej povrchu, neskôr sa pridali aj javy v malých hĺbkach pod vodou, v atmosfére a v blízkom vesmírnom okolí. Postupne sme však začali skúmať náš svet a pozemský domov ako celok a začalo nás zaujímať aj samotné teleso planéty Zem, ako planéty na ktorej žijeme, hýbeme sa a sme. Aj ono samotné sa tak stalo úžasným nástrojom na pochopenie komplexnosti toho, čo nazývame vesmírom. Z pohľadu geofyziky rozlišujeme na základe zmien rýchlosti šírenia seizmických vĺn zemským telesom, ale tiež tlaku, hustoty (hmoty) a teploty, tri tzv. základné geosféry (vrstvy budujúce Zem), ktorými sú: zemské jadro, zemský plášť a zemská kôra (Encyklopedický ústav SAV, 1999 – 2018). Môžeme si to schematicky predstaviť pomocou obrázku 1.1 nižšie.



Obr. 1.1 Schematické znázornenie geosfér Zeme. Geofyzika rozlišuje tri tzv. základné geosféry: zemské jadro, zemský plášť a zemskú kôru (obrázok je prebratý a upravený z https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Earth_cutaway_schematic-en.svg)

Na základe lokálnych seizmických a geologických dát (napr. hĺbkové vrty) prípadne aj gravimetrickými meraniami (najmä pre oblasti, kde dáta z prvej skupiny neexistujú) boli postupom času zostrojené globálne modely zemskej kôry, ktoré dôkladne popisujú geometrickú štruktúru, rozloženie hustoty hmoty a rýchlosti propagácie seizmických vln v pevninskej ako aj oceánskej kôre. Súčasťou týchto modelov v súčasnosti dokonca nie sú len dáta pre kôru, ale aj pre najvrchnejšie časti vonkajšieho plášťa. Ani v jednom prípade však nejde o gravitačný model, akoby sa niekto mohol nazdávať, ale o čisto model kôry Zeme, z ktorej parametrov však napr. vieme gravitačné pole vypočítať, čo je koniec koncov aj naším cieľom. Častým využitím týchto modelov je ich použitie ako referenčných modelov pri lokálnom štúdiu zemetrasení. No ich využitie môže byť širšie. Okrem tých, ktoré sme naznačili v úvode, spomeňme ešte, že sú veľmi využívané aj pri globálnej tomografii, kde je často žiadúce odstrániť efekt, ktorý do výsledkov vnáša kôra s cieľom lepšie zobrazit' pod ňou ležiaci plášť (Pasyanos a kol., 2014). Ukazuje sa, že svoju aplikáciu nachádzajú aj pri štúdiu geoneutrín, pre ktoré je potrebné dobre poznať zloženie zemskej kôry v okolí detektorov použitých na ich meranie (Šrámek, 2020).

Ako zhrňajú Mooney, Laske a Masters (1998) a Tenzer (2015), historicky je vznik týchto modelov úzko spätý z dostupnosťou kvalitných dát. Medzi skoršie modely patril napr. model od Sollera a kol. (1982), ktorý prinášal mapu hrúbok kôry, avšak bližšie neuvádzal hodnoty rýchlostí seizmických vln ani hustôt. Neskoršie modely boli tvorené napr. nepravidelnými oblasťami s jednotnou štruktúrou². V roku 1995 publikoval svoj model Tanimoto (1995). Rok 1996 zas priniesol model kôry a vrchného plášťa (pod názvom 3SMAC) od Natafa a Ricarda (1996), odvodený zo seizmologických ako aj neseizmologických dát (chemické zloženia, polohy horúcich škvŕn, tepelné toky), z ktorých určoval hustoty a seizmické rýchlosti pre jednotlivé vrstvy. Bol definovaný na sieti s rozmermi $2^\circ \times 2^\circ$.

1.3. Modely rodiny CRUST³

V roku 1998 bol publikovaný model CRUST5.1, ktorý na rozdiel od vyššie spomínaných spracovával doposiaľ nevídané množstvo dát (Mooney, Laske a Masters, 1998). Išlo o jeden z prvých, naozaj komplexných modelov zemskej kôry v globálnej mierke. Jeho zostavenie trvalo niekoľko rokov, keďže vychádzal z informácií získaných pri hĺbkových vrtoch ako aj z aktívnych seizmických metód. Vďaka týmto meraniam priniesol detailné dáta o hrúbke a fyzikálnych vlastnostiach pre sedimentačné panvy, oceánsku aj vnútrokontinentálnu kôru či pasívne okraje medzi oceánskou a kontinentálnou kôrou (Mooney, Laske a Masters, 1998). Veličiny modelu pre oblasti, kde veľa meraní neprebehlo (hlavne časti Afriky, Južnej Ameriky či Grónska) priemerovo, vychádzajú pri tom z podobných tektonických i geologických podmienok a minulosti oblastí Zeme, pre ktoré bol dostatok dát. (Mooney, Laske a Masters, 1998). Hrúbky sedimentov a ľadu boli získané z už publikovaných máp, batymetria (merania hĺbok morského dna) a topografia pevniny je prebratá z modelu ETOPO5. Model pracuje s rozdelením zemskeho povrchu na dlaždice s rozmermi $5^\circ \times 5^\circ$ v zemepisnej šírke a dĺžke (v ekvatoriálnych oblastiach to zodpovedá približne štvorcu zo stranami 550 km x 550 km), pričom každej dlaždici pripisuje jeden zo 139 jednodimenzionálnych geologických profilov. Každý profil je tvorený 7 vrstvami (definované hornou hranicou, pričom spodná hranica vrstvy je

² Ako ten z roku 1984 od Hahn a kol.

³ Nasledujúce odstavce sa výrazne odvolávajú na oficiálne webstránky modelov.

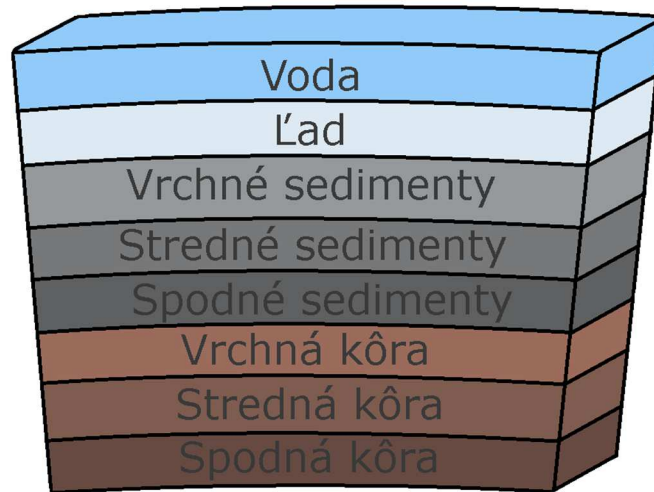
daná hornou hranicou vrstvy po nej nasledujúcej), kde jednotlivé vrstvy zodpovedajú (postupne): *ľadu, vode, mäkkým sedimentom, tvrdým sedimentom, vonkajšej kôre, strednej kôre a spodnej kôre*. Každá dlaždica môže byť identifikovaná svojim stredom, ktorého zemepisné súradnice sú jedinečné a predstavujú referenčný bod danej dlaždice. Súčasťou modelu sú aj hodnoty rýchlosti šírenia objemových (tiež nazývaných priestorové) primárnych/pondĺžnych (tzv. P-) a sekundárnych/priečných (tzv. S-) vln a hustoty pre každú z vrstiev. Po týchto 7 vrstvách je ešte posledná, doplnková „vrstva“, daná však len hornou hranicou, ktorá pre danú dlaždicu predstavuje hodnotu hĺbky tzv. Mohorovičičovej diskontinuity⁴. Tá je skrátene nazývaná aj *MOHO* a tvorí rozhranie medzi zemskou kôrou a zemským plášťom. Rovnako model aj pre túto „vrstvu“ uvádza rýchlosti šírenia P- aj S-vln, pričom hodnota hustoty zodpovedá hodnote vo vrchných častiach vonkajšieho plášťa pod MOHO.

Pokračovateľom tohto modelu bol model CRUST2.0 (Bassin, Laske a Masters, 2000). Ide o aktualizáciu modelu CRUST5.1. Ako naznačuje aj jeho názov, hlavná zmena nastala v rozlíšení, kde boli predstavené po novom menšie rozmery dlaždíc, konkrétne $2^{\circ} \times 2^{\circ}$ (zemepisná šírka \times dĺžka). Menšie zmeny nastali tiež v zlepšenej presnosti hrúbky ľadovej vrstvy a sedimentárnych vrstiev ako aj celkovej hrúbky kôry. Zlepšený bol tiež odhad seizmických rýchlostí. Napríklad pre vodu bola rýchlosť P-vln zmenená z 1,45 km/s na 1,50 km/s (prechádzajúca hodnota platí pre vyššie zemepisné šírky) (Laske, Masters a Reif, 2001).

Predposledným evolučným krokom v rodine modelov CRUST bol globálny model zemskej kôry, ktorý je svetu známy pod názvom CRUST1.0. Bol zavŕšením dlho očakávanej práce, ktorá po istých problémoch prototypu bola zakončená jeho oficiálnym vydaním v júli 2013. Model CRUST1.0 priniesol rozdelenie povrchu Zeme na dlaždice s rozmermi iba $1^{\circ} \times 1^{\circ}$. Pre predstavu uvedme, že v oblasti rovníka by táto dlaždica zodpovedala štvorcovej bunke s rozmermi 110 km². Rovnako, ako svojho času pri CRUST2.0, aj do tohto modelu autori zapracovali nové, v tej dobe najaktuálnejšie údaje o hrúbke sedimentov (Laske, 2013). Batymetria a topografia je v tomto modeli kôry prebratá z modelu ETOPO1 (je to globálny model zemskeho reliéfu,

⁴ Mohorovičičovu diskontinuitu charakterizuje náhla zmena hustoty. Vzniká tak rozhranie, od ktorého sa môžu odrážať seizmické vlny. Bola objavená chorvátskym geofyzikom A. Mohorovičičom začiatkom 20. storočia. Najhlbšie sa nachádza pod kontinentami a najplytšie pod oceánmi. Pre územie ČR a SR sa jej hodnoty pohybujú od 27,5 km až po niečo okolo 42 km (Bielik a kol., 2018).

s rozlíšením 1 oblúkovej minúty). Každá dlaždice má unikátny 8-vrstvový profil, pričom jednotlivé vrstvy sú znázornené na obrázku 1.2.

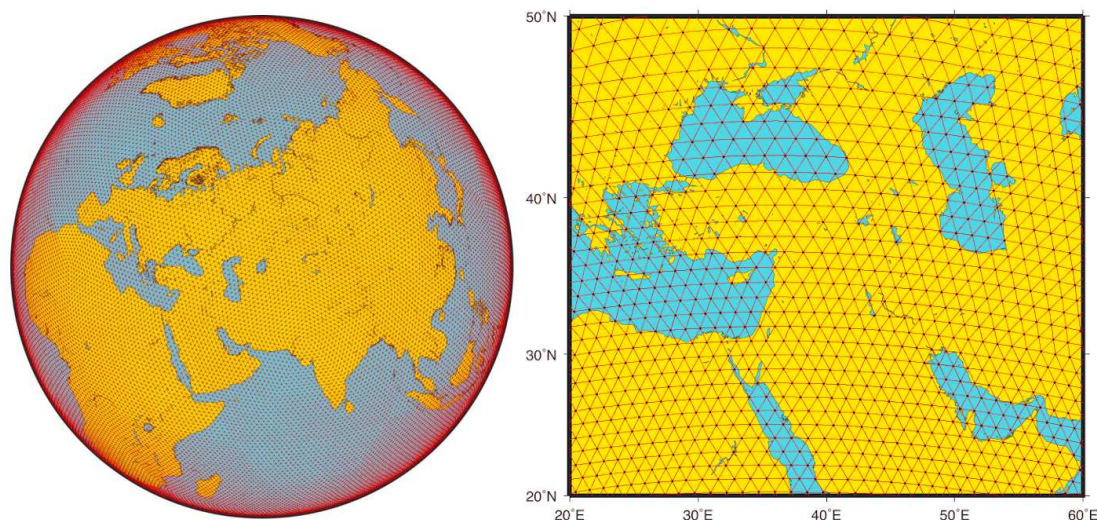


Obr. 1.2 Vrstvy jednej dlaždice v modeli CRUST1.0. Obrázok znázorňuje vertikálne usporiadanie vrstiev, z ktorých je tvorený dlaždicový popis globálneho modelu zemskej kôry.

Podobne ako v prípade predchádzajúcich dvoch modelov z tejto rodiny, aj tu je akoby doplnková, zo spodnej strany neobmedzená vrstva, ktorá má len hornú hranicu, predstavujúcu najvrchnejšie časti vonkajšieho plášťa pre tú ktorú dlaždicu. Opäť máme pre každú vrstvu určenú hodnotu rýchlosti seizmických vln (pozdĺžnych (P) aj priečnych (S)) i hustotu, ako aj hodnoty týchto veličín pre plášť tesne pod Mohorovičicovou diskontinuitou. Jeho najväčším prínosom je zlepšená presnosť a rozlíšenie, ktoré umožňuje pozorovať menšie nerovnomernosti v distribúcii hmoty naprieč kôrou, a tak aj možnosť sledovať tieto zmeny na lokálnejšej báze.

Zatiaľ úplne posledným prírastkom do rodiny modelov CRUST je model, ktorý je svetu známy pod menom LITHO1.0. Ide o model kôry a vrchného plášťa, ktorý pre lepšie pokrytie cirkumpolárnych oblastí zvolil prístup tzv. *teselácie*. Na rozdiel od predchádzajúcich modelov (CRUST5.1 či CRUST1.0), kde sa dlaždice pri pólach deformujú na zvláštne trojuholníky (ak by sme ich chceli premietnuť na zemský povrch) a ich referenčné body sú tým pádom vzájomne nerovnomerne rozmiestnené, zvolili autori modelu LITHO1.0 rozdelenie zemského povrchu na celkovo 81 920 malých trojuholníkov (porovnaj s obrázkom 1.3). Tie sa získajú tak, že sa Zem najprv

aproximuje ikosaédrom (pravidelným dvadsaťstenom), ktorý je tvorený 20 rovnostrannými trojuholníkmi. Každý sa následne rozdelí na 4 menšie jemu podobné trojuholníky, čo vzdialenosť medzi myslenými referenčnými bodmi (sú tvorené vrcholmi trojuholníkov) zmenší o polovicu, ak sa to opakuje šesťkrát, nakoniec sa vzdialenosť medzi nimi ustáli na približne 1° v zmysle zemepisnej šírky i dĺžky. Za lepšie vzorkovanie v okolí pólu sa však platí daň v podobe menšieho celkového počtu referenčných bodov, než je tomu v prípade rovnomerne pravouhlej 1° siete, akú má spomínaný CRUST1.0 (jeho počet referenčných bodov je 64 800, pre každý stred dlaždice jeden). Model je tiež oproti modelu CRUST1.0 rozšírený o vrch litosféry a astenosféru (čo vysvetľuje jeho názov), celkovo má tak 10 vrstiev (Pasyanos a kol., 2014).



Obr. 1.3 Zobrazenie teselačnej parametrizácie modelu LITHO1.0 na globálnej a regionálnej škále. Čierne bodky reprezentujú referenčné body modelu, zatiaľ čo červené čiary spájajú tieto body navzájom.

Posledné tri menované modely sú si navzájom v celku podobné. Model CRUST1.0 je prepracovanejší než CRUST2.0, ale pracuje sa s ním azda trochu ľahšie než s modelom LITHO1.0, ktorý je voči nemu rozšírený o ďalšie informácie a 3 vrstvy dlaždíc. Hoci sme pôvodne uvažovali skúsiť verifikovať viacero modelov (minimálne v rámci rodiny CRUST, aby sme ich vedeli porovnať), pre komplexnosť a limitovaný rozsah, ktorý by naša práca mala pokrývať, sme sa rozhodli spracovať iba model CRUST1.0. K tomuto nás oprávňuje aj článok Wipperfurtha, Šrámka a McDonougha (2020), v ktorom sa autori zaoberali predikciou toku geoneutrín

z litosféry a tiež rádiogenného výkonu v litosfére. V ich práci sa im podarilo ukázať, že naprieč všetkými tromi spomínanými modelmi dostávajú podobné výsledky, ktoré „ležia v rozmedzí fyzikálnej neistoty každého z modelov, naznačujúc tak, že voľba podkladového geofyzikálneho modelu nezmení výsledky [toku geoneutrín] nijak výrazne – ale posunie strednú hodnotu až o 15%.“

1.4. Gravitačné pole Zeme

Tak ako všetky hmotné objekty vo vesmíre, tak aj Zem vytvára vo svojom okolí gravitačné pole.⁵ Keďže ide o pole konzervatívnych síl, toto pole je v priestore jednoznačne charakterizované skalárnou funkciou, ktorú nazývame potenciál. Slovom potenciál (vychádzajúce z latinského *potentia* - moc, možnosť) vyjadrujeme schopnosť silového poľa konať prácu. Môžeme sa naň tiež pozeráť ako na hodnotu potenciálnej energie na jednotku hmoty. Na základe polohy v silovom poli vieme totiž telesám, ktoré sa v ňom nachádzajú, prideliť istú hodnotu potenciálnej energie a tieto sa (ak sú ponechané bez nejakých vonkajších väzieb) samovoľne vyvíjajú tak, že sa snažia zaujať dostupnú polohu v priestore, kde je hodnota tejto energie najnižšia. Pri tomto premiestnení sa koná práca na úkor zmeny polohovej energie tohto telesa.

Gravitačný potenciál je neraz v geofyzike nazývaný aj *gravitačným signálom*, snáď je tomu pre nápadnú podobnosť popisu elektromagnetického poľa v jeho elektrostatickej aproximácii a spomínaného gravitačného poľa. V elektrostatickom poli môžeme rovnako zaviesť (elektrostatický) potenciál ako istú skalárnu funkciu. Táto popisuje priestorové rozloženie poľa, ktoré je generované nejakým rozložením hustoty. Tá tvorí jeho zdroj. Podobne sa môžeme spätne pozrieť na gravitačné pole, teraz zas z pohľadu poľa elektrostatického. Zistíme, že aj gravitačné pole je tvorené istou distribúciou hustoty, v prípade gravitácie však nejde o rozloženie hustoty elektrického náboja, ale o rozloženie hmotnostnej hustoty (nazývanej aj objemová hmotnosť alebo často len jednoducho „hustota“) v priestore. Ide tak o „zdroj“ gravitačného poľa o istej intenzite, ktorá je tým pádom gravitačnou intenzitou. (resp. intenzitou gravitačného poľa). Nakoniec, rovnako ako vieme v elektrostatickom poli zaviesť jednoznačný vzťah medzi veličinou intenzity

⁵ Navyše, ako je všeobecne známe, koná aj rotačný pohyb okolo vlastnej osi. Sily gravitačného poľa sa teda skladajú s dostredivým pôsobením a vzniká tak pole tiažové (Novotný, 1998). Pre jednoduchosť ho však teraz nebudeme uvažovať a popisovať budeme len čisto pole gravitačné.

a potenciálom poľa, vieme zaviesť vzťah medzi intenzitou a potenciálom aj pri gravitačnom poli. Ak sa tento gravitačný potenciál v priestore mení (pre stabilné výškové hladiny nad povrchom nie je všade rovnaký), zaznamenávame ho ako „signál“.

Gravitačné pole Zeme, i keď ide o konzervatívne silové pole, nie je homogénne. Okrem toho, že závisí na vzdialenosti od zdroja (t.j. hmoty), závisí aj na polohe voči zemepisným súradniciam. To je dané tým, že v rámci Zeme nie je rozloženie hmoty homogénne. Už len samotný povrch Zeme je značne členitý, a tak ako na niektorých miestach sú veľké masy hornín, inde sú zas masy vôd s navzájom rôznymi hmotnostnými hustotami. Spomeňme tiež fakt, ktorý vo svojej knihe podotýka J. Wahr (1996), keď pripomína, že *„navzájom rôzne rozloženia hustoty môžu dať rovnaké gravitačné pole. Čiže znalosť poľa vie ohraničiť možné hodnoty hustoty, ale neurčuje ju jednoznačne.“* Preto by sme mali byť pri interpretáciách meraní potenciálu veľmi opatrní. Keďže v našej práci sa neskôr odvolávame na dáta z merania gravitačného poľa Zeme satelitnými misiami, povieme si o tom, ako samotný zber týchto dát prebieha v ďalšej podkapitole.

