



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁRSKA PRÁCA

Natália Verkinová

Exotické zahrievanie exozemí

Katedra geofyziky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Marie Běhounková, Ph.D.

Študijní program: Fyzika

Študijní odbor: FOF

Praha 2020

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Predovšetkým by som sa rada poďakovala mojej vedúcej RNDr. Marii Běhounkovej, Ph.D. za hodiny strávené pri konzultovaní tejto práce, za jej ochotu a trpezlivosť pri riešení každého problému, ktorý počas písania bakalárskej práce nastal. Veľké ďakujem patrí aj RNDr. Jakubovi Velímskému, Ph.D. za jeho cenné rady a poskytnutie programu na výpočet jouleovského zahrievania a tiež Mgr. Michaele Walterovej za možnosť využiť program na výpočet slapového zahrievania. Ďakujem aj svojej rodine za neustálu podporu pri štúdiu.

Názov práce: Exotické zahrievanie exozemí

Autor: Natália Verkinová

Katedra: Katedra geofyziky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Marie Běhounková, Ph.D., Katedra geofyziky

Abstrakt: Táto práca je zameraná na výpočet slapového zahrievania v exoplanetách a jeho porovnanie s menej obvyklým zdrojom, jouleovským teplom. V parametrickej štúdii na modelovej planéte obiehajúcej okolo málo hmotnej hviezdy je najskôr určený vplyv jednotlivých fyzikálnych parametrov na veľkosť joulovského a slapového zahrievania. Potom je vypočítaná možná štruktúra planét zo znalosti ich polomeru a celkovej hmotnosti pre predpokladané zloženie. Aplikácia na planéty TRAPPIST-1b a c ukázala, že prechádzajú intenzívnou slapovou deformáciou a pri nenulovom sklone osi magnetického dipólu voči osi rotácie hviezdy sa u nich uplatňuje aj jouleovské zahrievanie. Za predpokladu jednoduchej štruktúry planét tvorených z jadra a pláštá, zo štúdie vyplýva dominancia slapového zahrievania u oboch planét. Extrémne zahrievanie, ktoré pozorujeme za použitia niektorých reológií, by mohlo viesť k rýchlemu prehriatiu planéty alebo veľkoškálovému taveniu vnútri planéty.

Kľúčové slová: exoplanéty, jouleovské zahrievanie, slapové zahrievanie, numerické metódy

Title: Exotic heat sources in exoEarths

Author: Natália Verkinová

Department: Department of Geophysics

Supervisor: RNDr. Marie Běhounková, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: This thesis focuses on the comparison between the tidal heating and Joule heating representing an unusual heat source. First, a parametric study was performed on a model planet orbiting a low-mass star where the effects of the most important physical parameters were studied. Then, the possible planetary structure with known radius and total mass was determined for the assumed composition. Application to the TRAPPIST-1b and c planets shows that they undergo intense tidal deformation. If the stellar rotation and magnetic dipole axes are inclined with respect to each other, then Joule heating also applies to them. For a simple structure of planets composed of the mantle and the core, the study shows that energy dissipation from stellar tides dominates in both planets. The extreme heating that we observe could lead to rapid overheating of the planet or large-scale melting within the planet.

Keywords: exoplanets, Joule heating, tidal heating, numerical methods

Obsah

Úvod	2
1 Jouleovské zahrievanie	4
1.1 Matematický popis	4
1.2 Potenciál magnetického poľa hviezdy v sústave pevne spojenej s planétou	5
1.2.1 Metóda 1	7
1.2.2 Metóda 2	8
1.3 Časová analýza sférických harmonických koeficientov	10
2 Slapové zahrievanie	11
3 Jouleovské zahrievanie - Parametrická štúdia	13
4 Slapové zahrievanie - Parametrická štúdia	18
5 Určenie štruktúry	23
5.1 Hustotný profil planét	23
5.2 Implementácia	24
5.3 Vodivostný profil planét	25
6 Aplikácia na TRAPPIST-1	26
6.1 Zahrievanie TRAPPIST-1b	26
6.2 Zahrievanie TRAPPIST-1c	28
Zoznam použitej literatúry	37
Zoznam obrázkov	40
Zoznam tabuliek	42
A Sférické harmonické funkcie	43
B Fourierova spektrálna analýza	45
B.1 Fourierov rad spojitého signálu	45
B.2 Fourierova transformácia spojitého signálu	45
B.3 Fourierov rad diskrétného signálu	46

Úvod

Detekcii exoplanét a exoplanetárnych systémov, ich možnej charakterizácii a detekčným metódam je v priebehu posledného desaťročia upieraná veľká pozornosť. V súčasnosti sú známe tisícky planét či planetárnych kandidátov (NASA Exoplanet Archive). Zvláštna pozornosť je venovaná možnej obývateľnosti (habitabilite) extrasolárnych planét a detekcia planét v habitabilnej zóne.

Jednou z intenzívne študovaných sústav je aj TRAPPIST-1 (e.g. Kislyakova a kol., 2017; Gillon a kol., 2017; Delrez a kol., 2018; Hamish a Matsuyama, 2019). TRAPPIST-1 je planetárny systém lokalizovaný 12.1 pc od slnečnej sústavy. Okolo hviezdy (červeného trpaslíka), ktorá je 12-krát ľahšia ako Slnko a veľkosťou o niečo väčšia ako Jupiter, obieha 7 známych planét. Týchto sedem exoplanét bolo objavených počas transitu, čím bolo možné určiť ich orbitálne periódy a veľkosti. Vďaka porozovaniu variácií časov tranzitu (transit-timing variations) boli získané ich hmotnosti. Planéty TRAPPIST-1 systému majú pravdepodobne kamennú kompozíciu a veľkosti porovnateľné so Zemou či Venušou. Nedávne štúdie naznačujú, že sa tieto planéty sformovali v oblasti bohatej na vodu. Planéty b, d, f, g a h obsahujú prchavé látky vo forme vrstvy kvapalnej vody, ľadu alebo hustej atmosféry. V článku (Gillon a kol. (2017)) naznačujú, že hmotnosti niektorých exoplanét môžu byť tvorené vodou až z 5%. Atmosféra planéty TRAPPIST-1b bola podrobnejšie preskúmaná pomocou Hubbleovho vesmírneho ďalekohľadu, vďaka ktorému vieme o atmosfére povedať, že je buď bohatá na oxid uhľičitý alebo vodnú paru (de Wit a kol. (2016)).

Svietivosť hviezdy TRAPPIST-1a je len 0.05% zo svietivosti Slnka. Všetky planéty obiehajú okolo hviezdy s krátkymi periódami a po veľmi blízkych obežných dráhach. Vďaka čomu sa predpokladá, že sú vystavené rovnakému celkovému množstvu dopadajúceho žiarenia ako terestrické planéty slnečnej sústavy, presnejšie planéty od Merkúra k Marsu. Tri zo siedmich planét sa nachádzajú v obývateľnej zóne (Barstow a Irwin, 2016).

Najbližšie planéty s veľkou pravdepodobnosťou prechádzajú intenzívnou slapovou deformáciou. Podľa Gillon a kol. (2017) sa predpokladá, že sa všetky planéty vplyvom slapovej deformácie a malé výstrednosti dráh nachádzajú vo viazanej rotácii: doba rotácie planét okolo vlastnej osi je rovná dobe obehu okolo hostiteľskej hviezdy. Vďaka tomu sa predpokladajú veľké teplotné rozdiely medzi permanentne osvietenou časťou planét a trvalo tmavou časťou.

Planéty sústavy TRAPPIST-1 obiehajú okolo materskej hviezdy, s relatívne silným magnetickým polom, na veľmi krátkych periódach. K jedným z možných zdrojov tepla teda patrí indukčné zahrievanie planéty, ktoré v slnečnej sústave zanedbávame v porovnaní s inými tradične uvažovanými zdrojmi zahrievania (rádioaktívne a slapové). Tento neobvyklý zdroj sa v celkovej energetickej bilancii uplatňuje u vnútorných planét sústavy TRAPPIST-1. Cieľom tejto práce je štúdium jouleovského a slapového zahrievania, citlivosť týchto zahrievaní na fyzikálne parametre a aplikácia na planéty systému TRAPPIST-1.

Jouleovské zahrievanie je indukované pohybom planéty v premenlivom magnetickom poli hviezdy. Pri určitom naklonení osi rotácie hviezdy voči osi magnetického dipólu, by indukčné zahrievanie mohlo roztaviť hornú vrstvu plášťa planét, spôsobiť vulkanické aktivity alebo magmatické oceány. Pri hviezdach typu M boli

pozorované magnetické polia až o veľkosti jednotiek Tesla. Hviezdy tohto typu majú enormne dlhú odhadovanú životnosť, ktorá sa pohybuje od niekoľkých desiatok miliárd až po miliardy rokov (Adams a kol., 2004). Vzhľadom na ich nízky žiarivý výkon sa nachádza obývateľná zóna bližšie k hviezde, čo znamená, že planéty sú vystavené veľkému magnetickému poľu (Kislyakova a kol. (2017)).

Slapové zahrievanie vzniká v dôsledku vnútorného trenia v telese počas toho, ako sa deformuje v reakcii na časovo premenlivý slapový potenciál pôsobiaci na teleso konečného rozmeru a budený vonkajším gravitačným potenciálom. Orbitálna excentricita planéty spôsobuje, že objekt prechádza peremenlivým slapovým potenciálom, ktorý indukuje zahrievanie vďaka periodickým deformáciám. V tejto práci budeme hovoriť o slapovom pôsobení hviezdy na planéty, keďže pôsobenie planéty na planétu je v planetárnom systéme TRAPPIST-1 zanedbateľné (Hamish a Matsuyama (2019)).

Štruktúra práce je nasledovná: v kap. 1 odvádzame vzťahy použité pri výpočte jouleovského zahrievania a opisujeme postup na získanie sférických harmonických koeficientov vonkajšieho magnetického poľa vo frekvenčnej oblasti potrebných na vstup do programu na výpočet jouleovského zahrievania. Správnosť výpočtov overujeme dvoma rôznymi metódami. V kap. 2 uvádzame najdôležitejšie vzťahy na výpočet slapového zahrievania a dve reológie, ktoré využívame na popísanie slapových deformácií. V kap. 3 a kap. 4 sa zaoberáme parametrickou štúdiou jouleovského a slapového zahrievania modelovej planéty so zjednodušenou štruktúrou. V kap. 5 sa venujeme určeniu štruktúry planét vďaka znalosti ich polomeru a hmotnosti. Nakoniec v kap. 6 porovnáваме vplyv jouleovského a slapového zahrievania na planétach systému TRAPPIST-1. Venujeme sa predovšetkým dvom najbližším planétam k materskej hviezde. V závere diskutujeme výsledky, komentujeme zjednodušenia a úpravy v modeli.

1. Jouleovské zahrievanie

Indukčné zahrievanie vzniká, keď premenlivé magnetické pole indukuje prúdy vo vodivom médiu. Dané prúdy sa v telese disipujú vďaka jouleovskému zahrievaniu. Vplyvom tejto disipácie môže dôjsť k zvýšeniu teploty lokalizovanej kvôli skin efektu v hornej vrstve planét (Kislyakova a kol., 2017). Postup na výpočet jouleovského zahrievania bol inšpirovaný článkom Kislyakova a kol. (2017).

Na výpočet jouleovského zahrievania bol použitý program `elmFD` pre modelovanie elektromagnetickej indukcie v sférickej oblasti metódou konečných elementov a sférických harmoník vo frekvenčnej oblasti (Velínský a Martinec, 2005; Velínský a kol., 2018). Vstupom do tohoto programu sú vodivosti v jednotlivých vrstvách planéty, sférické harmonické koeficienty vonkajšieho magnetického poľa na povrchu planéty a odpovedajúce budiace frekvencie.

1.1 Matematický popis

Z Maxwellových rovníc je možné odvodiť rovnicu pre elektromagnetickú indukciu vnútri planéty (Velínský a Martinec, 2005)

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{B} \right) = 0, \quad (1.1)$$

kde σ je elektrická vodivosť a μ_0 je magnetická permeabilita vákuua.

Rovnicu elektromagnetickej indukcie je možné reformulovať aj vo frekvenčnej oblasti. V našom prípade je najviac vhodné zvoliť alternatívnu, fyzikálne ekvivalentnú formuláciu pre vektor elektromagnetického poľa $\hat{\vec{E}}(\vec{r}; \omega)$

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\vec{E}}(\vec{r}; \omega) + i\omega\mu_0\sigma(\vec{r})\hat{\vec{E}}(\vec{r}; \omega) = 0. \quad (1.2)$$

kde $\omega = 2\pi/T$ je uhlová frekvencia. V prípade sféricky symetrického priebehu vodivosti $\sigma(r)$ sa numerické riešenie tejto rovnice redukuje na nájdenie toroidálnej zložky elektrického poľa. Hraničná podmienka na povrchu planéty je Neumannovho typu

$$\nabla \times \hat{\vec{E}}(r = R_p, \Omega; \omega) = -i\omega\hat{\vec{B}}(r = R_p, \Omega; \omega). \quad (1.3)$$

Ak reprezentujeme priebeh elektrickej vodivosti vrstevnatým modelom s konštantnou vodivosťou σ_k v k -tej vrstve, potom je jouleovské teplo uvoľnené v tejto vrstve a spriemerované za dobu periódy dané vzťahom

$$P_k = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{V_k} \sigma_k |\vec{E}(\vec{r}; t)|^2 dV dt = 2 \int_{V_k} \sigma_k |\hat{\vec{E}}(\vec{r}; \omega)|^2 dV. \quad (1.4)$$

Objemové jouleovské zahrievanie v objeme k -tej vrstvy budeme ďalej označovať ako $h_k = h(r)$, kde $h_k = P_k/V_k$. Hodnotou P budeme označovať celkové jouleovské zahrievanie planéty:

$$P = \sum_{k=1}^n P_k, \quad (1.5)$$

kde n je celkový počet vrstiev.

Mimo planéty je vektor magnetickej indukcie bezdivergentný a bezrotačný, a preto môže byť reprezentovaný gradientom skalárneho magnetického potenciálu

$$\vec{B}(x,y,z,t) = -\nabla V(x,y,z,t), \quad (1.6)$$

kde skalárny magnetický potenciál V splňuje Laplaceovu rovnicu

$$\nabla^2 V(x,y,z,t) = 0. \quad (1.7)$$

Rozšírenie magnetického potenciálu V do sférických harmonických funkcií Y_{jm} nám umožňuje napísať analytické riešenie rovnice (1.7) ako sumu dvoch častí (Velínský a Martinec, 2005)

$$V = V^{(e)} + V^{(i)}. \quad (1.8)$$

Vnútoraná časť $V^{(i)}$, pre $R_p \leq r$ reprezentuje magnetické pole indukované prúdmi vo vnútri sféry (planéty) a môžeme ju vyjadriť vzťahom

$$V^{(i)}(\vec{r},t) = R_p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j V_{jm}^{(i)}(t) \left(\frac{R_p}{r}\right)^{j+1} Y_{jm}(\vartheta,\varphi). \quad (1.9)$$

Potenciál vonkajšieho poľa reprezentujúceho vonkajšie zdroje je možné popísať pomocou

$$V^{(e)}(\vec{r},t) = R_p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j V_{jm}^{(e)}(t) \left(\frac{r}{R_p}\right)^j Y_{jm}(\vartheta,\varphi), \quad (1.10)$$

kde $V_{jm}^{(i)}(t), V_{jm}^{(e)}(t)$ sú sférické harmonické koeficienty potenciálu vnútorného, resp. vonkajšieho poľa, R_p je polomer sféry, ϑ je planetopisná ko-šírka a φ je planetopisná dĺžka.

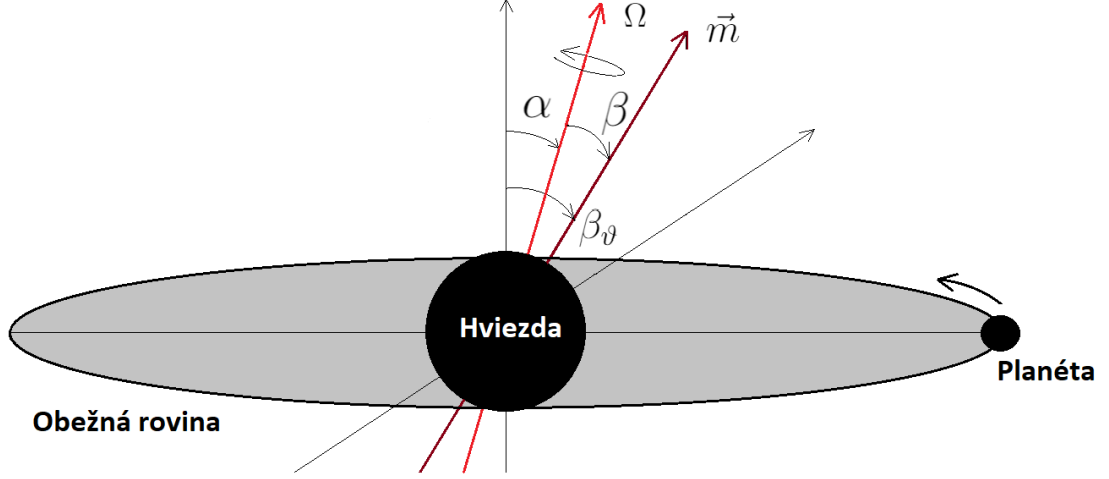
Potenciál magnetického poľa hviezdy vyjadreného na povrchu planéty reprezentuje okrajové podmienky pre nalezanie riešenia indukovaného poľa a prúdu pre program elmgFD. Harmonické koeficienty hľadáme v čase t_i v tvare (Varshalovich a kol., 1989)

$$V_{jm}(t_i) = \frac{1}{R_p} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} V(R_p, \vartheta, \varphi, t_i) Y_{jm}^* \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi, \quad (1.11)$$

kde sférické harmonické funkcie Y_{jm} sú plne normalizované a dané vzťahom (A.2). Hodnoty j a m sú stupeň a rád rozvoja. V prípade magnetického poľa popísaného dipólom, uvažujeme iba $j = 1$.

