



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jakub Kvorka

Vliv podpovrchového oceánu na přenos tepla v nitru ledového měsíce

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Matematické a počítačové modelování ve fyzice

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Ďakujem rodičom za podporu a prof. Čadekovi za dôveru, ktorú do mňa vložil vypísaním tejto práce. Čestné uznanie dostáva mista Šéf za džús k boju s PDR doc. Pokorného a slečna Blondína za to, že na istý čas Slnko nado mnou nezapadalo. Rozhodne ho udeľujem aj Ivanovi a Chipmunkom za ich nekončiaci sarkazmus a všadeprítomnú dobrú náladu. Rytiersky rád udeľujem Marekovi a Lýdii, ktorí vždy našli čas na nočné pivko pred intrákom, a, samozrejme, členovi Spoločenstva utorkových benchmarkov, brother-from-another-mother Lubenovi. Bohužiaľ, končí sa štúdium a my sa rozídeme do sveta, tak vám aspoň na tomto mieste venujem nasledovné riadky.

*Those with habits of waste,
That sense of style and good taste,
Of making sure we were right,
Hey don't you know you were right?
I am not afraid anymore,
I keep my eyes on the door,
But I'll remember, when we were young.*

Insight, Joy Division (1979)

Název práce: Vliv podpovrchového oceánu na přenos tepla v nitru ledového měsíce

Autor: Jakub Kvorka

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Katedra geofyziky

Abstrakt: Úspěšné vesmírné mise poskytují množství dat spojených s topografií ledových satelitů planet vyskytujících se v Sluneční soustavě, otvírajíc tak prostor pro vznik teorií predikujících dynamický stav uvnitř těles. Jedním z možných přístupů k objasnění topografie je vysvětlení vycházející z existence podpovrchového oceánu a konvektivního přenosu tepla, který spouští deformaci ledové kůry pokrývající těleso. Cílem této práce je, pomocí vlastního programu simulujícího konvekci v rotujícím oceánu, analyzovat vzory vznikající při časovém průměrování chaotického průdení. Dosiahnuté výsledky, venované mesiacu Titan, podporujú teóriu o fázovom rozhraní a korešpondujú s hodnotami tepelného toku nezávisle získanými modelovaním ledovej kôry.

Klíčová slova: ledové měsíce, Boussinesquova aproximácia, rotujúca konvekcia

Title: The effect of a subsurface ocean on the heat transfer in an icy moon

Author: Jakub Kvorka

Department: Department of Geophysics

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Department of Geophysics

Abstract: Successful space missions to Jupiter and Saturn provided important data bearing information about topography and internal structure of icy bodies in the outer Solar System. One of the possibilities how to explain the observed topography of an icy moon is to assume the existence of subsurface reservoir of liquid water transferring heat from the rocky core to icy crust causing its deformation. In this thesis, we develop a computer program to model the convective heat transfer in a rotating liquid shell, which we use to analyze heat flux anomalies on the top of the subsurface ocean. The results obtained for Titan are in agreement with those independently obtained from modelling the icy crust.

Keywords: icy satellites, Boussinesq approximation, rotating convection

Obsah

Úvod	3
1 Teória	6
1.1 Riadiace rovnice	7
1.1.1 Objemové rovnice	7
1.1.2 Nestlačiteľná Boussinesquova aproximácia	8
1.1.3 Bezrozmerná formulácia Boussinesqovej aproximácie	8
1.1.4 Bezrozmerné riadiace parametre	9
1.1.5 Okrajové podmienky	10
1.1.6 Zhrnutie	11
1.1.7 Zachovanie energie	11
1.2 Numerická časová integrácia	12
1.2.1 Adams-Baschforthova metóda 2. rádu	13
1.2.2 Runge-Kuttova metóda 2. rádu	14
1.3 Harmonický rozklad veličín a jeho dôsledky	14
1.3.1 Harmonický rozklad spojitej funkcie	14
1.3.2 Harmonický rozklad objemových rovníc	15
1.3.3 Harmonický rozklad okrajových podmienok	18
1.4 Radiálna diskretizácia	19
1.4.1 Posunuté siete	19
1.4.2 Konečné diferencie	20
1.5 Rozlíšenie siete a voľba časového kroku	20
2 Testy počítačového programu	22
3 Výsledky simulácií a diskusia	25
3.1 Doplnok k teoretickému úvodu	25
3.1.1 Časové a priestorové stredovanie	25
3.1.2 Zonálna variácia tepelného toku	25
3.1.3 Miery vplyvu rotácie v systéme	26
3.2 Výsledky	27

3.2.1	Nusseltovo číslo	27
3.2.2	Variácia tepelného toku a vzory chladenia	29
3.2.3	Extrapolácia výsledkov na reálne objekty, diskusia	35
	Záver	39
	Seznam použité literatury	41
	Zoznam obrázkov	47
	Zoznam tabuliek	49
	A Apendix	50
A.1	Členy mechanickej sústavy	50
A.2	Členy teplotnej sústavy	51
A.3	Okrajové podmienky	52
A.4	Rozklad momentu hybnosti	52
	B Prílohy	53
B.1	Príloha 1	53

Úvod

Pokrok vo vesmírnom výskume vedie k hypotéze, podľa ktorej by sa pod povrchom viacerých vzdialených objektov v Slnecnej sústave mohli nachádzať oceány kvapalnej vody (Nimmo a Pappalardo, 2016), (Lunin, 2017). Misie Galileo a Cassiny-Huygens v posledných rokoch poskytli množstvo dát nasvedčujúcich pravdivosti tejto hypotézy. Najviac dôkazov sa týka možnej existencie masívnych vodných rezervoárov na ľadových mesiacoch plynných obrov, Jupitera a Saturnu. V prípade Jupitera ide menovite o jeho mesiace Európa (na základe meraní magnetickej indukcie mag. poľa Jupitera, ktoré nesie znaky vplyvu vodivej vrstvy v plášti Európy, interpretovanú slaným oceánom pod ľadovým povrchom, (Khurana a kol., 2002), (Zimmer a kol., 2000)) a Ganymed (meranie podpovrchového magnetodynamu, vysvetlené, analogicky Európe, prúdením v podpovrchovom oceáne (Kivelson a Khurana, 2002)). V prípade Saturnu ide o mesiace Titan (meranie elektrických signálov sondou Huygens (Béghin a kol., 2012) a pozorovanie gravitačného prílivu (Iess a kol., 2012)) a Enceladus (meranie librácie ľadovej kôry (Thomas a kol., 2016)).