1.5. Meranie gravitačného poľa a misia sondy GOCE

Merania gravitačného poľa Zeme sa do dnešného dňa zúčastnilo hneď niekoľko sond. Jednou z misií zameraných na výskum a meranie gravitačného poľa, predovšetkým jeho časových zmien, bola napr. v rokoch 2002–2017 misia GRACE (projekt pod záštitou NASA), pozostávajúca z dvoch satelitov. Meranie gravitačného poľa fungovalo na princípe neustáleho merania ich vzájomnej vzdialenosti pomocou mikrovlnného elektromagnetického žiarenia. Pri pohybe satelitov sa odchýlka v gravitačnom poli prejaví lokálnym zrýchlením či spomalením jedného satelitu voči druhému, čo sa odrazí na ich meranej vzájomnej vzdialenosti (NASA, 2007),

Lepšie priestorové rozlíšenie však priniesla sonda GOCE (skratka pre *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*), určená na meranie statického gravitačného poľa (referenčného geoidu), ktorá bola vynesená na nízku obežnú dráhu v priebehu roku 2009. Lietala okolo Zeme na obežnej dráhe s polomerom okolo 250 km (v prvej etape misie), neskôr klesla až na 224 km. Po predĺžení jej misia trvala až do roku 2013. Išlo o projekt ESA, na ktorom sa podieľala aj Česká republika, konkrétne Astronomický ústav AV ČR v Ondřejeve, ktorý pomáhal s výpočtami jej presnej dráhy.

Princíp merania gravitačného poľa, ktorý používala misia GOCE bol naozaj unikátny. Keďže sa sonda pohybovala po nízkej obežnej dráhe, musela riešiť aj svoju aerodynamiku, aby okolitá atmosféra (akokoľvek riedka, ale stále prítomná) nevstupovala svojimi negatívnymi vplyvmi do výsledkov merania. Na samotné meranie sonda používala tzv. gradiometriu, ktorá spočíva v meraní zmien gravitačného zrýchlenia pomocou elektrostatického gravitačného gradiometra (skr. *EKG*). Toto zariadenie „pozostáva zo 6 kapacitných akcelerometrov rozmiestnených ortogonálne v pároch na vzdialenosť 50 cm, kde každý pár tvorí rameno gradiometra. Základným vedeckým výsledkom gradiometrie je tak rozdiel v zrýchleniach, ktoré namerajú dva akcelerometre tvoriace jedno spoločné rameno.“ (Fehringier a kol., 2008). Presnosť tohto prístroja umožňovala merať zrýchlenia predstavujúce rádovo 10^{-13} hodnoty gravitačného zrýchlenia na povrchu Zeme. Keďže však nie je možné vo všetkých priestorových škálach dosiahnuť rovnakú kvalitu výsledku, pre dlhovlnné časti gravitačného spektra sa používalo zariadenie na presné určenie polohy voči ostatným satelitom, svojím fungovaním veľmi podobné systému GPS, pomocou ktorého sa dali určiť presné parametre obežnej dráhy (tzv. *Satellite to Satellite Tracking Instrument* alebo skrátené *SSTI*). Vďaka nim sa meranie pre nižšie stupne guľových funkcií dalo spresniť. (ESA, 2008)

1.6. Geoneutrína

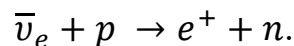
Neutrína sú leptóny, ešte presnejšie fermióny, t.j. elementárne častice s poločíselným spinom. Ich predpovedanie sa datuje do roku 1930 Wolfgangom Paulim a objavené boli približne o 25 rokov neskôr (tento objav bol neskôr ocenený aj Nobelovou cenou za fyziku). Ide o druhú najbežnejšiu časticu vo vesmíre vôbec a ich energetické spektrum siaha od 10^{-6} do 10^{18} eV, pričom pre potreby tejto práce nás zaujímajú približne tie v strede tohto intervalu, ktorých energie sú rádovo 1 MeV (porov. Obr. 1.4). Prvé detekcie geoneutrín spadajú do roku 2005 (detektor KamLAND), resp. 2010 (detektor Borexino).

Ako sme už spomínali v úvode tejto práce, slovom geoneutrína pomenovávame (anti)neutrína pochádzajúce z β rozpadov rádioaktívnych prvkov zo Zeme. Zaviedli sme ho preto, že neutrína s rôznymi energiami k nám prilietajú skoro zo všetkých strán. Ich zdrojom sú napr. jadrové ako aj tepelné procesy v Slnku, ale tiež môžu pochádzať z procesov v atmosfére, či prilietajú z hlbokého kozmického

priestoru – a v neposlednom rade – ich zdrojom sú aj jadrové reakcie v atómových elektrárnach. To je obzvlášť nešťastné, lebo neutrína tohto pôvodu majú podobné energetické spektrum ako práve nás zaujímajúce geoneutrína. (opäť vid'. Obr. 1.4) Pojmom geoneutrína však vo všeobecnosti môžeme označiť všetky neutrína (ich pôvod je v β^+ rozpadoch) a antineutrína (ktoré sú emitované elektrónovými záchytmí (EC) a β^- rozpadmi), ktoré majú svoj fyzikálny pôvod v telese Zeme – či už pochádzajú zo zemskej kôry alebo zo zemského plášťa.

Typickými zdrojmi geoneutrín sú urán ^{238}U , tórium ^{232}Th a draslík ^{40}K . Prvé dva menované prvky sa rozpadajú β^- a α rozpadmi a rozpadový rad sa končí stabilným nuklidom olova. Z ich rozpadov sú teda emitované iba antineutrína. Naproti tomu Draslík sa približne v pomere 9:1 rozpadá buď opäť β^- rozpadom alebo elektrónovým záchytmom, pri ktorom sa emituje neutríno. Aj práve preto môžeme povedať, že ak meriame geoneutrína, zväčša ide o elektrónové antineutrína.

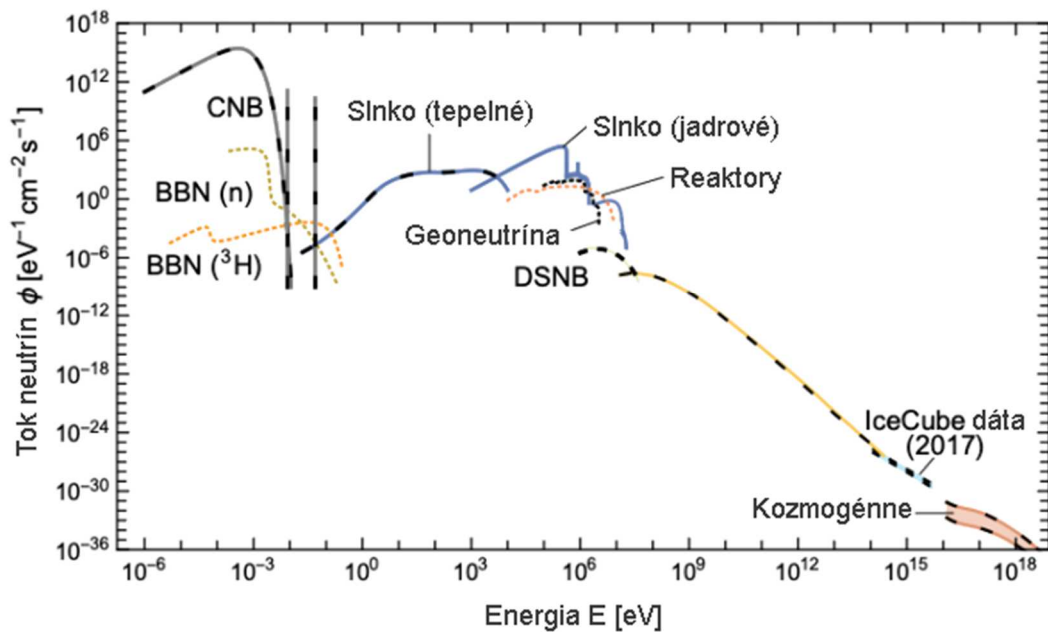
Súčasným spôsobom detekcie týchto zemských neutrín je tzv. inverzný β rozpad, ktorý vieme schematicky popísať rovnicou



Nevýhodou je, že táto reakcia vyžaduje istú prahovú energiu, približne 1,8 MeV, ktorú dosahujú iba geoneutrína generované rozpadmi ^{238}U a ^{232}Th . Na detekciu sa používajú veľké scintilačné detektory majúce tvar balóna naplneného kvapalinou s veľkým obsahom vodíku, keďže potrebujeme dostatočný počet protónov. Keďže šanca, že reakcia prebehne je malá (neutrína sú povestné tým, že nerady interagujú z látkou), hmotnosť kvapaliny v týchto detektoroch neraz dosahuje tisíce ton. Ak už k zachyteniu geoneutrína dôjde, vyžiari sa pozitron, ktorý čoskoro zanihiluje s nejakým elektrónom sa súčasného vyžiarenia dvoch kvánt γ žiarenia. Veľmi blízko tohto miesta čoskoro dôjde tiež k ďalšiemu záblesku – ktorý vytvorí spomalený neutrón interagujúc s protónom pri vzniku deuterónu, jadra deutéria (Šrámek, 2020). Ak vieme tieto dva záblesky priestorovo a časovo jednoznačne fyzikálne spojiť, považujeme záchyt (geo)neutrína za úspešný.

Dôvodom, prečo sú pre dnešnú geofyziku geoneutrína také zaujímavé spočíva v snahe presnejšie určiť tepelnú dynamiku Zeme. Ak by sa nám podarilo lepšie zistiť, ku koľkým jadrovým reakciám z prirodzených rozpadov dochádza v zemskej kôre a zemskom plášti, vieme pomerne presne určiť koľko tepla tieto reakcie uvoľňujú.

Následne jeho odčítaním od celkového tepelného výkonu Zeme (typicky uvádzanou hodnotou je 46 ± 3 TW (Jaupart a kol., 2015)) vieme určiť správnu hodnotu tzv. primordiálneho tepla, pôvodné zostatkového tepla Zeme, ktoré má naša planéta od svojho vzniku a ktoré sa postupne stráca, ako Zem chladne. Avšak, geoneutrína (ak by sme dokázali merať presnejšie aj smer, z ktorého prichádzajú), by sa dali tiež použiť na vyhodnotenie zloženia kôry a plášťa z pohľadu zastúpenia ťažkých prvkov, ako aj presného určenia zastúpenia tepla tvoreného spomínanými rozpadmi v kôre, resp. v plášti. Ak by sa nám podarilo zlepšiť globálne (a prípadne na nich postavené lokálne) modely zemskej kôry, lepším odhadom toho, koľko geoneutrín má svoj pôvod v kôre, by sme vedeli z celkového nameraného počtu interakcii (zachytených neutrín) určiť, koľko ich pochádza z oblastí zemskeho plášťa.



Obr. 1.4 Prehľadový graf zobrazujúci tok neutrín na Zemi a ich zdroje (prebraté z „Grand Unified Neutrino Spectrum (GUNS)“ od Vitagliana, Tamborru a Raffelta, 2020)

2. Matematický popis úlohy o potenciáli

„ V podstate sa všetko redukuje na štúdium Poissonovej rovnice.“ *J. Wahr*

2.1. Newtonov gravitačný zákon

Spolu s Wahrom (1996) môžeme povedať, že to, čo zhrnieme v tejto kapitole, môže mnohým pripadať veľmi povedomé, keďže ide o úplne rovnakú matematiku, akú používame v klasickej elektrodynamike, konkrétne v statiach o elektrostatike. My ju však aplikujeme na gravitačné pole a pokúsime sa sformulovať stručný matematický popis úlohy určenia gravitačného poľa, pri podmienke, že poznáme rozloženie hustoty. Dôvodom, prečo to robíme je fakt, že presne tento postup sme aplikovali aj pri našom riešení tejto práce, keď sme zo známeho rozloženia hustoty (model CRUST1.0) chceli vypočítať jemu odpovedajúci potenciál V .

Ak vyjdeme z Newtonovho gravitačného zákona, pre hmotný bod o hmotnosti M s polohovým vektorom \vec{r}' , gravitačné zrýchlenie $\vec{g}(\vec{r})$ je rovné:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{GM(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}, \quad (1.1)$$

kde G ⁶ predstavuje gravitačnú konštantu (niekedy značená aj κ). Ak máme spojité rozloženie hustoty $\rho(\vec{r}')$ v nejakej oblasti Ω , môžeme vzťah (1.1) prepísať v tvare:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int_{\Omega} \frac{G\rho(\vec{r}')(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} d^3\vec{r}'. \quad (1.2)$$

Pre gravitačný potenciál V potom píšeme:

$$\vec{\nabla}V = \vec{g}(\vec{r}), \quad (1.3)$$

čo nás privádza k vzťahu pre potenciál tak, ako o ňom uvažoval Newton, dostávame tak:

$$V(\vec{r}) = \int \frac{G\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3\vec{r}'. \quad (1.4)$$

⁶ My sme pri našich výpočtoch operovali s hodnotou $6.674\ 30 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (NIST,2018).

Všimnime si predsa len rozdiel so spomínanou elektrostatikou, keď v prípade štúdia gravitačného poľa platí opačná znamienková konvencia, a tak napr. v rovnici 1.4 nie je pred zlomkom znamienko mínus, ale plus. Rozdiely vo vystupujúcich konštantách bližšie nediskutujeme, predpokladáme, že je jasné, že plynú z fyzikálnych odlišností oboch polí.

2.2. Poissonova rovnica

Rovnica 1.4 je však ekvivalentná riešeniu tzv. Poissonovej rovnice v tvare:

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho. \quad (2.1)$$

V skutku ide o rovnocenný a ekvivalentný spôsob reprezentácie Newtonovho gravitačného zákona, kde sme sa rozhodli vyjadriť vzťah pre potenciál diferenciálnou rovnicou 2. rádu namiesto integrálu. Toto odvodenie (v smere od rovnice 1.4 ku rovnici 2.1) môžeme nájsť podrobne rozpísané práve napr. v učebnici od Wahra (1996, str. 75). Dalo by sa samozrejme ukázať (využitím Greenových funkcií), že aj keby sme vyšli z rovnice 2.1, po konečnom počte matematických úprav sa opäť vieme dostať k rovnici 1.4.

Ak si uvedomíme, že chceme počítať hodnoty potenciálu V v priestore mimo Zeme, čiže tam, kde je $\rho(\vec{r}) = 0$, rovnica 2.1 dostáva pomerne triviálnu podobu:

$$\nabla^2 V = 0, \quad (2.2)$$

ktorý nazývame aj Laplaceovou rovnicou (používa sa aj konvencia, že ∇^2 značíme ako Δ , čo potom nazývame Laplaceovým operátorom). Z matematickej analýzy vieme, že ak je nejaká funkcia riešením Laplaceovej rovnice, nazývame ju *harmonickou*. Úžasnou vlastnosťou takýchto funkcií je fakt, že ak sa dve harmonické funkcie, definované v celom priestore rovnajú všade na nejakom objeme (ktorý je jeho podpriezorom), tak sa rovnajú všade. Takto vieme dokázať napr. to, že potenciál v priestore mimo Zeme zavedený tak, ako sme to urobili my, je naozaj jednoznačný (až na konštantu). Rovnako je pozoruhodnou vlastnosťou riešenia Laplaceovej rovnice (všeobecne, nie len pre gravitačný potenciál, i keď ten nás teraz zaujíma), že môže nadobúdať svoje maximum alebo minimum iba na hraniciach priestoru, kde je definované. Vo voľnom priestore preto potenciál nemôže nadobúdať ani svoje

maximum a ani minimum. Ak si ďalej uvedomíme fakt, že súradnice, ktorých symetria má ku skutočnému tvaru Zeme najbližšie, sú sférické, môžeme ďalej používať už iba tie. Využívajúc tvaru Laplaceovho operátora vo sférických súradniciach a v snahe o nájdenie riešenia v separabilnom tvare:

$$V(r, \vartheta, \varphi) = R(r)T(\vartheta)F(\varphi), \quad (2.3)$$

nakoniec prichádzame k dvom funkciám, ktoré vyhovujú rovnici 2.2 a zároveň požiadavke na tvar zhodný s 2.3. Ide o funkcie

$$V(r, \vartheta, \varphi) = r^j P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (2.4)$$

a

$$V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^{j+1}} P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} . \quad (2.5)$$

V popise rovníc 2.4 a 2.5 j predstavuje nezáporné celé číslo, m je celé číslo z intervalu $\langle -j, j \rangle$ a symbolom P_{jm} značíme tzv, *pridružené Legendreove funkcie*, ktoré pre $m \in \langle 0, j \rangle$ majú tvar:

$$P_{jm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_j(x),$$

kde zas $P_j(x)$ predstavuje *Legendreove polynómy*, ktoré všeobecne vyjadrujeme vo forme:

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j.$$

Spolu potom môžeme písať rovno:

$$P_j^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^j \cdot j!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+j}}{dx^{m+j}} (x^2 - 1)^j. \quad (2.6)$$

V odkaze na tvar 2.3, sa potom často dáva závislosť na priestorových premenných ϑ a φ spolu do jednej skupiny funkcií, ktoré nazývame *sférickými harmonickými funkciami*⁷ a definujeme ich výrazmi:

⁷ Dodajme, že občas sa v literatúre pre tieto funkcie môžeme stretnúť aj s názvom *sférické harmoniky*. Rovnako sa pre ne používa aj označenie *gul'ové funkcie*.

$$Y_j^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_j^m(\cos(\vartheta)) e^{im\varphi}, \quad (2.7)$$

pre $m > 0$ a

$$Y_j^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \left(Y_j^{-m}(\vartheta, \varphi) \right)^*, \quad (2.7)$$

pre $m < 0$. Symbolom * značíme komplexné združené. Ak si chceme tieto funkcie nejak intuitívne predstaviť, núka sa hovoriť o indexe j ako tom, čo určuje tvar funkcie Y_j^m , zatiaľ čo m určuje jej orientáciu v priestore (Wahr, 1996, str. 94). Druhým veľmi intuitívnym prístupom je chápať j ako počet uzlových bodov v súradnici ϑ a m ako počet uzlových bodov vo φ .

Pre kratší zápis môžeme zaviesť tiež *plne normalizované pridružené Legendreove funkcie* $\widetilde{P}_j^m(x)$:

$$Y_j^m(\vartheta, \varphi) = \widetilde{P}_j^m(\cos(\vartheta)) e^{im\varphi} \quad (2.8)$$

tak, aby sme pomocou nich dostali plne normalizované sférické harmonické funkcie $Y_j^m(\vartheta, \varphi)$ pre skalárny súčin definovaný na jednotkovej guľovej ploche. Na výpočet týchto plne normalizovaných pridružených Legendreových funkcií vieme použiť hneď niekoľko rekurentných vzťahov (pozri Wahr, 1996, str. 92). My sme postupovali podľa postupu prof. Martinca (1989), keďže sme pri písaní výpočtového programu čiastočne vyšli z jeho publikovaných kódov pre Fortran 77. Využitím notácie podľa 2.8 sa 2.4 a 2.5 zjednodušujú na tvar :

$$V(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r^j \\ r^{-(j+1)} \end{pmatrix} Y_j^m(\vartheta, \varphi). \quad (2.9)$$

Keďže sféricky harmonické funkcie $Y_j^m(\vartheta, \varphi)$, tak ako sme ich definovali, generujú komplexný, kvadraticky integrovateľný Hilbertov priestor na jednotkovej sfére (tvoria

úplný ortogonálny⁸ systém), vieme pre prvok f prislúchajúci tomuto priestoru – za predpokladu, že ide o dostatočne hladkú funkciu – písať abstraktný Fourierov rad. Ak uvážime, že náš prvok je potenciál V , vieme priamo písať:

$$V(\vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j V_j^m Y_j^m(\vartheta, \varphi),$$

kde potom pre jednotlivé komplexné koeficienty V_j^m píšeme:

$$V_j^m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\vartheta) d\vartheta V(\vartheta, \varphi) \left(Y_j^m(\vartheta, \varphi) \right)^* d\varphi. \quad (2.10)$$

Ak je funkcia f reálna, existuje symetria, ktorú opäť – ak uvážime, že nás zaujíma reálny potenciál V – vieme písať rovno preň ako :

$$V_j^m = (-1)^m (V_j^{-m})^*. \quad (2.11)$$

2.3. Určenie potenciálu v okolí Zeme

Predstavme si, že máme dva polohové vektory $\vec{x} = (r, \vartheta, \varphi)$ a $\vec{y} = (\tilde{r}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$ vzdialené o uhol γ . Využitím adičného teorému (Wahr, 1996, str. 93) vieme dôjsť ku vzťahom:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 4\pi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{1}{2j+1} \frac{\tilde{r}^j}{r^{j+1}} Y_j^m(\vartheta, \varphi) \left(Y_j^m(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) \right)^*, \quad |\vec{y}| < |\vec{x}|, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 4\pi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{1}{2j+1} \frac{r^j}{\tilde{r}^{j+1}} Y_j^m(\vartheta, \varphi) \left(Y_j^m(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) \right)^*, \quad |\vec{y}| > |\vec{x}|. \quad (3.2)$$

Ak poznáme rozloženie hustoty $\rho(\vec{r}')$, vieme ho rozvinúť využitím vzťahu 2.9 do podoby:

⁸ V zmysle definície pomocou rovnice 2.8 dokonca ortonormálny.