1.2 Potenciál magnetického poľa hviezdy v sústave pevne spojenej s planétou

Pre výpočet jouleovského zahrievania je nutné určiť potenciál magnetického poľa hviezdy $V(x,y,z)$ a jeho premeny v sústave pevne spojenej s planétou. Najprv sa zameriame na popis potenciálu hviezdy v sústave spojenej s ťažiskom hviezdy. Tento potenciál neskôr transformujeme či numericky určíme na povrchu planéty.



Obr. 1.1: Nákres obežnej dráhy planéty okolo hviezdy s osou rotácie Ω . Uhol β_ϑ predstavuje sklon vektora magnetického momentu voči osi z v sústave pevne spojenou s hviezdou. Šípkami je naznačený smer rotácie hviezdy a smer obehu planéty.

Predpokladáme, že pole hviezdy je čisto dipólové. Potenciál dipólu $V(x,y,z)$ popísaný sústavou spojenou s ťažiskom hviezdy a rovinou obehu planéty je určený okamžitou osou dipólu \vec{e}_s . Okamžitá os dipólu je určená uhlom β_ϑ ako môžeme vidieť na obr. 1.1 a teda je určená sklonom rotačnej osi hviezdy α voči normálne obežnej roviny planéty a sklonom dipólu β voči rotačnej osi hviezdy. Podobne ako Kislyakova a kol. (2017) predpokladáme, že os dipólu je nemenná v sústave rotujúcej s hviezdou.

Potenciálne pole hviezdy v sústave pevne spojenej s jej ťažiskom sme odvodili zo vzťahu (Kislyakova a kol., 2017)

$$V(x,y,z) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (1.12)$$

kde \vec{r} je poloha bodu v magnetickom poli, r je vzdialenosť bodu od dipólu a \vec{m} je vektor magnetického momentu, pre ktorý platí $\vec{m} = |\vec{m}|e_s$.

Vektor magnetického momentu $\vec{e}_s(t)$ vyjadrujeme pomocou matice rotácie $\mathbf{Q}(t)$ (Podolský a Langer, 2019) a normovaného vektora \vec{e}_{s_0} popisujúceho smer dipólu v čase $t = 0$ ako

$$\vec{e}_s = \mathbf{Q} \cdot \vec{e}_{s_0}. \quad (1.13)$$

Maticu rotácie \mathbf{Q} okolo vektora $\vec{n}(\alpha) = (n_1, n_2, n_3)^T$, kde n_1, n_2 a n_3 sú súradnice jednotkového vektora v smere osi Ω , o uhol $\phi = \Omega t$ vyjadrujeme ako

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \phi + n_1^2(1 - \cos \phi) & n_1 n_2(1 - \cos \phi) - n_3 \sin \phi & n_1 n_3(1 - \cos \phi) + n_2 \sin \phi \\ n_1 n_2(1 - \cos \phi) + n_3 \sin \phi & \cos \phi + n_2^2(1 - \cos \phi) & n_2 n_3(1 - \cos \phi) - n_1 \sin \phi \\ n_1 n_3(1 - \cos \phi) - n_2 \sin \phi & n_2 n_3(1 - \cos \phi) + n_1 \sin \phi & \cos \phi + n_3^2(1 - \cos \phi) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Dosadením vzťahu pre veľkosť magnetického momentu $|\vec{m}|$ do vzťahu (1.12) môžeme potenciálne pole vyjadriť v tvare

$$V(x,y,z) = \frac{3|\vec{B}|}{(R_{\text{ss}}^{-3} + 2R_{\text{s}}^{-3})} \frac{\vec{e}_s \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (1.15)$$

kde $|\vec{B}|$ je veľkosť magnetického poľa dipólu, R_{s} je polomer hviezdy a R_{ss} polomer potenciálového zdroja (PFSS Potential-Field Source-Surface Models Altschuler a Newkirk, 1969; Johnstone a kol., 2010). Na základe Slnka sme zvolili hodnotu potenciálového zdroja $R_{\text{ss}} = 2.5R_{\text{s}}$ (Kislyakova a kol., 2017).

Pre výpočet potenciálu v sústave pevne spojennej s planétou boli použité dve rozličné metódy na overenie správnosti výpočtov.

1.2.1 Metóda 1

Potenciál hviezdy na bode pevne spojenom s planétou \vec{r}' sme určili pomocou transformačných vzťahov: translácie \vec{t} do ťažiska planéty a následne transformáciou pomocou matice rotácie \mathbf{S} . Vzťah medzi vektorom \vec{r}' , pevne spojeným s planétou, a vektorom \vec{r} , pevne spojeným s hviezdou, je daný ako

$$\vec{r} = \vec{t} + \mathbf{S} \cdot \vec{r}'. \quad (1.16)$$

Transformáciu súradnicového systému do ťažiska planéty sme spravili pomocou translácie \vec{t} , zistenej numerickým iteratívnym riešením Keplerovej rovnice (Murray a Dermott, 1999), ktorá nám dáva orbitálnu polohu planéty v čase t

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T}(t - t_0), \quad (1.17)$$

kde E je excentrická anomália (viď obr.1.2), e je excentricita dráhy, T je perióda obehu a konštanta t_0 predstavuje čas prechodu planéty perihéliom (tu uvažujeme $t_0 = 0$).

Jednotlivé zložky vektoru translácie \vec{t} vyzerajú nasledovne (Murray a Dermott, 1999)

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

a normou vektoru \vec{t} dostávame vzdialenosť r (viď obr. 1.2)

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (1.19)$$

Pre pravú anomáliu f platia vzťahy

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin f = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin E}{(1 - e \cos E)}. \quad (1.20)$$

Predpokladáme, že vektor rotácie planéty je kolmý k rovine obehu a planéta je uzamknutá v 1:1 spin-orbitálnej rezonancii. Matica rotácie \mathbf{Q} (viď vzťah (1.14))

okolo osi z o uhol $\gamma = \omega t$ (v prípade synchronizovanej rotácie) sa zredukuje na maticu \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Vektor \vec{r}' zo vzťahu (1.16), teda vektor idúci z ťažiska planéty k bodu na planéte, vyjadrujeme v sférických súradniciach ako

$$\vec{r}' = R_p \begin{pmatrix} \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ \cos \vartheta' \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

kde R_p je polomer planéty, ϑ' a φ' sú planetopisná ko-šírka a dĺžka.

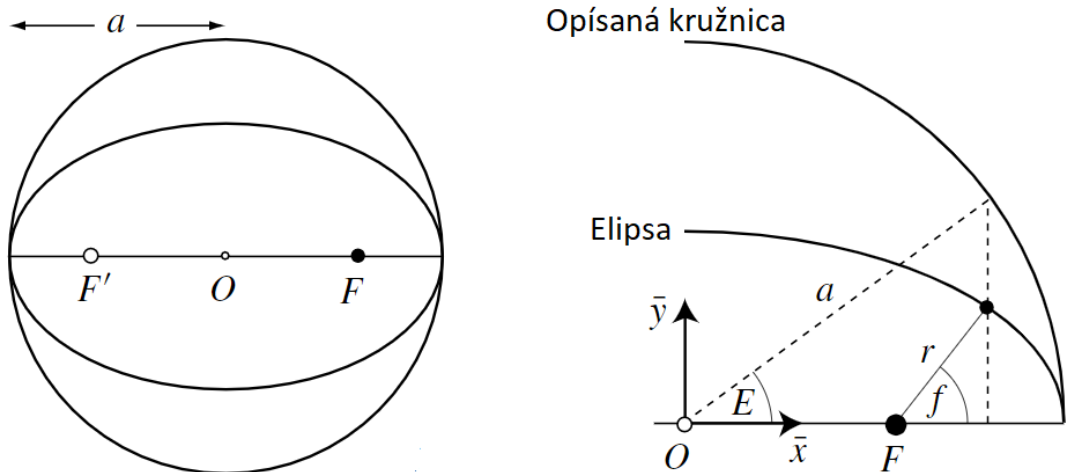
Daným postupom získavame vektor \vec{r} z rovnice (1.16) a dosadením do vzťahu (1.12) získavame rozvoj potenciálu hviezdy v sústave spojenej s planétou. Následne tento potenciál rozvineme do sférických harmonických funkcií podľa vzťahu (1.11).

1.2.2 Metóda 2

Druhá metóda vyjadrenia potenciálu dipólu na povrchu planéty využíva znalosť analytického vyjadrenia sférických harmonických funkcií. Použitím vzťahu (1.9) získavame hľadané sférické harmonické koeficienty vonkajšieho poľa.

Magnetický dipól \vec{m} popisujeme ako

$$\vec{m} = |\vec{m}| \begin{pmatrix} \sin \vartheta_s \cos \varphi_s \\ \sin \vartheta_s \sin \varphi_s \\ \cos \vartheta_s \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$



Obr. 1.2: Opísaná, koncentrická kružnica na obrázku vľavo s plomerom a rovnajúcim sa veľkej poloosi elipsy. F a F' predstavujú ohniská elipsy a O stred kružnice a elipsy. Na obrázku vpravo je zobrazený vzťah medzi pravou anomáliou f a excentrickou anomáliou E (Murray a Dermott, 1999).

kde ϑ_s a φ_s určujú orientáciu dipólu v priestore a $|\vec{m}|$ značí jeho veľkosť. Vektor \vec{r} , idúci od ťažiska hviezdy k bodu na planéte, vyjadrujeme v sférických súradniciach

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Potenciál dipólu (vzťah (1.12)) v sústave pevne spojenej s hviezdou po dosadení vektorov (vzťahy (1.23)–(1.24)) získavame v tvare

$$V = \frac{|\vec{m}|}{r^2} [\cos \varphi_s \cos \varphi \sin \vartheta_s \sin \vartheta + \sin \varphi_s \sin \varphi \sin \vartheta_s \sin \vartheta + \cos \vartheta_s \cos \vartheta]. \quad (1.25)$$

Porovnaním vzťahov (1.25) a (1.9) a dosadením hodnoty (A.10) za Y_{10} , dostávame pre potenciál v rozvoji $j = 1$ a $m = 0$ vzťah

$$V_{10} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{|\vec{m}|}{R_p^3} \cos \vartheta_s. \quad (1.26)$$

Rozpísaním vzťahu (1.9) pre $j = 1$ a $m = 1, -1$ dostávame

$$V = \frac{R_p^3}{r^2} [(\operatorname{Re}(V_{11}) + i \operatorname{Im}(V_{11}))(\operatorname{Re}(Y_{11}) + i \operatorname{Im}(Y_{11})) + (\operatorname{Re}(V_{1,-1}) + i \operatorname{Im}(V_{1,-1}))(\operatorname{Re}(Y_{1,-1}) + i \operatorname{Im}(Y_{1,-1}))], \quad (1.27)$$

a vďaka platnosti vzťahu (A.7) dostávame

$$V = \frac{R_p^3}{r^2} [2 \operatorname{Re}(V_{11}) \operatorname{Re}(Y_{11}) - 2 \operatorname{Im}(V_{11}) \operatorname{Im}(Y_{11})]. \quad (1.28)$$

Reálnu a imaginárnu časť koeficientu rozvoja V_{11} získame dosadením (1.28) do (1.9), použitím vzťahov (A.9) a (A.11) na vyjadrenie sférických harmonických funkcií

$$\operatorname{Re}(V_{11}) = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\vec{m}|}{R_p^3} \cos \varphi_s \sin \vartheta_s, \quad (1.29)$$

$$\operatorname{Im}(V_{11}) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{|\vec{m}|}{R_p^3} \sin \varphi_s \sin \vartheta_s, \quad (1.30)$$

a koeficient rozvoja $V_{1,-1}$ získame vďaka symetrii pre reálne funkcie zo vzťahu (A.7). Vyššie získané koeficienty charakterizujú potenciál magnetického poľa v sústave spojenej s hviezdou. Pomocou analytických translačných a rotačných vzťahov, transformujeme tieto koeficienty do sústavy pevne spojenej s planétou. Tieto analytické vzťahy sú popísané v Varshalovich a kol. (1989) a numerickú implementáciu poskytol RNDr. Jakub Velímský, Ph.D.

Transformáciu zo sústavy spojenej s hviezdou do sústavy pevne spojenej s planétou sme spravili pomocou oboch vyššie zmienených metód s veľmi dobrou zhodou.

1.3 Časová analýza sférických harmonických koeficientov

Vyššie spomínané koeficienty magnetického potenciálu je možné počítať v ľubovoľnom čase t . Vzhľadom k tomu, že program `elmgFD` pracuje vo frekvenčnej oblasti, transformujeme koeficienty $V_{jm}(t_i)$ do tejto oblasti pomocou Fourierovej transformácie (viď dodatok B.3). Využitím rutiny `numpy.fft.fft(a, n=None, axis=-1, norm=None)` z knižnice `numpy` v jazyku Python získame koeficienty $V_{jm}(f_i)$. Diskrétna Fourierova transformácia je definovaná vzťahom

$$A_k = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \exp \left\{ -2\pi i \frac{mk}{n} \right\} \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (1.31)$$

kde a_m predstavujú vypočítané sférické harmonické koeficienty $V_{jm}(t_i)$. Z Fourierovej transformácie dostávame sférické harmonické koeficienty $V_{00}(f)$, $V_{10}(f)$ a $V_{11}(f)$, pričom koeficienty $V_{00}(f)$ nevyužívame, keďže je to konštanta v priestore a jej gradient je nulový. Do programu `elmgFD` vstupujú harmonické koeficienty $V_{10}(f)$, $V_{11}(f)$ a $V_{1,-1}(f)$. Koeficienty $V_{1,-1}(f)$, môžeme vyjadriť ako zápornú hodnotu komplexne združených koeficientov V_{11} .

Frekvencie diskrétného signálu sme získali použitím rutiny `numpy.fft.fftfreq(n, d=1.0)` v jazyku Python. Rutina vracia frekvencie v tvare $f = [0, f_{min}, \dots, f_{max}, -|f_{max}|, \dots, -|f_{min}|]$,

kde frekvenciu $f = 0$ nevyužívame, pretože sa jedná o konštantnú časť poľa. Program `elmgFD` nám následne na výstupe vracia jouleovské zahrievanie v jednotlivých vrstvách planéty.

2. Slapové zahrievanie

Na rozdiel od jouleovského zahrievania planét, slapové zahrievanie patrí k zdrojom energie uvažovaným aj v slnečnej sústave. Cieľom tejto práce je porovnať práve tieto dva zdroje energie. Riešenie slapovej deformácie a disipácie slapovej energie patrí medzi tradičné úlohy. V rámci bakalárskej práce sa teda uspokojíme so skráteným popisom.

Slapové zahrievanie v telese je tvorené trením, kedy teleso reaguje periodickou deformáciou na potenciál slapovej sily. Tieto periodické sily vznikajú gravitačným pôsobením centrálného telesa na planétu konečnej veľkosti. Frekvencia zaťažovania je určená kombináciou obehovej a rotačnej rýchlosti pri pohybe po výstrednej dráhe. Podobne ako pri jouleovskom zahrievaní sa sústredíme na telesá obiehajúce v blízkosti materskej hviezdy. Rovnako predpokladáme, že sú planéty uzamknuté najmä v 1:1 spin-orbitálnej rezonancii a uvažujeme nulový sklon rotačnej osi planéty voči normále roviny obehu.

Analogicky s prechádzajúcou kapitolou sa musí nájsť slapová sila pôsobiaca od centrálného telesa (reprezentovaného hmotným bodom) na planétu a následne je nutné túto silu popísať v sústave pevne spojenej s rotujúcou planétou. Tento problém je analyticky riešený v Kaula (1964), kde bol slapový potenciál popísaný na deformovanej planéte pomocou keplerovských elementov a vektoru rotácie planéty.

Deformácia vplyvom periodickej sily môže viesť k disipácii mechanickej energie v závislosti na mineralogickom zložení a štruktúre planéty. Pokiaľ teleso nie je dokonale elastické, odozva telesa je opozdená voči priloženej sile. Toto opozdenie potom odráža schopnosť telesa disipovať. Takéto chovanie sa popisuje viskoelastickými (anelastickými) reologickými vzťahmi. V planetológii sa často využívajú Maxwellov či Andradeov model (napr. Efroimsky, 2012; Renaud a Henning, 2018).

K popisu slapovej deformácie môžeme zaviesť pojem dynamickej (komplexnej) kompliance $\tilde{J}(\omega)$, ktorá definuje vôľu materiálu deformovať sa pod aplikovaným napätím. Vzťah medzi bezstopou časťou tenzoru deformácie $\tilde{\epsilon}$ a deviátorom tenzoru napätia $\tilde{\sigma}$ je vo frekvenčnej oblasti daný vzťahom

$$2\tilde{\epsilon}(\omega) = \tilde{J}(\omega)\tilde{\sigma}(\omega). \quad (2.1)$$

Za použitia princípu korešpondencie je teda analógiou Hookovho zákona vo frekvenčnej oblasti pre lineárne viskoelastické nestlačiteľné telesá:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = 2\tilde{\mu}(\omega)\tilde{\epsilon}(\omega), \quad (2.2)$$

kde $\tilde{\mu}(\omega) = 1/\tilde{J}(\omega)$.