Merania priniesli okrem nepriamych dôkazov potvrdzujúcich existenciu oceánov aj dáta popisujúce topografiu povrchu a gravitačné pole študovaných telies. V prípade Titanu a Enceladu dáta naznačujú, že ľadová kôra nie je v stave hydrostatickej rovnováhy (Iess a kol., 2010), (Čadek a kol., 2017), v prípade Európy ukazujú chaotický povrch objavujúci sa v okolí rovníka spolu s masívnymi ložiskami soli (Figueredo a Greeley, 2004), (Brown a Hand, 2013). V posledných rokoch bolo vynaložené úsilie smerované na vysvetlenie uvedených anomálií pomocou prenosu tepla a hmoty oceánskym prúdením z kamenného jadra do ľadovej kôry (Titan - (Kvorka a kol., 2018), Európa - (Soderlund a kol., 2014), Enceladus - (Čadek a kol., 2019)). Modely, vysvetľujúce anomálie existenciou fázového rozhrania (rozhranie medzi rôznymi skupenstvami látky dovoľujúce prenos hmoty a energie (Slattery a kol., 2007)) na hranici oceána a ľadovej kôry, dosiahli úspech pri popise rovnovážneho stavu ľadovej kôry, ktorý je definovaný rovnováhou medzi mechanickým prenosom hmoty a fázovou premenou (intuitívny náhľad je možné nájsť v práci (Kvorka a kol., 2018) - kvapalná oceánska voda na rozhraní zamrzne

a vytvorí ladový výbežok, ktorý pôsobením vztlakovej sily vteká do ladovej kôry). Modelovaním inverznej úlohy je tak možné pomocou nameraných hodnôt topografie určiť variácie tepelného toku na spodnej hranici ladovej kôry. V súčasnosti však neexistuje možnosť dosiahnute výsledky porovnať s experimentálnymi hodnotami nameranými na kozmických telesách, a tak sú teoretické výpočty jedinou možnosťou nahliadnuť na interakciu ladovej kôry a podpovrchového oceána. Klasická predstava tuhej ladovej kôry, vznášajúcej sa na oceáne, je nahradená pojmom dynamickej rovnováhy a výmenou hmoty medzi oceánom a ladovou kôrou. Predpokladom pre úspešnú aplikáciu nového postupu je tak detailné spracovanie popisu oceánskeho prúdenia, aproximované prúdením tekutiny v rotujúcom, sféricky symetrickom plášti.

Numerické simulácie konvekcie v podpovrchových oceánoch sú limitované výpočtovou silou a presnosťou moderných počítačov (Glatzmaier, 2002) a modely zahŕňajúce realistické parametre ležia ďaleko za hranicou našich výpočtov (Soderlund a kol., 2014). Tie je nutné extrapolovať pomocou diagramov popisujúcich základné typy prúdenia v závislosti na fyzikálnych parametroch oceána (Gastine a kol., 2015), (Cheng a kol., 2018). Výpočty sa preto sústreďujú na systémy, v ktorých rotácia hrá kľúčovú úlohu pri určovaní vzorov magnetického poľa a tepelného toku (tzv. prudko rotujúce geodynamá, (Aurnou a kol., 2015), (Aubert a kol., 2017)), s cieľom presne popisovať magnetické pole zemského jadra a konvekciu v zemskom plášti. Aplikáciu takého výpočtu na ladové mesiace predstavuje práca (Soderlund a kol., 2014), v ktorej sú anomálie pozorované na Európe vysvetlené pomocou 3D modelu oceánskeho turbulentného prúdenia. Prúdenie je usmerňované Coriolisovou silou a vytvára charakteristický dlhovlnný vzor v tepelnom toku na hornej hranici oceána (Miquel a kol., 2018). Podľa Taylor-Proudmanovej vety vzniká v rotujúcich systémoch prúdenie štruktúrované do tvaru valcov rovnobežných s rotačnou osou, ktoré efektívne prenášajú teplo smerom k rovníkových oblastiam (tzv. rovníkové chladenie (Busse a Simitev, 2006), (Yadav a kol., 2016)). Na druhú stranu, niektoré modely vykazujú rozbitie týchto štruktúr pri zvyšovaní rotácie a tepelný tok je smerovaný k pólom (tzv. polárne chladenie (Aurnou a kol., 2008)). Výsledky naznačujú, že zásadný vplyv na vzor tepelného toku má voľba mechanickej okrajovej podmienky, pričom polárne chladenie je očakávané

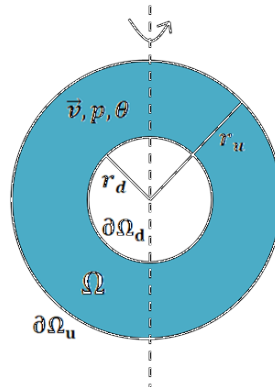
v prípade hranice bez trenia (tzv. free-slip (Christensen a Wicht, 2007), (Aurnou a kol., 2008), (Yadav a kol., 2016), (Soderlund, 2019)). Túto tému sme sa rozhodli preskúmať v tejto práci. Rozšírime štúdie (Gastine a kol., 2016), (Amit a kol., 2020), (Soderlund, 2019) o kvantitatívne porovnanie výsledkov pre variácie tepelného toku na hornej hranici oceána pri predpísaní rôznych okrajových podmienok, free-slip vs no-slip, a pomocou extrapolácie porovnáme hodnoty, vyplývajúce z modelovania oceána, s hodnotami danými modelovaním ľadovej kôry publikovanými v práci (Kvorka a kol., 2018).

Práca je členená do 3 kapitol nasledovne - v prvej kapitole je čitateľ oboznámený s riadiacimi rovnicami, prijatými zjednodušeniami, bezrozmernou podobou riešeného problému a jeho numerickým spracovaním. V druhej kapitole sú popísané benchmarkové testy pripraveného počítačového programu pomocou dát publikovaných v odbornej literatúre. Tretia kapitola podáva dosiahnuté výsledky a ich analýzu.

1. Teória

V tejto kapitole bude čitateľ oboznámený s fyzikálnymi princípmi určujúcimi charakter prúdenia v oceáne, a ich matematickým popisom pomocou rovníc mechaniky kontinua. Rovnice budú ďalej prevedené do bezrozmerného tvaru, zodpovedajúcemu nestlačiteľnej Bussinesqovej aproximácii, a analyzované pomocou spektrálnych metód. V celej práci je dodržaná nasledovná konvencia - skalárne veličiny sú označené kurzívou ψ , vektorové veličiny sú označené šípkou $\vec{\psi}$ (s označením radiálnej časti ψ_r), tenzorové veličiny sú označené hrubým písmom $\boldsymbol{\psi}$ (transpozícia tenzora $\boldsymbol{\psi}^T$ a jeho deviatorická časť $\boldsymbol{\psi}^D$). Skalárny súčin je označený symbolom \cdot , úženie tenzorových veličín : $(\boldsymbol{\psi}_1 : \boldsymbol{\psi}_2 = (\psi_1)_{ij}(\psi_2)_{ij}$, s využitím sumačnej konvencie). Čas je označený t a časová derivácia ∂_t , jednotkový radiálny vektor \vec{e}_r , jednotkový vektor v smere osi z \vec{e}_z , gradient ∇ , divergencia $\nabla \cdot$.

Výpočtovou oblasťou Ω je oceán ohraničený dvoma sústrednými sférami $\partial\Omega_d$, resp. $\partial\Omega_u$. Schematický náčrt je uvedený na obrázku 1.1. Hranice sú definované



Obr. 1.1: Schematický náčrt oceána

polomerami r_d (spodná hranica), resp. r_u (horná hranica). Veličiny popisujúce aktuálny stav oceána sú rýchlosť \vec{v} , teplota θ a tlak p . Ako pomocné veličiny k nim doplníme Cauchyho tenzor \mathbf{T} a preškálovaný gradient teploty \vec{q} (definičné vzťahy budú uvedené v nasledovnej podkapitole). Vonkajšie (hnacie) veličiny sú gravitačné zrýchlenie \vec{g} (vystupujúce vo vzťahu pre vztlakovú silu, všeobecne závislé na polohe v oceáne $\vec{g}(\vec{r})$) a uhlová rýchlosť rotácie telesa $\vec{\omega}$ (vystupujúca vo vzťahu pre Coriolisovu a odstredivú silu). Fyzikálne vlastnosti oceána popisuje jeho hustota ρ , dynamická viskozita η , tepelná kapacita c_p , teplotná vodivosť k

a teplotná rozťažnosť α . Posledné štyri zmienené parametre považujeme v celej práci za konštantné v celom objeme Ω .