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} \rho_{j'}^{m'}(\vec{r}') Y_{j'}^{m'}(\vartheta', \varphi'). \quad (3.3)$$

Ak vzťah 3.3 a 3.1 dosadíme do rovnice 1. 4, po chvíľke odvodzovania (Wahr, 1996, str. 97) dostávame výraz :

$$V(\vec{r}) = 4\pi G \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{Y_j^m(\vartheta, \varphi)}{2j+1} \frac{1}{r^{j+1}} \left[\int (\tilde{r})^{j+2} \rho_j^m(\tilde{r}) d\tilde{r} \right]. \quad (3.4)$$

Ten vieme následne ešte viac zjednodušiť pre prípad, že zdrojom nami študovaného potenciálu V je plošná hustota σ na sfére s polomerom $r = R$, vo vzdialenosti r od stredu vzťažnej sústavy. Tak sa dostávame k prvému z trojice najdôležitejších vzorcov nášho odvodenia, vzťahu pre potenciál V , generovanému plošnou (hmotnostnou) hustotou:

$$V = 4\pi GR \sum_j \frac{1}{2j+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{j+1} \sum_m \sigma_j^m Y_j^m(\vartheta, \varphi). \quad (3.5)$$

Zo vzťahu 3.5 vychádzajú aj ďalšie nami používané vzťahy. Jeden pre gradient potenciálu V v radiálnom smere a druhý pre 2. deriváciu v radiálnom smere⁹:

$$V_r = 4\pi GR \sum_j \left(-\frac{j+1}{r}\right) \frac{1}{2j+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{j+1} \sum_m \sigma_j^m Y_j^m(\vartheta, \varphi), \quad (3.6)$$

⁹ Keďže variácie v tangenciálnom smere považujeme za veľmi malé, môžeme pojem *grad* V a *grad* g , ktoré by tu mali prirodzene vystupovať, aproximovať radiálnymi deriváciami potenciálu V ako jeho prvú a druhú deriváciu podľa r . Zároveň je to aj celkom užitočné, pretože g a jeho gradient sa pomerne dobre dajú merať.

$$V_{rr} = 4\pi GR \sum_j \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \frac{1}{2j+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{j+1} \sum_m \sigma_j^m Y_j^m(\vartheta, \varphi). \quad (3.7)$$

Nakoniec, podotknime, že gradientom potenciálu V rozumieme v podstate intenzitu gravitačného poľa. Bežnejšie ja však nazývať túto veličinu gravitačným zrýchlením g . V ďalších častiach práce túto určitú voľnosť pri výbere pomenovania tejto veličiny využijeme a budeme tieto pomenovania používať navzájom zámenne.

3. Výpočet gravitačného poľa z modelu CRUST1.0

3.1. Princíp programátorského riešenia výpočtu potenciálov¹⁰ V , V_r a V_{rr}

Aby sme mohli úspešne spočítať gravitačné pole generované rozložením hustoty v zemskej kôre tak, ako ho predpokladá model CRUST1.0, našim ďalším krokom bolo previesť matematický aparát predstavený v predchádzajúcej kapitole do podoby výpočtového počítačového programu (napísaného v jazyku Fortran 90).

Hoci sme väčšinu programu zvládli napísať sami, rozhodli sme sa v prípade výpočtu sférických harmonických koeficientov siahnuť po už odskúšaných a overených balíkoch procedúr, ktorých autorom je dr. Velínský. Princíp ich výpočtu je založený na fitovaní pomocou metódy najmenších štvorcov, čo je vlastne implementácia metódy prof. Martinca (1991). Cieľom bolo využiť tento predpripravený kód na určenie sférických harmonických koeficientov plošnej hustoty σ , ktorú sme chceli získať pre každú dlaždicu v modeli. Následne by sme tak využitím výrazu 3.5, ktorý by sme však nepočítali do nekonečna, ale odsekli v nejakej rozumnej hodnote j_{max} , vedeli na sieti bodov vypočítať hodnoty potenciálu V pre celú Zem. Obdobne by sme získané harmonické koeficienty σ_j^m vedeli využiť pri výpočte gravitačného zrýchlenia g či gradientu g , podľa vzťahu 3.6 resp. 3.7. Keďže hrúbka zemskej kôry predstavuje v jednotlivých miestach až desiatky kilometrov, rozhodli sme sa predikovaný potenciál a jeho derivácie pre model CRUST1.0 spočítať v dvoch aproximáciách, ktoré by sme tak následne mohli tiež porovnať.

Prvá z nich je jednovrstvová a celkovú hmotu kôry si predstavuje sústredenú v tenkej vrstve na povrchu Zeme. Druhá sa snaží viac vystihnúť vertikálne rozloženie hmoty a tak hmotu kôry delí pomocou viaceru navzájom sústredných guľových plôch, pričom okolo každej vytvorí pás, z ktorého sa hmota v ňom nachádzajúca priradí danej ploche (resp. vrstve).

¹⁰ Aj keď to občas môže vyznieť zmätočne a je preto potrebné pozorne sledovať kontext, v nami študovanej problematike gravitačného poľa sa zvykne potenciál V spolu so svojimi deriváciami súhrnne označovať pojmom „potenciály“. Je však dôležité následne jasne rozlíšiť, o ktorom potenciáli v tej ktorej situácii hovoríme.

3.2. Analýza modelu CRUST1.0 a výpočet jednovrstvovej aproximácie

V prvom priblížení sme všetku hmotu kolabovali na nekonečne tenkú vrstvičku na povrchu referenčnej sféry s polomerom $R = 6371 \text{ km}$, keďže sme potrebovali získať rozloženie funkcie plošnej hustoty σ , na ktorú by sme už aplikovali celý matematický aparát spomínaný v 2. kapitole tejto práce.

Na tento účel sme potrebovali previesť dáta v modeli do podoby, s ktorou by sa nám ľahšie počítalo. Tu nám v rozbehu nášho vlastného programovania pomohlo niekoľko desiatok riadkov už pripraveného kódu od nášho vedúceho, dr. Šrámka, ktorý na základe kódu publikovaného na stránke modelu¹¹ (Laske a kol., 2013) pripravil 3 procedúry na inicializáciu dát.

Prvá z nich dokázala dáta modelu načítať do polí, s ktorými sa dalo elegantne pracovať pri výpočtoch, ak sme napr. chceli odkazovať na hodnoty hustoty v niektorej z 8, resp. 9 vrstiev modelu tej ktorej dlaždice. Druhá zas vykonávala analýzu celého modelu a dokázala vypísať intervaly, v ktorých sa pohybovali hustoty, hĺbky MOHO, hladiny povrchu či hrúbky kôry jednotlivých dlaždíc modelu. Posledná procedúra analyzovaný model konvertovala do formátu súboru *.xyz¹², ktorý sa dal už pomerne ľahko vykresliť využitím programu Generic Mapping Tools (GMT) od Wessela a kol. (2019). Dodajme, že program GMT sme používali na prípravu všetkých obrázkov mapujúcich priestorový priebeh potenciálov, pričom sme siahli po farebných paletách od Crameriho (2018).

Využitím druhej spomínanej procedúry sa ukázalo, že výška povrchu dlaždíc sa pohybuje od hodnoty -50 m pod povrchom sféry s $R = 6371 \text{ km}$, až po výšku 5410 metrov nad touto hladinou. Dlaždici s výškou povrchu -50 m pod referenčnou sférou zodpovedá bod so súradnicami 27.5N,29.5E. Ide o lokalitu púšte Al Farafra, ktorá predstavuje geologickú depresiu. Porovnaním s obrázkom 3.1 vidíme, že v prípade najvyššej hodnoty výšky povrchu ide zjavne o oblasť Himalájí. Dôvodom, prečo maximálna výška nad povrchom v nami študovanom modeli nezodpovedá výške napr. Mount Everestu je okrem toho, že tá je bežne uvádzaná ako výška nad hladinou

¹¹ <https://igppweb.ucsd.edu/~gabi/crust1.html>

¹² Formátom *.xyz máme na mysli textový ASCII súbor s tromi stĺpcami. V našom prípade znamenajú postupne: zemepisnú dĺžku, zemepisnú šírku a hodnotu funkcie (môže ísť o plošnú hustotu, potenciál, atď.)

mora aj to, že i keď je vrchov s výškou nad 8 km v Himalájach hneď niekoľko, musíme si uvedomiť, že v podstate ide z topografického hľadiska o veľmi izolované lokálne extrémny. Ako sme spomínali vyššie, model CRUST1.0 povrch zemskej kôry sníma s rozlíšením $1^\circ \times 1^\circ$, čo je však stále priveľké vzorkovanie na to, aby tieto výšky zachytil. Zistili sme tiež, že hrúbka kôry v modeli CRUST1.0 sa pohybuje v hodnotách od 7,4 km (zrejme pod oceánskou kôrou, vid' Obr. 3.2) až po 80 km (zjavne kontinentálna kôra). Hustota bola v jednotlivých vrstvách rôznorodá. Maximálna hodnota v celom modeli bola 3460 kg/m^3 . Pokým pre niektorú dľaždicu autori modelu chceli nejakú zo spomínaných vrstiev (porov. odstavec 1.3. tejto práce) vynechať, priradili jej nulovú hrúbku a – i keď je to z fyzikálneho hľadiska irelevantné – rovnako mala priradenú aj nulovú hustotu. Celková hmota kôry podľa modelu predstavuje $2,857 \times 10^{22} \text{ kg}$.¹³

Naším vlastným programátorským vkladom bolo pripravenie ďalších procedúr, pomocou ktorých sme sa postupne dostávali k vytúženému cieľu. Najprv sme napísali procedúru, ktorá bola schopná spočítať celkovú hmotu prislúchajúcu tej ktorej dľaždici. Ďalej procedúru, ktorá určovala príslušnú plochu, ktorá danej dľaždici odpovedala na zemskom povrchu a následne ich kombináciou zas procedúru, ktorá dokázala určiť hodnotu plošnej hustoty pre danú dľaždicu. Jej cyklickým využitím sme získali funkciu $\sigma(\vartheta, \varphi)$, na ktorú sme už vedeli použiť spomínané kódy procedúr poskytnuté dr. Velímským. Ich aplikáciou sme získali sférické harmonické koeficienty σ_j^m , ktoré sme mohli využiť do vzorca 3.5 a ktoré sme využili aj pri ďalšom spracovaní výsledkov. Hodnotu j_{max} sme tu aj pri ďalších aplikáciách sférických harmonických koeficientov v celej našej bakalárskej práci volili rovnú 177, ktorá maximálne vystihne detaily modelu CRUST1.0. Dôvodom je zvolená metóda na konvergenciu členov sférického rozvoja, pre ktorú je maximálna možná hodnota j_{max} daná veľkosťou siete vstupných dát v košírke (čo pre nami zvolený model je rovné 180), ako aj fakt, že tento stupeň je už dostatočne veľký na to, aby pri prechode do reciprokeho priestoru a späť sa dáta dostatočne dobre zhodovali.

Na výpočet samotného gravitačného poľa sme si zostavili ďalšie procedúry,

¹³ Napriek tomu, že už existujú modely, pri ktorých sa dá pomerne dobre kvantifikovať ich neurčitost' – ako napr. ten od Szwilla a kol. (2019) – ktorý dokonca dáva vo svojich predpovediach veľmi podobné výsledky ako CRUST1.0, pri jeho tvorbe autori neurčili (ani neodhadli) neurčitost' modelu. Preto výsledky našich výpočtov v práci uvádzame iba na maximálne 4 platné cifry.

ktoré počítali potenciál a jeho derivácie (podľa vzťahov 3.5 až 3.7) najprv iba pre jeden bod daný vzdialenosťou od stredu Zeme a súradnicami ϑ a φ . Tie sme takisto opätovne využili a ich pomocou cyklicky zráтали potenciál i jeho derivácie pre nami zvolené rozpätie bodov. Vzhľadom na to, že samotný model CRUST1.0 obsahuje 64 800 referenčných bodov (180 v zemepisnej šírke a 360 v zemepisnej dĺžke), počítali sme hodnoty potenciálu a jeho derivácii pre rovnaký počet bodov ako udáva sieť modelu. Rovnako sme ho počítali pre zhodné zemepisné súradnice, avšak s výškou nad povrchom hladkej Zeme rovnou 250 km. Hoci sme experimentovali aj s hustejšou sieťou bodov, nakoniec sme sa rozhodli zostať pri vyššie uvedených hodnotách, nakoľko výsledok už aj tak neponúkal oproti sieti 180×360 žiadnu informáciu navyše. Jediný rozdiel bol v dĺžke výpočtu, ktorá sa napríklad pri sieti 900×1800 zvýšila 25-násobne. Dodajme, že dôvodom pre takto zvolenú výšku je to, že získané výsledky chceme porovnať s dátami z misie GOCE, ktoré sú normované práve na výšku 250 km nad hladinou mora.

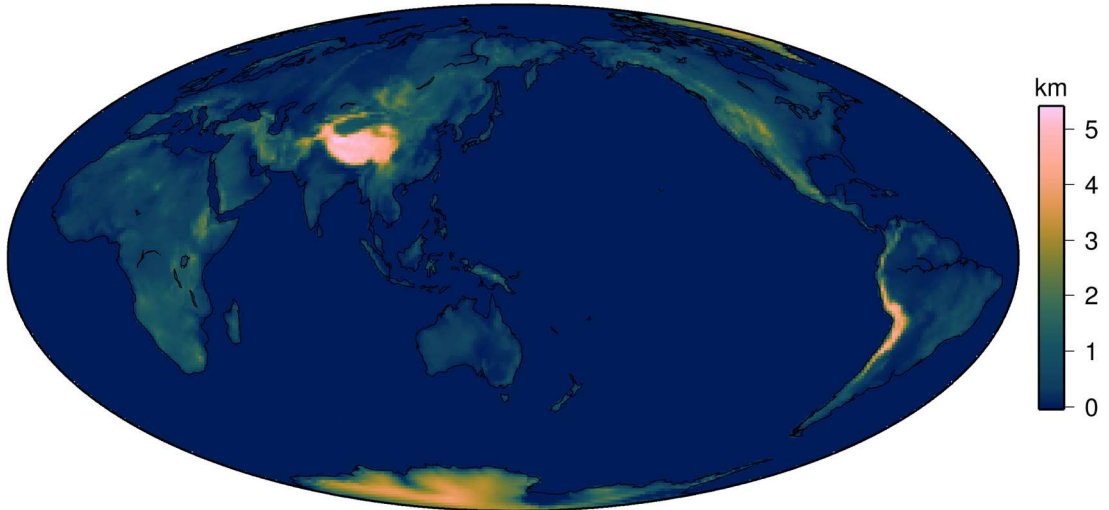
Aby sme mohli výpočet ďalej interpretovať spôsobom, že pod modelom kôry leží nejaká sféricky symetrická oblasť, tvorená iba plášťom a jadrom, ktorej celkový príspevok do potenciálu je teda rovnako sféricky symetrický a predstavuje iba nejaký aditívny, laterálne nemenný príspevok, využili sme vlastnosť modelu CRUST1.0, ktorý obsahuje aj hodnoty pre najvrchnejší plášť a doplnili sme všetky dlaždice tak, aby ich najspodnejšia hrana bola na úrovni najnižšej spodnej hranice zo všetkých dlaždíc modelu.¹⁴ Tú sme nazvali „*všeobecným zarovnaním modelu*“. Išlo teda o nejakú novú, univerzálne zvolenú spodnú hranicu („podlahu“) pre všetky dlaždice, ktorá ležala v hĺbke 74 810 m.

Aproximácia zvolená týmto spôsobom popisuje iba kôru a zanedbáva významný príspevok hustotných heterogenít, ako aj dynamiku hlbšieho plášťa, hlavne pri nízkych sférických harmonických stupňoch. Na vyšších stupňoch by sme však mali byť schopní dobre porovnať dáta z merania s predikciou modelu kôry. Rovnaký prístup sme využili aj ako východiskovú úpravu pred parametrizáciou pri viacvrstvovej aproximácii zemskej kôry.

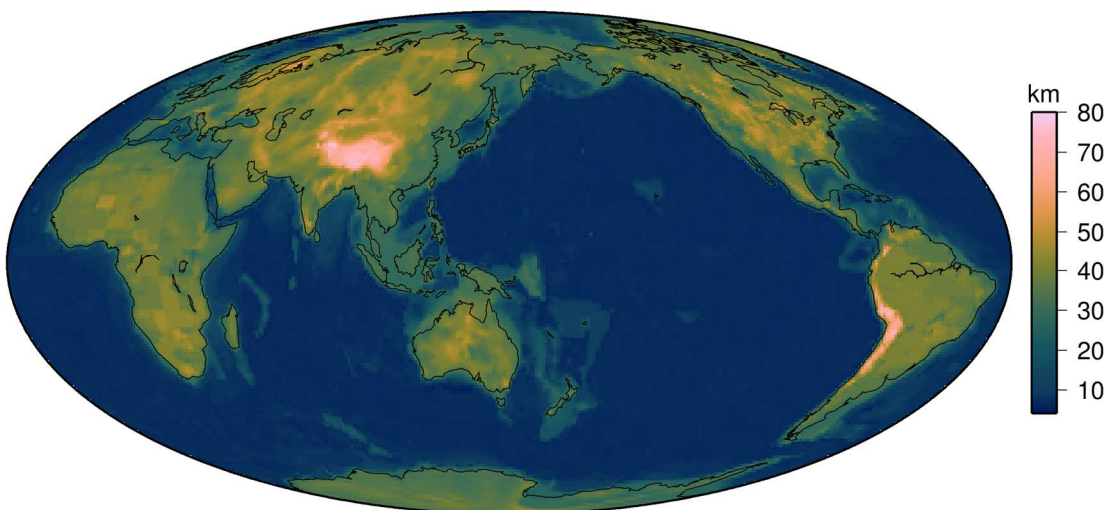
Pre takto upravený model kôry sme následne opätovne použili nami zostrojené procedúry, popísané vyššie. Najprv sme získali nové rozloženie funkcie plošnej

¹⁴ To, že to bolo naozaj nutné znázorňuje obrázok 3.3, na ktorom je vidno, že hĺbka MOHO je inak pre každú dlaždicu veľmi rôznorodá.

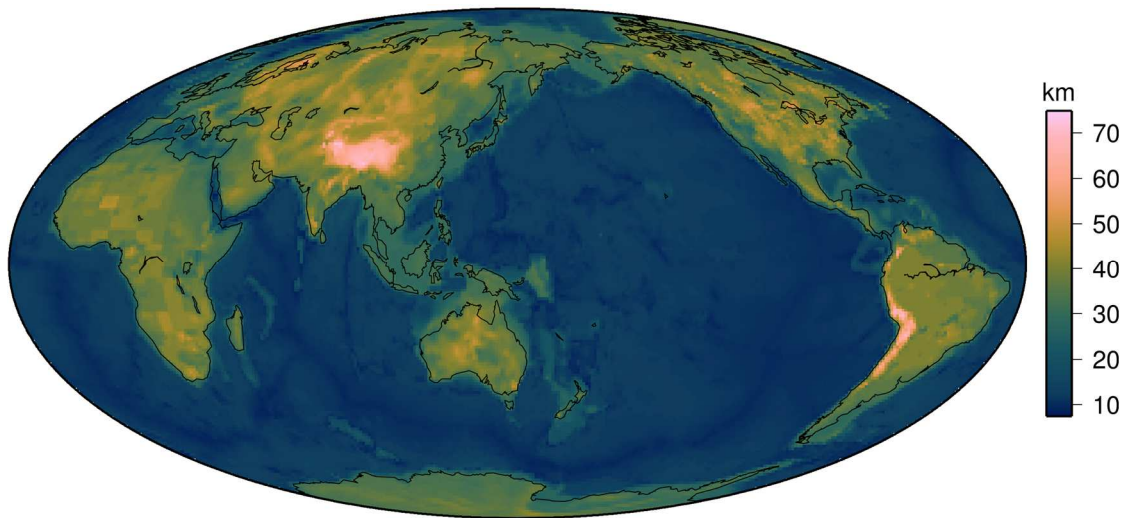
hustoty $\sigma(\vartheta, \varphi)$. Pre porovnanie toho, aký malo toto zarovnanie spodných hraníc zásadný vplyv na $\sigma(\vartheta, \varphi)$, prikladáme grafické znázornenie oboch prípadov na obrázkoch 3.4 a 3.5. Nakoniec sme z upraveného rozloženia $\sigma(\vartheta, \varphi)$ určili výsledné hodnoty potenciálu a jeho derivácii v jednovrstvovej aproximácii, ktoré nižšie aj uvádzame.