Dynamická compliance Maxwellovho modelu je daná

$$\tilde{J}(\omega) = \frac{1}{\mu} - \frac{i}{\eta\omega}, \quad (2.3)$$

prvý člen zodpovedá za okamžitú elasticnú deformáciu materiálu, μ je modul torzie. Druhý člen, závislý na viskozite η a uhlovej rýchlosti ω , hovorí o postupnom viskóznom tečení (creep). Táto tradične používaná reológia však podceňuje disipáciu pre slapové periódy (Efroimsky a Lainey, 2007).

Dynamickú (komplexnú) komplianciu Andradeho modelu môžeme vyjadriť ako

$$\tilde{J}(\omega) = \frac{1}{\mu} - \frac{i}{\eta\omega} + \frac{\mu^{\alpha-1}}{(i\zeta\eta\omega)^\alpha} \Gamma(1 + \alpha), \quad (2.4)$$

kde posledný člen popisuje tranzientnú anelastickú deformáciu, ktorá dominuje pri popise deformácie na slapových frekvenciách. α a ζ sú empirické parametre.

Priemerné množstvo tepla vyprodukovaného disipáciou v celom objeme telesa počas jednej orbity môžeme vyjadriť ako (Segatz a kol., 1988)

$$P = -\frac{5n}{8\pi^2 GR} \int_0^{T_{orb}} \int_S \delta\phi(R, \vartheta, \varphi, t) \frac{\partial\phi(R, \vartheta, \varphi, t)}{\partial t} dS dt, \quad (2.5)$$

kde ϕ a $\delta\phi$ sú slapový a dodatočný potenciál vyvolaný deformáciou planéty na povrchu planéty. Dodatočný potenciál sa dá vyjadriť pomocou vzťahu $\delta\phi = |\bar{k}(\omega)|\phi_{lag}$, kde $|\bar{k}(\omega)|$ je tzv. Loveovo potenciálové číslo charakterizujúce veľkosť dodatočného (indukovaného) potenciálu pre uhlovú rýchlosť ω . ϕ_{lag} je opozdený slapový potenciál. Toto opozdenie je tiež dané vnútornou štruktúrou, reológiou a budiacou frekvenciou.

Na výpočet slapového zahrievania bol použitý vopred pripravený program. Program využíva teóriu vlastných módov (normal mode theory) (napr. Takeushi a Saito, 1972; Sabadini a Vermeersen, 2004; Wu a Peltier, 1982), ktorého autorom je Mgr. Walterová. Program využíva Maxwellovu a Andradeovu reológiu na popísanie slapových deformácií. Do programu vstupuje štruktúra planéty a jej reologické vlastnosti – hustota, viskozita, modul torzie μ a ďalšie reologické parametre v danej vrstve. Taktiež je nutné zadať periódu obehu, výstrednosť a spin-orbitálny pomer. Výstupom programu je celkové zahrievanie P (vzťah (2.5)) a profil objemového zahrievania $h(r)$. Tento profil je určovaný numericky pomocou Gaussových-Legendreových kvadrátúrnych vzorcov. Na výpočet zahrievania sme využívali hlavne Andradeovu reológiu.

3. Jouleovské zahrievanie - Parametrická štúdia

V tejto časti práce sa zameriame na štúdium citlivosti zahrievania na najvýznamnejších parametroch pre modelové, Zemi podobné teleso. Budeme študovať vplyv sklonu magnetického dipólu hviezdy voči osi rotácie hviezdy β , sklon rotácie hviezdy voči rovine obehu (odpovedajúcej inklinácii dráhy) α , periódu rotácie hviezdy T_{rot} , výstrednosť dráhy e , periódu obehu T planéty, ktorá určuje hlavnú budiacu frekvenciu a vzdialenosť od hviezdy pomocou Keplerovho zákona, ďalej spin-orbitálny pomer planéty a veľkosť magnetického dipólu hviezdy $|\vec{B}|$. Referenčné parametre modelovej planéty a hviezdy sú uvedené v tab. 3.1.

Jednou z dôležitých charakteristík problému je hĺbka prieniku. Hĺbka prieniku δ je určená elektrickou vodivosťou média a označuje úroveň, pri ktorej sa amplitúda elektromagnetického poľa znižuje na faktor $1/e$. Najmenšia je pre teleso s vysokou vodivosťou v rýchlo meniacom sa poli. Pri výpočtoch hĺbky prieniku uvažujeme, že planéta obieha vo vákuu, teda neberieme do úvahy okolitý slnečný vietor. Pri malej hĺbke prieniku dochádza k maximálnemu zahrievaniu v blízkosti povrchu. Naopak, ak je hĺbka prieniku veľká, môže pole preniknúť hlbšie do planetárneho pláštá, čo vedie k uvoľňovaniu energie v hlbších vrstvách planéty (Kislyakova a kol., 2017).

Všeobecný vzťah pre hĺbku prieniku sa v prípade pre $\epsilon\omega/\sigma \ll 1$ redukuje na (Jordan, 1968)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu_0}}, \quad (3.1)$$

kde ϵ je permitivita vákuu.

Hĺbka prieniku je na obrázkoch znázornená vodorovnou prerušovanou čiarou. Vykresľovanie nám zároveň umožňuje porovnávať modelované polia a zahrievania s očakávanou hĺbkou prieniku a teda testovať základnú správnosť výsledkov.

Obrázky 3.1 - 3.6 ukazujú výsledky našej parametrickej štúdie. Profily objemového zahrievania v závislosti na vodivosti σ sú na obr. 3.1a). Závislosť na vodivosti je nemonotónna a hĺbka prieniku dobre odpovedá teoretickej. Maximálne lokálne objemové zahrievanie h pozorujeme pri vysokých vodivostiach. Naopak, hĺbka

Tabuľka 3.1: Referenčné hodnoty parametrov

Parameter	Definícia	Hodnota
M	Hmotnosť hviezdy	$0.1 M_{\odot}$
R_s	Polomer hviezdy	$0.13 R_{\odot}$
T_{rot}	Doba rotácie hviezdy	3 dni
$ \vec{B} $	Veľkosť dipólového poľa hviezdy	$600 \times 10^{-4} \text{ T}$
T_{ref}	Doba obehu planéty	1.5 dní
e_{ref}	Excentricita	0
σ_{ref}	Vodivosť	$1 \times 10^{-2} \text{ S m}^{-1}$
α_{ref}	Sklon rotačnej osi hviezdy voči obežnej rovine planéty	0°
β_{ref}	Sklon osi dipólu voči rotačnej osi hviezdy	30°

prieniku je v tomto prípade malá. Zahrievanie by teda mohlo ovplyvňovať hlavne termálny stav litosféry a kôry planét. Najväčšie celkové zahrievanie sledujeme pri vodivosti $\sigma = 0.01 \text{ S m}^{-1}$ a to presne $7.9 \times 10^{11} \text{ W}$. Na obr. 3.1b) študujeme závislosť zahrievania h na sklone magnetickej osi β . Rovnako ako v článku Kislyakova a kol. (2017) študujeme sklony až do 60° . V súlade s teoretickým očakávaním je zahrievanie najväčšie pre najväčší sklon osi.

Obr. 3.2 slúži k ukážke dôležitosti výstrednosti dráhy a jej významu vzhľadom k parametru β . So zvyšovaním výstrednosti sa zároveň zvyšujú zmeny magnetickeho poľa v priebehu jednej orbity, čo spôsobí zvyšovanie jouleovského zahrievania (obr. 3.2a)). Na obr. 3.2b) demonštrujeme vplyv excentricity pri nenulovom sklone osi magnetického dipólu. So zväčšením sklonu dipólu voči rotačnej osi hviezdy vzrastie aj jouleovské zahrievanie. Vplyv excentricity je napriek tomu veľký, ak uvažujeme aj extrémne výstrednosti $e = 0.4$.

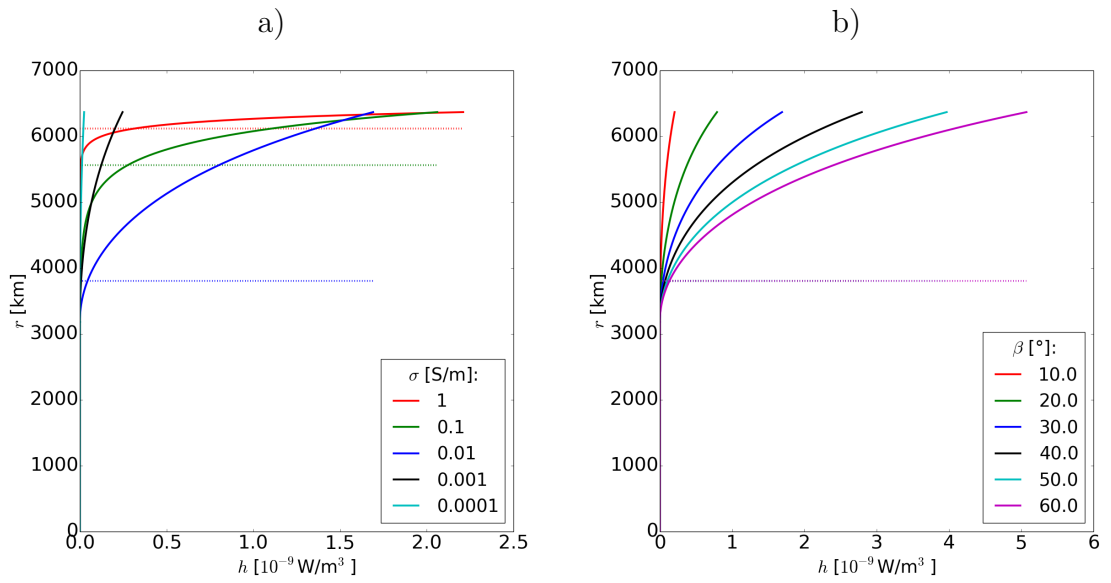
Závislosť objemového zahrievania na sklone rotačnej osi hviezdy α je znázornená na obr. 3.3. Parameter α skúmame do hodnoty 10° , pretože väčšie sklony rotačnej osi sú nepravdepodobné. Štúdia ukazuje, že objemové jouleovské zahrievanie rastie so zvyšujúcim sa sklonom α a pre nulový sklon magnetického dipólu voči rotačnej osi β je táto závislosť dobre pozorovateľná. Avšak pri zväčšení parametra β na 30° je závislosť zahrievania na parametri α veľmi malá. Aj pri tejto štúdii sa tak ukázala dôležitosť parametra β .

Na obr. 3.4a) skúmame závislosť zahrievania h na dobe rotácie hviezdy T_{rot} . Rozdiel v objemovom zahrievaní planéty pre maximálnu a minimálnu skúmanú dobu rotácie hviezdy nie je výrazný. Pre sklon magnetického dipólu $\beta = 0^\circ$ bolo zahrievanie pre všetky skúmané doby rotácie zanedbateľné. Na obr. 3.4b) študujeme závislosť objemového jouleovského zahrievania na perióde obehu planéty. So zvyšujúcou sa dobou obehu sa zväčšuje aj vzdialenosť medzi planétou a hviezdou, čím sa zároveň znižuje zahrievanie. Zistili sme, že pokiaľ je doba rotácie hviezdy väčšia ako obežná doba planéty, perióda rotácie hviezdy nie je príliš významným parametrom.

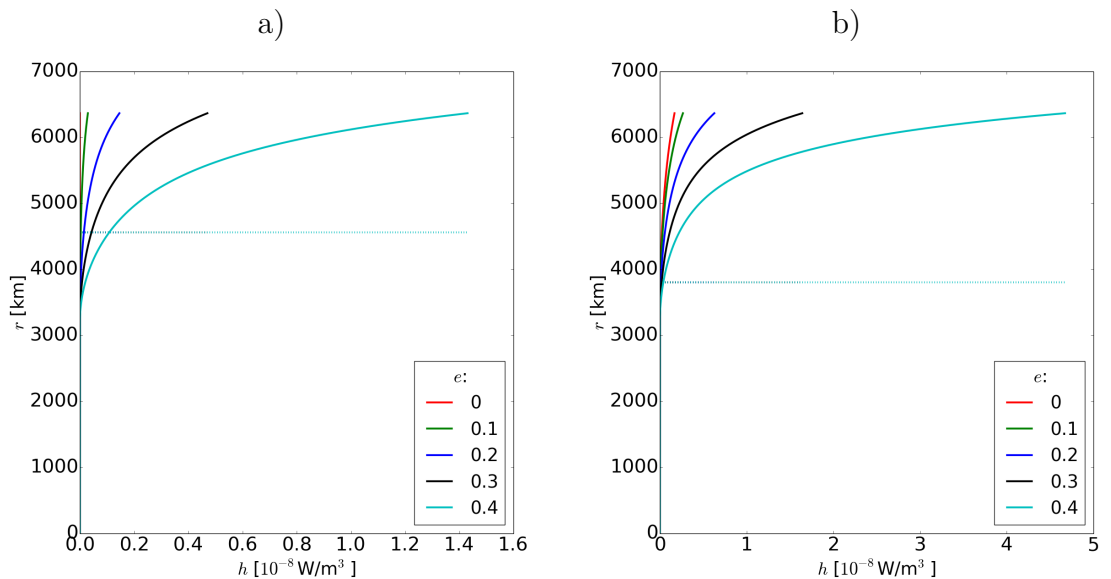
Závislosť jouleovského zahrievania na spin-orbitálnej rezonancii je komplikovaná. V našej štúdii (obr. 3.5a)) vyšlo najväčšie objemové zahrievanie pre planétu vo voľnej rotácii a najmenšie pre spin-orbitálnu rezonanciu 3:2. Všeobecne význam spin-orbitálnej rezonancie bude daný kombináciou obežnej doby planéty a rotačnej periódy hviezdy.

Veľkosť magnetického dipólu $|\vec{B}|$ sme skúmali pre hodnoty pravdepodobné pre hviezdy typu M. Podľa Reiners (2013) sa veľkosť magnetického dipólu týchto hviezd pohybuje v rozmedzí $600 \times 10^{-4} \text{ T}$ až $3000 \times 10^{-4} \text{ T}$. Na obr. 3.5b) môžeme pozorovať rastúce zahrievanie h s rastúcou veľkosťou magnetického dipólu sledujúce teoretické škálovanie $|\vec{m}|^2$.

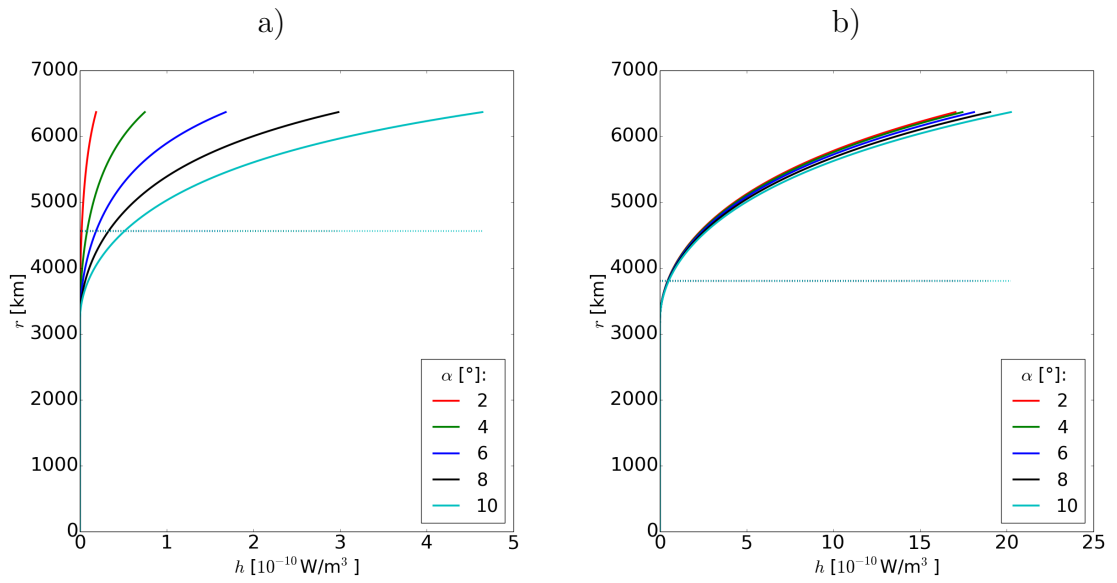
Z našej parametrickej štúdie vyplýva, že najdôležitejšími parametrami sú sklon magnetického dipólu β a excentricita e . Na obr. 3.6 podrobnejšie skúmame závislosť celkového jouleovského zahrievania na týchto parametroch. So zväčšujúcim sa sklonom dipólu, planéta prechádza zmenami v magnetickom toku vo svojom vnútri počas orbitálneho pohybu. Maximálne dosiahnuté celkové zahrievanie je až $\sim 10 \text{ TW}$ pre veľké hodnoty parametra β a výstrednosti dráhy, čo je výkon zrovnateľný s radiogénnym zahrievaním na Zemi.