1.1 Riadiace rovnice

V tejto podkapitole je odvodený fyzikálny tvar riadiacich rovníc, ktorý je následne prepísaný do bezrozmerného tvaru. V druhej časti sú popísané okrajové podmienky predpísané na hraniciach oceána.

1.1.1 Objemové rovnice

Pre matematický popis časového vývoja systému je nutné vyjsť z rovníc vyplývajúcich zo zákonov zachovania hmoty, hybnosti a energie, popisujúcich kontinuum (Müller, 1985), a dosadiť špecifické hnacie sily, t.j. v tomto prípade gravitačnú, Coriolisovu a odstredivú silu. Výsledná sústava rovníc má tvar (Matyska, 2005)

$$\partial_t \rho + \vec{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{v}, \quad (1.1)$$

$$\rho(\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\omega} \times \vec{v} - \rho \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T, \quad (1.3)$$

$$\rho c_p(\partial_t \theta + \vec{v} \cdot \nabla \theta) = \nabla \cdot (k \nabla \theta) - \rho v_r \alpha \theta g + \mathbf{T}^D : \nabla \vec{v}. \quad (1.4)$$

Rovnice sú v poradí - zákon zachovania hmoty (1.1), zákon zachovania hybnosti (1.2), zákon zachovania momentu hybnosti (1.3) a zákon zachovania energie (1.4, s dosadením Fourierovho zákona pre tepelný tok). Zákony zachovania sú doplnené materiálovými vzťahmi v tvare

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \eta(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T), \quad (1.5)$$

$$\vec{q} = -\frac{r_u - r_d}{\theta_d - \theta_u} \nabla \theta, \quad (1.6)$$

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(\theta - \theta_0)], \quad (1.7)$$

kde \mathbf{I} je tenzorová identita, ρ_0 je referenčná hustota pri teplote θ_0 . Rovnice sú v poradí predpis viskóznej reológie (1.5) a stavová rovnica (1.7). Rovnica (1.6) nemá fyzikálny základ a je špeciálne volená tak, aby \vec{q} bola bezrozmerná veličina

znižujúca rád rovnice vedenia tepla na 1 (výhodné z pohľadu stability výpočtu (Christensen a Wicht, 2007)).

1.1.2 Nestlačiteľná Boussinesquova aproximácia

Celá aproximatívna forma rovníc nebude v tejto časti odvodená, postup je možné nájsť napr. v (Matyska, 2005). Myšlienkou je zavedenie počiatočného referenčného stavu, ktorý je popísaný parametrami ρ_0 , θ_0 a nulovou rýchlosťou prúdenia. Rovnica (1.2) je v referenčnom stave redukovaná (po dosadení z (1.5)) na tvar

$$\nabla p_0 = \rho_0 \vec{g} - \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} . \quad (1.8)$$

Odčítaním vzťahu (1.8) od pohybovej rovnice (1.2), pričom, vzhľadom na malý kontrast teploty medzi hranicami (Soderlund a kol., 2014), budeme považovať rozdiel $\rho - \rho_0$ za efekt prvého rádu, t.j. zanedbáme selfgravitáciu $\rho_0(\vec{g} - \vec{g}_0)$, kvadratický člen vztlakovej sily $-\rho_0 \alpha(\theta - \theta_0)(\vec{g} - \vec{g}_0)$ a člen plynúci z odstredivej sily $(\rho - \rho_0)\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$, ako aj kvadratický člen na ľavej strane $-\rho_0 \alpha(\theta - \theta_0)(\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v})$. Závislosť hustoty na teplote sa tak prejaví ako vztlaková sila a aproximácia pohybovej rovnice má, pri uvedených zjednodušeníach, tvar

$$\rho_0(\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \nabla \cdot \mathbf{T} - \alpha \rho_0(\theta - \theta_0) \vec{g}_0 - 2\rho_0 \vec{\omega} \times \vec{v} , \quad (1.9)$$

$$\mathbf{T} = -(p - p_0) \mathbf{I} + \eta (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) . \quad (1.10)$$

Rovnica kontinuity (1.1) je nahradená rovnicou pre nestlačiteľné prúdenie

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 . \quad (1.11)$$

V zákone zachovania energie zanedbáme kvadratické členy vznikajúce po dosadení stavovej rovnice pre hustotu (1.7), ako aj disipatívny a adiabatický člen

$$\rho_0 c_p (\partial_t \theta + \vec{v} \cdot \nabla \theta) = \nabla \cdot (k \nabla \theta) . \quad (1.12)$$

1.1.3 Bezrozmerná formulácia Boussinesqovej aproximácie

Myšlienkou je prepísať, využitím charakteristických škál veličín, ktoré sa v rovniciach vyskytujú, odvodenú sústavu fyzikálnych rovníc do bezrozmerného tvaru.

Počet parametrov popisujúcich sústavu (ρ , α , c_p , k ...) sa v tomto prípade redukuje na 3 bezrozmerné čísla. V tejto práci preberieme konvenciu predstavenú v (Matyska, 2005) (pre iný možný prístup viď napr. (Christensen a Wicht, 2007)). Ďalej v tejto podkapitole budeme značiť bezrozmerný ekvivalent veličiny ψ ako ψ' .

Charakteristické rozmery pre vzdialenosť, resp. čas, sú zvolené ako hrúbka oceána, resp. charakteristický čas pre vedenie tepla medzi hranicami oceána, t.j.

$$\vec{r} = [r_u - r_d] \vec{r}' , \quad t = \left[\frac{\rho_0 c_p (r_u - r_d)^2}{k} \right] t' , \quad (1.13)$$

dosadením do definícií operátorov ∇ a ∂_t dostávame

$$\nabla = \left[\frac{1}{r_u - r_d} \right] \nabla' , \quad \partial_t = \left[\frac{k}{\rho_0 c_p (r_u - r_d)^2} \right] \partial_t' . \quad (1.14)$$