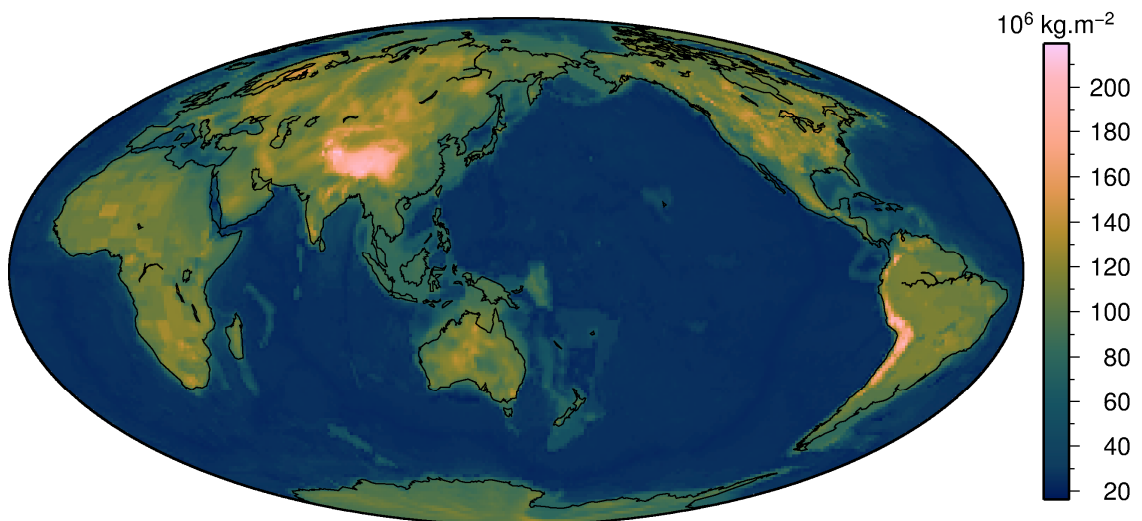
Obr. 3.1 Výška povrchu dlaždíc v modeli CRUST1.0 Referenčný povrch je daný polomerom $R = 6371$ km.



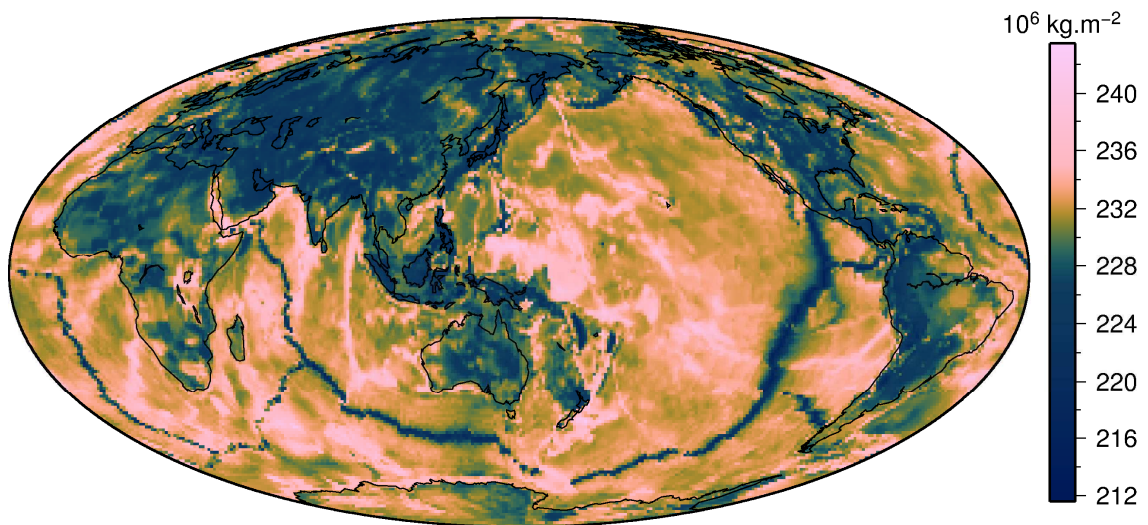
Obr. 3.2 Hrúbka dlaždíc v modeli CRUST1.0. Maximálna hodnota predstavuje 80 km. Na obrázku jasne vidíme, v súlade s predpokladmi, že najhrubšie časti zemskej kôry sú v oblastiach najväčších horských masívov (Himaláje, Andy).



Obr. 3.3 Znáozornenie hĺbky MOHO pre jednotlivé dlaždice modelu CRUST1.0. Maximálna hĺbka MOHO, predstavuje 74 810 m. Obrázok ukazuje, že kontinentálna kôra je podstatne hlbšie ukotvená, než oceánska.



Obr. 3.4 Znáozornenie rozloženia funkcie plošnej hustoty $\sigma(\vartheta, \varphi)$ bez uvažovania jednotného spodného zarovnanie modelu. Všimnime si, že pri tomto pôvodnom stave modelu, ako nám ho pripravili autori, je rozdiel medzi hustotami pevninskej a oceánskej kôry značný.

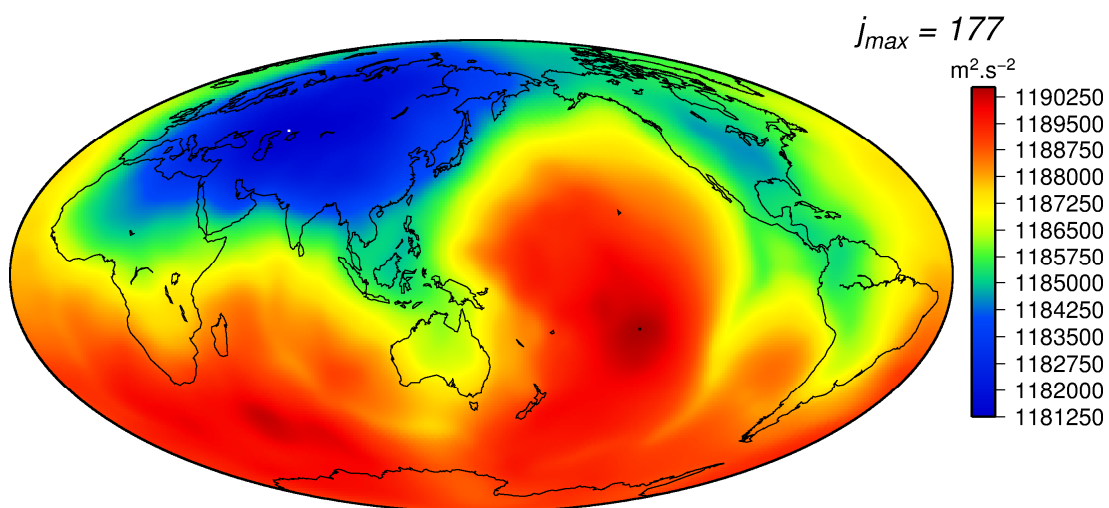


Obr. 3.5 Znáozornenie rozloženia funkcie plošnej hustoty $\sigma(\vartheta, \varphi)$ so zarovnaním na jednotnú hĺbku danú najhlbšou hodnotou MOHO v modeli. Vidíme, že sa plošná hustota pod oceánmi podstatne zvýšila. Dôvodom je to, že pod oceánskou kôrou je všeobecne MOHO vo veľmi malej hĺbke. Preto sme pri globálne jednotnom zarovnaní práve sme pridali najväčšie množstvo hmoty.

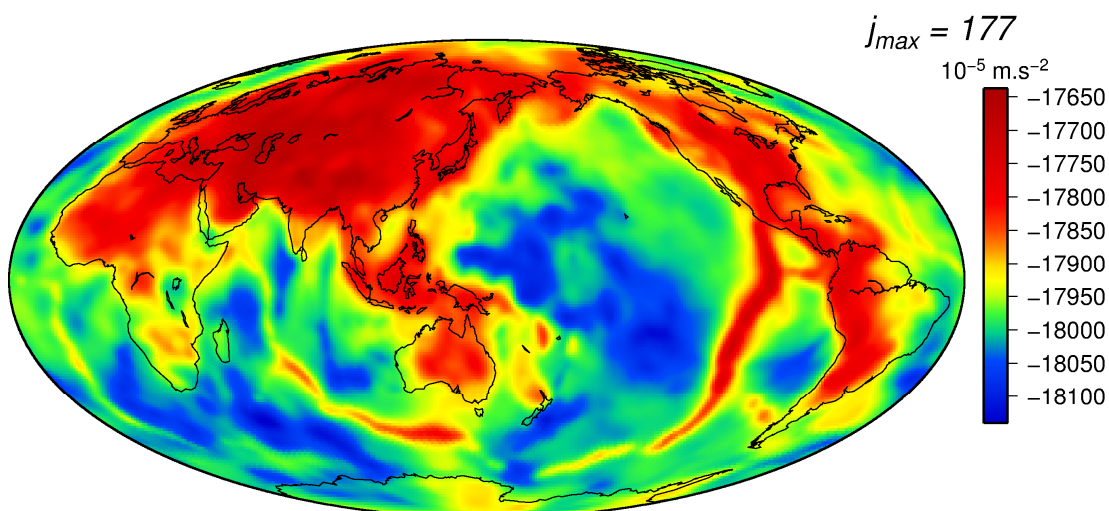
3.2. Získané výsledky pre jednovrstvovú aproximáciu

Postupom popísaným v predchádzajúcej podkapitole sa nám podarilo získať rozloženie potenciálu V , jeho prvej derivácie V_r a druhej derivácie V_{rr} , ako ich zobrazujú na obrázky 3.6, 3.7 a 3.8.¹⁵ Takto spočítané potenciály majú značný príspevok na stupňoch $j = 0$ a $j = 1$ sférických koeficientov a nejedná sa tak o anomálne potenciály, s ktorými pracujeme v ďalších častiach práce (a explicitne ich vysvetľujeme v odstavci 3.7).

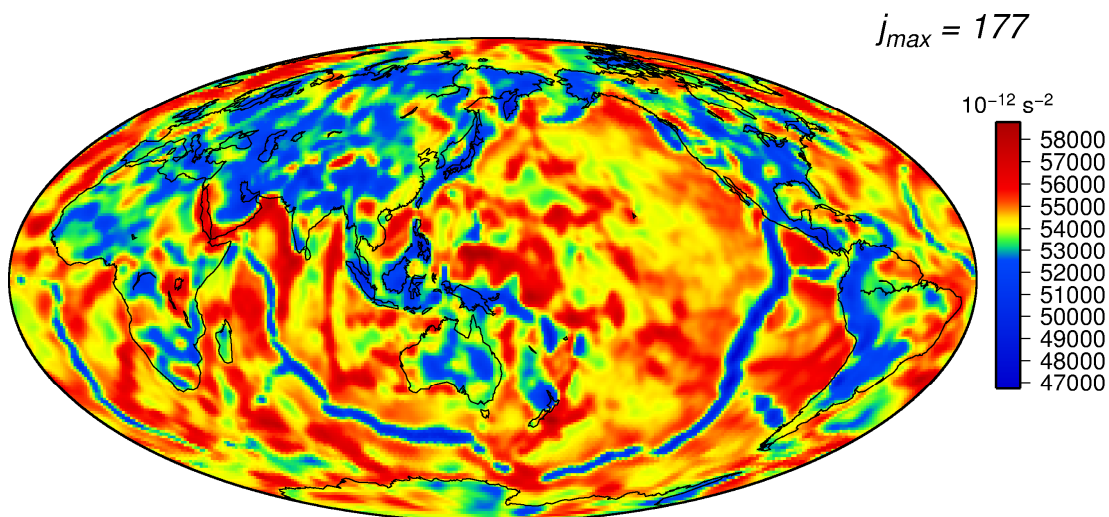
¹⁵ V celej práci používame na označenie jednotiek striktnu sústavu SI. Zvolili sme však označenie jednotiek na osách grafických zobrazení tak, aby zodpovedalo v geofyzike tradične používaným jednotkám mE (10^{-12} s^{-2}) a mGal ($10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).



Obr. 3.6 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V v jedno-
vrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0



Obr. 3.7 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V_r v jedno-
vrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0



Obr. 3.8 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V_{rr} v jednovrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0

3.3. Spôsob výpočtu viacvrstvovej aproximácie

Po získaní výsledkov z jednovrstvovej aproximácie nás zaujímalo, aký veľký vplyv má na výsledky to, že sme neuvažovali vertikálnu skladbu jednotlivých dlaždíc modelu, keďže sme pôvodne iba zráтали celkovú hmotu prislúchajúcu jednotlivým dlaždiciam a jednoducho ju všetku myslene umiestnili do nekonečne tenkej vrstvy na povrchu sféry. Preto sme sa rozhodli zaviesť lepšiu parametrizáciu, pri ktorej budeme aproximovať aj vertikálne rozloženie hmoty, nie len súradnicové tak, že počet takýchto plôch zväčšíme. Celá takáto viacvrstvová parametrizácia zemskej kôry by tak potom svojou skladbou pripomínala štruktúru vrstiev cibule. Výhodou nám bolo, že v prípade takto zvolenej viacvrstvovej kôrovej aproximácie sme už len nadväzovali na nami napísaný kód. Nemuseli teda začínať úplne nanovo, ale plynulo sme pokračovali zovšeobecnením používaných procedúr a funkcií.

Najprv sme upravili procedúru, ktorá zisťovala plošku zodpovedajúcu dlaždici tak, aby bola závislá na parametri R , ktorý predstavoval polomer sféry, na ktorej povrch dlaždice umiestňujeme. Teraz sme teda vedeli určiť plochu zodpovedajúcu tej ktorej dlaždici nie len pre $R = 6371 \text{ km}$, ale v princípe pre ľubovoľné R . Tieto nové hodnoty R budú predstavovať polomer sfér, na ktorých povrch budeme umiestňovať nové vrstvy delenia zemskej kôry modelu CRUST1.0. Naším cieľom je dosiahnuť vertikálnu reprezentáciu distribúcie hmoty pre každú dlaždicu, preto aby sme dokázali

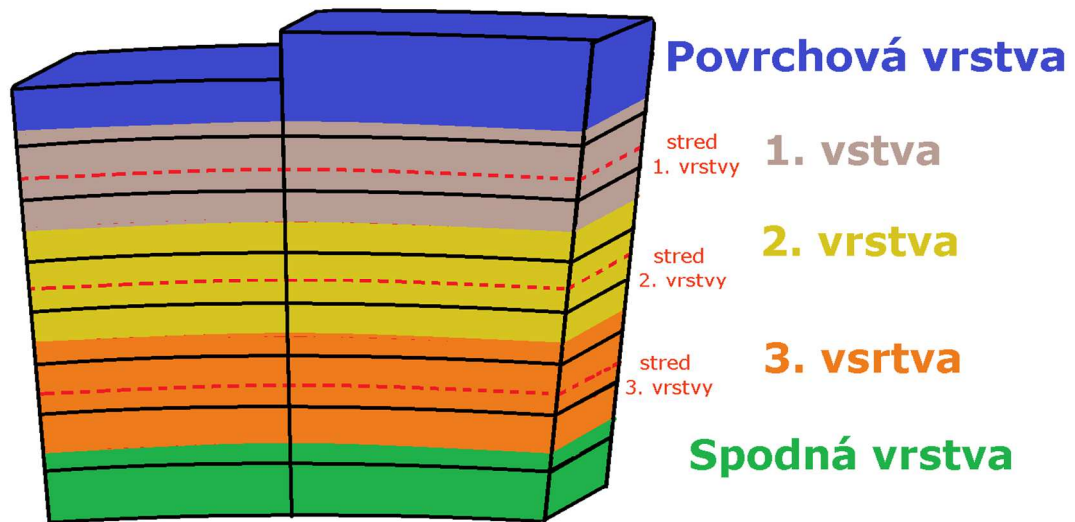
určiť prislúchajúcu hmotu tej ktorej vrstve delenia kôry, napísali sme procedúru, ktorá by vertikálny profil každej dlaždice nasekala na pásy, ktoré by sme mohli kolabovať na ich stred. Podobne teda, ako sme v prípade jednej vrstvy celú hmotu akoby „stlačili“ smerom k povrchu, teraz by sme hmotu obsiahnutú v takýchto pásoch „stlačili“ na tenkú vrstvu v ich strede.

Nami zavedená parametrizačná procedúra jednotlivých vrstiev je naprogramovaná tak, že je závislá od zvoleného parametru h , ktorý predstavuje výšku pásu, z ktorého bude hmota kolabovať na i -tú vrstvu z celkového počtu vrstiev. Ten je rovný číslu $n + 2$, kde n predstavuje počet tzv. *interných* vrstiev. Nazývame ich *internými* na odlišenie od zvyšných dvoch, ktoré sme pomenovali ako *pomocné*. Menovite o tzv. povrchovú vrstvu a spodnú vrstvu. Motiváciou k ich zavedeniu nám bolo to, že sme chceli všetky interné vrstvy parametrizovať pomocou voliteľnej (jednotnej) hrúbky h im príslušného pásu. Tieto pomocné vrstvy sú v našej deliacej parametrizácii vždy, a tak je najmenší možný počet vrstiev vo viacvrstvovej aproximácii rovný 3. Spodná vrstva, povrchová vrstva a aj všetky „interné vrstvy“ delenia sa vždy umiestňujú nasledovne:

Označme maximálnu hrúbku kôry v modeli CRUST1.0 ako $t = 74\,810\text{ m}$. Celočíselný výsledok delenia maximálnej hrúbky t hrúbkou jednej vrstvy h nech je k . Potom zvyšok s je rovný:

$$s = (74\,810 - k \cdot h)\text{ m}$$

Spodná hranica povrchovej vrstvy sa tak umiestni do hĺbky l_1 (meranej od rovného povrchu referenčnej sféry, s klasickým polomerom $R = 6371\text{ km}$) rovnej $l_1 = \frac{s}{2}$. V prípade povrchovej vrstvy sa všetka hmota nad touto hladinou l_1 jednoducho umiestni do vrstvy ležiace na sfére s polomerom $R = 6371\text{ km}$. Stred prvej obyčajnej vrstvy tak leží potom v hĺbke $l_2 = \left(\frac{s}{2} + \frac{h}{2}\right)$. Tejto vrstve bude potom prislúchať pás hmoty v intervale hĺbok $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} + h\right)$. Obdobne sa konštruujú všetky vrstvy, až po n -tú. Spodná vrstva sa opäť ponáša na povrchovú, len s tým, že tento raz do nej patrí všetka hmota, ktorá sa nachádza v hĺbke od hladiny l_{n+2} – ktorá definuje jej horný kraj – až po *všeobecné zarovnanie*. Je umiestnená v hĺbke $l_{n+2} = \frac{s}{2} + n \cdot h$.



Obr. 3.9 Obrázok graficky znázorňujúci princíp nami zvolenej parametrizácie vrstiev delenia pri viacvrstvovej aproximácii výpočtu potenciálov a jeho derivácii (v tomto prípade ide o delenie na 5 vrstiev).

Pre lepšiu predstavu si fungovanie tejto procedúry môžeme predstaviť aj pomocou jednoduchého popisu obrázku 3.9. Majme dve susedné dlaždice. Hmota v modrej oblasti (páse) bude prislúchať povrchovej vrstve umiestnenej na povrchu referenčnej sféry s $R = 6371 \text{ km}$. Pre náš obrázok nech je to hladina povrchu ľavej dlaždice. Spodná hranica pásu povrchovej vrstvy leží v zmysle označenia zavedeného vyššie v hĺbke $\frac{s}{2}$. Všimnime si, že aj keď nie všetky dlaždice modelu majú povrch v rovnakej výškovej hladine (ako sme to vyššie pri analýze modelu CRUST1.0 spomínali a ukázali na obrázku Obr. 3.1), pre nami zvolený prístup to nie je problém. Práve riešenie tejto situácie nás motivovalo k zavedeniu povrchovej a spodnej vrstvy, ktorých funkciou je tieto nerovnosti zarovnať. Všetko nad povrchom referenčnej sféry sa totiž stlačí na jej hladinu, ako sa na ňu stlačí aj hmota nad hladinou $\frac{s}{2}$. Potom už delenie prebieha rovnomerne. Hmota v slabohnedej oblasti už bude prislúchať prvej vrstve delenia a skolabujeme ju na úroveň stredu 1. vrstvy. Podobne hmota žltej vrstvy sa stlačí do infinitezimálne malej vrstvičky ležiacej na hladine stredu 2. vrstvy. Obdobne aj hmota oranžového pásu bude započítaná do 3. vrstvy. Nakoniec, hmota v zelenej oblasti sa zas celá stlačí na hladinu *všeobecného spodného zarovnania modelu*.

Po zavedení parametrizácie sme opäť zostrojili (obdobným spôsobom, ako pri jednovrstvovej aproximácii) procedúry na výpočet distribúcie plošnej hustoty σ . Po

spočítaní sférických harmonických koeficientov σ_j^m pre každú z vrstiev sme nakoniec pristúpili k výpočtu potenciálu a jeho derivácii. Využili sme rovnaké procedúry ako predtým, museli sme však pre každý bod postupne pričítať príspevky od každej z vrstiev. Tak sme získali výsledné hodnoty potenciálu a jeho prvej i druhej derivácie.