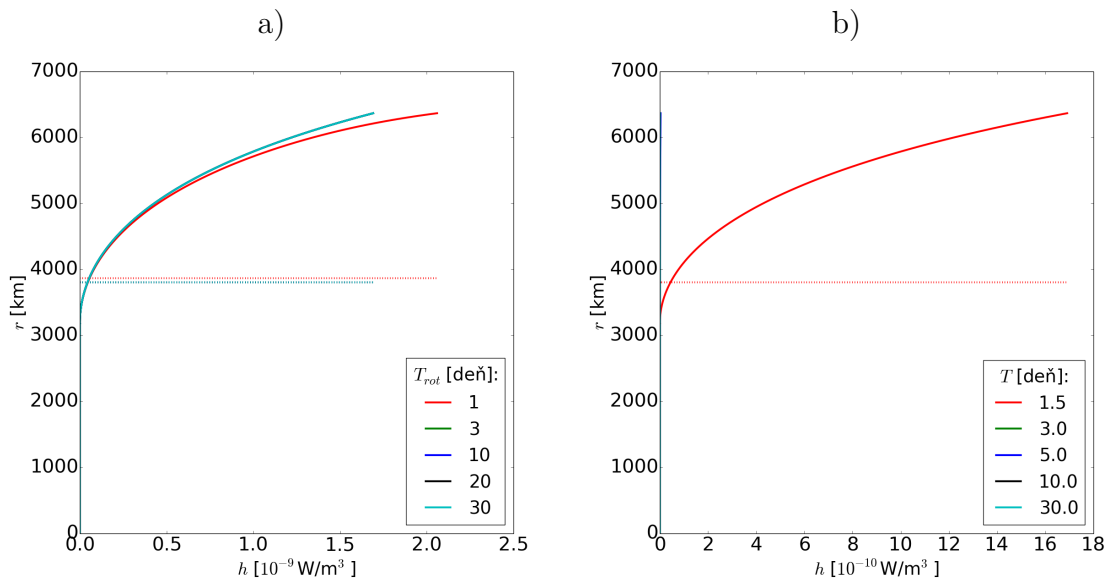
Obr. 3.1: a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniaci sa vodivosti. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniaci sa hodnote sklonu dipólu voči rotačnej osi.



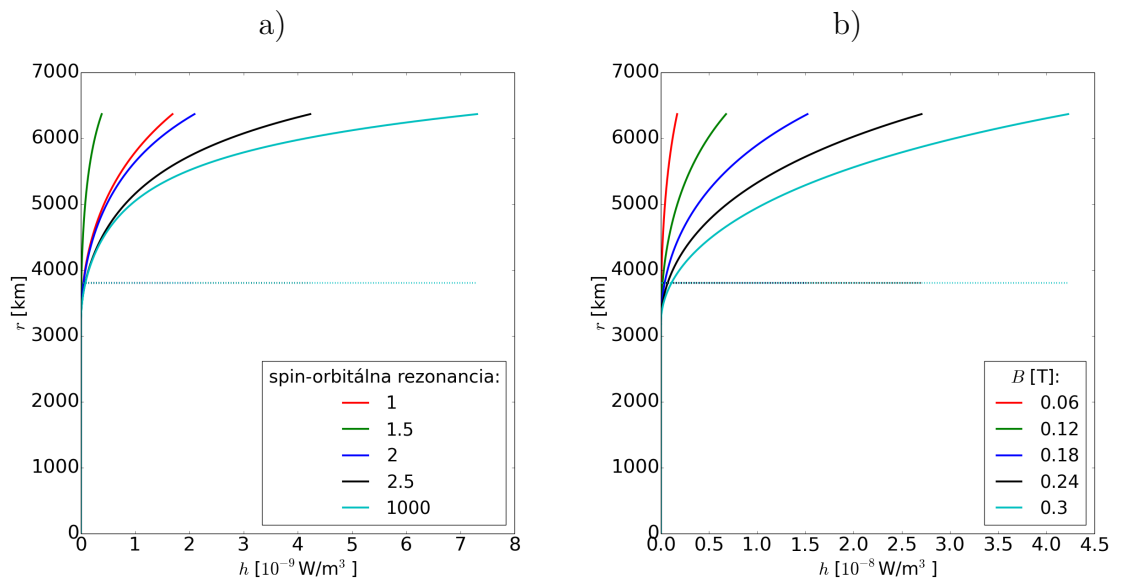
Obr. 3.2: a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniaci excentricite pre uhol $\beta = 0^\circ$. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniaci excentricite pre uhol $\beta = 30^\circ$.



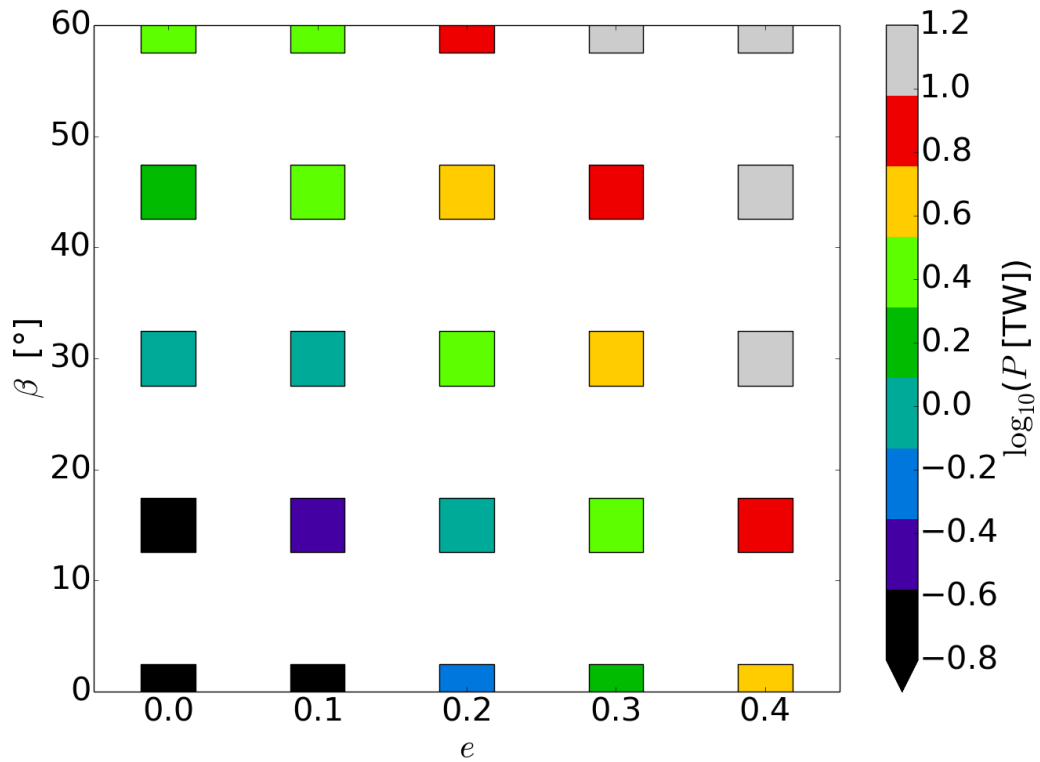
Obr. 3.3: a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacom sa uhle α , keď uhol $\beta = 0^\circ$. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacom sa uhle α , keď uhol $\beta = 30^\circ$.



Obr. 3.4: a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej sa dobe rotácie hviezdy pre uhol $\beta = 30^\circ$. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej sa dobe obehu planéty pre uhol $\beta = 30^\circ$.



Obr. 3.5: a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej sa spin-orbitálnej rezonancii. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri rôznych veľkostiach magnetického dipólu hviezdy.



Obr. 3.6: Celkové jouleovské zahrievanie P modelovej planéty.

4. Slapové zahrievanie - Parametrická štúdia

V tejto kapitole sa venujeme štúdiu slapového zahrievania modelovej planéty v závislosti na rôznych parametroch. Sústredíme sa na závislosti na viskozite pláštá η , excentricite dráhy e , spin-orbitálnej rezonancii, doby obehu planéty T a závislosti na rôznych hrúbkach litosféry, jadra, a rôznych veľkostiach planét. Ďalej ukazujeme vplyv reológií na veľkosť zahrievania a závislosť zahrievania na empirických parametroch Andradeho reológie.

V tab. 4.1 sú zhrnuté referenčné hodnoty modelovej hviezdy a planéty použité pri výpočtoch slapového zahrievania. Reologické vlastnosti vrstiev sú uvedené v tab. 4.2. Viskozitu v jadre sme volili takú, aby zahrievanie v jadre bolo zanedbateľné. Empirické parametre α a ζ sme volili na základe článku Castillo-Rogez a kol. (2011).

Výsledky našej parametrickej štúdie sú zobrazené na obr. 4.1 až 4.4. Na obr. 4.1 až 4.3 uvažujeme o planéte tvorenej z planetárneho pláštá a jadra. Na výpočet zahrievania sme si zvolili Andradeovu reológiu. V grafoch na obr. 4.4 počítame slapové zahrievanie planéty tvorenej litosférou, pláštom a jadrom.

Najdôležitejšími parametrami pri slapovom zahrievaní sa v súlade s teóriou ukázali byť viskozita pláštá a pre 1:1 rezonanciu excentricita dráhy. Závislosť zahrievania h na týchto dvoch parametroch študujeme na obr. 4.1. Objemové slapové zahrievanie klesá s rastúcou viskozitou v plášti, keďže pri väčšej viskozite dochádza k menšej disipácii slapovej energie. Slapové zahrievanie všeobecne rastie v plášti s hĺbkou. Závislosť na excentricite je významná pre synchronizovanú rotáciu (obr. 4.1b)). Zahrievanie rastie so zväčšujúcou sa excentricitou, kedy je teleso počas orbity viac deformované. Pri štúdiu závislosti zahrievania na excentricite bola vynechaná hodnota $e = 0$, pre ktorú je slapové zahrievanie nulové (v 1:1 spin-orbitálnej rezonancii, ktorú uvažujeme).

Závislosť na spin-orbitálnej rezonancii ukazuje, že najmenšie zahrievanie nastáva pre prípad spin-orbitálnej rezonancie 1:1. Vplyv zmeny medzi vyššími rezonanciami je výrazne nižší. Všeobecne platí, že zmeny zahrievania pri prechode na nižšiu rezonanciu sú tým väčšie, čím nižšiu rezonanciu uvažujeme pre danú excentricitu. Obr. 4.2b) ukazuje závislosť zahrievania na dobe obehu planéty. So zväčšujúcou sa dobou obehu rastie aj vzdialenosť medzi planétou a hviezdou podľa Keplerovho zákona, čím sa znižuje pôsobenie slapových síl na planétu a

Tabuľka 4.1: Referenčné hodnoty parametrov

Parameter	Definícia	Hodnota
M	Hmotnosť hviezdy	$0.1 M_{\odot}$
T_{ref}	Doba obehu planéty	1.5 dní
e_{ref}	Excentricita	0.01
R_p	Polomer planéty	$1 R_{\oplus}$
R_c	Jadro	$0.5 R_p$
R_{lit}	Litosféra	$0.984 R_p$
	spin-orbitálny pomer	1:1

Tabuľka 4.2: Referenčné reologické vlastnosti vrstiev

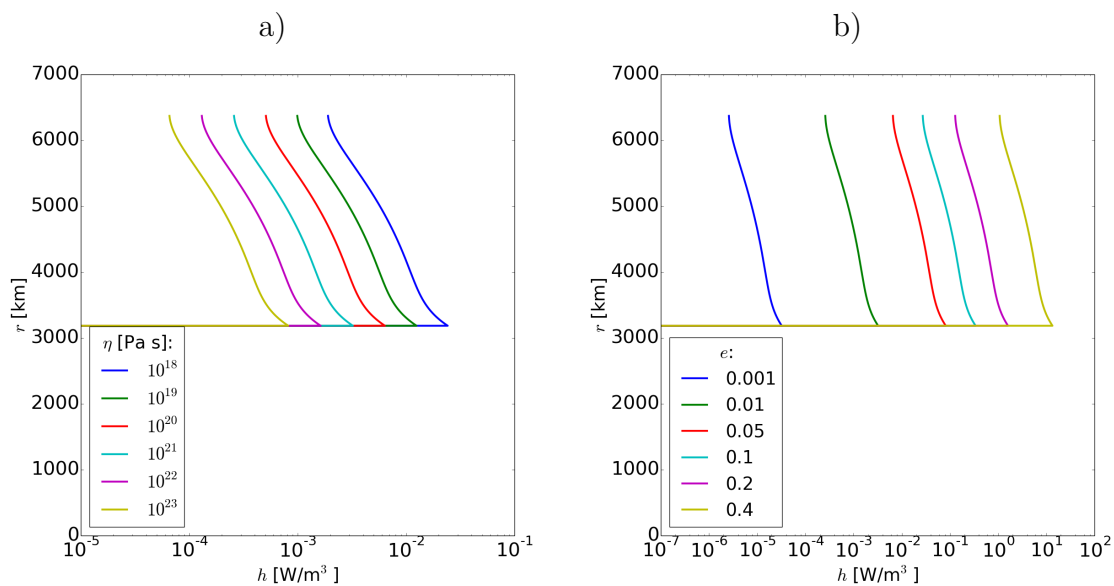
Parameter	Definícia	Hodnota
η_c	Viskozita jadra	$1 \times 10^{-3} \text{Pa s}$
η_m	Viskozita pláštá	$1 \times 10^{21} \text{Pa s}$
η_{lit}	Viskozita litosféry	$1 \times 10^{28} \text{Pa s}$
ρ_c	Hustota jadra	$10\,000 \text{kg/m}^3$
ρ_m	Hustota pláštá	3500kg/m^3
ρ_{lit}	Hustota litosféry	2500kg/m^3
μ_c	Modul torzie pre jadro	$1 \times 10^{-10} \text{Pa}$
μ_m	Modul torzie pre plášť	$2 \times 10^{11} \text{Pa}$
μ_{lit}	Modul torzie litosféry	$2 \times 10^{11} \text{Pa}$
α	Parameter Andradeho modelu	0.3
ζ	Parameter Andradeho modelu	1

teda slapové zahrievanie je menšie.

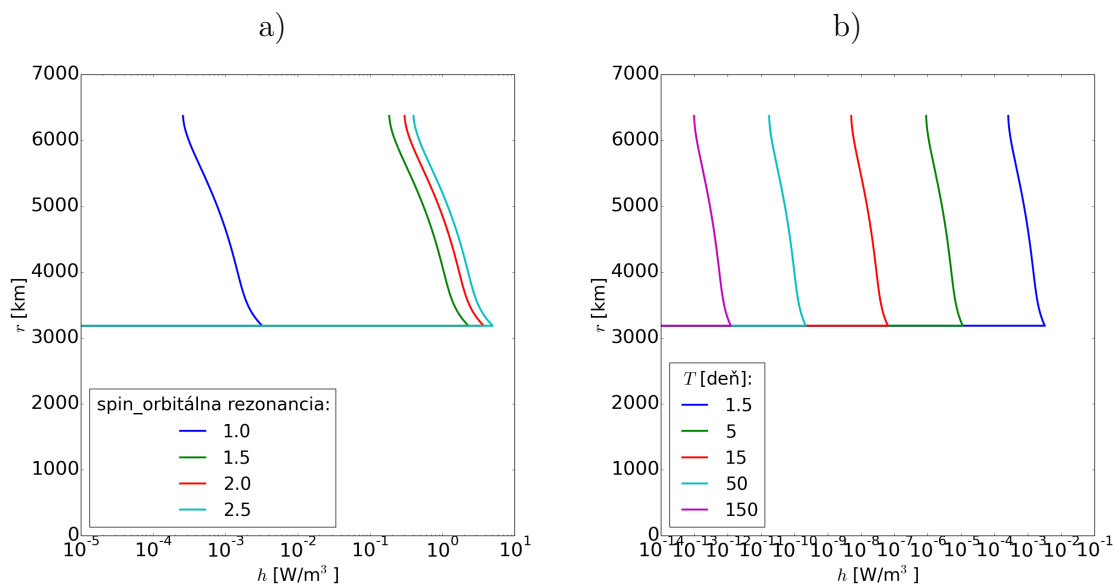
Štúdium závislosti objemového slapového zahrievania na polomere planéty ukázalo, že pre rovnaké referenčné parametre sa slapové zahrievanie zvyšuje s rastúcim polomerom planéty (obr. 4.3a)). Vzhľadom na nízku viskozitu v jadre, sa v planéte s menším jadrom disipuje viac energie a preto rastie aj zahrievanie (obr. 4.3b)). Vplyv litosféry je znázornený na obr. 4.3c). Litosféra je charakterizovaná nízkou teplotou. Pokiaľ uvažujeme teplotnú závislosť viskozity, je teda viskozita litosféry vysoká a disipuje sa tu málo energie. Celkové zahrievanie P sa teda znižuje s rastúcou hĺbkou litosféry. Pod litosférou však objemové zahrievanie zostáva porovnateľné vo všetkých modeloch.

Na obrázkoch 4.4a) a 4.4b) porovnávame celkové zahrievanie P v závislosti na dvoch najdôležitejších faktoroch (excentricite a viskozite) pri použití Andradeovej a Maxwellovej reológie. Slapové zahrievanie počítané Andradeovou reológiou vychádza väčšie, ako je očakávané pre Maxwellovu reológiu (Renaud a Henning, 2018). Vidíme tiež, že pre modelovú planétu je možné dosiahnuť výrazne vyššie celkové slapové zahrievanie než v prípade jouleovského zahrievania v závislosti na reológii a excentricite.