Pre veličiny vystupujúce v rovniciach Boussinesquovej aproximácie dostávame

$$\vec{v} = \frac{k}{\rho_0 c_p (r_u - r_d)} \vec{v}' , \quad \mathbf{T} = \frac{\eta k}{\rho_0 c_p (r_u - r_d)^2} \mathbf{T}' , \quad \theta = \theta_u + (\theta_d - \theta_u) \theta' , \quad (1.15)$$

kde θ_u , resp. θ_d , je teplota na spodnej, resp. hornej, hranici. Dosadením do rovníc (1.6), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) a úpravami dostávame bezrozmerný tvar Boussinesquovej aproximácie (pre detaily viď (Matyska, 2005))

$$\nabla' \cdot \vec{v}' = 0 , \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{Pr} (\partial_t' \vec{v}' + \vec{v}' \cdot \nabla' \vec{v}') = \nabla' \cdot \mathbf{T}' + Ra (\theta' - \theta'_0) \frac{\vec{r}'}{r'_0} - \frac{2}{Ek} \vec{e}_z \times \vec{v}' , \quad (1.17)$$

$$\mathbf{T}' = -p' \mathbf{I} + \left(\nabla' \vec{v}' + (\nabla' \vec{v}')^T \right) \quad (1.18)$$

$$\partial_t' \theta' - \vec{v}' \cdot \vec{q}' = -\nabla' \cdot \vec{q}' , \quad (1.19)$$

$$\vec{q}' = -\nabla' \theta' , \quad (1.20)$$

kde bol zavedený bezrozmerný tlak vztahom $p - p_0 = \frac{\eta k}{\rho_0 c_p (r_u - r_d)^2} p'$ a vzhľadom na podobnú hustotu oceánu, ľadu a jadra predpokladáme lineárny gravitačný profil (Wicht, 2002). Význam čísel Pr , Ra , Ek je uvedený v nasledovnej podkapitole.

1.1.4 Bezrozmerné riadiace parametre

Definujme dve nové odvodené veličiny, a to kinematickú viskozitu $\nu = \eta/\rho_0$ a tepelnú difusivitu $\kappa = k/(\rho_0 c_p)$. Pre bezrozmerné čísla z predošlej podkapitoly

platí ((Matyska, 2005), (Soderlund a kol., 2014))

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, Ra = \frac{\alpha g(\theta_b - \theta_u)(r_u - r_d)^3}{\nu \kappa}, Ek = \frac{\nu}{\omega(r_u - r_d)^2}, \eta = \frac{r_d}{r_u}. \quad (1.21)$$

V poradí ide o Prandtlovo číslo (udáva pomer medzi viskóznymi a teplotnými difuzivitami, ≈ 12), Rayleighovo číslo (udáva pomer medzi vztlakovou silou a difúzií efektmi, $\approx 10^{20} - 10^{23}$) a Ekmanovo číslo (udáva pomer medzi viskóznou a Coriolisovou silou, $\approx 10^{-12} - 10^{-13}$). Pridali sme navyše pomer polomerov oceána η (v ďalšom už nepotrebuje označenie pre viskozitu, a tak recyklujeme označenie η pre pomer polomerov), ktorý je nutné predpísať kvôli jednoznačnosti veľkosti výpočtovej oblasti a jej hranice.

1.1.5 Okrajové podmienky

Okrajové podmienky pre mechanické veličiny

Horné rozhranie je fázové - ľad/voda, spodné rozhrania považujeme za materiálové - hornina/voda. Oba typy rozhraní sú popísané zákonmi zachovania v rozšírenej podobe (viď (Slattery a kol., 2007)). Podľa charakteru systému je možné v praxi naraziť na dve možnosti - buď no-slip (nulová rýchlosť na hraniciach), alebo free-slip (nulové trenie na hraniciach) obohatený o podmienku nulovej radiálnej zložky rýchlosti (Christensen a Wicht, 2007). Najvhodnejšou formuláciou je podmienka free-slip (nedochádza k umelému zvýšeniu rotačných efektov (Christensen a Wicht, 2007), (Soderlund a kol., 2014)) v tvare

$$\mathbf{T}' \cdot \vec{e}_r = (\vec{e}_r \cdot \mathbf{T}' \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r, \quad (1.22)$$

$$\vec{v}' \cdot \vec{e}_r = 0. \quad (1.23)$$

Jedným z cieľov práce je však porovnanie výsledkov pri predpísaní oboch uvedených podmienok, preto pre úplnosť uvedme aj matematickú formuláciu podmienky no-slip

$$\vec{v}' = \vec{0}. \quad (1.24)$$

Okrajové podmienky pre teplotné veličiny

Okrajové podmienky pre teplotu budeme predpisovať Dirichletovsky, t.j. hodnotou (Christensen a Wicht, 2007), (Soderlund a kol., 2014) - pre túto možnosť je

prepočítaná celá škála benchmarkov a odborných prác zaoberajúcich sa konvekciou v planetárnych plášťoch a oceánoch (Hernlund a Tackley, 2008), (Choblet a kol., 2007), a preto je zvolená aj v tejto práci. Okrajové podmienky pre bezrozmernú teplotu sú v tvare

$$\theta'(r'_u) = 0, \theta'(r'_d) = 1. \quad (1.25)$$

1.1.6 Zhrnutie

Ďalej v práci vynecháme apostrofové značenie bezrozmerných veličín a rovnice budeme písať v bezrozmernom tvare popísanom číslami Ra , Pr , Ek

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{Pr}(\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + Ra(\theta - \theta_0)\vec{e}_r - \frac{2}{Ek}\vec{e}_z \times \vec{v}, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \quad (1.28)$$

$$\partial_t \theta - \vec{v} \cdot \vec{q} = -\nabla \cdot \vec{q}, \quad (1.29)$$

$$\vec{q} = -\nabla \theta, \quad (1.30)$$

s okrajovými podmienkami buď v tvare (free-slip)

$$\mathbf{T} \cdot \vec{e}_r = (\vec{e}_r \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r, \quad (1.31)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_r = 0, \quad (1.32)$$

$$\theta = \theta_h, \quad (1.33)$$

alebo v tvare (no-slip)

$$\vec{v} = 0, \quad (1.34)$$

$$\theta = \theta_h, \quad (1.35)$$

kde θ_h je hodnota odpovedajúca polohe hranice (θ_h má hodnotu 1 na spodnej a 0 na hornej hranici).

1.1.7 Zachovanie energie

Riadiace rovnice (1.26)-(1.30) sú odvodené pomocou fundamentálne platných zákonov zachovania energie a hybnosti, teda pri numerickej implementácii je kontrola uvedených zákonov vhodným testom správnosti počítačového programu.

V tejto podkapitole uvedieme procedúru pre odvodenie rovnosti medzi zmenou kinetickej energie a výkonom hnacích síl v sústave.

Zachovanie energie v mechanickej sústave

Násobme rovnicu (1.27) skalárne rýchlosťou a integrujme cez Ω . Coriolisova sila je kolmá na rýchlosť a jej skalárny súčin s ňou je teda nulový. Výkon vztlakovej sily ponecháme na pravej strane, upravujeme výraz obsahujúci napätie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} dV &= \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \mathbf{T}) - \mathbf{T} : (\nabla \vec{v})^T] dV = \\ &= \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{e}_r dS - \int_{\Omega} \mathbf{T} : (\nabla \vec{v})^T dV = \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\mathbf{T}^D : \mathbf{T}^D}{2} dV , \end{aligned}$$

kde sme počas úprav využili, v poradí, retiazkové pravidlo pre derivácie, Gaussovú vetu, okrajové podmienky pre rýchlosť/napätie, reologický predpis pre napätie a nestlačiteľnosť prúdenia. Analogickým postupom je možné dokázať, že člen $\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v})$ má nulový objemový integrál, t.j. rovnosť pre kinetickú energiu v bezrozmernom zápise má tvar