Počet vrstiev	Hrúbka vrstvy h [m]	Počet vrstiev	Hrúbka vrstvy h [m]	Počet vrstiev	Hrúbka vrstvy h [m]
3	70000	27	2900	55	1400
3	60000	28	2800	59	1300
3	50000	29	2700	64	1200
3	40000	30	2600	70	1100
4	35000	31	2500	76	1000
4	30000	33	2400	85	900
5	24000	34	2300	95	800
5	22000	36	2200	108	700
5	20000	37	2100	126	600
6	18000	39	2000	151	500
8	12000	41	1900	189	400
9	10000	43	1800	251	300
14	5000	46	1700	376	200
20	4000	48	1600	750	100
26	3000	51	1500	1498	50

Tab. 3.1 Tabuľka výsledného počtu vrstiev pre rôzne zvolené hrúbky h jednej vrstvy

3.4. Konvergencia viacvrstvovej aproximácie

Netriviálnou otázkou bolo, koľko vrstiev potrebujeme, aby sme mohli povedať, že sme už dosiahli najlepší možný výsledok našej snahy. Aby sme to zistili, postupne sme napočítali potenciál a jeho derivácie pre rôzne hodnoty hrúbok jednej vrstvy (a zodpovedajúceho celkového počtu vrstiev) tak, ako ich uvádza tabuľka 3.1.

Pre sledovanie konvergencie viacvrstvovej aproximácie sme zvolili parameter tzv. kvadratického priemeru, známeho aj ako RMS¹⁶. Pre funkciu f definovanú na guli (resp. povrchu sféry) sa zavádza vzťahom:

¹⁶ Skratka RMS je z angl. *root mean square*. Ďalším spôsobom ako tento štatistický parameter označiť je nazvať ho tiež *efektívnou hodnotou*, ako sa to často deje v elektrotechnike či teórii obvodov.

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} f^2 d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega}} = \sqrt{\frac{\iint f^2(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi}{\iint r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi}},$$

ktorý ak uvažujeme diskretizáciu pre hodnoty funkcie f v konkrétnych bodoch indexovaných pomocou i a k prechádza na:

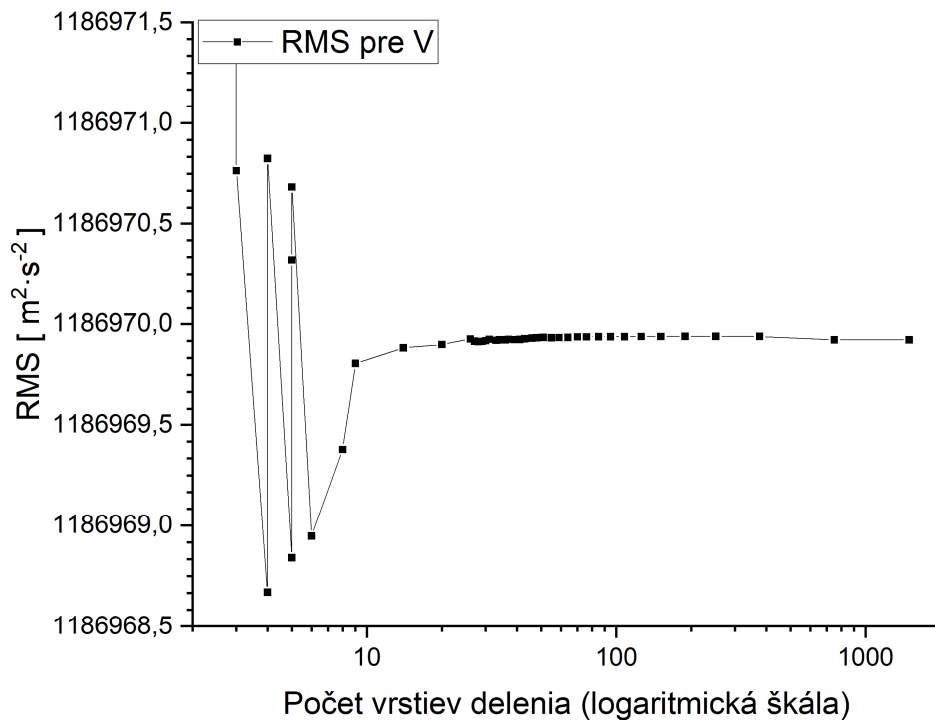
$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_k f_{ik}^2 r^2 \sin(\vartheta_k) \Delta\vartheta \Delta\varphi}{\sum_i \sum_k r^2 \sin(\vartheta_k) \Delta\vartheta \Delta\varphi}} = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_k f_{ik}^2 \sin(\vartheta_k)}{\sum_i \sum_k \sin(\vartheta_k)}}.$$

Ak si následne predstavíme, že body, v ktorých je funkcia definovaná tvoria pravidelnú sieť $n \times m$ a rozvineme ju do roviny, $\sin(\vartheta_k)$ v menovateli aj čitateli predchádzajúceho výrazu sa bude rovnat' 1. Tak prejdeme ku vzťahu, ktorým je RMS definovaná pre množinu bodov v rovine:

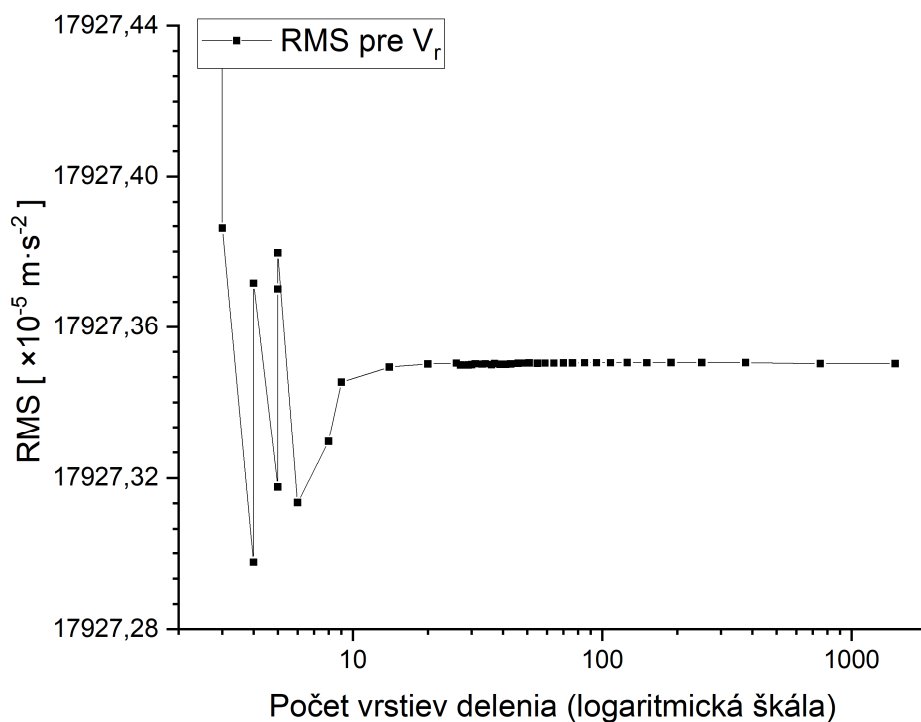
$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1} x_i^2},$$

kde n je celkový počet hodnôt (pri našej sieti to znamená, že $n = 64\,800$) a x_i sú hodnoty v jednotlivých bodoch. Pre rýchly kvalitatívny prehľad o konvergencii môžeme pri vedomí toho, že sa dopúšťame istej nepresnosti, určiť konvergenciu bodov, pre ktoré máme známe hodnoty potenciálov (či už z predikcie alebo merania) aj pomocou druhého menovaného vzťahu. Postupne sme určili hodnoty tohto kvadratického priemeru – v spomenutej zjednodušenej podobe – pre všetky počítané delenia (ako ich nájdeme v tabuľke 3.1) a vyniesli do grafov zvlášť pre potenciál V , pre zrýchlenie g aj $grad\ g$ (pozri Obr. 3.10 až 3.12). Do tabuliek (Tab. 3.2, 3.3 a 3.5) sme však už vynášali hodnoty RMS určené podľa presnejšieho vzťahu pre diskkrétne body na povrchu sféry.

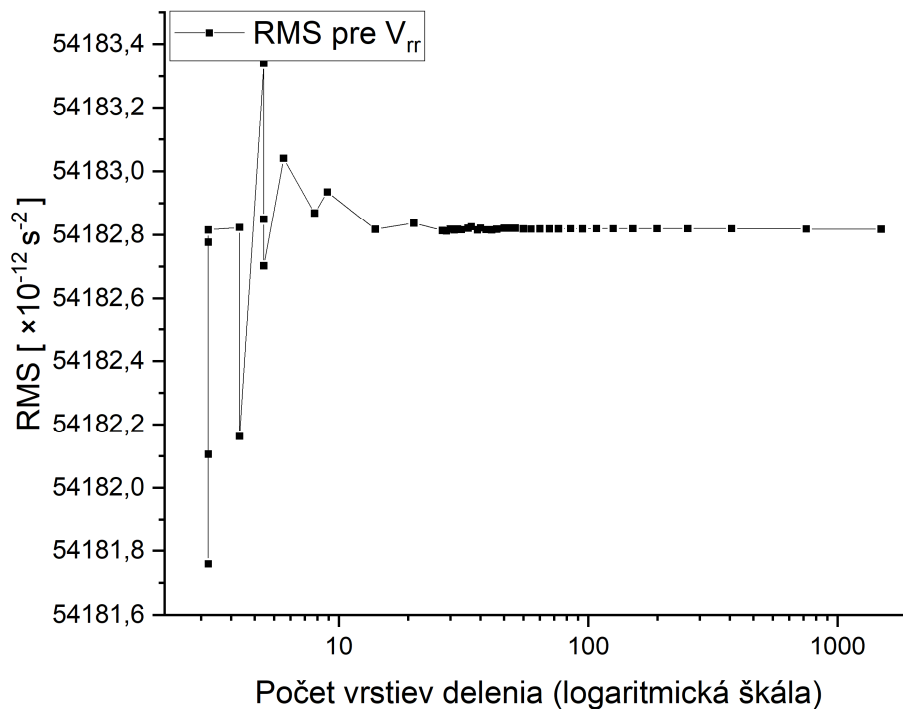
Z grafov vidíme, že približne od počtu vrstiev 100 kvadratický priemer veľmi dobre konverguje. Preto sme sa rozhodli pre ďalšie spracovanie a porovnanie predikcie gravitačného poľa s predikciou danou jednou vrstvou či s dátami z družice GOCE použiť hodnoty potenciálov vypočítané pre delenie $h = 700\ m$, pre ktoré dostávame spolu 108 vrstiev.



Obr. 3.10 Graf konverencie RMS pre potenciál V v závislosti na počte vrstiev viacvrstvovej aproximácie zemskej kôry (logaritmická škála).



Obr. 3.11 Graf konverencie RMS pre potenciál V_r v závislosti na počte vrstiev viacvrstvovej aproximácie zemskej kôry (logaritmická škála).



Obr. 3.12 Graf konverencie RMS pre potenciál V_{rr} v závislosti na počte vrstiev viacvrstvovej aproximácie zemskej kôry.

3.5. Získané výsledky vo viacvrstvovej aproximácii

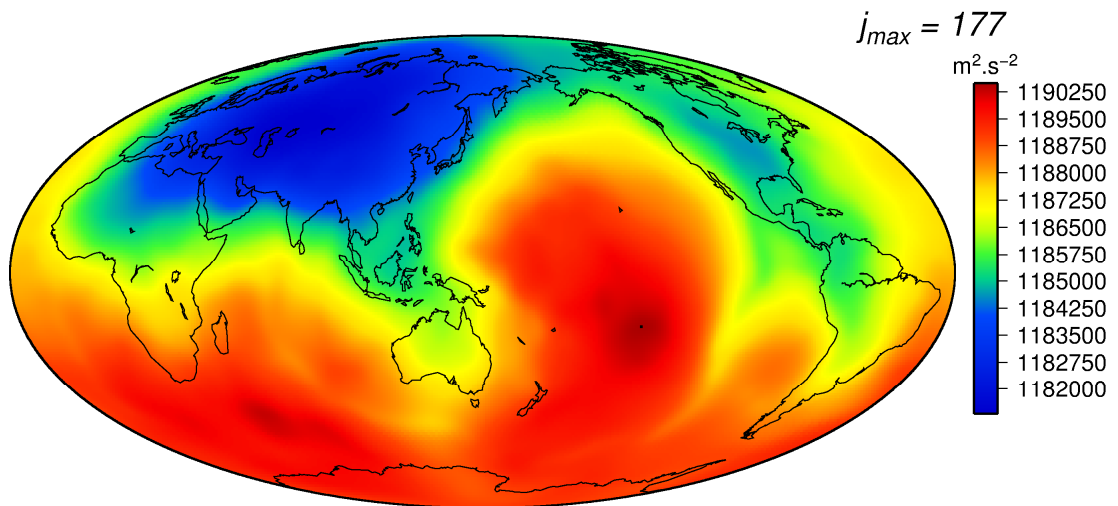
Ako sme už uviedli, keďže na základe konverencie vidíme, že pre hodnoty 100 vrstiev a viac už sa RMS nijak podstatne¹⁷ nemení, rozhodli sme sa ako výsledné dáta predikcie z viacvrstvovej aproximácie zvoliť potenciály získané pre 108 vrstiev, čo v našej parametrizácii predstavuje hrúbku jednej vrstvy rovnú 700 m. Postupom popísaným v podkapitole 3.3 sa nám podarilo získať rozloženie potenciálu V , jeho prvej derivácie V_r a druhej derivácie V_{rr} ako ich zobrazujú obrázky 3.13, 3.14 a 3.15.

3.6. Výkonové spektrá a korelačné koeficienty

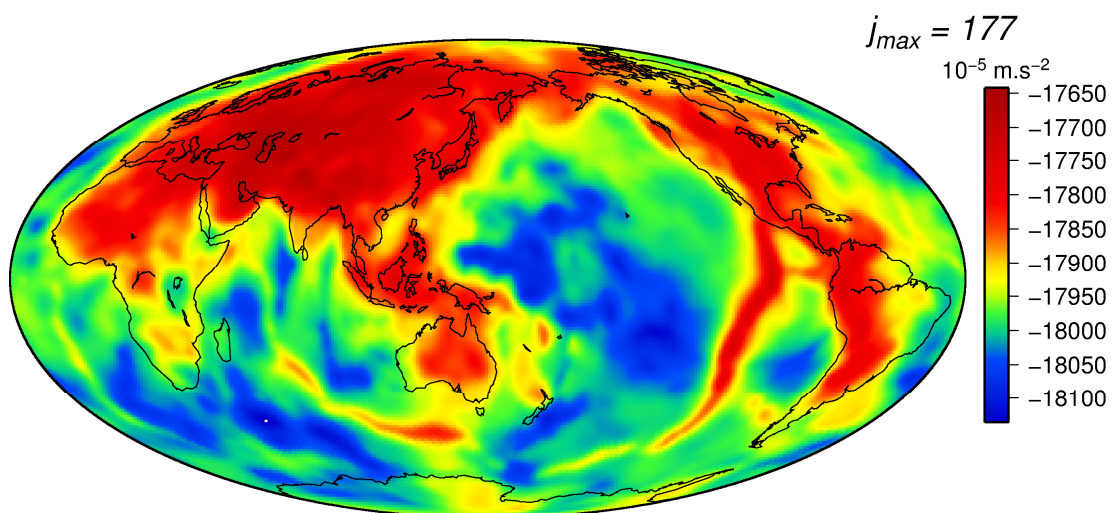
Ak chceme dobre porovnať predikované a namerané potenciály vo frekvenčnom priestore, môžeme tak urobiť pomocou tzv. korelačných koeficientov. Druhým spôsobom porovnania je vziať tzv. výkonové spektrá potenciálov (ide o ich

¹⁷ Na prvých 8 platných miestach sa hodnota ustálila pre viac ako 5 po sebe idúcich deleniach ako sme ich volili podľa tabuľky 3.1.

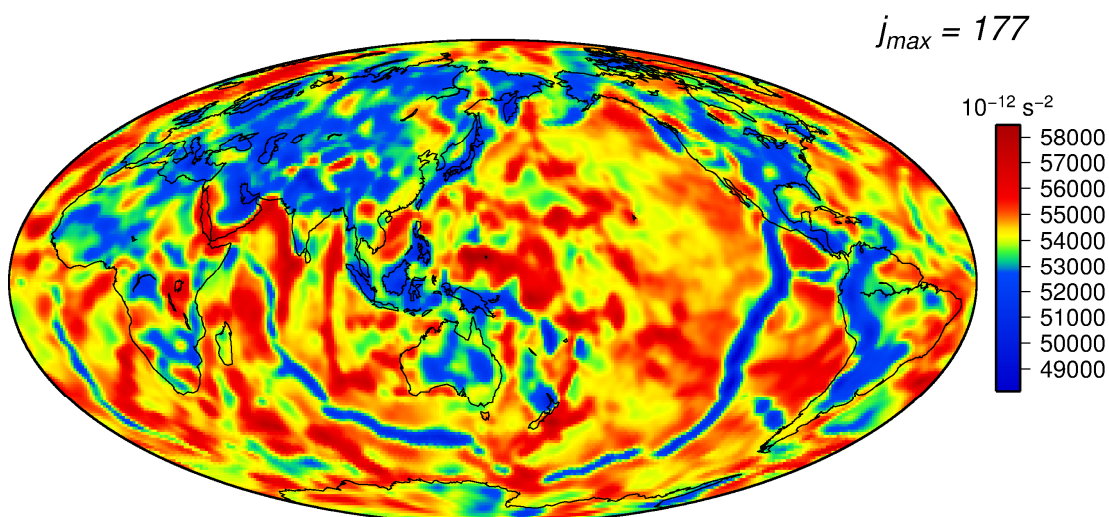
spektrálnu charakteristiku) a sledovať ako veľmi sa medzi sebou navzájom líšia. Rovnako však tieto metódu môžeme použiť na porovnanie dvoch rôznych predikcií, keď chceme určiť, ako veľmi sa rôznia či naopak zhodujú.



Obr. 3.13 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V vo viacvrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0 a počet vrstiev rovný 108.



Obr. 3.14 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V_r vo viacvrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0 a počet vrstiev rovný 108.



Obr. 3.15 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V_{rr} vo viacvrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0 a počet vrstiev rovný 108.

Pojem výkonového spektra opäť zavádzame cez istú analógiu s elektromagnetizmom. Konkrétne vyjdeme zo vzorca pre výpočet elektrického výkonu v tvare $P = U^2/R$. Ak si uvedomíme, že napätie U predstavuje rozdiel potenciálov a odpor R si odmyslíme (bude jednotkový), tak výkonové spektrum pre nás bude niečo ako $P \approx V^2$. Vyjadríme si potenciál V pomocou jeho sférických harmonických koeficientov (vzťah 2.9) a píšme potom pre výkon na stupni j :

$$P_j = \sum_{m=-j}^j |V_j^m|^2.$$

Výkonové spektrum potom chápeme ako funkciu $P_j(j)$.

Ďalej vieme na kvantifikovanie korelácie dvoch skalárnych funkcií na guľovej ploche zaviesť tzv. korelačný koeficient. Majme dve funkcie $f(\vartheta, \varphi)$ a $g(\vartheta, \varphi)$, ktoré vieme na guľovej ploche rozvinúť do sférických harmoník a im príslušné sférické koeficienty sú f_j^m , resp. g_j^m . Ak chceme nejak popísať, ako veľmi dobre spolu korelujú, vyjadríme to vzťahom:

$$\text{corr}(f,g) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_j^m g_j^{m*}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j |f_j^m|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j |g_j^m|^2}}$$

Ak nás zaujíma však iba korelácia na stupni j , spočítame korelačný člen c_j :

$$corr_{(f,g)}^j = \frac{\sum_{m=-j}^j f_j^m g_j^{m*}}{\sqrt{\sum_{m=-j}^j |f_j^m|^2} \sqrt{\sum_{m=-j}^j |g_j^m|^2}}$$

Korelačným spektrom tak napokon rozumieme funkciu $c_j(j)$. Pre jednoduché odlišenie budeme $corr_{(f,g)}$ označovať iba ako $corr_{tot}$ a $corr_{(f,g)}^j$ ako $corr_j$.

3.7. Príprava dát zo sondy GOCE pre ich porovnanie s predikciou modelu

Ďalším krokom, ktorý sme urobili bola príprava dát získaných sondou GOCE. Tie nám poskytol dr. M. Reguzzoni z Politecnico di Milano. Najprv sme ich z tabuľky uloženej vo formáte pre program Matlab previedli do nami používaného formátu súborov *.xyz. Na tento prevod sme využili jednoduché prekopírovanie dát z prostredia programu Matlab do tabuľkového editora¹⁸, kde sme si pomocou funkcií upravili dáta do požadovaného tvaru. Následne sme ich analyzovali.

Zistili sme, že boli merané pre sieť 900×1800 bodov, čo predstavovalo priestorové rozlíšenie na zemskom povrchu vo veľkosti $0,2^\circ \times 0,2^\circ$. Aby sme teda tieto dáta mohli porovnať s nami určenou predikciou podľa pre model CRUST1.0, bolo potrebné znížiť ich rozlíšenie. To sme dosiahli tak, že sme opäť raz využili dodané procedúry od dr. Velímského a previedli sme dáta do reprezentácie pomocou sférických harmonických koeficientov. Tie sme následne previedli späť do priestorovej reprezentácie, pričom sme však zmenšili sieť bodov. Okrem toho, medzi dodanými dátami boli aj dáta pre tzv. anomálny potenciál T a jeho derivácie.