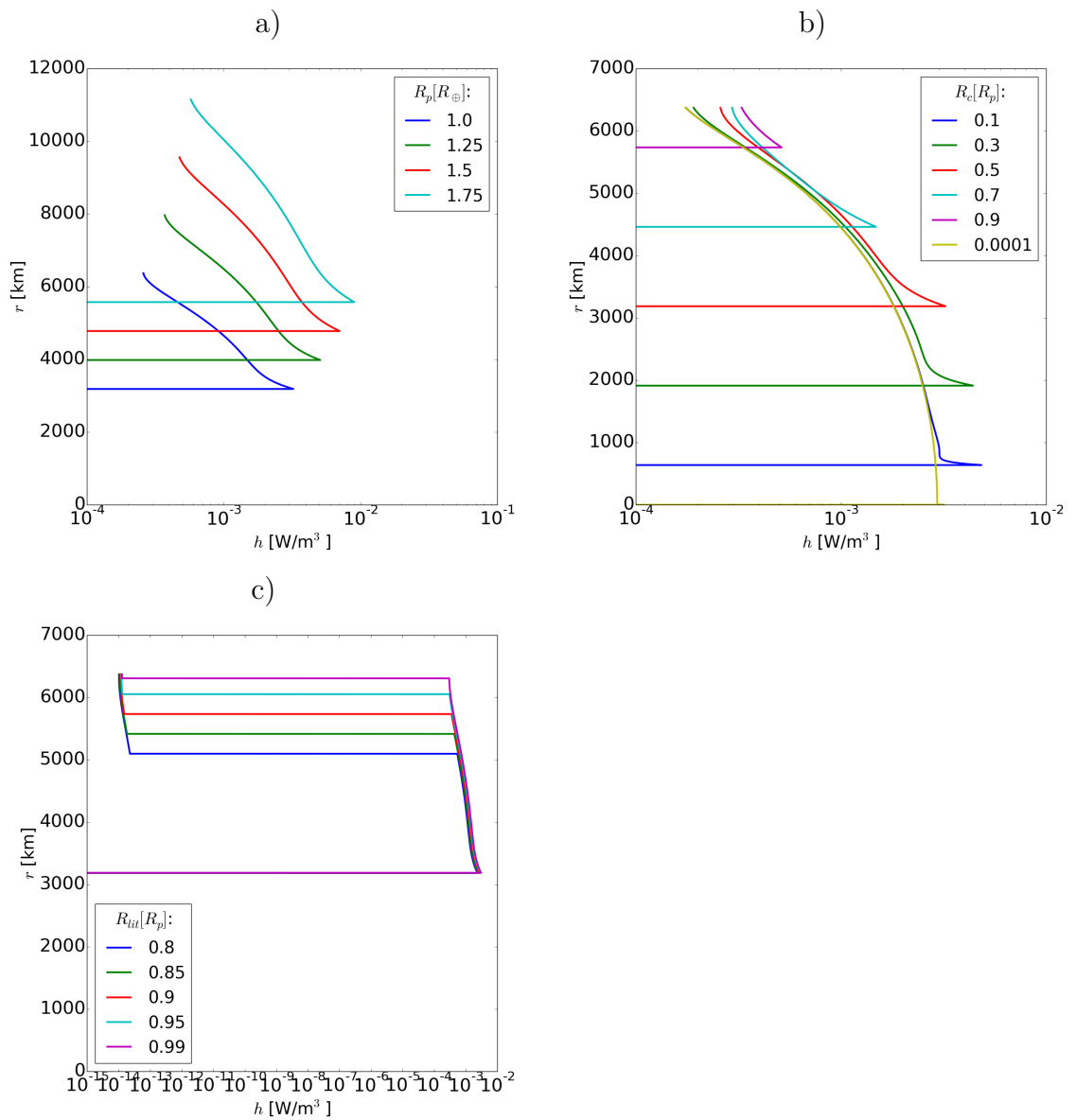
Na obrázkoch 4.4c) a d) skúmame závislosť zahrievania na zmene empirických parametroch Andradeovej reológie. Parameter α skúmame v rozsahu 0.1 – 0.5 na základe článku Castillo-Rogez a kol. (2011). Parameter ζ študujeme v rozsahu $1 \times 10^{-3} - 1 \times 10^3$ podľa článku Castillo-Rogez a kol. (2011). Slapové zahrievanie je najväčšie pri malých hodnotách parametra α a rovnako to platí aj pre parameter ζ .



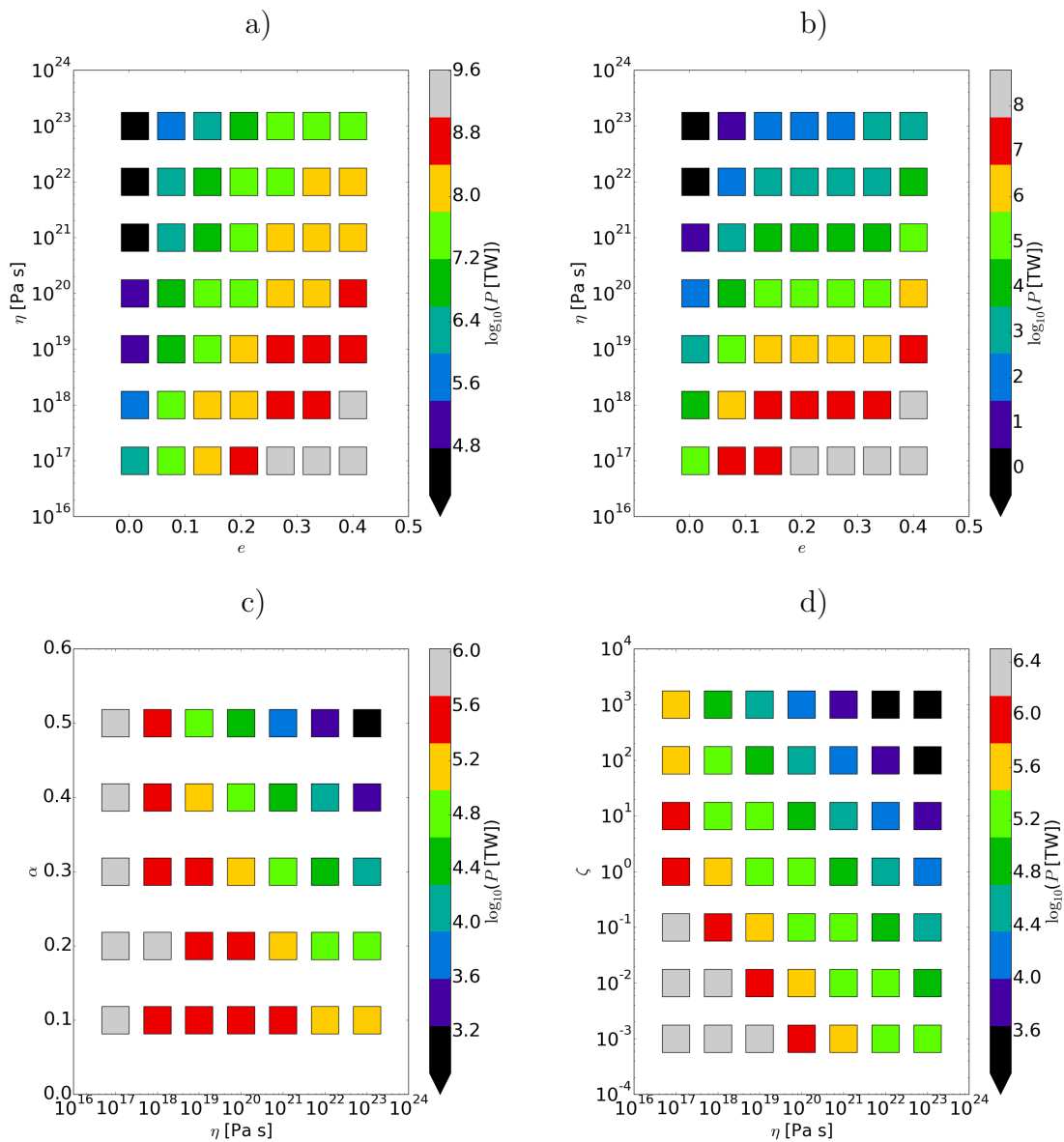
Obr. 4.1: a) Priebeh objemového slapového zahrievania h pri zmene viskozity. b) Priebeh objemového slapového zahrievania h pri zmene excentricity.



Obr. 4.2: a) Priebeh objemového slapového zahrievania h pri zmene spin-orbitálnej rezonancie. b) Priebeh objemového slapového zahrievania h pri zmene doby obehu planéty.



Obr. 4.3: a) Priebeh objemového slapového zahrievania h s rôznou veľkosťou planét. b) Priebeh objemového slapového zahrievania h pre rôzne hrúbky jadra planéty. c) Priebeh objemového slapového zahrievania h pre rôzne hrúbky litosféry planéty.



Obr. 4.4: a) Celkové slapové zahrievanie P modelovej planéty v závislosti na viskozite a excentricite vypočítané Andradeovou reológiou. b) Celkové slapové zahrievanie P modelovej planéty v závislosti na viskozite a excentricite vypočítané Maxwelllovou reológiou. c) Celkové slapové zahrievanie P modelovej planéty v závislosti na viskozite a parametri α určené Andradeovou reológiou. d) Celkové slapové zahrievanie P modelovej planéty v závislosti na viskozite a parametri ζ určené Andradeovou reológiou. Pozor, každý obrázok má inú farebnú škálu.

5. Určenie štruktúry

V prechádzajúcich dvoch kapitolách sme sa venovali parametrickej štúdii modelovej planéty so zjednodušenou štruktúrou. Teraz sa zameriame na jednoduché určenie štruktúry planét so známou hmotnosťou a polomerom pre predpokladané zloženie. Určenie štruktúry planét pozostáva z určenia ich hustotného a teplotného profilu, a ďalej z určenia hĺbok hlavných fázových prechodov v plášti silikátových planét. V závislosti na teplote a zložení, potom môžeme určiť vodivostný a viskózný profil. V tejto jednoduchej štúdii nebudeme uvažovať vplyv vody na zahrievanie. Ďalej zanedbáme možnú kryštalizáciu vnútorného jadra. Vodivostný profil je jedným z najdôležitejších faktorov, ktoré ovplyvňujú veľkosť indukčného zahrievania a viskózný profil spoluurčuje veľkosť slapového zahrievania. Pri výpočte hustotných profilov (tlaku a teploty) planét bol využitý postup uvedený v článku Valencia a kol. (2006). V tejto kapitole budeme výnimočne označovať teplotu symbolom T , ktorý v ostatných kapitolách označuje dobu obehu planéty.

5.1 Hustotný profil planét

V tejto podkapitole približujeme metódu použitú k získaniu hustotných profilov. Uvažujeme radiálne symetrickú planétu, ktorá je rozdelená na dve časti – silikátový plášť a jadro bohaté na železo. Rovnice popisujúce zmenu hustoty $\rho(r)$, gravitácie $g(r)$, hmotnosti $m(r)$ (hmotnosť materiálu uzavretého v guli o polomere r) a tlaku $p(r)$ s hĺbkou sú (Valencia a kol., 2006)

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\rho(r)g(r)}{\phi(r)}, \quad (5.1)$$

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi G\rho(r) - \frac{2Gm(r)}{r^3}, \quad (5.2)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho(r), \quad (5.3)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r), \quad (5.4)$$

kde $\phi(r) = \frac{K_s(r)}{\rho(r)}$ je seizmický parameter, ktorý je vypočítaný zo stavovej rovnice, K_s je adiabatický súčiniteľ stlačiteľnosti, G je gravitačná konštanta a r je vzdialenosť od centra planéty.

Pri výpočtoch bola použitá Birch-Murnaghanova stavová rovnica 3. rádu $K_T(\rho, T)$ s Debyeovou termálnou korekciou $\Delta K_{th}(\rho, T)$ (Valencia a kol., 2006)

$$K_T(\rho, T) = K_T(\rho, 300) + \Delta K_{th}(\rho, T), \quad (5.5)$$

kde $K_T(\rho, 300)$ je izotermálny súčiniteľ stlačiteľnosti pre teplotu $T = 300\text{K}$. Použité parametre výpočtu sú uvedené v Valencia a kol. (2006).

Na príklade Zemi, musíme pri určovaní štruktúry planét zahrnúť aj prechody medzi minerálnymi fázami v rôznych častiach planéty. K zahrnutiu fázových prechodov v planéte je nutné vypočítať teplotné profily. Určenie teploty je taktiež nevyhnutné pre výpočet elektrickej vodivosti a viskozity.

Na povrchu uvažujeme priemernú teplotu určenú vzdialenosťou od hviezdy a solárnou konštantou hviezdy. Na povrchu vyžadujeme Zemi podobný tepelný tok škálovaný veľkosťou planéty (Valencia a kol., 2006). Vo vnútri planét predpokladáme, že dochádza ku konvektívnemu prenosu tepla s výnimkou hraničných vrstiev, kde dominuje konduktívny prenos tepla. Hrúbku hraničných vrstiev určujeme z 1D škálovacích zákonov popisujúcich stacionárny stav prúdenia. Pre viskozitu nezávislú na teplote používame škálovanie z článku Deschamps a kol. (2010). Tento model odpovedá veľmi efektívnemu prenosu tepla. Ako druhú limitu uvažujeme viskozitu silne závislú na teplote popísanú Arrheniovým zákonom:

$$\eta(T) = \eta_{\text{ref}} \exp\left(-\frac{E^*}{R_g} \left(\frac{1}{T_{\text{ref}}} - \frac{1}{T}\right)\right), \quad (5.6)$$

kde E^* je aktivačná energia pre difúzne tečenie, R_g je plynová konštanta a T_{ref} je referenčná teplota a referenčná viskozita η_{ref} . Táto závislosť poskytuje druhú limitu odhadu prenosu tepla: jedná sa o neefektívny prenos (tzv. "stagnat lid" konvekcia), ktorý je charakterizovaný hraničnou vrstvou s veľkou hrúbkou. Toto škálovanie je popísané napr. v článku Tosi a kol. (2017).

V konvektívnej oblasti v plášti a jadre sú teplotné profily popísané adiabatickým gradientom (Valencia a kol., 2006)

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\rho(r)g(r)T(r)}{K_s(r)}\gamma(r), \quad (5.7)$$

kde γ je Gruneisenov parameter, pre ktorý platí vzťah

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho(r)}\right)^q, \quad (5.8)$$

kde q je hodnota medzi 0.2 – 0.3 a ρ_0 je priemerná hustota, ktorú by mal materiál pri nulovom tlaku.

5.2 Implementácia

Hľadanie štruktúry planét je implementované v jazyku Python. Pre určenie štruktúry bol použitý nasledujúci algoritmus. V nulte iterácii predpokladáme konštantnú (referenčnú) teplotu. Systém diferenciálnych rovníc popísaných v rovniciach (5.1) – (5.4) numericky integrujeme od povrchu známeho polomeru planéty do stredu použitím Eulerovej explicitnej metódy s podmienkami na povrchu danými povrchovou hustotou, nulovým povrchovým tlakom, celkovou hmotnosťou a odpovedajúcim gravitačným zrýchlením na povrchu $g = Gm/r^2$, kde r je polomer. Metódou bisekcie hľadáme veľkosť jadra tak, aby celková hmotnosť planéty bola rovná pozorovanej hmotnosti (nulová hmotnosť $m(r)$ pre $r = 0$). V ďalších iteráciách určíme na základe znalosti veľkosti plášťa, povrchovej teploty a tepelného toku na povrchu teplotný profil pomocou škálovacích zákonov a ich pre-existujúcich implementácií. Pre tento nový teplotný profil upresníme vnútornú štruktúru planéty a hĺbku fázových prechodov. Pre dobré rozlíšenie všetkých hraničných vrstiev a pre použitie Eulerovej explicitnej metódy volíme relatívne veľké ekvidistantné radiálne rozlíšenie čítajúce 5001 bodov.

5.3 Vodivostný profil planét

Vodivostný profil planét bol zostavený na základe článku Kislyakova a kol. (2017). Pri určovaní elektrickej vodivosti planét sme predpokladali Zemi podobné zloženie a vodivostné profily v plášti. Uvažovali sme model plášte tvoreného z horčikatých silikátov a jadro tvorené železom z 8 percent tvoreného kremíkom.

Elektrická vodivosť je daná vzťahom (Kislyakova a kol., 2017)

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta H}{k_B T}}, \quad (5.9)$$

kde k_B je Boltzmannova konštanta, T je lokálna teplota a ΔH je zmena entalpie. Hodnoty vodivosti a zmeny entalpie minerálov v plášti sú uvedené v tab. 5.1 (Kislyakova a kol., 2017). V jadre uvažujeme vysokú vodivosť $\sigma = 1 \times 10^5 \text{ S m}^{-1}$.

Tabuľka 5.1: Vodivosť a zmena entalpie silikátov v plášti

Silikát	$\sigma_0 [\text{S m}^{-1}]$	$\Delta H [\text{eV}]$
Olivine	53703	2.31
Wadsleyite	399	1.49
Ringwoodite	838	1.36
Perovskite	11	0.62
Magnesiowustite	490	0.85

6. Aplikácia na TRAPPIST-1

V tejto kapitole sa venujeme štúdiu slapového a jouleovského zahrievania planét sústavy TRAPPIST-1 a ich porovnaniu. Podľa postupu uvedenom v kap. 5 sme určili vodivostné, teplotné a hustotné profily. Ako bolo uvedené v predchádzajúcej kapitole, pre jednoduchosť je plášť zložený z horčikatých silikátov: olivínu a jeho vysokotlakových fáz vo vrchnom plášti a v spodnom plášti z perovskitu a magnesiowustitu. Jadro je tvorené železom, pri čom 8% jeho hmotnosti je tvorené kremíkom (Valencia a kol., 2006). Pomocou spomínaných profilov sme potom postupom uvedenom v kap. 1 vypočítali jouleovské zahrievanie a postupom uvedenom v kap. 2 slapové zahrievanie. Sústredíme sa hlavne na dve najbližšie planéty (viď tab. 6.2), kde očakávame najvyššie jouleovské a slapové zahrievanie.

V tejto štúdii nás zaujíma maximálny možný efekt zahrievania. Jouleovské zahrievanie sme teda počítali pre uhol $\beta = 60^\circ$, kedy je zahrievanie planét najväčšie ako bolo zistené z parametrickej štúdie (obr. 3.1). Sklon rotačnej osi hviezdy voči obežnej rovine planéty α sme určili zo známej hodnoty inklinácie podľa Delrez a kol. (2018). Hodnoty α spolu s parametrami planét použitých pri výpočte sú uvedené v tab. 6.2 (Grimm a kol., 2018). Parametre hviezdy TRAPPIST-1a sú uvedené v tab. 6.1.