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{Pr} \partial_t \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) + \frac{\mathbf{T}^D : \mathbf{T}^D}{2} \right] dV = -Ra \int_{\Omega} (\theta - \theta_0) \vec{e}_r \cdot \vec{v} dV . \quad (1.36)$$

Zachovanie energie v teplotnej sústave

Zachovanie energie v teplotnej sústave odvodíme integráciou rovnice (1.29) cez Ω (za predpokladu, že vnútorná energia je priamoúmerná teplote (Müller, 1985)). Dosadením predpisu pre tepelný tok dostávame vďaka nestlačiteľnosti prúdenia a predpísanej okrajovej podmienke (1.32), analogicky výpočtu pre mechanickeú sústavu, nulovosť objemového integrálu člena $\vec{v} \cdot \nabla \theta$. Výsledná rovnosť, popisujúca zachovanie vnútornej energie, je tak redukovaná na tvar

$$\int_{\Omega} \partial_t \theta dV = - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{e}_r dS . \quad (1.37)$$

1.2 Numerická časová integrácia

V tejto podkapitole je popísaná použitá metóda časovej integrácie. Metóda pre integráciu nelineárnych členov je založená na Adams-Baschforthovej explicitnej

metóde 2. rádu, ktorá je v prípade zmeny časového kroku reštartovaná Runge-Kuttovou metódou 2. rádu. Lineárne členy sú integrované pomocou implicitnej α -schémy. Metódy budú predstavené na modelovom probléme tvaru

$$\partial_t u + I(u) = E(u) , \quad (1.38)$$

kde $u = u(t)$ je hľadaná funkcia, $I(u)$ sú členy diskretizované implicitne, $E(u)$ sú členy diskretizované explicitne. Tvar týchto členov pre prípad rovníc riešených v tejto práci bude uvedený v nasledovných podkapitolách.

1.2.1 Adams-Baschforthova metóda 2. rádu

Metóda je založená na Lagrangeovskej extrapolácii člena $E(u)$, na intervale $[t_n, t_{n+1}]$, pomocou dvoch predchádzajúcich časových krokov $E(u^n)$ a $E(u^{n-1})$ (horný index označuje poradie kroku v časovej diskretizácii)

$$E(u) \approx \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} E(u^n) - \frac{t - t_n}{t_n - t_{n-1}} E(u^{n-1}) . \quad (1.39)$$

Po dosadení do integrovanej rovnice (1.38) dostávame predpis (Glatzmaier, 1984)

$$\frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} E(u) dt \approx \frac{\Delta t_n + 2\Delta t_{n-1}}{2\Delta t_n} E(u_n) - \frac{\Delta t_{n-1}}{2\Delta t_n} E(u_{n-1}) , \quad (1.40)$$

kde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ je časový krok v i -tom kroku výpočtu. Metóda má zmysel len pre $i \geq 2$, preto je nutné ju naštartovať jedнокrokovou metódou. Numerické experimenty ukázali nestabilitu schémy (1.40) pri zmene časového kroku, vedúcu k nutnosti používať ju s konštantným časovým krokom a reštartovať pomocou jedнокrokovovej schémy (koeficienty sa v takom prípade redukujú na $3/2$ a $-1/2$). V implicitnom člene je metóda doplnená α -schémou tvaru (Christensen a Wicht, 2007)

$$\frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} I(u) dt \approx \alpha I(u_{n+1}) + (1 - \alpha) I(u_n) . \quad (1.41)$$

Po časovej integrácii (1.38) a dosadení numerickej diskretizácie integrálov dostávame

$$\frac{u_{n+1}}{\Delta t_n} + \alpha I(u_{n+1}) = \frac{u_n}{\Delta t_n} - (1 - \alpha) I(u_n) + \frac{3}{2} E(u_n) - \frac{1}{2} E(u_{n-1}) . \quad (1.42)$$

1.2.2 Runge-Kuttova metóda 2. rádu

Metóda je dvojstupňová typu prediktor-korektor (Benešová, 2015) - explicitná Eulerova metóda (prediktor) predpočíta aproximáciu riešenia v čase $(t_n + t_{n+1})/2$, metóda mid-point pomocou tejto aproximácie určí hľadané u^{n+1} . Celý postup časovej integrácie je analogický Adams-Baschforthovej metóde, preto uvedieme len výslednú schému v tvare

$$\frac{\tilde{u}}{\Delta t_n/2} + \alpha I(\tilde{u}) = \frac{u_n}{\Delta t_n/2} - (1 - \alpha)I(u_n) + E(u_n), \quad (1.43)$$

$$\frac{u_{n+1}}{\Delta t_n} + \alpha I(u_{n+1}) = \frac{u_n}{\Delta t_n} - (1 - \alpha)I(u_n) + E(\tilde{u}), \quad (1.44)$$

kde \tilde{u} je predikovaná hodnota v strede časového intervalu $[t_n, t_{n+1}]$.

1.3 Harmonický rozklad veličín a jeho dôsledky

V tejto podkapitole je popísaná metóda rozkladu do sférických harmonických funkcií, pomocou ktorej prepíšeme sústavu parciálnych diferenciálnych rovníc na sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc. V celej podkapitole budeme pracovať v sférických súradniciach, ktoré budeme označovať (r, θ, ϕ) .

1.3.1 Harmonický rozklad spojitých funkcií

Sférické harmonické funkcie $Y_{jm}, \vec{Y}_{jm}^l, \mathbf{Y}_{jm}^{lk}$, používané v geofyzikálnych výpočtoch, tvoria ortonormálny systém v Hilbertovom priestore $L^2(B_1)$, kde B_1 je jednotková sféra, a ich podrobné zavedenie je možné nájsť v (Varshalovich a kol., 1988). Pre ľubovoľnú spojitú funkciu $f(r, \theta, \phi)$ platí (vo vektorovom aj tenzorovom formáte, pre detaily viď (Matas, 1995))

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \phi), \quad (1.45)$$

$$\vec{f}(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} f_{jm}^l(r) \vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi), \quad (1.46)$$

$$\mathbf{f}(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=0}^2 \sum_{l=|j-k|}^{j+k} f_{jm}^{lk}(r) \mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\theta, \phi), \quad (1.47)$$

kde j je harmonický stupeň, m harmonický rád, l a k nazývame postupne vektorový a tenzorový index. V praktickom výpočte nie je možné realizovať výpočet

s radom s nekonečným množstvom členov, preto je počet uvažovaných harmonických stupňov obmedzený číslom j_{max} , ktoré sa v práci mení podľa dynamiky systému. Orezanie spektra sa v numerickom výpočte prejavuje nefyzikálne vysokými koeficientami rozkladu na vyšších harmonických stupňoch a v literatúre sa nazýva alias (Glatzmaier, 1984). Riešením je pridanie umelej difúzie (angl. *hyperdiffusion*), realizované umelým navýšením vplyvu difúzičných členov $\nabla \cdot \mathbf{T}$, $\nabla \cdot \vec{q}$ v rovniciach pre koeficienty vysokého spektra (vznikajúci alias je tak rýchlo tlmený difúziou, pre detaily viď (Glatzmaier a Roberts, 1995)), napr. pridaním mocninného prefaktoru v tvare (pre $j \geq j_0$)

$$1 + a(j - j_0)^b . \quad (1.48)$$

Neexistuje však fyzikálny postup pre voľbu veľkosti umelej difúzie, t.j. pre voľbu čísel a , b , j_0 , a jej zavedenie vedie k nefyzikálnym efektom v simuláciách (Glatzmaier, 2002), (Christensen a Wicht, 2007). V tejto práci, aj za cenu nelineárneho nárastu výpočtového času, použijeme namiesto umelej difúzie väčší počet harmonických stupňov (rovnaký prístup je možné nájsť v (Soderlund a kol., 2014)).