Anomálny potenciál pre merania z GOCE, ako nás informoval dr. Reguzzoni, bol pripravený tak, že od pôvodných meraní sondy pre potenciál V sa odčítal signál, ktorý je generovaný referenčným elipsoidom Zeme. Tento signál je rádovo silnejší na

¹⁸ V našom prípade sme konkrétne použili 32-bitovú verziu MS Excel 2016. Vzhľadom na veľkosť presúvaných dát sa ukázalo, že sme boli na technologických limitoch tejto aplikácie. Ak by boli dáta o čosi väčšie, už by sme potrebovali verziu 64-bitovú. Avšak, podotknime, že by sa dal použiť v princípe hociktorý základný tabuľkový editor, keďže sme nevyužívali nejaké neštandardné funkcie vlastné iba Excelu, resp. ešte elegantnejšie riešenie by bolo tento prevod naprogramovať.

prvých členoch – nultom a prvom stupni – než na iných častiach spektra. Navyše má značný výkon ešte aj na stupni 2. Odčítaním tohto signálu od meraní potenciálu sa tak týchto výrazných hodnôt na nultom a prvom stupni zbavíme a tiež eliminujeme jeho podstatný vplyv na druhom stupni (hlavne člen 2,0), ktorý je spojený s tým, že skutočná Zem je pri póloch sploštená. Takto upravené dáta z merania sú zbavené dominantného signálu zo zemského plášťa a kôry, ktorý sa prejavuje hlavne na nízkych členoch sférického rozvoja a sú tiež zbavené (z veľkej miery) informácie o sploštení Zeme, vďaka čomu ich budeme vedieť porovnať s predikciou vychádzajúcou z modelu, ktorý je konštruovaný v sférickej aproximácii.

Aby sme však mohli dáta z GOCE a dáta nami vypočítanej predikcie skutočne porovnať čo najrozumnejšie, pokúsili sme sa dáta z predikcie pripraviť do podoby čo najviac pripomínajúcu spomínaný anomálny potenciál. Keďže však už náš model a doterajší prístup sám o sebe predpokladal sféricky symetrickú aproximáciu Zeme, naše pripodobnenie prioritne spočívalo v prevode nami spočítanej viacvrstvovej predikcie do reprezentácie pomocou sférických harmonických koeficientov, kde sme následne natvrdo orezali stupne $j = 0$ a $j = 1$ tak, že sme im priradili nuly. Následne sme dáta previedli späť do priestorovej reprezentácie a mali sme tak už všetko pripravené na ich porovnanie v priestorovej, ako i spektrálnej oblasti.

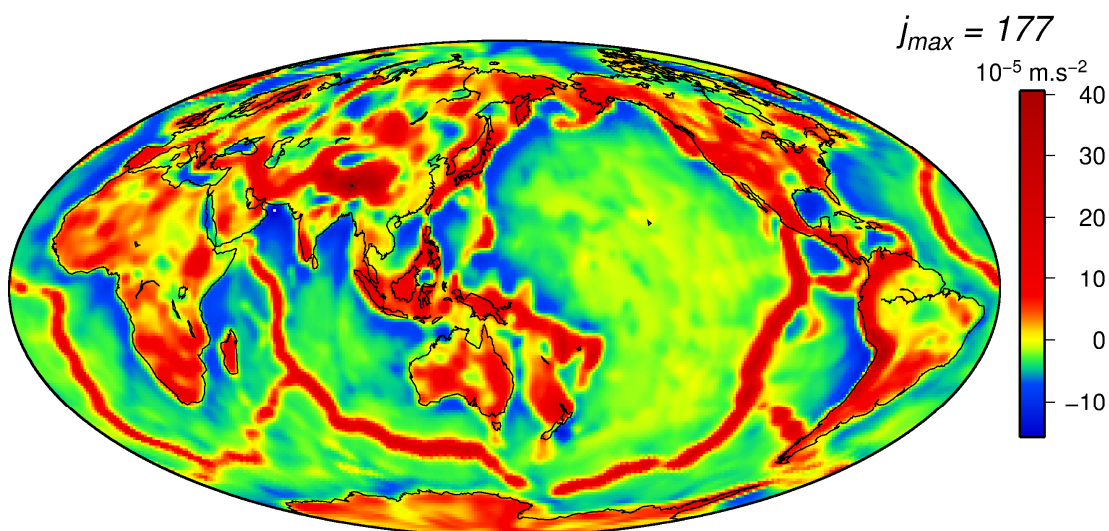
Dodajme, že tu spomínané prvé 2 stupne (nultý a prvý) sférického harmonického rozvoja zodpovedajú guľovým funkciám, ktoré vyjadrujú sférickú symetrickosť (priemernú hodnotu na sfére) a posun stredu sféry voči stredu súradníc, a tak pre nás nepredstavujú až tak zaujímavú časť pri štúdiu detailov gravitačného poľa kôry.

V súbore s dátami boli pre nultý a prvý stupeň anomálneho potenciálu T (ako i pri jeho deriváciách) uvedené hodnoty rádovo menšie než 10^{-33} , čo sa pri počítačovej aritmetike dá pokladať za veľmi dobré „nuly“. Rozhodli sme sa však i tak dáta načítať a pevne sem znovu vložiť nulové hodnoty. Podľa informácii od dr. Reguzzoniho (čo sme neskôr aj potvrdili) tieto dáta boli pri príprave orezané do stupňa $j_{\max} = 300$. Keďže my sme sa však vzhľadom na parametre modelu CRUST1.0 a zvolenú metódou výpočtu koeficientov harmonického rozvoja obmedzili len na počítanie do 177. stupňa, nebol to problém pri ďalšom spracovaní.

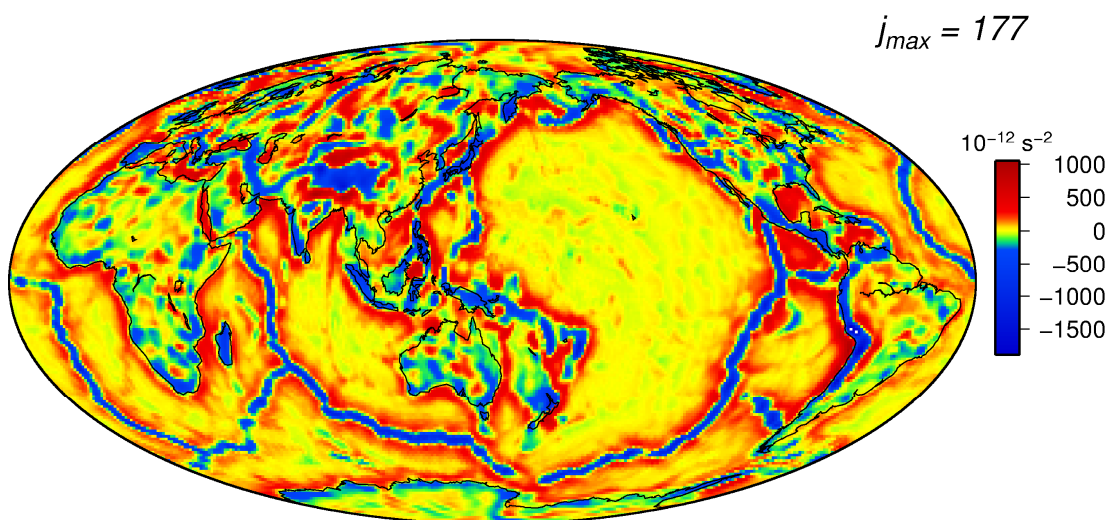
3.8. Porovnanie jednovrstvovej a viacvrstvovej aproximácie zemskej kôry

Vzhľadom na vystihnutie vertikálneho rozloženia hmoty je viacvrstvé počítanie potenciálu presnejšie, pre porovnanie predikcie gravitačného signálu modelu CRUST1.0 s reálnymi meraniami preto použijeme práve ono. Aby sme však vedeli povedať, nakoľko by sa v niektorých praktických aplikáciách dala použiť aj jednovrstvová aproximácia, rozhodli sme sa získané dáta pre obe predikcie porovnať. Porovnanie sme vykonali pre pôvodné dáta, ako aj pre dáta orezané o prvé 2 stupne v rozvoji sférických harmonických koeficientov. Obrázky 3.16 a 3.17 znázorňujú rozdiely získaných potenciálov V_r a V_{rr} z aproximácie zemskej kôry podľa modelu CRUST1.0 jednou a viacerými vrstvami (konkrétne ich je 108), už po orezaní spomínaných dvoch stupňov rozvoja do sférických koeficientov. Odčítame vždy výsledky pre 1 vrstvu od výsledkov pre 108 vrstiev. Všimnime si, že očividne aproximácia kôry iba jednou vrstvou (t.j. strata informácie o vertikálnom rozmiestnení hmoty) spôsobila značné nadhodnotenie potenciálu V v oblastiach s horskými masívmi či podmorskými chrbtami na zlomoch litosferických dosiek (na obrázku 3.16, ktorý predstavuje V_r sú to kladné oblasti). Obrázok 3.18 zas predstavuje porovnanie vo výkonovom spektre. Tu vidíme, že hlavným problémom jednovrstvovej aproximácie je nedostatočne rýchly pokles na vyšších stupňoch.

Ak to zhrnieme, obrázky nám ukazujú, že hoci je rozdiel medzi oboma prístupmi viditeľný a merateľný, nie je až taký výrazný ako by sa nám mohlo a priori zdať. Ak porovnáme hodnoty RMS, ako ich vidíme v tabuľke 3.2 a 3.3, môžeme povedať, že na istý, pomerne dobrý kvalitatívny vzhľad postačuje aj samotná jednovrstvová aproximácia, ktorá je oproti viacvrstvom rýchlejšia (ale za cenu straty presnosti), najmä ak by sme do budúcnosti používali väčšie siete referenčných bodov. RMS pre dáta zobrazené na obrázku 3.16 predstavuje $5.512 \times 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a pre obrázok 3.17 RMS činí $223,2237 \times 10^{-12} \text{ s}^{-2}$. Tabuľka 3.4 zobrazuje výsledné hodnoty korelačných členov $corr_{tot}$ medzi oboma predikciami. Keďže $corr_j$ vychádzali podobne veľmi blízko jednej, neprišlo nám zaujímavé sem vkladať grafy korelačných spektier. Ale aj tento výsledok ukazuje, že predikcie sú si oveľa bližšie, než by sa intuitívne zdalo.



Obr. 3.16 Grafické znázornenie rozdielu potenciálov V_r získaných pre jednu vrstvu a 108 vrstiev z modelu CRUST1.0. Dáta boli pred odčítaním orezané o prvé dva stupne vo sférickom harmonickom rozvoji



Obr. 3.17 Grafické znázornenie rozdielu potenciálov V_{rr} získaných pre jednu vrstvu a 108 vrstiev z modelu CRUST1.0. Dáta boli pred odčítaním orezané o prvé dva stupne vo sférickom harmonickom rozvoji.

	Viacvrstvová aproximácia (108 vrstiev, h = 700 m)	Jednovrstvová aproximácia (1 vrstva)	Jednotka
RMS pre V	1 187 037,1	1 187 037,2	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
RMS pre V_r	17 928,6	17 928,6	$\times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
RMS pre V_{rr}	54 167,0	54 172,1	$\times 10^{-12} \text{ s}^{-2}$

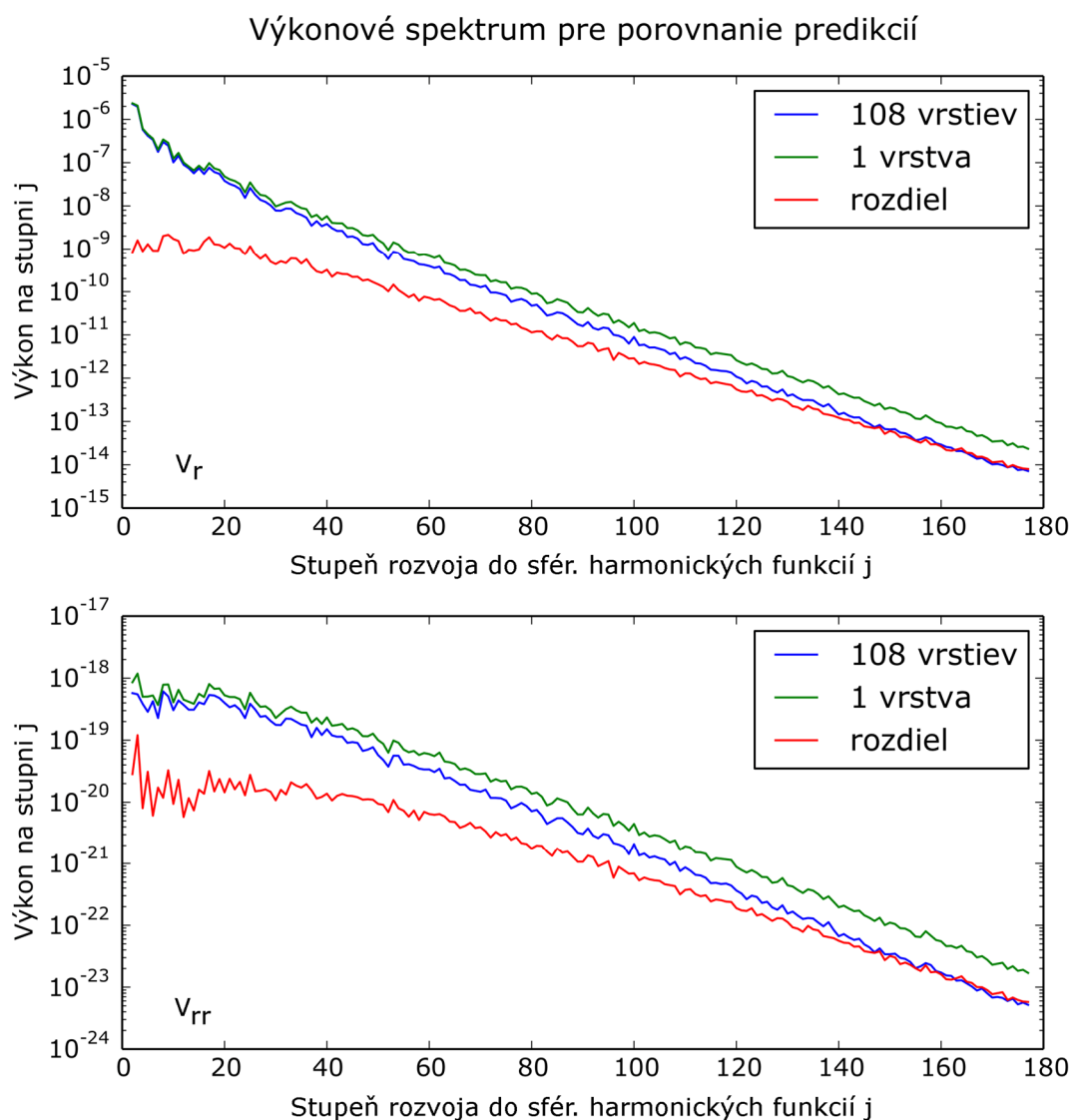
Tab. 3.2 Tabuľka porovnania výsledných kvadratických priemerov (RMS) pre jednovrstvovú a viacvrstvovú aproximáciu (dáta bez orezania prvých dvoch stupňov v sférických harmonických koeficientoch)

	Viacvrstvová aproximácia (108 vrstiev, h = 700 m)	Jednovrstvová aproximácia (1 vrstva)	Rozdiel	Jednotka
RMS pre V	1 224	1254	38,46	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
RMS pre V_r	76,71	79,99	5,72	$\times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
RMS pre V_{rr}	1 066	1 298	234,50	$\times 10^{-12} \text{ s}^{-2}$

Tab. 3.3 Tabuľka porovnania výsledných kvadratických priemerov (RMS) pre jednovrstvovú a viacvrstvovú aproximáciu (dáta po orezaní prvých dvoch stupňov v sférických harmonických koeficientoch)

Potenciál	$corr_0$
V	1,000
V_r	0,998
V_{rr}	0,989

Tab. 3.4 Absolútne korelačné členy $corr_{tot}$ medzi potenciálmi z viacvrstvovej a jednovrstvovej aproximácie (počítané pre dáta po orezaní prvých dvoch stupňov v sférických harmonických koeficientoch).



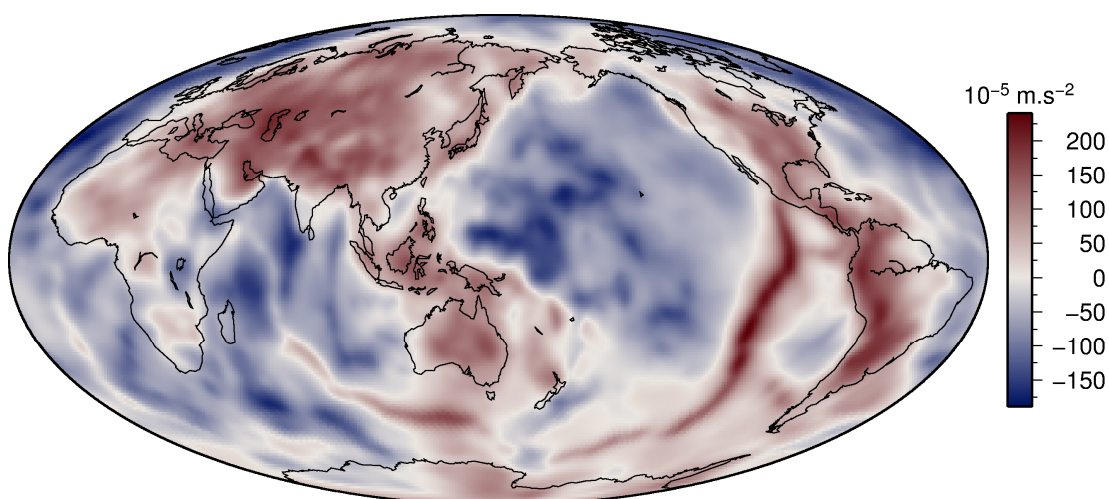
Obr. 3.18 Zobrazenie výkonových spektier pre dve rôzne predikcie a ich rozdiel pre potenciály V_r a V_{rr}

3.9. Porovnanie dát z misie GOCE s predikciou gravitačného poľa

Ako sme spomínali v podkapitole 3.7., získané merania gravitačného poľa sondou GOCE obsahovali celkové meranie gravitačného potenciálu a jeho dvoch derivácií ako aj anomálny potenciál T a jemu príslušné derivácie. Rozhodli sme sa pri porovnaní reálneho poľa s našou predikciou potenciálu V založenou na modeli CRUST1.0 pripodobniť našu predikciu čo najviac štruktúre týchto dát, a preto sme

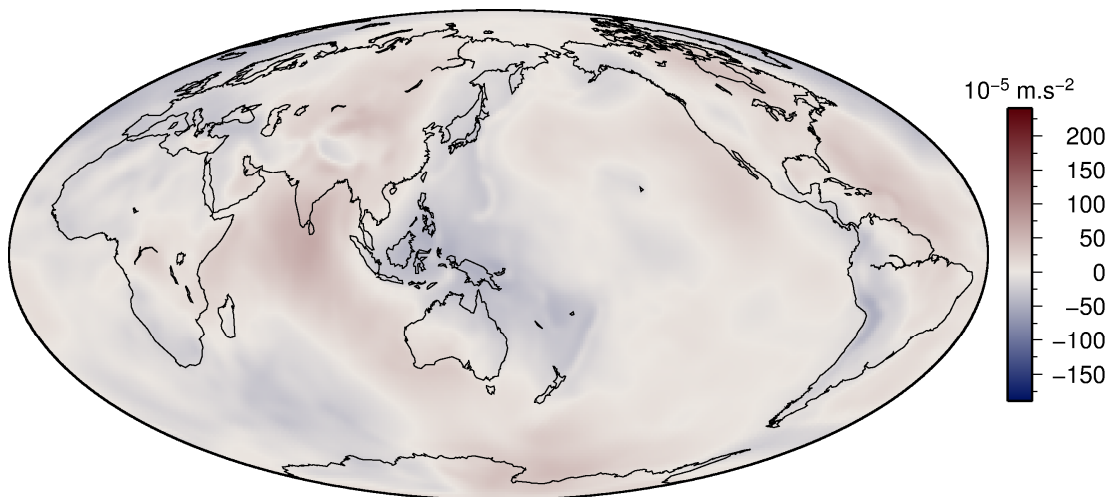
v našu predikciu rovnako orezali o nultý a prvý stupeň.¹⁹

Následne sme už prešli k samotnému porovnaniu predikovaného gravitačného signálu pre model CRUST1.0 a skutočného poľa, ako ho zaznamenala sonda GOCE. Rozdiely medzi dátami sme študovali ako v priestorovej, tak aj v spektrálnej oblasti. V priestorovej doméne porovnanie predstavovalo vzájomné odčítanie T od V (a obdobne ich derivácii), teda predikcia mínus meranie. Hodnoty V a jeho derivácii sme už v tejto práci zobrazili (porov Obr. 3.13 až 3.18), tento raz však vynášame už dáta „anomálne“ – t.j, po vynulovaní nultého a prvého stupňa v harmonickom rozvoji pre prvú (Obr. 3.19) a druhú deriváciu (Obr. 3.22). Namerané hodnoty patričných derivácii T z GOCE sme vyniesli do obrázkov 3.20 a 3.23 a ich odčítanie ($V - T$) sme graficky zobrazili na obrázkoch 3.21 a 3.24.