6.1 Zahrievanie TRAPPIST-1b

Najväčšie hodnoty slapového a jouleovského zahrievania v planetárnom systéme TRAPPIST-1 podľa očakávania sledujeme pri planéte obiehajúcej najbližšie k materskej hviezde. Vodivostné, teplotné a hustotné profily planéty boli určené pre 6 rôznych reológií, aby bolo možné určiť efekt vnútorného zloženia na študované zahrievanie. Spomínaný vplyv reológie na jouleovské zahrievanie študujeme na obr. 6.1 a na slapové zahrievanie na obr. 6.2. Vodivostné profily planéty b pre rôzne reológie je na obr. 6.1a) a na obr. 6.1b) sú zobrazené profily objemového jouleovského zahrievania. Legenda pre tieto obrázky je totožná a pre lepšiu viditeľnosť profilov ju uvádzame vedľa obr. 6.1c). Skoky jouleovského zahrievania v plášti (obr. 6.1b)) sú spôsobené fázovými prechodmi a skokmi vo vodivosti. Na rozhraní jadro-plášť, vďaka veľkej vodivosti v jadre, môžu byť vo vrchných vrstvách jadra vybudené veľké prúdy a teplo môže vzrásť. Prípadné oscilácie potom môžu byť numerickým artefaktom metódy kvôli rádovej zmene vo vodivosti. Tento skok je však obmedzený do tenkej vrstvy a preto má zanedbateľný vplyv na celkové zahrievanie (obr. 6.1b)).

Z parametrickej štúdie na obr. 3.1 bolo zistené, že najväčšie celkové jouleovské

Tabuľka 6.1: Parametre hviezdy TRAPPIST-1a; $R_\odot = 696342$ km je polomer Slnka

Parameter	Definícia	Hodnota
M	Hmotnosť hviezdy	$0.089 M_\odot$
R_s	Polomer hviezdy	$0.121 \pm 0.003 R_\odot$
T_{rot}	Doba rotácie hviezdy	3.295 ± 0.003 dní
$ \vec{B} $	Veľkosť dipólového poľa hviezdy	$600 \times 10^{-4} \text{T}$

Tabuľka 6.2: Vlastnosti planét TRAPPIST-1; $M_{\oplus} = 5.97 \times 10^{24}$ kg je hmotnosť Zeme a $R_{\oplus} = 6371$ km je polomer Zeme.

TRAPPIST 1	b	c	d	e	f	g	h
R_p [R_{\oplus}]	1.08	1.06	0.75	0.91	1.01	1.12	0.74
M [M_{\oplus}]	1.017	1.156	0.297	0.772	0.930	1.148	0.331
T_{surf} [K]	390	335	282	246	214	194	169
a [AU]· 10^{-3}	11.55	15.82	22.28	29.28	38.53	46.88	61.93
T [deň]	1.52	2.43	4.07	6.14	9.26	12.43	18.87
e	0.0062	0.0065	0.0084	0.0051	0.010	0.0021	0.0057
α [°]	0.5	0.3	0.1	0.3	0.3	0.3	0.2

zahrievanie sa od hodnoty $\sigma = 0.01 \text{ S m}^{-1}$ s rastúcou vodivosťou znižuje. To môžeme vidieť aj pri porovnaní obr. 6.1a) a b). Celkové jouleovské zahrievanie planéty je najväčšie za použitia reológie s referenčnou hodnotou viskozity $\eta_{\text{ref}} = 1 \times 10^{20} \text{ Pa s}$ a aktivačnou energiou je $E^* = 0 \text{ J mol}^{-1}$, pre ktorú sa vodivosť vo väčšine pláštá pohybuje medzi hodnotou $0.01 - 0.1 \text{ S m}^{-1}$. Ostatné reológie vykazujú vyššiu vodivosť v plášti, s ktorou klesá celkové jouleovské zahrievanie. Maximálna hodnota objemového jouleovského zahrievania nastala pre reológiu s referenčnou hodnotou viskozity $\eta_{\text{ref}} = 1 \times 10^{22} \text{ Pa s}$ a aktivačnou energiou $E^* = 2 \times 10^5 \text{ J mol}^{-1}$, čo tiež súhlasí s parametrickou štúdiou. Z obrázku vidíme, že k maximálnemu zahrievaniu dochádza v blízkosti planetárneho povrchu vplyvom skin efektu. Číselné hodnoty celkového a maximálneho objemového jouleovského zahrievania planéty b sú uvedené v tab. 6.3.

Na obr. 6.1c) skúmame vplyv sklonu magnetického dipólu na zahrievanie za použitia reológie, pri ktorej sme dostali najväčšiu hodnotu celkového jouleovského zahrievania. Zahrievanie v prípade $\beta=0^\circ$ je tvorené nenulovou excentricitou a nenulovým sklonom rotačnej osi hviezdy voči rovine obehu. V súlade s parametrickou štúdiou vychádza celkové jouleovské zahrievanie najväčšie pre $\beta=60^\circ$.

Aj napriek malej výstrednosti dráhy, planéta TRAPPIST-1b prechádza najintenzívnejšou slapovou deformáciou v tomto planetárnom systéme. Na obr. 6.2a) je zobrazený viskózný profil planéty b pre rôzne reológie. Pre lepšiu viditeľnosť uvádzame legendu všetkých troch obrázkov spolu na obr. 6.2. Na obr. 6.2b) a c) ukazujeme porovnanie profilov objemového slapového zahrievania za použitia Andradeovho a Maxwellovho modelu. Veľkosť slapového zahrievania je silne (rádovo) závislá na použitej reológii a viskóznom modeli. K maximálnemu objemovému a celkovému slapovému zahrievaniu v oboch prípadoch dochádza za použitia rovnakej reológie výpočtu vnútorného zloženia planéty. Je to reológia s referenčnou hodnotou viskozity $\eta_{\text{ref}} = 1 \times 10^{20} \text{ Pa s}$ a aktivačnou energiou $E^* = 2 \times 10^5 \text{ J mol}^{-1}$, ktorá odpovedá profilu s najnižšou viskozitou a teda tento výsledok sedí s parametrickou štúdiou slapového zahrievania (obr. 4.1a)). Číselné hodnoty sú uvedené v tab. 6.4.

Slapové zahrievanie ma dominantný vplyv na zahrievanie planéty, čo vidíme pri porovnaní obr. 6.1 a 6.2. Aj napriek tomu, že v blízkosti planetárneho pláštá dosahuje jouleovské zahrievanie svoje maximum, stále tam prevláda slapové zahrievanie. V našej štúdii sa teda ukazuje, že v prípade sústavy TRAPPIST-1 prevláda slapové zahrievanie ako pre Andradeovu, tak aj Maxwellovu reológiu. Jedine v prípade Maxwellovej reológie pri vysokej referenčnej hodnote viskozity

sú výsledky jouleovského a slapového zahrievania porovnateľné.

Tabuľka 6.3: Jouleovské a slapové zahrievanie TRAPPIST-1b

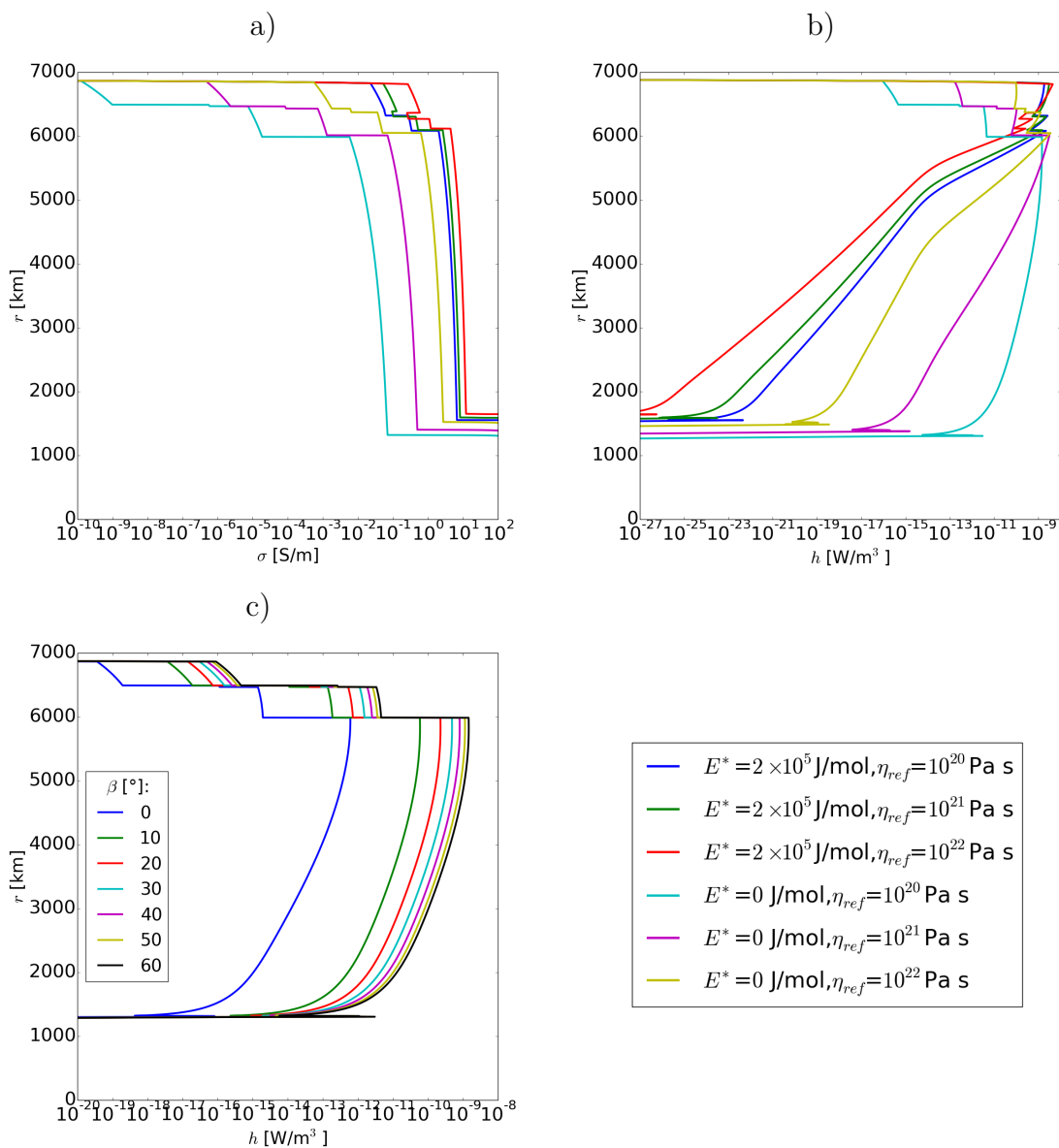
	Reológia		P [W]	h [W/m ³]
	E^* [J mol ⁻¹]	η_{ref} [Pa s]		
Jouleovské zahrievanie	2×10^5	1×10^{20}	7.06×10^{11}	2.61×10^{-9}
	2×10^5	1×10^{21}	8.21×10^{11}	3.08×10^{-9}
	2×10^5	1×10^{22}	6.54×10^{11}	4.49×10^{-9}
	0	1×10^{20}	1.42×10^{12}	1.46×10^{-9}
	0	1×10^{21}	8.89×10^{11}	3.17×10^{-9}
	0	1×10^{22}	5.02×10^{11}	3.58×10^{-9}
Slapové zahrievanie - Andrade	2×10^5	1×10^{20}	3.11×10^{17}	2.23×10^{-2}
	2×10^5	1×10^{21}	1.79×10^{17}	1.24×10^{-2}
	2×10^5	1×10^{22}	1.24×10^{17}	8.36×10^{-3}
	0	1×10^{20}	6.64×10^{16}	3.56×10^{-3}
	0	1×10^{21}	3.35×10^{16}	1.78×10^{-3}
	0	1×10^{22}	1.73×10^{16}	9.06×10^{-4}
Slapové zahrievanie - Maxwell	2×10^5	1×10^{20}	2.67×10^{16}	3.44×10^{-3}
	2×10^5	1×10^{21}	4.59×10^{15}	5.67×10^{-4}
	2×10^5	1×10^{22}	1.32×10^{15}	1.49×10^{-4}
	0	1×10^{20}	1.41×10^{14}	7.58×10^{-6}
	0	1×10^{21}	1.42×10^{13}	7.54×10^{-7}
	0	1×10^{22}	1.46×10^{12}	7.64×10^{-8}

6.2 Zahrievanie TRAPPIST-1c

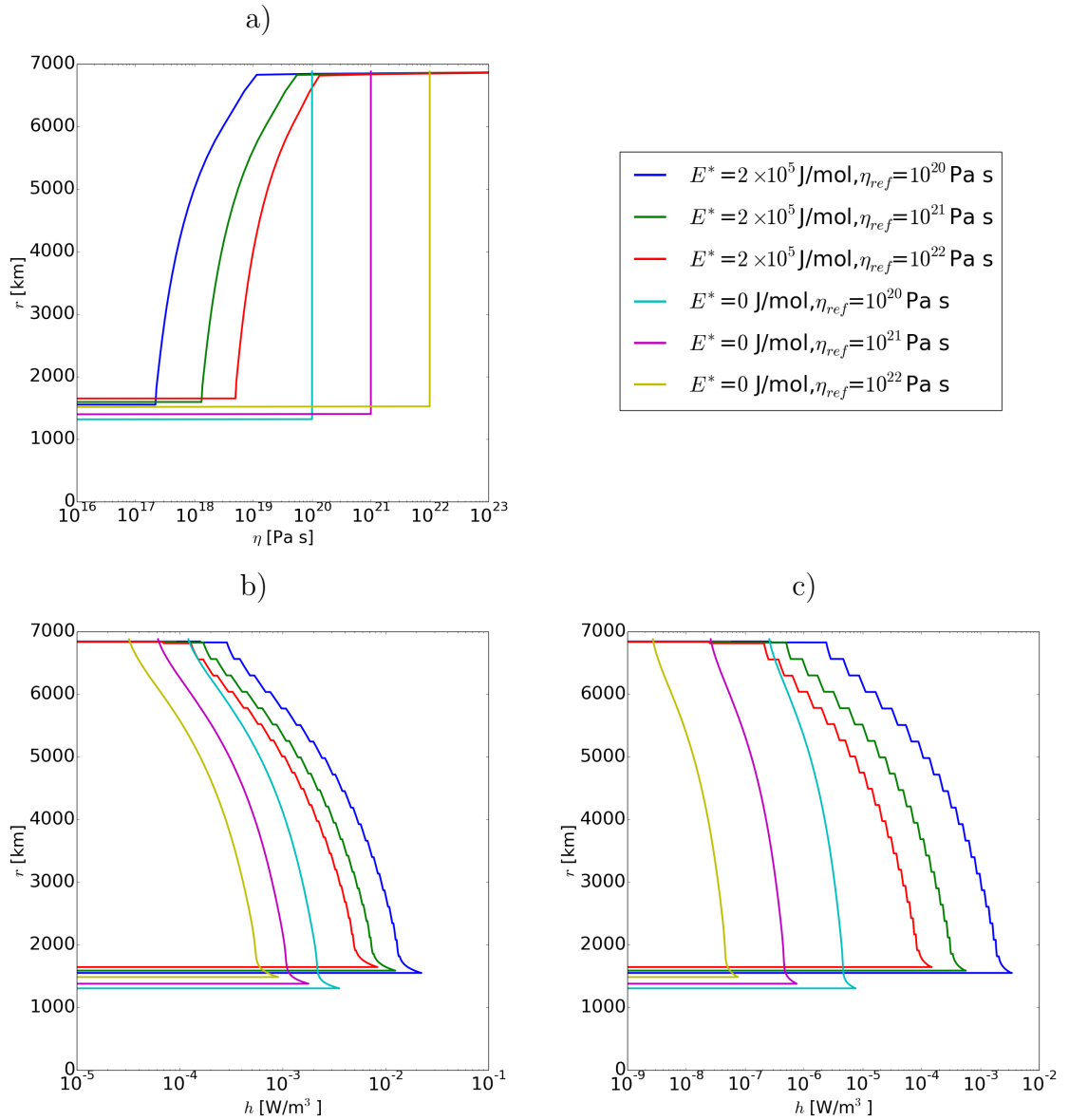
Štúdium zahrievania planéty c prebiehalo rovnako ako v prípade planéty b. Na obr. 6.3 je zobrazená štúdia jouleovského zahrievania a na obr. 6.4 štúdia slapového zahrievania.

Rovnako ako v prípade planéty b vyšlo celkové jouleovské zahrievanie najväčšie za použitia reológie s referenčnou hodnotou viskozity $\eta_{\text{ref}} = 1 \times 10^{20}$ Pa s a aktivačnou energiou je $E^* = 0$ J mol⁻¹ a maximálne objemové zahrievanie pre reológiu s referenčnou hodnotou viskozity $\eta_{\text{ref}} = 1 \times 10^{22}$ Pa s a aktivačnou energiou $E^* = 2 \times 10^5$ J mol⁻¹. Najväčšie lokálne objemové jouleovské zahrievanie vyšlo v porovnaní s planétou b o viac než rád menšie. Planéta c má väčšiu hmotnosť pre podobný polomer ako planéta b. Planéta c má teda väčšie jadro a jouleovské zahrievanie je preto nezanedbatelné len v oblasti pláštá (polomery $r \gtrsim 3000$ km).

Pri výpočte slapového zahrievania sa závislosť na reológii vnútorného zloženia planéty ukázala byť rovnaká ako v prípade planéty b. K maximálnemu objemovému aj celkovému slapovému zahrievaniu dochádza pri reológii s referenčnou hodnotou viskozity $\eta_{\text{ref}} = 1 \times 10^{20}$ Pa s a aktivačnou energiou $E^* = 2 \times 10^5$ J mol⁻¹, a to pri výpočte slapového zahrievania Maxwellovou aj Andradeovou reológiou. Číselné hodnoty slapového zahrievania uvádzame v tab. 6.4. Vplyv veľkého jadra planéty c sa tu prejaví aj v menšej oblasti významnej slapovej disipácie. Celková disipácia je teda ovplyvnená nielen vzdialenosťou od materskej hviezdy, ale aj menším objemom, v ktorom disipácia prebieha.