1.3.2 Harmonický rozklad objemových rovníc

Dosadením rozkladu (1.45)-(1.47) do rovníc (1.26)-(1.30) a využitím vzťahov pre operátory ∇ , $\nabla \cdot$, pôsobiace na spektrálny rozklad (Matas, 1995), je možné sústavu rozložiť na systavy určujúce vývoj na každom harmonickom stupni zvlášť. Pre jednoduchosť uvádzame len rozklady pre gradient pôsobiaci na skalárnu funkciu a divergenciu pôsobiacu na vektorovú funkciu, aplikáciu všetkých operátorov na riešené rovnice je možné nájsť v apendixe A,

$$\begin{aligned} \nabla f(r) Y_{jm} &= \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j-1} - \\ &\quad - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) f(r) \vec{Y}_{jm}^{j+1} , \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(r) \vec{Y}_{jm}^l &= \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) f(r) Y_{jm} \delta_{l,j-1} - \\ &\quad - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) f(r) Y_{jm} \delta_{l,j+1} . \end{aligned} \quad (1.50)$$

Zložité sústave parciálnych diferenciálnych rovníc tak rozdelíme na 2 typy sústav obyčajných diferenciálnych rovníc - pre tzv. sferoidálne mechanické koeficienty $v_{jm}^{j-1}, v_{jm}^{j+1}, T_{jm}^{j,0}, T_{jm}^{j-2,2}, T_{jm}^{j,2}, T_{jm}^{j+2,2}$ a tzv. toroidálne mechanické koeficienty $v_{jm}^j, T_{jm}^{j-1,2}, T_{jm}^{j+1,2}$ zvlášť (Matas, 1995), (Benešová, 2015), pričom napätové koeficienty $T_{jm}^{l,1}$ sú nulové z dôvodu symetrie Cauchyho tenzoru napätia (1.3). Z tohto pohľadu ďalej rozdelíme členy v rovniciach na lineárne (pri ich harmonickom rozklade nedochádza k miešaniu sferoidálnych a toroidálnych koeficientov, v čase sú diskretizované implicitne - člen $I(\cdot)$ v (1.38)) a nelineárne (pri ich harmonickom rozklade dochádza k miešaniu sferoidálnych a toroidálnych koeficientov, v čase sú diskretizované explicitne - člen $E(\cdot)$ v (1.38)).

Harmonický rozklad lineárnych členov

Lineárne členy mechanickej sústavy označme $I_{mech}(\vec{v}, \mathbf{T})$, lineárne členy teplotnej sústavy označme $I_{temp}(\theta, \vec{q})$ (konvencia ako v (1.38)). Je možné písať

$$I_{mech}(\vec{v}, \mathbf{T}) = -\nabla \cdot \mathbf{T} , \quad (1.51)$$

$$I_{temp}(\theta, \vec{q}) = \nabla \cdot \vec{q} . \quad (1.52)$$

Harmonický rozklad uvedených členov, ako aj reologických predpisov, je ponechaný na appendix A. Spočíva v dosadení vzťahov (1.49), (1.50) do riešenej sústavy rovníc a v jednoduchých algebraických úpravách.

Harmonický rozklad nelineárnych členov

Analogicky konvencii pre lineárne členy označme nelineárne členy mechanickej, resp. teplotnej sústavy, $E_{mech}(\vec{v}, \mathbf{T})$, resp. $E_{temp}(\theta, \vec{q})$, a píšme

$$\begin{aligned} E_{mech}(\vec{v}, \mathbf{T}) &= Ra(\theta - \theta_0)\vec{e}_r - \frac{1}{Pr}\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \frac{2}{Ek}\vec{e}_z \times \vec{v} , \\ E_{temp}(\theta, \vec{q}) &= \vec{v} \cdot \vec{q} . \end{aligned} \quad (1.53)$$

Vztlak je zaradený medzi nelineárne členy z dôvodu oddelenia mechanických a teplotných veličín, t.j. numericky je diskretizovaný Adams-Baschforthovou schémou. Coriolisova sila mieša toroidálne a sferoidálne členy rýchlosti, preto ju nie je možné diskretizovať implicitne (Ivers a Phillips, 2008). Harmonický rozklad oboch členov je uvedený v appendixe A. Zostávajúce členy obsahujú súčin dvoch harmonických

radov s plným spektrom a ich výpočet v spektre je, v porovnaní s výpočtom na fyzickej sieti realizovanej konečnými diferenciami pomocou integrálnych transformácií, neefektívny (Christensen a Wicht, 2007). Celý postup je nad rámec tejto kapitoly a je možné ho nájsť v (Benešová, 2015). Počítačový program priložený k práci implementuje transformácie pomocou podprogramov vyvinutých prof. Martincom (Katedra geofyziky, Univerzita Karlova v Prahe), ktoré sú popísané v práci (Martinec, 1989). Pre jednoduchosť uvedme na tomto mieste myšlienku transformácie súčinnu dvoch skalárnych radov (myšlienka rozkladu vektorových a tenzorových súčinnov je prepísať vektorové rady na 3 skalárne, a teda jeden vektorový súčin nahradiť 3 skalárnymi, analogicky jeden tenzorový súčin nahradiť 3 vektorovými, atď.)

$$a(\theta, \phi) = \sum_{j,m} a_{jm} Y_{jm}(\theta, \phi), \quad b(\theta, \phi) = \sum_{j,m} b_{jm} Y_{jm}(\theta, \phi). \quad (1.54)$$

Vzťahy (1.54), spolu s definíciou sfér. harm. funkcií pomocou Legendreových polynómov $Y_{jm}(\theta, \phi) = P_{jm}(\cos \theta) e^{im\phi}$ (Varshalovich a kol., 1988), dávajú predpis pre transformáciu spektra na fyzickú sieť. V uzloch siete je výpočet súčinnu triviálny

$$c(\theta_j, \phi_k) = a(\theta_j, \phi_k) b(\theta_j, \phi_k), \quad (1.55)$$

kde (θ_j, ϕ_k) sú uzlové body siete. Transformácia hodnôt $c(\theta_j, \phi_k)$ zo siete do spektra využíva ortonormalitu sférických harmoník, t.j. z (1.45) dostávame integráciu

$$c_{jm} = \int_{B_1} c(\theta, \phi) Y_{jm}^*(\theta, \phi) d\Omega(\theta, \phi) = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi c(\theta, \phi) Y_{jm}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta, \quad (1.56)$$

kde $d\Omega(\theta, \phi)$ je diferenciál priestorového uhla a $*$ označuje komplexné združenie. Dosadením definície sférických harmonických funkcií a substitúciou $x = \cos \theta$ prevedieme vzťah (1.56) na dve integrálne transformácie v tvare

$$c_m(x) = \int_{-\pi}^\pi C(x, \phi) e^{-im\phi} d\phi, \quad (1.57)$$

$$c_{jm} = \int_{-1}^1 c_m(x) P_{jm}(x) dx, \quad (1.58)$$

kde $C(x, \phi) = c(\theta, \phi)$. Ide o Fourierovu transformáciu (numericky implementovanú pomocou rýchlej Fourierovej transformácie) a Legendreovu transformáciu (numericky implementovanú pomocou Gaussovej kvadratúry).