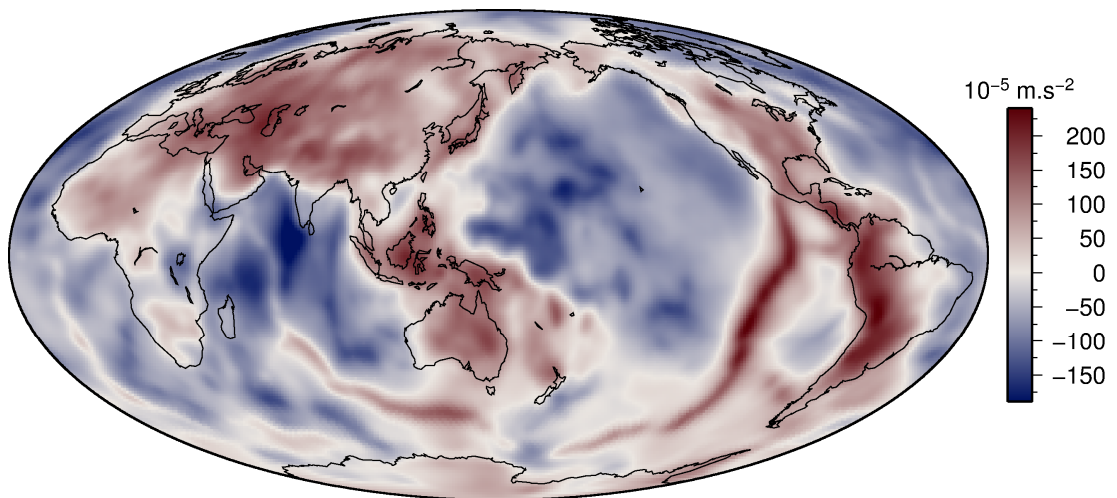


Obr. 3.19 Grafické znázornenie predikcie potenciálu V_r z modelu CRUST1.0. Dáta sú orezané o prvé dva stupne v sférickom harmonickom rozvoji.

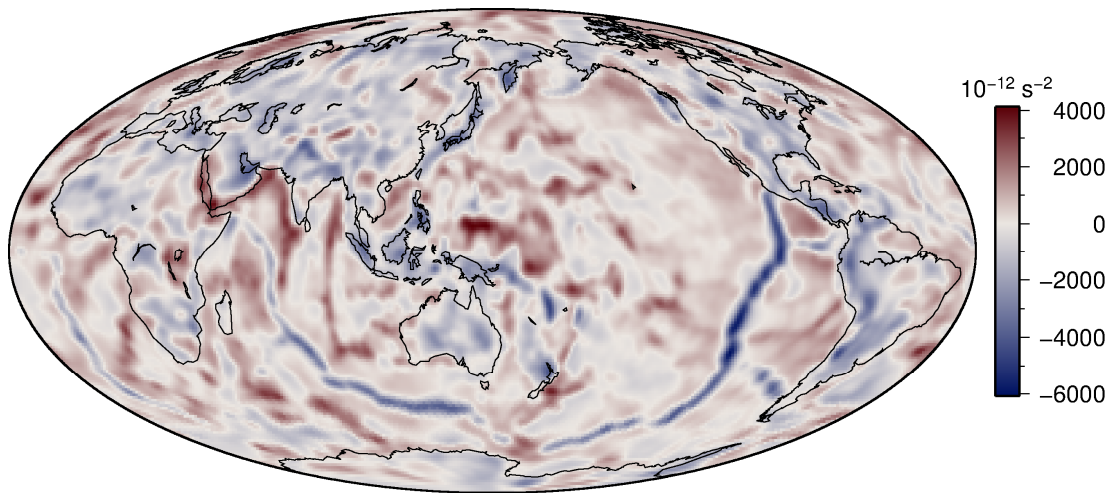
¹⁹ Pre jednoduchosť zavedme v ďalšom texte konvenciu, že vždy keď hovoríme o T , T_r či T_{rr} , máme namysli potenciál (anomálny) nameraný sondou GOCE. Naopak, ak v texte spomíname potenciál V , jeho prvú deriváciu V_r či druhú deriváciu V_{rr} , máme odteraz a ďalej (ak nehovoríme inak) na mysli veličiny pre predikované pole modelu CRUST1.0 pre hrúbku vrstvy $h = 700$ m orezané o prvé 2 stupne, t.j. nultý a prvý.



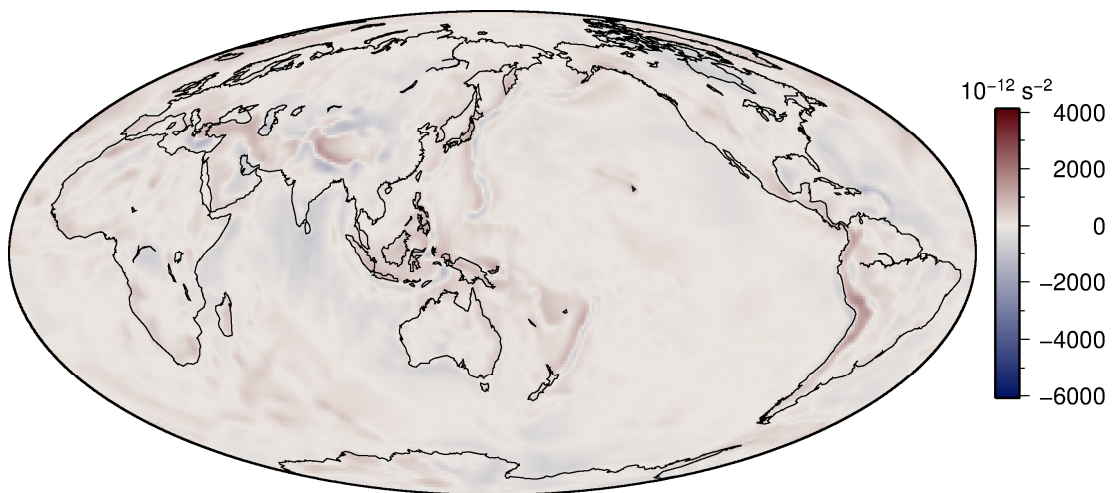
Obr. 3. 20 Grafické znázornenie získaných dát pre anomálny potenciál T_r nameraný sondou GOCE. Dáta sú orezané o prvé dva stupne v sférickom harmonickom rozvoji.



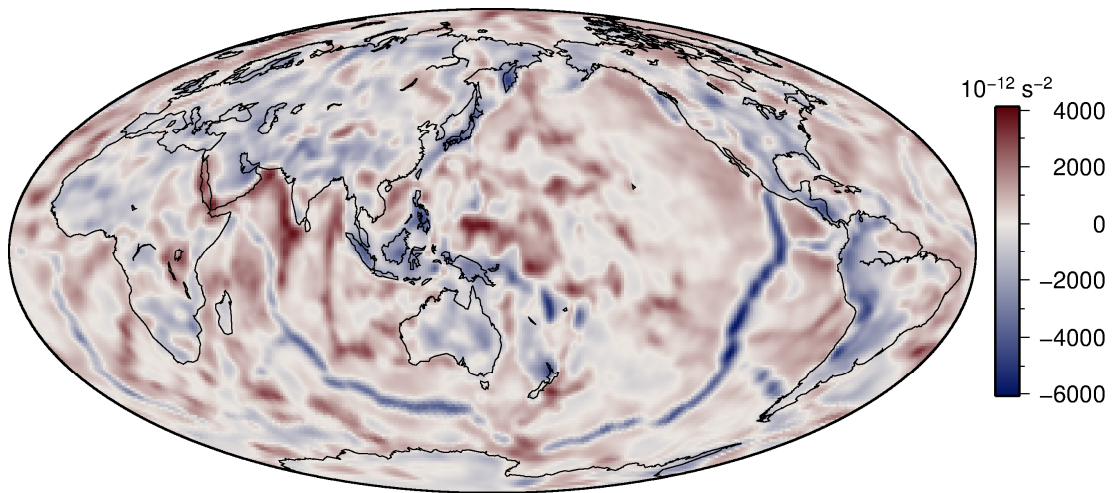
Obr. 3.21 Grafické znázornenie rozdielu $V_r - T_r$ podľa dát z predchádzajúcich dvoch obrázkov. Dáta sú orezané o prvé dva stupne v sférickom harmonickom rozvoji.



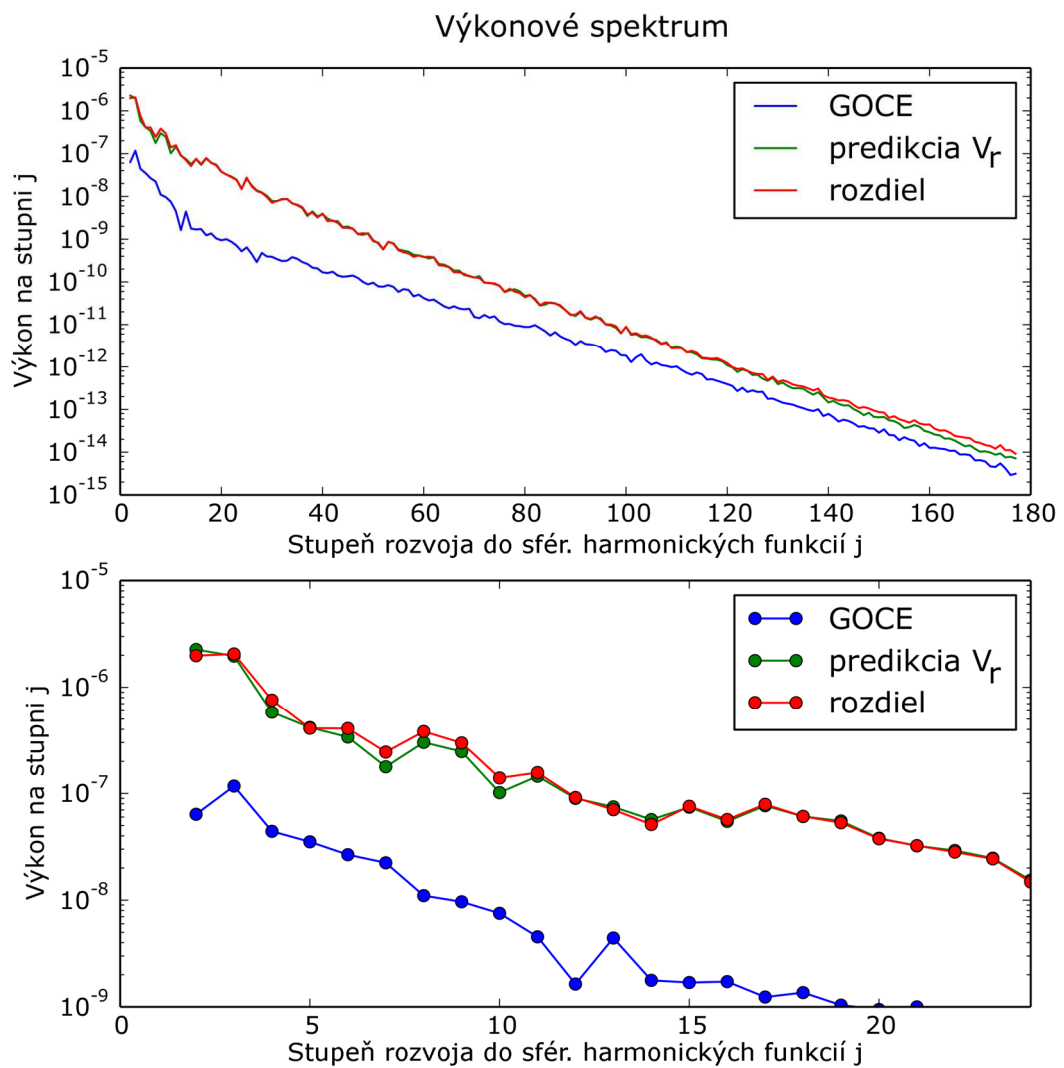
Obr. 3.22 Grafické znázornenie predikcie potenciálu V_{rr} z modelu CRUST1.0. Dáta sú orezané o prvé dva stupne v sférickom harmonickom rozvoji.



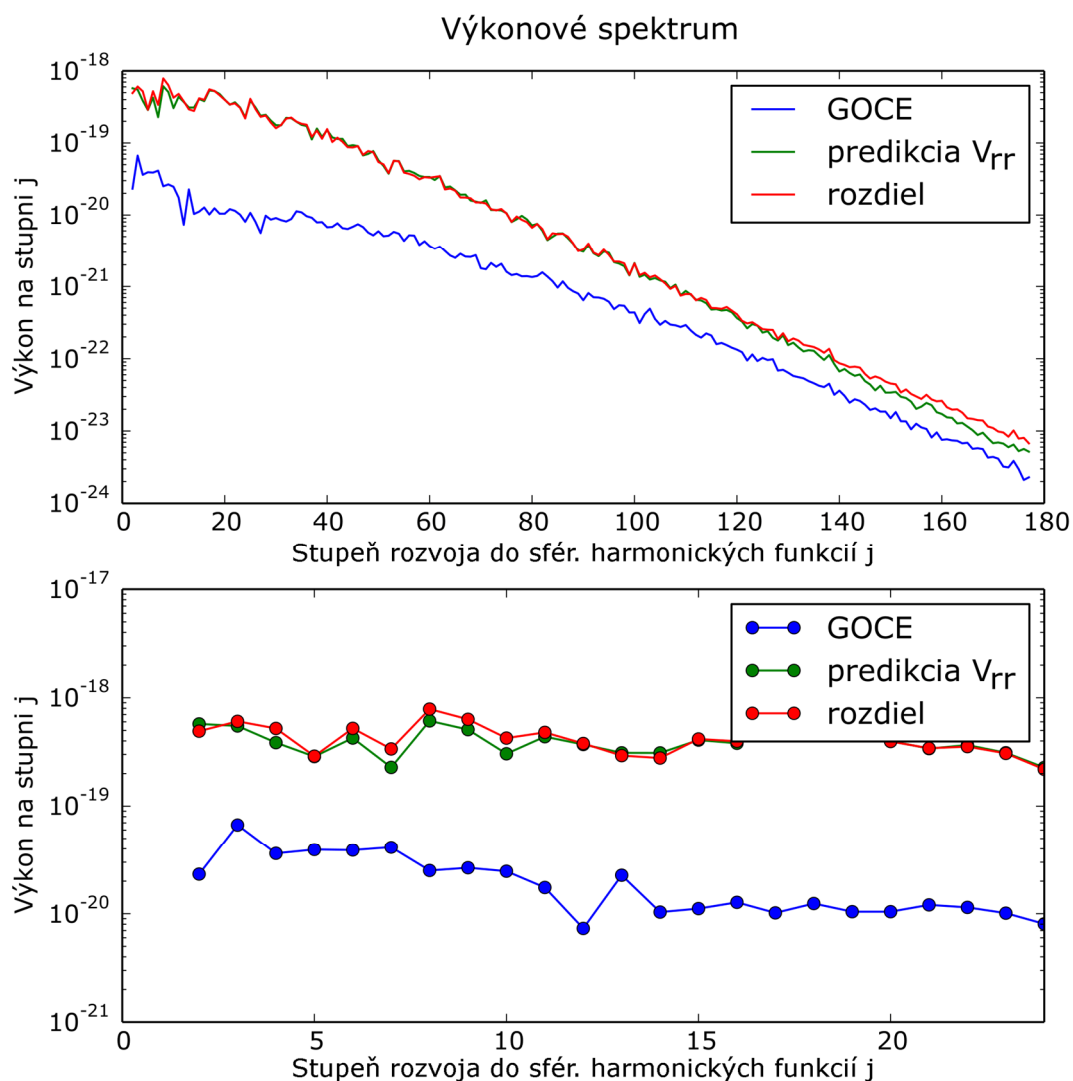
Obr. 3.23 Grafické znázornenie získaných dát pre anomálny potenciál T_{rr} nameraný sondou GOCE. Dáta sú orezané o prvé dva stupne v sférickom harmonickom rozvoji.



Obr. 3.25 Grafické znázornenie rozdielu $V_{rr} - T_{rr}$ podľa dát z predchádzajúcich dvoch obrázkov. Dáta sú orezané o prvé dva stupne v sférickom harmonickom rozvoji.

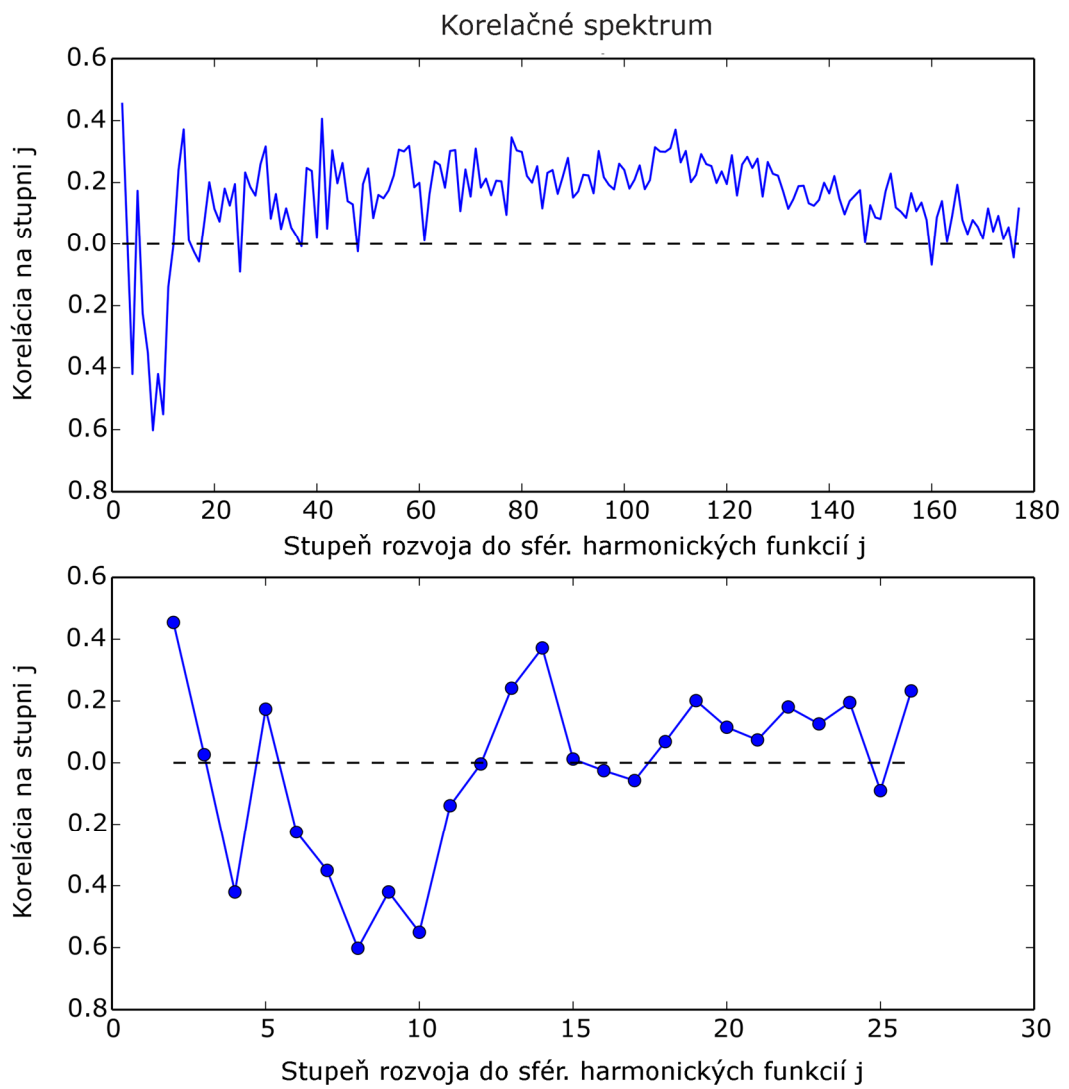


Obr. 3. 24 Grafické znázornenie výkonového spektra V_r , T_r a ich rozdielu s detailom na začiatok grafu.