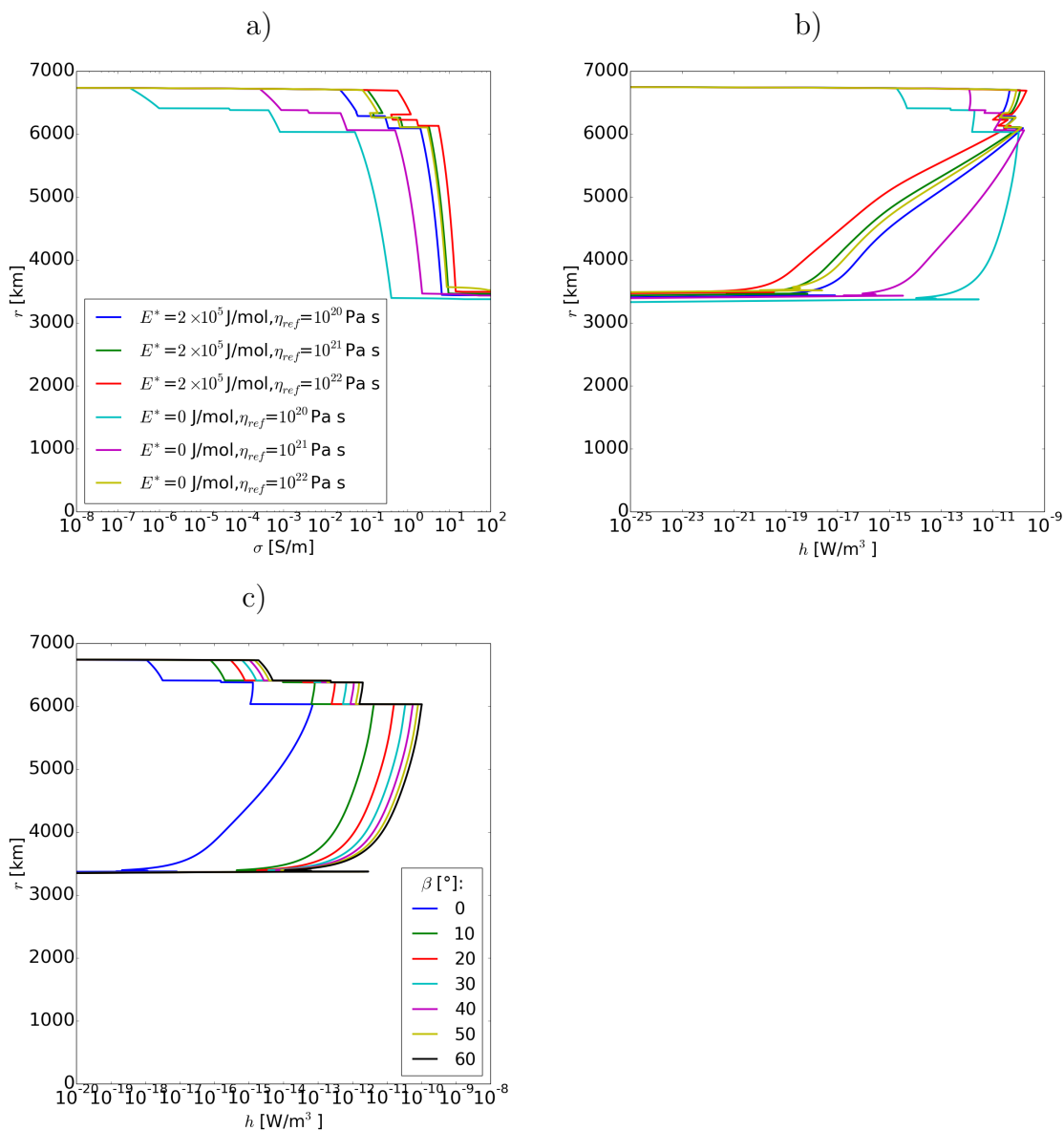
Obr. 6.1: a) Vodivostné profily planéty b za použitia rôznych reológií. b) Profil objemového jouleovského zahrievania $h(r)$ pre rôzne reologie. c) Profil objemového jouleovského zahrievania $h(r)$ pre rôzne sklony magnetického dipólu za použitia reologie, ktorá dáva najväčšie celkové zahrievanie.



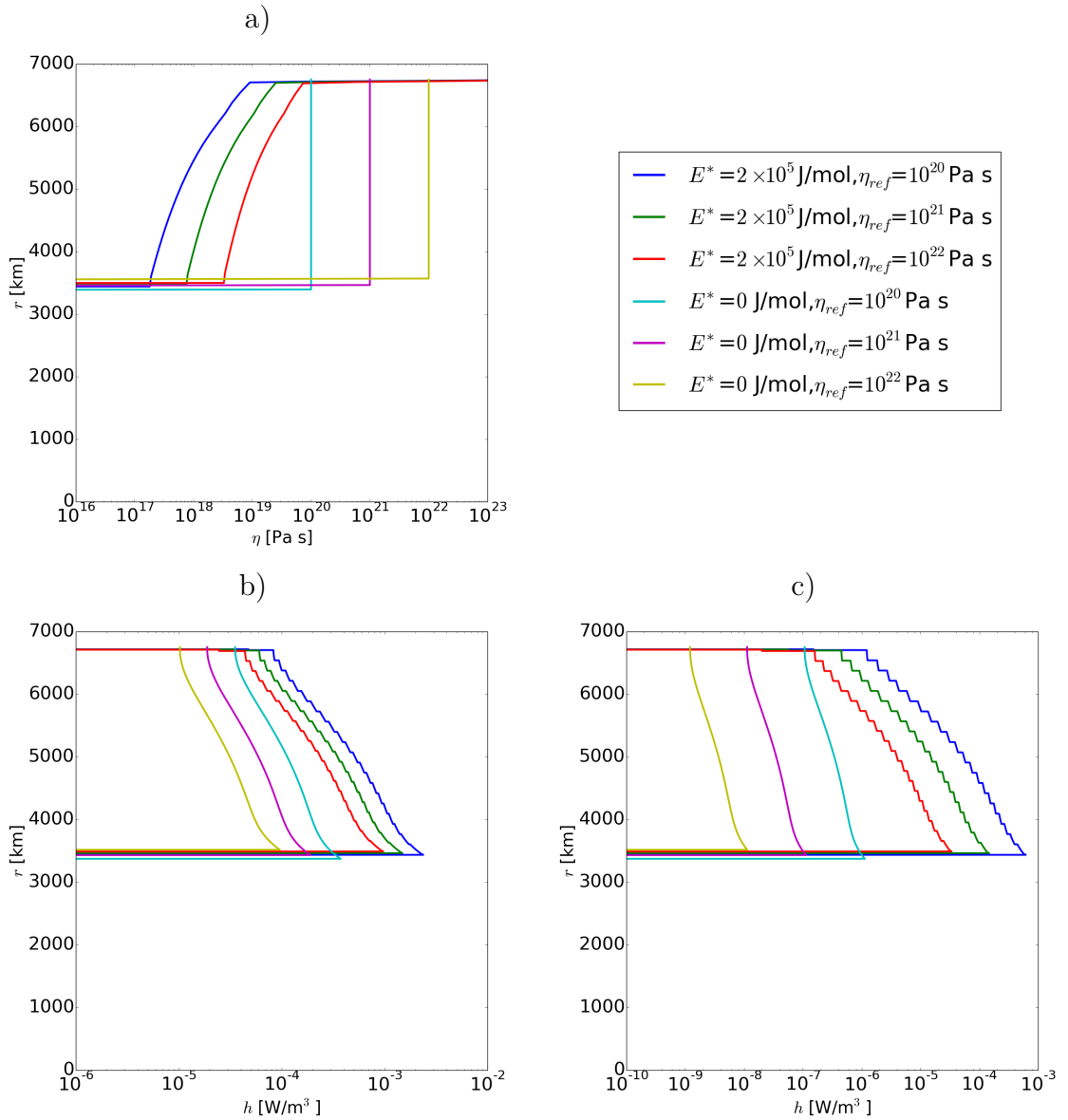
Obr. 6.2: a) Viskózný profil planéty b pre rôzne reológie výpočtu vnútorného zloženia planéty. b) Profil objemového slapového zahrievania $h(r)$ planéty b určený Andradeovou reológiou. c) Profil objemového slapového zahrievania $h(r)$ planéty b určený Maxwellovou reológiou. Pozn.: Skoky v zahrievaní v prípade teplotne závislej viskozity sú spôsobené maticovou metódou použitou pri výpočtoch.

Tabulka 6.4: Jouleovské a slapové zahrievanie TRAPPIST-1c

	Reológia		P [W]	h [W/m ³]
	E^* [J mol ⁻¹]	η_{ref} [Pa s]		
Jouleovské zahrievanie	2×10^5	1×10^{20}	2.63×10^{10}	1.48×10^{-10}
	2×10^5	1×10^{21}	3.13×10^{10}	1.17×10^{-10}
	2×10^5	1×10^{22}	3.21×10^{10}	2.02×10^{-10}
	0	1×10^{20}	5.68×10^{10}	1.03×10^{-10}
	0	1×10^{21}	3.26×10^{10}	1.63×10^{-10}
	0	1×10^{22}	2.89×10^{10}	1.30×10^{-10}
Slapové zahrievanie - Andrade	2×10^5	1×10^{20}	4.04×10^{16}	2.37×10^{-3}
	2×10^5	1×10^{21}	2.67×10^{16}	1.49×10^{-3}
	2×10^5	1×10^{22}	1.79×10^{16}	9.69×10^{-4}
	0	1×10^{20}	8.79×10^{15}	3.75×10^{-4}
	0	1×10^{21}	4.52×10^{15}	1.90×10^{-4}
	0	1×10^{22}	2.32×10^{15}	9.62×10^{-5}
Slapové zahrievanie - Maxwell	2×10^5	1×10^{20}	5.98×10^{15}	6.17×10^{-4}
	2×10^5	1×10^{21}	1.52×10^{15}	1.47×10^{-4}
	2×10^5	1×10^{22}	3.76×10^{14}	3.38×10^{-5}
	0	1×10^{20}	2.66×10^{13}	1.13×10^{-6}
	0	1×10^{21}	2.69×10^{12}	1.13×10^{-7}
	0	1×10^{22}	2.74×10^{11}	1.13×10^{-8}



Obr. 6.3: a) Vodivostné profily planéty c za použitia rôznych reológií. b) Profil objemového jouleovského zahrievania $h(r)$ planéty c za použitia rôznych reológií. c) Profil objemového jouleovského zahrievania $h(r)$ pre rôzne sklony magnetického dipólu za použitia reologie, ktorá dáva najväčšie celkové zahrievanie.



Obr. 6.4: a) Viskózný profil planéty c pre rôzne reológie výpočtu vnútorného zloženia planéty. b) Profil objemového slapového zahrievania $h(r)$ planéty c určený Andradeovou reológiou. c) Profil objemového slapového zahrievania $h(r)$ planéty c určený Maxwellovou reológiou. Pozn.: Skoky v zahrievaní v prípade teplotne závislej viskozity sú spôsobené maticovou metódou použitou pri výpočtoch.

Diskusia

Pri výpočte jouleovského zahrievania a vodivostných profiloch planét sme uvažovali zložitejšiu situáciu ako tú, ktorú opisujú v článku Kislyakova a kol. (2017). Do nášho modelu sme zahrnuli sklon rotačnej osi hviezdy voči rovine obehu α a excentricitu dráhy e , ktoré majú vplyv na výsledné zahrievanie. Náš model tiež počíta s novo publikovanými parametrami planét TRAPPIST-1 (Grimm a kol., 2018). Ďalej sme podobne ako Kislyakova a kol. (2017) uvažovali nulový sklon rotačnej osi planéty voči rovine obehu.

Pri určovaní štruktúry zo znalosti polomeru a hmotnosti planét, sme do nášho modelu zahrnuli zopár zjednodušení. Predpokladali sme jednoduché zloženie planéty tvorenej z pláštá a vonkajšieho jadra. Do výpočtov nezahŕňame možný vplyv vody na zahrievanie a zanedbávame aj vplyv vnútorného zahrievania na teplotný profil planéty a spätnú väzbu medzi teplotou vnútri planéty. V prípade extrémneho zahrievania by bol vplyv vnútorného zahrievania na teplotný profil výrazný. Veľký polomer niektorých planét TRAPPIST-1 na relatívne malú hmotnosť by mohol naznačovať výskyt prchavých látok na planétach vo forme vrstvy vody, ľadu alebo hustej atmosféry (Gillon a kol., 2017). Aby bolo možné vypočítať štruktúru týchto planét, museli sme pre niektoré planéty (napr. b) uvažovať hodnotu ich polomerov až na spodnej hranici udávaných rozsahov, aby planéta mohla existovať pre predpokladané zloženie zo silikátov.

Z parametrických štúdií modelovej planéty v kap. 3 a 4 vyplýva, že jouleovské zahrievanie je najcitlivejšie na zmenu sklonu magnetického dipólu voči osi rotácie hviezdy β a excentricity dráhy e . Slapové zahrievanie vykazuje vysokú závislosť na viskozite, excentricite dráhy a spin-orbitálnej rezonancii. Viskozita materiálu je najvýznamnejšou neznámou v tomto probléme, a preto sme vytvorili 6 rôznych reologických parametrov, aby sme mohli študovať závislosť zahrievania na vnútornom zložení planéty. V tab. 6.3 a tab. 6.4 pozorujeme pre rôzne reológie až rádové zmeny v zahrievaní pre Maxwellovu aj Andradeovu reológiu. Výsledky slapového zahrievania sme pre Maxwellov model porovnali s výsledkami z článku Hamish a Matsuyama (2019) s veľmi dobrou zhodou.

Výsledky štúdie jouleovského a slapového zahrievania planét TRAPPIST-1b a c ukázali dominanciu slapového zahrievania pri oboch planétach. Najväčší vplyv jouleovského zahrievania na planétu b pozorujeme pre reológiu $\eta_{\text{ref}} = 1 \times 10^{22} \text{ Pa s}$ a $E^* = 0 \text{ J mol}^{-1}$, kde z celkového zahrievania planéty tvorí 26%. V prípade planéty c pre tú istú reológiu tvorí jouleovské zahrievanie z celkového zahrievania ešte menej, len 10%. Veľkosť slapového zahrievania je za použitia niektorých reológií extrémna a zahrievanie by mohlo viesť k rýchlemu prehriatiu planéty (Běhounková a kol., 2011) alebo k veľkoškálovému taveniu vo vnútri planéty (Barr a kol., 2018).

Rozdiel medzi slapovým a jouleovským zahrievaním pozorujeme aj v mieste, kde dosahujú svoje maximá. Všeobecne platí, že jouleovské zahrievanie klesá s hĺbkou a naopak slapové zahrievanie s hĺbkou rastie. Výsledky však ukazujú dominanciu slapového zahrievania aj na miestach, kde jouleovské zahrievanie dosahuje svojho maxima.

Pri aplikácii výpočtov na systém TRAPPIST-1 sme ako hodnotu β použili 60° (Kislyakova a kol., 2017), avšak skutočná hodnota nie je známa. Pozoro-

vane hviezd typu M naznačuje, že možné sú všetky uhly (Lang a kol., 2012). Závislosť jouleovského zahrievania na parametri β je na obr. 6.1c), kde môžeme vidieť, že zahrievanie by sa výrazne zmenilo s iným uhlom. Rovnako to platí v prípade veľkosti magnetického poľa hviezdy. Ak by sme uvažovali planéty obiehajúce okolo hviezdy na hornej hranici veľkosti magnetického poľa hviezd typu M – 3000×10^{-4} T, jouleovské zahrievanie by sa mohlo zvýšiť až 25-násobne.

Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo porovnanie slapového zahrievania s menej obvyklým zdrojom energie – jouleovským zahrievaním. Program `elmgFD` na výpočet jouleovského zahrievania bol poskytnutý RNDr. Jakubom Velímským, Ph.D. Na získanie vstupov do tohto programu sme použili a otestovali samostatný program, ktorý analyzoval magnetické pole materskej hviezdy na povrchu planéty. Túto analýzu sme vykonali dvoma nezávislými metódami s veľmi dobrou zhodou.

Na výpočet slapového zahrievania sme využili program vytvorený Mgr. Walterovou, ktorý využíva Maxwellovu a Andradeovu reológiu na popísanie slapových deformácií.

K určeniu štruktúry planét sme použili program, ktorý zostavil vodivostné, teplotné a hustotné profily na základe článkov Kislyakova a kol. (2017); Valencia a kol. (2006). Vzhľadom k neznámej viskozite materiálu sme vytvorili 6 rôznych reológií na určenie efektu študovaného zahrievania na vnútornej štruktúre.

Vykonali sme parametrické štúdie jouleovského a slapového zahrievania na modelovej planéte, vďaka ktorým sme mohli študovať všeobecné zákonitosti. Výpočty sme aplikovali na planetárny systém TRAPPIST-1, konkrétnejšie na prvé dve planéty systému, u ktorých sme očakávali najväčšie zahrievanie. Vypočítané hodnoty jouleovského a slapového zahrievania ukazujú dominanciu slapového zahrievania pri oboch planétach. Jouleovské zahrievanie bolo so slapovým porovnateľné len v prípade Maxwellovho modelu pre niektoré reologie.