1.3.3 Harmonický rozklad okrajových podmienok

Okrajové podmienky pre stupne $j \geq 2$ je uvedený v apendixe A. Je odvodený jednoduchou aplikáciou vzťahov pre súčin spektra s radiálnym vektorom. Ďalej vynecháme diskusiu harmonického rozkladu podmienky no-slip (1.34), pretože po dosadení spektrálneho rozkladu do rovnice (1.34) pokračuje riešenie, po diskusii pre stupeň $j = 0$ (analogicky podmienke free-slip, viď nižšie), ďalej bez komplikácií. V prípade podmienky free-slip však harmonický stupeň $j = 1$ vyžaduje špeciálny prístup využívajúci zákony zachovania (Glatzmaier, 1984).

Stupeň $j = 0$

Z harmonických rozkladov (1.46), (1.47) vyplýva, že na stupni $j = 0$ má napätový tenzor dva koeficienty, a to $T_{00}^{0,0}$, $T_{00}^{0,2}$, vektor rýchlosti má jeden koeficient, a to v_{00}^1 . Napätový koeficient $T_{00}^{0,0}$ nevystupuje v okrajovej podmienke (viď appendix A), teda je daný objemovými rovnicami (reprezentuje tlak). Napätový koeficient $T_{00}^{0,2}$, ako aj rýchlostný koeficient v_{00}^1 , je daný okrajovými podmienkami nulovou hodnotou na hraniciach oceána, pričom oba sú viazané reologickým predpisom (1.28). Z toho vyplýva, že riešenie pre stupeň $j = 0$ je dané nulovými koeficientami $T_{00}^{0,2}$, v_{00}^1 v celom oceáne (splňa okrajové podmienky) a tlak je daný rovnicou

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{dT_{00}^{0,0}}{dr} = -Ra(\theta - \theta_0)_{00} + \frac{2}{Ek} (\vec{e}_z \times \vec{v})_{00} + \frac{1}{Pr} (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v})_{00}. \quad (1.59)$$

Pretože však tlak na danom harmonickom stupni nevystupuje ako premenná na žiadnom inom stupni, nie je nutné rovnicu (1.59) počas výpočtu riešiť a výpočet prebieha na stupňoch $j \geq 1$.

Stupeň $j = 1$

Riešenie toroidálnej časti v_{jm}^j stupňa $j = 1$, popisujúce globálnu rotáciu oceána, nemá riešenie jednoznačne dané podmienkami (1.31) - ((1.32). Diskretizačná schéma, v ktorej sú nelineárne členy určované explicitne, povoľuje k riešeniu pridať ľubovoľný, okrajovými podmienkami neurčený, člen daný predpisom $v_{1m}^1 = Ar$, kde A je reálna konštanta. Z tohto dôvodu je nutné počas výpočtu vynucovať splnenie zákona zachovania momentu hybnosti (Glatzmaier, 1984). Vynútenie prebieha odčítaním globálnej rotácie oceána (fyzikálna interpretácia stupňa 1) danej

predpisom (v bezrozmernej podobe)

$$v_{1m}^1 = r\omega_{1m}^1 = 5 \frac{(1-\eta)^5}{1-\eta^5} r \left(\int_{\Omega} \vec{e}_r \times \tilde{r} \vec{v}(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) d\tilde{V} \right)_{1m}^1 . \quad (1.60)$$

Harmonický rozklad člena v zátvorke (vyjadrujúceho celkový moment hybnosti s nenulovými komponentami na stupni 1) nechávame pre appendix A.

1.4 Radiálna diskretizácia

V tejto podkapitole je popísaná radiálna diskretizácia, ktorá je v tejto práci realizovaná metódou konečných diferencií na posunutej sieti. Princíp vysvetlíme na modelovom probléme diskretizácie rovníc

$$v(r) = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) T(r) , \quad (1.61)$$

$$T(r) = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) v(r) , \quad (1.62)$$

ktoré sú zjednodušenou verziou vzťahov rýchlosť-napäätie a teplota-tepelný tok. Pozíciu v radiálnej diskretizácii budeme v celej podkapitole označovať spodným indexom i , t.j. $T_i \approx T(r_i)$, kde r_i je uzol radiálnej siete (viď ďalšia stat). Počet uzlov diskretizácie budeme označovať n_r , pre krok diskretizácie platí (v celej práci uvažujeme homogénnu diskretizáciu)

$$\Delta r = \frac{r_u - r_d}{n_r - 1} . \quad (1.63)$$

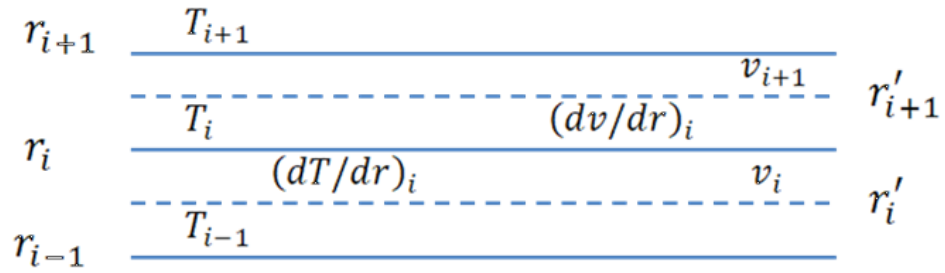
1.4.1 Posunuté siete

Metóda posunutých sietí je efektívnym nástrojom na diskretizáciu sústav rovníc, v ktorých sú veličiny viazané analogicky modelovému prípadu (1.61)-(1.62). Myšlienkou je rozdeliť sieť na hlavnú $(r_i)_{i=1}^{n_r}$ a vedľajšiu časť $(r'_i)_{i=1}^{n_r+1}$ (viď obrázok 1.2), kde jednotlivé polomery sú definované nasledovnou rekurenciou

$$r_i = r_{i-1} + \Delta r , \quad i \in (2, \dots, n_r) , \quad (1.64)$$

$$r'_i = r'_{i-1} + \Delta r , \quad i \in (2, \dots, n_r + 1) . \quad (1.65)$$

Štartovacia podmienka rekurencie je $r_1 = r_d$, $r'_1 = r_d - \Delta r/2$. Z predpisu (1.64) je zrejmé, že hranice výpočtovej oblasti sú dané polomerami $r_1 = r_d$ a $r_{n_r} = r_u$, t.j.



Obr. 1.2: Schematický náčrt radiálnej diskretizácie

veľičiny, ktoré sú popísané okrajovou podmienkou Dirichletovskú (hodnotou), je prirodzené diskretizovať na hlavnej sieti (koeficienty napätového tenzora, tepelný tok). Na druhej strane je z predpisu (1.65) zrejmé, že pod spodnou hranicou a nad hornou hranicou sú pridané dva pomocné uzly r'_1 a r'_{n_r+1} , t.j. na vedľajšej sieti je možné popísať gradient veličiny na hranici výpočtovej oblasti (rýchlosť, teplota), a teda veličiny popísané Neumannovou okrajovou podmienkou je vhodné diskretizovať na vedľajšej sieti.