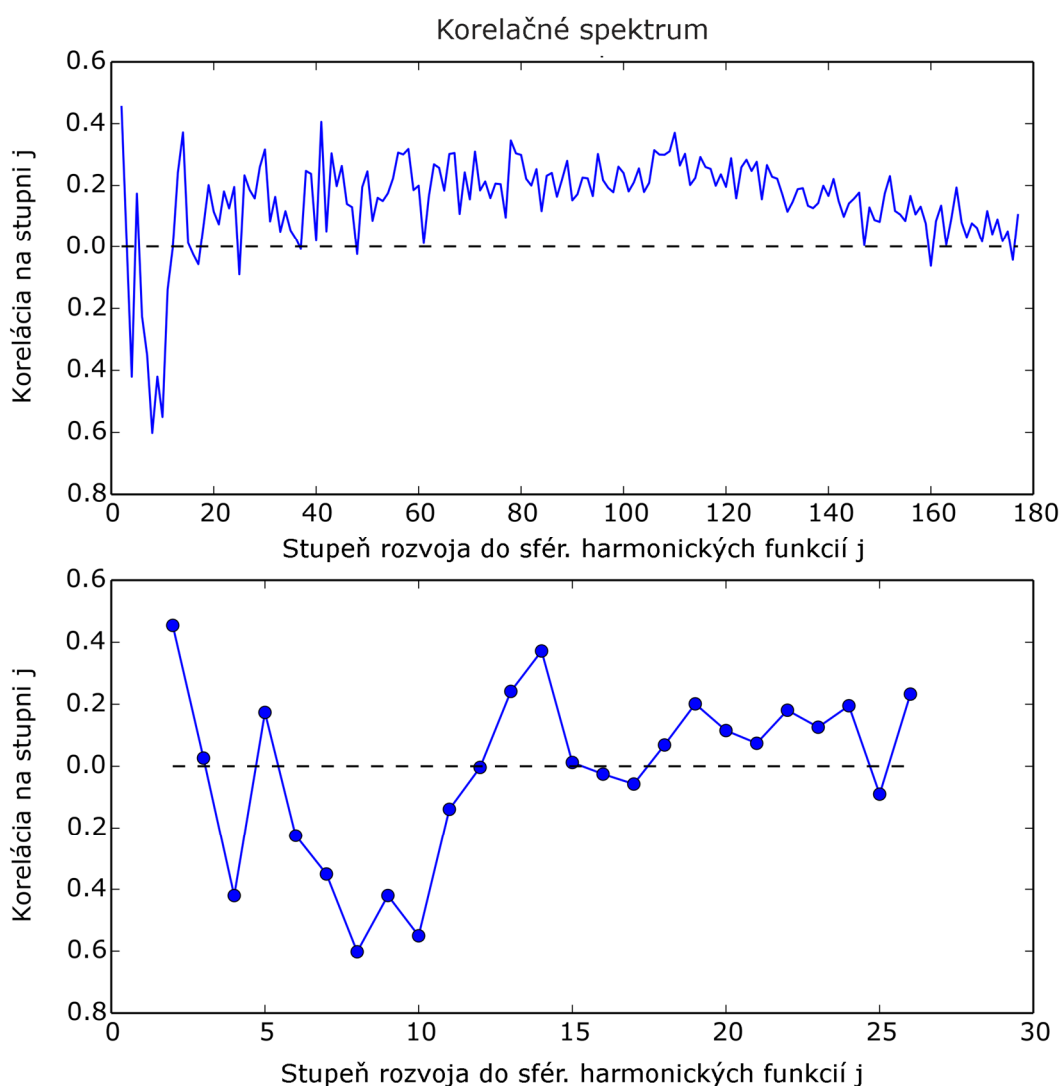


Obr. 3. 26 Grafické znázornenie výkonového spektra V_{rr} , T_{rr} a ich rozdielu s detailom na začiatok grafu.

V spektrálnej oblasti (t.j. v reprezentácii pomocou sférických koeficientov) porovnanie dát predstavovalo určenie ich výkonových spektier v závislosti na stupni j a spočítanie korelačných koeficientov (absolútnych, ako aj v závislosti na stupni rozvoja j), ako zobrazujeme graficky na obrázkoch 3.25 až 3.28.



Obr. 3.27 Grafické znázornenie korelačného spektra medzi V_r a T_r , s detailom na začiatok grafu.



Obr. 3.28 Grafické znázornenie korelačného spektra medzi V_{rr} a T_{rr} , s detailom na začiatok grafu.

	CRUST1.0	GOCE	Rozdiel	Jednotka
RMS pre V / T	1 224	253,7	1203	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
RMS pre V_r / T_r	76,71	17,13	78,20	$\times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
RMS pre V_{rr} / T_{rr}	1 066	254,1	1091	$\times 10^{-12} \text{ s}^{-2}$

Tab. 3.5 Tabuľka porovnania výsledných kvadratických priemerov (RMS) pre predikciu gravitačného poľa z modelu CRUST1.0, pole namerané sondou GOCE a pole určené ako ich vzájomný rozdiel (Dáta sú po orezaní prvých dvoch stupňov v sférických harmonických koeficientoch.)

3.10. Diskusia výsledkov

Z porovnania dát predikcie V a merania T v zmysle navzájom si odpovedajúcich derivácii sme zistili, že gravitačný signál predikovaný na základe modelu CRUST1.0 je značne silnejší, než reálne gravitačné pole, podľa toho, ako ho zmerala misia družice GOCE. Dokazuje to fakt, že po odčítaní potenciálu T_r od V_r (resp. T_{rr} od V_{rr}) sa hodnoty kvadratického priemeru (RMS) zmenili len nepatrne (viď Tab. 3.5). Daný fakt sme sa snažili sprístupniť aj grafickými prezentáciami výsledkov uvedenými v našej práci. Na obrázkoch Obr. 3.19 až 3.25 sme preto volili farebné škály legendy tak, aby vzájomne si korešpondujúce derivácie potenciálov ich mali spoločné. Ak teda vidíme, že obrázok znázorňujúci anomálne potenciály T je značne slabší oproti obrázkom znázorňujúcim V , vedzme, že pomer jasnosti farieb zodpovedá vzájomnému pomeru intenzity signálov.

Dôvodom, prečo to tak je bude zrejme samotná konštrukcia tohto modelu, ktorý sa plne orientuje na to, aby bol geologicky a seizmologicky uveriteľný, i keď sa tak deje na úkor presnosti rozloženia hmotných mäs naprieč zemskou kôrou. Napriek tomu, že nami predikovaný gravitačný signál sa pri nami zvolenom porovnaní (anomálnych) potenciálov s meraniami rozchádzal v absolútnych číslach miestami aj o viac ako dva rády, vyhodnotením korelačných koeficientov $corr_{tot}$ sme zistili, že pre prvú deriváciu je rovný 0,0237 a pre druhú 0,0200. Kladný charakter, i keď stále pod hodnotou 0,5 sme pozorovali i pri korelačných spektrách (porov. Obr. 3.27 a Obr. 3.28). Na nízkych stupňoch je korelácia negatívna, čo je spôsobené tým, že v našom priblížení sme vôbec neuvažovali príspevok zemského plášťa, ktorý by mal na nízkych stupňoch dominovať. Na vyšších stupňoch je už korelácia vyššia, ale i tak pomerne nízka. Priebeh týchto spektier tiež môžeme brať ako kontrolu konzistentnosti našich výsledkov. Keďže nám vyšli identicky, znamená to, že sme počítali derivácie potenciálu V pre model CRUST1.0 dobre.

Z pohľadu cieľa našej práce, ktorým bolo validovať globálny model zemskej kôry CRUST1.0 sú naše pocity rozpačité. Zistili sme, že model CRUST1.0, ako globálny model zemskej kôry, hrubo nezodpovedá svojim predikovaným gravitačným signálom skutočnému gravitačnému poľu. Tento výsledok motivuje vylepšenie modelov, ktoré pri svojej konštrukcii by boli viac založené aj na gravitačných dátach a mohli by tak obsahovať presnejšiu geometrickú distribúciu hmotných mäs v najvyššej časti telesa Zeme.

Záver

V našej bakalárskej práci sme si teoreticky i prakticky osvojili metódu výpočtu predikcie gravitačného signálu z modelov rozloženia hmoty v zemskej kôre. Použili sme metódu rozvoja do sférických harmonických funkcií (parametrizácia v laterálnom smere). V radiálnom smere sme zas diskretizovali model kôry do sústredných guľových plôch s plošnou hmotnostnou hustotou.

Cieľom práce bolo validovať globálne modely zemskej kôry pomocou gravitačných meraní sondy GOCE, pričom sme pracovali s modelom CRUST1.0. Zistili sme, že hoci istá malá, globálna korelácia medzi predikciou potenciálu danou modelom CRUST1.0 a skutočným priestorovým rozložením poľa existuje, model CRUST1.0 predikciou svojho gravitačného poľa hrubo nezodpovedá realite dát z gravitačných meraní. Výsledok motivuje nové modely, ktoré sú okrem seizmických a geologických dát postavené už aj na dátach gravitačných.

Ak ďalej vyjdeme z článku Wipperfurtha, Šrámka a McDonougha (2020), tento fakt o nesúlade medzi predikciou modelu CRUST1.0 a gravitačnými meraniami sa dá zrejme rozšíriť aj na ďalšie modely z „rodiny“, ako sú CRUST2.0 či model LITHO1.0.

Hlavný nedostatok nášho porovnania vidíme v absencii predikovaného signálu z plášťa. Či už toho v dôsledku hustotných plášťových anomálií alebo toho vyplývajúceho z dynamiky tečenia v plášti. Tento gravitačný signál by bol významný najmä na najnižších stupňoch harmonického rozvoja a bolo by zaujímavé pozorovať, ako by sa jeho zohľadnenie pri výpočtoch odrazilo na výsledkoch. Začlenenie tohto príspevku do uvažovaných výpočtov tak môže byť východiskom k ďalšiemu výskumu v tejto oblasti.

Zoznam použitej literatúry

BASSIN, C., LASKE, G., a MASTERS, G., 2000. *The current limits of resolution for surface wave tomography in North America*. Eos Trans. AGU 81, Abstract S12A-03. <http://igppweb.ucsd.edu/~gabi/crust2.html>

BIELIK, M., a kol., 2018. The refined Moho depth map in the Carpathian-Pannonian region. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, **48**(2), 179-190

CRAMERI, F., 2018. *Scientific colour maps*. Zenodo. <http://doi.org/10.5281/zenodo.1243862>

ENCYKLOPEDICKÝ ÚSTAV SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED (SAV), 1999 – 2018. *Encyclopaedia Beliana. Geosféra* [online]. ISBN 978-80-89524-30-3. [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: <https://beliana.sav.sk/heslo/geosfera>

ESA, 2008. *ESA / Enabling & Support / Operations/ GOCE*. [online][cit. 2020-12-23] Dostupné z: https://www.esa.int/Enabling_Support/Operations/GOCE

FEHRINGER, M., GERARD, A., LAMARRE, A., a MAUESLI, D., 2008. *A Jewel in ESA's Crown*. ESA Bulletin, **133**, 15 – 23. Dostupné z: https://www.esa.int/esapub/bulletin/bulletin133/bul133c_fehringer.pdf

GEOLAB: *Geomatics and Earth Observation laboratory. Earth crustal modelling* [online]. Miláno: Politecnico Milano [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: <http://www.geolab.polimi.it/research-2/gravity-and-gravity-interpretation/earth-crustal-modelling/>

JAUPART, C., LABROSSE, S., LUCAZEAU, F., a MARESCHAL, J.-C., 2015. Temperatures, heat, and energy in the mantle of the Earth, in: Bercovici, D. (editor), G. Schubert (editor-in-chief), *Mantle Dynamics*. Elsevier, Oxford. volume 7 of *Treatise on Geophysics (Second Edition)*, chapter 6, 223–270, doi:10.1016/B978-0-444-53802-4.00126-3

LASKE, G., MASTERS, G., a REIF, C., 2001. *CRUST2.0, A new global crustal model at 2x2 degrees*. <http://igppweb.ucsd.edu/~gabi/crust2.html>

LASKE, G., a kol., 2013. Update on CRUST1.0 - A 1-degree Global Model of Earth's Crust, *Geophys. Res. Abstracts*, 15, Abstract EGU2013-2658. <https://igppweb.ucsd.edu/~gabi/crust1.html>

MARTINEC, Z., 1989, Program to calculate the spectral harmonic expansion coefficients of the two scalar fields product, *Comp. Phys. Comm.*, **54** (1), 177–182, doi:10.1016/0010-4655(89)90043-X

MARTINEC, Z., 1991. Program to calculate the least-squares estimates of the spherical harmonic expansion coefficients of an equally angular-gridded scalar field, *Comp. Phys. Comm.*, **64** (1), 140–148, doi: 10.1016/0010-4655(91)90057-R

MOONEY, W.D., LASKE, G., a MASTERS, T.G., 1998. Crust 5.1: a global crustal model at 5x5 degrees, *JGR*, **103**, 727-747, doi: 10.1029/97JB02122. <https://igppweb.ucsd.edu/~gabi/crust.html>

NASA, 2007. *NASA - Measuring Gravity With GRACE*. [online] [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: https://www.nasa.gov/audience/foreducators/k4/features/F_Measuring_Gravity_With_Grace.html

NATAF, H.-C., RICARD, Y., 1996. 3SMAC: an a priori tomographic model of the upper mantle based on geophysical modeling. *Phys. Earth Planet. Int.* **95**, 101–122, doi:10.1016/0031-9201(95)03105-7

NIST, 2018. *CODATA Value: Newtonian constant of gravitation*. The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty. [cit. 2020-12-23] Dostupné z: https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg|search_for=gravitational

NOVOTNÝ, O., 1998. *Motions, gravity field and figure of the Earth*. Instituto de Geociencias, Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia. Salvador, Bahia.

PASYANOS, M. E., MASTERS, T. G., LASKE, G., MA, Z., 2014. LITHO1.0: An updated crust and lithospheric model of the Earth. *J. Geophys. Res.* **119**, 2153–2173, doi:10.1002/2013JB010626, <http://igppweb.ucsd.edu/~gabi/litho1.0.html>

SZWILLUS, W., AFONSO, J. C. C., EBBING, J., a MOONEY, W. D. 2019. Global crustal thickness and velocity structure from geo-statistical analysis of seismic data. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **124**, 1626–1652. <https://doi.org/10.1029/2018JB016593>

ŠRÁMEK, O., 2020. *What We Have Learned From Geoneutrinos*. Geodynamický seminář, Katedra geofyziky, MFF UK. Praha. [cit. 2020-12-23]. Dostupné z: <http://geo.mff.cuni.cz/seminar/G-201202-Sramek.pdf>

TANIMOTO, T., 1995. Crustal structure of the earth, in: Ahrens, T. J. (Ed.), *Global Earth Physics: A Handbook of Physical Constants*. Washington, DC: American Geophysical Union. Volume 1 of AGU Reference Shelf. 214–224, doi:10.1029/RF001p0214

TENZER, R., 2015. Mathematical models of the Earth's density structure and their applications in gravimetric forward modeling. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, **45**(2), 67-92. doi: 10.1515/congeo-2015-0014

VITAGLIANO, E., TAMBORRA, I. a RAFFELT, G., 2020. Grand unified neutrino spectrum at Earth: Sources and spectral components. *Rev. Mod. Phys.* **92**, 045006, doi:10.1103/RevModPhys.92.045006, arXiv:1910.11878

WESSEL, P., a kol. 2019. *The Generic Mapping Tools version 6*. Geochemistry, Geophysics, Geosystems, **20**(11), 5556–5564, doi:10.1029/2019GC008515, <https://www.generic-mapping-tools.org>

WIPPERFURTH, S. A., ŠRÁMEK, O., a MCDONOUGH, W. F., 2020. Reference models for lithospheric geoneutrino signal. *J. Geophys. Res.* **125**, e2019JB018433, doi:10.1029/2019JB018433, arXiv:1907.12184

WAHR, J., 1996. *Geodesy and Gravity. Class Notes*. 1. vydanie. Golden: Samizdat Press. Department of Geophysics, Colorado School of Mines.

Zoznam tabuliek

Tab. 3.1 Tabuľka výsledného počtu vrstiev pre rôzne zvolené hrúbky 1 vstvy.....	33
Tab. 3.2 Tabuľka porovnania RMS pre jedno vrstvovú a viacvrstvovú aproximáciu (dáta bez orezania prvých dvoch členov)	41
Tab. 3.3 Tabuľka porovnania RMS pre jedno vrstvovú a viacvrstvovú aproximáciu (s orezaním prvých dvoch členov)	41
Tab. 3.4 Absolútne korelačné členy $corr_0$ medzi potenciálmi z viacvrstvovej a jednovrstvovej aproximácie	41
Tab. 3.5 Tabuľka porovnania výsledných kvadratických priemerov (RMS) pre predikciu gravitačného poľa z modelu CRUST1.0, pole namerané sondou GOCE a pole určené ako ich vzájomný rozdiel	51

Zoznam obrázkov

Obr. 1.1 Schematické znázornenie geosfér Zeme	6
Obr. 1.2 Vertikálne usporiadanie vrstiev jednej dlaždice v modeli CRUST1.0	9
Obr. 1.3 Zobrazenie teselačnej parametrizácie modelu LITHO1.0 na globálnej a regionálnej škále	10
Obr. 1.4 Prehľadový graf zobrazujúci tok neutrín na Zemi a ich zdroje	15
Obr. 3.1 Výška povrchu dlaždíc v modeli CRUST1.0	26
Obr. 3.2 Hrúbka dlaždíc v modeli CRUST1.0..	26
Obr. 3.3 Znázornenie hĺbky MOHO pre jednotlivé dlaždice modelu CRUST1.0.	27
Obr. 3.4 Znázornenie rozloženia funkcie plošnej hustoty $\sigma(\vartheta, \varphi)$ bez uvažovania jednotného spodného zarovnaní modelu.	27
Obr. 3.5 Znázornenie rozloženia funkcie plošnej hustoty $\sigma(\vartheta, \varphi)$ so zarovnaním na jednotnú hĺbku danú najhlbšou hodnotou MOHO v modeli.	28
Obr. 3.6 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V v jednovrstvovej aproximácii modelu CRUST1.0.....	29
Obr. 3.7 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V_r v jednovrstvovej aproximácii modelu CRUST1.0.....	29
Obr. 3.8 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V_{rr} v jednovrstvovej aproximácii modelu CRUST1.0.....	30
Obr. 3.9 Obrázok graficky znázorňujúci princíp nami zvolenej parametrizácie vrstiev delenia pri viacvrstvovej aproximácii výpočtu potenciálov a jeho derivácii.....	32
Obr. 3.10 Graf konvergenie RMS pre potenciál V v závislosti na počte vrstiev viacvrstvovej aproximácie zemskej kôry (logaritmická škála).	35
Obr. 3.11 Graf konvergenie RMS pre potenciál V_r v závislosti na počte vrstiev viacvrstvovej aproximácie zemskej kôry (logaritmická škála).	35
Obr. 3.12 Graf konvergenie RMS pre potenciál V_{rr} v závislosti na počte vrstiev viacvrstvovej aproximácie zemskej kôry.	36
Obr. 3.13 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V vo viacvrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0.....	37
Obr. 3.14 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V_r vo viacvrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0.....	37

Obr. 3.15 Grafické znázornenie predikovaného (spočítaného) potenciálu V_{rr} vo viacvrstvovej aproximácii, pre model CRUST1.0.....	38
Obr. 3.16 Grafické znázornenie rozdielu potenciálov V_r získaných pre jednu vrstvu a 108 vrstiev z modelu CRUST1.0.....	42
Obr. 3.17 Grafické znázornenie rozdielu potenciálov V_{rr} získaných pre jednu vrstvu a 108 vrstiev z modelu CRUST1.0.....	42
Obr. 3.18 Zobrazenie výkonových spektier pre dve rôzne predikcie a ich rozdiel pre potenciály V_r a V_{rr}	44
Obr. 3.19 Grafické znázornenie predikcie potenciálu V_r z modelu CRUST1.0. Dáta sú orezané o prvé dva stupne v sférickom harmonickom rozvoji.	45
Obr. 3.20 Grafické znázornenie získaných dát pre anomálny potenciál T_r nameraný sondou GOCE.....	46
Obr. 3.21 Grafické znázornenie rozdielu $V_r - T_r$ podľa dát z predchádzajúcich dvoch obrázkov.....	46
Obr. 3.22 Grafické znázornenie predikcie anomálneho potenciálu V_{rr} z modelu CRUST1.0.	47
Obr. 3.23 Grafické znázornenie získaných dát pre anomálny potenciál T_{rr} nameraný sondou GOCE.....	47
Obr. 3.24 Grafické znázornenie rozdielu $V_{rr} - T_{rr}$ podľa dát z predchádzajúcich dvoch obrázkov.....	48
Obr. 3.25 Grafické znázornenie výkonového spektra V_r, T_r a ich rozdielu.....	48
Obr. 3.26 Grafické znázornenie výkonového spektra V_{rr}, T_{rr} a ich rozdielu	49
Obr. 3.27 Grafické znázornenie korelačného spektra medzi V_r a T_r	50
Obr. 3.28 Grafické znázornenie korelačného spektra medzi V_{rr} a T_{rr} ,	51