Zoznam použitej literatúry

- NASA exoplanet archive. <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>.
- ADAMS, F., GRAVES, G. a LAUGHLIN, G. (2004). Red Dwarfs and the End of the Main Sequence. *RevMexAA (Serie de Conferencias)*, **22**, 46–49.
- ALTSCHULER, M. a NEWKIRK, G. (1969). Magnetic fields and the structure of the solar corona. i: Methods of calculating coronal fields. *Solar Physics*, **9**, 131–149. doi: 10.1007/BF00145734.
- BARR, A., DOBOS, V. a LÁSZLÓ, L. (2018). Interior structures and tidal heating in the TRAPPIST-1 planets. *A&A*, **613**, 13. doi: 10.1051/0004-6361/201731992.
- BARSTOW, J. a IRWIN, P. (2016). Habitable worlds with jwst: transit spectroscopy of the trappist-1 system? *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **461**, L92–L96. doi: 10.1093/mnrasl/slw109.
- BROKEŠOVÁ, J. (2008). Teoretické základy fourierovy spektrální analýzy. URL <http://geo.mff.cuni.cz/studium/Brokesova-FourierovaSpektralniAnalyza.pdf>.
- BĚHOUNKOVÁ, M., TOBIE, G., CHOBLET, G. a ČADEK, O. (2011). Tidally Induced Thermal Runaways on Extrasolar Earths: Impact on Habitability. *ApJ*, **728**, 89. doi: 10.1088/0004-637X/728/2/89.
- CASTILLO-ROGEZ, J., EFROIMSKY, M. a LAINEY, V. (2011). The tidal history of Iapetus: Spin dynamics in the light of a refined dissipation model. *J. Geophys. Res.*, 116:E09008. doi: 10.1029/2010JE003664.
- DE WIT, J., WAKEFORD, H., GILLON, M. a *et al.* (2016). A combined transmission spectrum of the earth-sized exoplanets trappist-1 b and c. *Nature*, **537**, 1476–1487. doi: 10.1038/nature18641.
- DELREZ, L., GILLON, M., TRIAUD, A. H. M. J., DEMORY, B.-O., DE WIT, J., INGALLS, J. G., AGOL, E., BOLMONT, E., BURDANOV, A., BURGASSER, A. J., CAREY, S. J., JEHIN, E., LECONTE, J., LEDERER, S., QUELOZ, D., SELSIS, F. a VAN GROOTEL, V. (2018). Early 2017 observations of TRAPPIST-1 with Spitzer. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **475**, 3577–3597. doi: 10.1093/mnras/sty051.
- DESCHAMPS, F., TACKLEY, P. a NAKAGAWA, T. (2010). Temperature and heat flux scalings for isoviscous thermal convection in spherical geometry. *Geophys. J. Int.*, **182**, 137–154. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04637.x.
- EFROIMSKY, M. (2012). Tidal Dissipation Compared to Seismic Dissipation: In Small Bodies, Earths, and Super-Earths. *ApJ*, 746:150. doi: 10.1088/0004-637X/746/2/150.

- EFROIMSKY, M. a LAINEY, V. (2007). Physics of bodily tides in terrestrial planets and the appropriate scales of dynamical evolution. *Journal of Geophysical Research*. doi: 10.1029/2007JE002908.
- GILLON, M., TRIAUD, A., DEMORY, B., JEHIN, E., AGOL, E. a *et al.* (2017). Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star TRAPPIST-1. *Nature*, **542**, 456–460. doi: 10.1038/nature21360.
- GRIMM, S., DEMORY, B., GILLON, M., DORN, C. a *et al.* (2018). The nature of the TRAPPIST-1 exoplanets. *A&A*, **613**, 21. doi: 10.1051/0004-6361/201732233.
- HAMISH, H. a MATSUYAMA, I. (2019). Tides between the trappist-1 planets. *The American Astronomical Society*, **875**. doi: 10.3847/1538-4357/ab0c21.
- JOHNSTONE, C., JARDINE, M. a MACKAY, D. (2010). Modelling stellar coronae from surface magnetograms: the role of missing magnetic flux. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **404**, 101–109. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16298.x.
- JORDAN, E. (1968). *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*. Prentice-Hall, Inc. ISBN 978-0-13-249995-8.
- KAULA, W. (1964). Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution. *Rev. Geophys.*, **2**, 661–685.
- KISLYAKOVA, K., NOACK, L., JOHNSTONE, C. a *et al.* (2017). Magma oceans and enhanced volcanism on TRAPPIST-1 planets due to induction heating. *Nature Astronomy*, **1**, 878–885. doi: 10.1038/s41550-017-0284-0.
- LANG, P., JARDINE, M., DONATI, J., MORIN, J. a VIDOTTO, A. (2012). Coronal Structure of Low-Mass Stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **424**, 1077–1087. doi: 10.1111/j.1365-2966.2012.21288.x.
- MURRAY, C. a DERMOTT, S. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press. ISBN 9780521575973.
- PODOLSKÝ, J. a LANGER, J. (2019). Teoretická mechanika. URL <https://is.cuni.cz/studium/predmety/index.php?id=5c555ca560fc077b5e54ffddf2fc1791&tid=&do=download&did=190757&kod=N0FY003>.
- REINERS, A. (2013). Magnetic Fields in Low-Mass Stars: An Overview of Observational Biases. *Cambridge University Press*, **9**. doi: 10.1017/S1743921314001963.
- RENAUD, J. a HENNING, W. (2018). Increased tidal dissipation using advanced rheological models: Implications for io and tidally active exoplanets. *The Astrophysical Journal*, **857**. doi: 10.3847/1538-4357/aab784.
- SABADINI, R. a VERMEERSEN, B. (2004). *Global Dynamics of the Earth*, volume 20. Springer Science+Business Media. ISBN 978-1-4020-1268-6. doi: 10.1007/978-94-017-1709-0.

- SEGATZ, M., SPOHN, T., ROSS, M. a SCHUBERT, G. (1988). Tidal dissipation, surface heat flow, and figure of viscoelastic models of Io. *Icarus*, **75**, 187–206.
- TAKEUSHI, H. a SAITO, M. (1972). Seismic surfaces waves. In ET AL., B. A., editor, *Methods in computational physics, vol. 11*, pages 217–295. Academic Press, New York.
- TOSI, N., GODOLT, M., STRACKE, B., T., R. a *et al.* (2017). The habitability of a stagnant-lid earth. *A&A*, **605**, 21. doi: 10.1051/0004-6361/201730728.
- VALENCIA, D., O’CONNELL, R. a SASSELOV, D. (2006). Internal Structure of Massive Terrestrial Planets. *Icarus*, **181**, 545–554. doi: 10.1016/j.icarus.2005.11.021.
- VARSHALOVICH, D., MOSKALEV, A. a KHERSONSKII, V. (1989). *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, Singapore.
- VELÍMSKÝ, J., GRAYVER, A., KUVSHINOV, A. a ŠACHL, L. (2018). On the modelling of m2 tidal magnetic signatures: effects of physical approximations and numerical resolution. *Earth Planets Space*, **70**, 192. doi: 10.1186/s40623-018-0967-5.
- VELÍMSKÝ, J. a MARTINEC, Z. (2005). Time-domain, spherical harmonic-finite element approach to transient three-dimensional geomagnetic induction in a spherical heterogeneous Earth. *Geophys. J. Int.*, **161**, 81–101. doi: 10.1111/j.1365-246X.2005.02546.x.
- WU, P. a PELTIER, W. (1982). Viscous gravitational relaxation. *Geophys. J. Int.*, **70**, 435–485. doi: 10.1111/j.1365-246X.1982.tb04976.x.

Zoznam obrázkov

1.1	Nákres obežnej dráhy planéty okolo hviezdy s osou rotácie Ω . Uhol β_θ predstavuje sklon vektoru magnetického momentu voči osi z v sústave pevne spojenou s hviezdou. Šípkami je naznačený smer rotácie hviezdy a smer obehu planéty.	6
1.2	Opísaná, koncentrická kružnica na obrázku vľavo s plomerom a rovnajúcim sa veľkej poloosi elipsy. F a F' predstavujú ohniská elipsy a O stred kružnice a elipsy. Na obrázku vpravo je zobrazený vzťah medzi pravou anomáliou f a excentrickou anomáliou E (Murray a Dermott, 1999).	8
3.1	a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej sa vodivosti. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej sa hodnote sklonu dipólu voči rotačnej osi.	15
3.2	a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej excentricite pre uhol $\beta = 0^\circ$. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej excentricite pre uhol $\beta = 30^\circ$	15
3.3	a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacom sa uhle α , keď uhol $\beta = 0^\circ$. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacom sa uhle α , keď uhol $\beta = 30^\circ$	16
3.4	a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej sa dobe rotácie hviezdy pre uhol $\beta = 30^\circ$. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej sa dobe obehu planéty pre uhol $\beta = 30^\circ$	16
3.5	a) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri meniacej sa spin-orbitálnej rezonancii. b) Priebeh objemového jouleovského zahrievania h planéty pri rôznych veľkostiach magnetického dipólu hviezdy.	17
3.6	Celkové jouleovské zahrievanie P modelovej planéty.	17
4.1	a) Priebeh objemového slapového zahrievania h pri zmene viskozity. b) Priebeh objemového slapového zahrievania h pri zmene excentricity.	20
4.2	a) Priebeh objemového slapového zahrievania h pri zmene spin-orbitálnej rezonancie. b) Priebeh objemového slapového zahrievania h pri zmene doby obehu planéty.	20
4.3	a) Priebeh objemového slapového zahrievania h s rôznou veľkosťou planét. b) Priebeh objemového slapového zahrievania h pre rôzne hrúbky jadra planéty. c) Priebeh objemového slapového zahrievania h pre rôzne hrúbky litosféry planéty.	21

4.4	a) Celkové slapové zahrievanie P modelovej planéty v závislosti na viskozite a excentricite vypočítané Andradeovou reológiou. b) Celkové slapové zahrievanie P modelovej planéty v závislosti na viskozite a excentricite vypočítané Maxwellovou reológiou. c) Celkové slapové zahrievanie P modelovej planéty v závislosti na viskozite a parametri α určené Andradeovou reológiou. d) Celkové slapové zahrievanie P modelovej planéty v závislosti na viskozite a parametri ζ určené Andradeovou reológiou. Pozor, každý obrázok má inú farebnú škálu.	22
6.1	a) Vodivostné profily planéty b za použitia rôznych reológií. b) Profil objemového jouleovského zahrievania $h(r)$ pre rôzne reológie. c) Profil objemového jouleovského zahrievania $h(r)$ pre rôzne sklony magnetického dipólu za použitia reológie, ktorá dáva najväčšie celkové zahrievanie.	29
6.2	a) Viskózný profil planéty b pre rôzne reológie výpočtu vnútorného zloženia planéty. b) Profil objemového slapového zahrievania $h(r)$ planéty b určený Andradeovou reológiou. c) Profil objemového slapového zahrievania $h(r)$ planéty b určený Maxwellovou reológiou. Pozn.: Skoky v zahrievaní v prípade teplotne závislej viskozity sú spôsobené maticovou metódou použitou pri výpočtoch.	30
6.3	a) Vodivostné profily planéty c za použitia rôznych reológií. b) Profil objemového jouleovského zahrievania $h(r)$ planéty c za použitia rôznych reológií. c) Profil objemového jouleovského zahrievania $h(r)$ pre rôzne sklony magnetického dipólu za použitia reológie, ktorá dáva najväčšie celkové zahrievanie.	32
6.4	a) Viskózný profil planéty c pre rôzne reológie výpočtu vnútorného zloženia planéty. b) Profil objemového slapového zahrievania $h(r)$ planéty c určený Andradeovou reológiou. c) Profil objemového slapového zahrievania $h(r)$ planéty c určený Maxwellovou reológiou. Pozn.: Skoky v zahrievaní v prípade teplotne závislej viskozity sú spôsobené maticovou metódou použitou pri výpočtoch.	33

Zoznam tabuliek

3.1	Referenčné hodnoty parametrov	13
4.1	Referenčné hodnoty parametrov	18
4.2	Referenčné reologické vlastnosti vrstiev	19
5.1	Vodivosť a zmena entalpie silikátov v plášti	25
6.1	Parametre hviezdy TRAPPIST-1a; $R_{\odot} = 696342$ km je polomer Slnka	26
6.2	Vlastnosti planét TRAPPIST-1; $M_{\oplus} = 5.97 \times 10^{24}$ kg je hmotnosť Zeme a $R_{\oplus} = 6371$ km je polomer Zeme.	27
6.3	Jouleovské a slapové zahrievanie TRAPPIST-1b	28
6.4	Jouleovské a slapové zahrievanie TRAPPIST-1c	31

A. Sféricke harmonické funkcie

V tejto kapitole sú uvedené základné vedomosti o sférických harmonických funkciách (Varshalovich a kol. (1989)).

Sféricke harmonické funkcie $Y_{jm}(\vartheta, \varphi)$ sú uhlovou časťou riešenia Laplaceovej rovnice v sférických súradniciach

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (\text{A.1})$$

kde j a m sú stupeň a rád rozvoja, ϑ je planetopisná ko-šírka a φ je planetopisná dĺžka.

Sféricke harmonické funkcie potom vieme vyjadriť ako (Varshalovich a kol. (1989))

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m N_{jm} P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (\text{A.2})$$

kde $P_{jm}(\cos \vartheta)$ sú pridružené Legendreove polynómy a N_{jm} je normalizačný faktor definovaný ako

$$N_{jm} = \left[\frac{(2j+1)(j-m)!}{4\pi(j+m)!} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.3})$$

pričom $j = 0, 1, \dots, \infty$ a $m = -j, \dots, j$.

Sféricke harmoniky splňujú podmienku ortonormality

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{j_1, m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{j_2, m_2}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (\text{A.4})$$

Nech $f(\vartheta, \varphi) \in L_2(S)$, potom môžeme $f(\vartheta, \varphi)$ napísať v tvare radu

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{m=j} f_{jm} Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (\text{A.5})$$

kde

$$f_{jm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_{jm}(\vartheta, \varphi) Y_{jm}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (\text{A.6})$$

sú sféricke harmonické koeficienty, pre ktoré platí, že ak je $f(\vartheta, \varphi)$ reálna funkcia, platí pre ňu nasledujúca symetria

$$f_{j, -m} = (-1)^m f_{jm}^*. \quad (\text{A.7})$$

Analytické vyjadrenie prvých dvoch stupňov sférických harmonických funkcií

$$Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad (\text{A.8})$$

$$Y_1^{-1}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi}, \quad (\text{A.9})$$

$$Y_1^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \vartheta, \quad (\text{A.10})$$

$$Y_1^1(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}. \quad (\text{A.11})$$

B. Fourierova spektrálna analýza

Fourierova analýza bola vyvinutá ako metóda riešenia rovnice vedenia tepla s okrajovými podmienkami. V modelovaní fyzikálnych javov sa využíva rozklad funkcií na harmonické zložky, kedy sa hľadaná funkcia napíše v tvare Fourierového radu a namiesto danej funkcie sa hľadajú koeficienty tohto radu.

V tejto kapitole uvedieme základné informácie o Fourierových radoch a Fourierovej transformácii spojitého a diskrétného signálu (Brokešová (2008)).

B.1 Fourierov rad spojitého signálu

Uvažujeme ľubovoľný spojitý signál $s(t) \in L_2(a,b)$, pre ktorý

$$\int_a^b |s(t)|^2 dt \quad (\text{B.1})$$

existuje a má konečnú hodnotu. Keďže uvažujeme aj komplexné funkcie (signály) absolútnu hodnotu odstrániť nemôžeme.

Funkciu $s(t)$ rozvineme do radu tak, že ju napíšeme v tvare radu so všeobecne komplexnými koeficientami c_i

$$s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Phi_i, \quad (\text{B.2})$$

kde Φ_i komplexná funkcia a rad v nejakom zmysle konverguje. V tejto práci sa sústredíme na také rozvoje, kde koeficienty c_i sú Fourierove koeficienty a funkcia Φ_i tvorí úplný ortogonálny systém v úplnom Hilbertovom priestore $L_2(a,b)$.

Majme funkciu $s(t)$ zadanú na intervale $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Na tomto intervale tvorí funkcia $e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$ ortogonálny systém pre $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Fourierov rad tejto funkcie je daný vzťahom

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}}, \quad (\text{B.3})$$

kde koeficienty S_n sú dané integrálom

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} dt. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Fourierova transformácia spojitého signálu

Fourierovou transformáciou spojitého signálu $s(t)$ nazveme funkciu $S(f)$

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (\text{B.5})$$

kde f je frekvencia signálu a pre uhlovú frekvenciu platí $\omega = 2\pi f$.

Inverznou Fourierovou transformáciou funkcie $S(f)$ je

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df. \quad (\text{B.6})$$

B.3 Fourierov rad diskretného signálu

Fourierov rad diskretného signálu je analógiou Fourierovho radu spojitého signálu. Je to transformácia priradujúca diskretnému signálu diskkrétne spektrum. Diskrétnou Fourierovou transformáciou signálu $s_n = s(n)$ pre $n = 0, 1, \dots, N - 1$ nazveme diskretný signál $S_l = S(l)$, pre $l = 0, 1, \dots, N - 1$, pre ktorý platí vzťah

$$S_l = \mathcal{DFT}[s_n]_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i2\pi \frac{nl}{N}}, \quad (\text{B.7})$$

kde N je dĺžka periódy signálu.

Inverznou diskretnou Fourierovou transformáciou odpovedajúceho spektra $S_l = S(l)$, pre $l = 0, 1, \dots, N - 1$ je diskretný signál $s_n = s(n)$ pre $n = 0, 1, \dots, N - 1$

$$s_n = \mathcal{DFT}^{-1}[S_l]_n = \sum_{l=0}^{N-1} S_l e^{i2\pi \frac{nl}{N}}. \quad (\text{B.8})$$