1.4.2 Konečné diferencie

Uvedieme základné vzťahy pre diskretizáciu veličín T (ekvivalent napätia a tepelného toku) a v (ekvivalent rýchlosti a teploty) v rovniciach (1.61)-(1.62). Podotýkame, že T je diskretizované na hlavnej sieti ($T(r_i) = T_i$), v na vedľajšej ($v(r'_i) = v_i$).

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r'_i} \approx \frac{T_i - T_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}, \quad T(r'_i) \approx \frac{T_i + T_{i-1}}{2}, \quad (1.66)$$

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=r_i} \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{r'_{i+1} - r'_i}, \quad v(r_i) \approx \frac{v_{i+1} + v_i}{2}. \quad (1.67)$$

Dosadením predpisov (1.66)-(1.67) do harmonického rozkladu riadiacich rovníc je sústava obyčajných diferenciálnych rovníc redukovaná na sústavu algebraických rovníc pre uzlové hodnoty veličín na sieti, ktorá je riešená v každom časovom kroku zvlášť.

1.5 Rozlíšenie siete a voľba časového kroku

Popísaná numerická diskretizácia zachytáva presne laterálne derivácie, ktoré sú počítané priamo v spektre pomocou predpisov pre pôsobenie ∇ -operátorov na

sférické harmonické funkcie (Christensen a Wicht, 2007). Problematickou časťou ostáva derivácia v radiálnom smere, ktorá je v tejto práci aproximovaná metódou konečných diferencií (možnosťou je využitie Chebyshevových polynómov, ktoré ale vyžadujú ďalšie, procesorovo náročné, transformácie (Christensen a Wicht, 2007)). Vzhľadom na cieľ práce - modelovanie konvekcie v sopečáne s pôsobením Coriolisovej sily - je nutné zväžiť popis tzv. Ekmanových hraničných vrstiev, ktoré vznikajú na hrúbke desatiny ($r_u - r_d$) v okolí hraníc oceána (Christensen a Wicht, 2007). Vzhľadom na numerické experimenty sa osvedčila voľba $n_d = 73$ homogénne rozmiestnených uzlov radiálnej diskretizácie ((Soderlund a kol., 2014) využíva 73 uzlov pri laterálnom rozlíšení $j_{max} = 213$). Laterálne rozlíšenie sa mení podľa obtiažnosti problému na intervale $j_{max} \in [90, 141]$.

Časový krok je určovaný pomocou Courantovho kritéria, ktoré zahŕňa omezenie dané rovnicou pre vedenie tepla, omezenie dané radiálnou diskretizáciou a omezenie dané laterálnou diskretizáciou. Časový krok je potom adaptovaný pomocou predpisu (Glatzmaier, 1984)

$$\Delta t_n = \min_{i \in (1, n_r)} \left(\frac{\Delta r^2}{2}, \frac{\Delta r}{|\vec{e}_r \cdot \vec{v}_i^{n-1}|}, \frac{1}{\sqrt{j_{max}(j_{max} + 1)}} \frac{r_i}{|\vec{v}_i^{n-1} - (\vec{e}_r \cdot \vec{v}_i^{n-1}) \vec{e}_r|} \right). \quad (1.68)$$

2. Testy počítačového programu

Vyvinutý program je nutné otestovať pomocou numerických benchmarkov. V tejto kapitole budú uvedené výsledky testov programu, dosiahnuté pomocou dát publikovaných v odbornej literatúre. Pre jednoduchosť opráv programu sú testy rozdelené do dvoch skupín, a to testy pre nekonečné a konečné Pr . Bežným kritériom pre testovanie je tzv. Nusseltovo číslo, udávajúce pomer konvektívneho prenosu tepla voči konduktívnemu, definované predpisom

$$Nu = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{r_u}{r_d} \frac{\partial \theta_{00}}{\partial r} \Big|_{r=r_u}, \quad (2.1)$$

kde θ_{00} je koeficient stupňa $j = 0$ v harmonickom rozklade teploty.

Nekonečné Prandtlovo a Ekmanovo číslo

Ako benchmarkové štúdie sú zvolené práce porovnávajúce metastabilné riešenia existujúce pre relatívne malé (blízke kritickému) hodnoty Ra . Metastabilné riešenia sú 2, v literatúre bežne označované ako kubická (C)/tetrahedrálna (T) symetria. Benchmarkované práce sú (Bercovici a kol., 1989), (Yoshida a Kageyama, 2004), (Zhong a kol., 2008), počiatočná podmienka pre dosiahnutie metastabilného stavu je v tvare

$$\theta_T(r, \theta, \phi) = \theta_{cond}(r) + 0.1 \sin(\pi(r - r_b)) Y_{32}(\theta, \phi), \quad (2.2)$$

$$\theta_C(r, \theta, \phi) = \theta_{cond}(r) + 0.1 \sin(\pi(r - r_b)) \left(Y_{40}(\theta, \phi) + \frac{5}{7} Y_{44}(\theta, \phi) \right), \quad (2.3)$$

kde $\theta_{cond}(r)$ je konduktívny profil daný riešením rovnice $\nabla^2 \theta = 0$ pri okrajových podmienkach (1.33).

Pre vyššie Ra už neexistujú metastabilné hladiny, t.j. testovacie behy sú spustené z náhodne volenej perturbácie a výpočet pokračuje až do ustálenia Nusseltovej krivky. Ako test je zvolený výpočet proti výsledkom kódu STAGYY (metóda konečných objemov), ktorý je popísaný v práci (Hernlund a Tackley, 2008), vid tabuľka č. 2.2.

Konečné Prandtlovo a Ekmanovo číslo

Ako benchmarkové štúdie pre tento prípad sú zvolené práce (Gastine a kol., 2015), (Gastine a kol., 2016), podávajúce prehľad výsledkov pre viacero volieb

Ra , Ek , η . Výsledky sú zhrnuté v tabuľke č. 2.3.

Tabuľka 2.1: Výsledky benchmarku danému metastabilnými riešeniami (C) a (T) pri okrajovej podmienke danej teplotou a podmienkou free-slip, $Pr = \text{inf}$, $Ek = \text{inf}$, $\eta = 0.55$

Benchmark	$Ra = 2000$	$Ra = 3500$	$Ra = 7000$		$Ra = 14000$	
	T	C	T	C	T	C
Be89	2.25	2.80	3.47	-	-	-
YK04	2.20	2.88	3.44	3.55	4.24	4.42
Zh08	-	-	3.51	3.63	-	-
Kv19	2.21	2.85	3.51	3.62	4.28	4.47

Tabuľka 2.2: Výsledky benchmarku danému kódu STAGYY pri okrajovej podmienke danej teplotou a podmienkou free-slip, $Pr = \text{inf}$, $Ek = \text{inf}$, $\eta = 0.55$

Benchmark	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$	$Ra = 10^6$
HT08	3.85	7.27	15.9
Kv19	3.89	7.34	16.0

Tabuľka 2.3: Výsledky benchmarku danému prácami (Gastine a kol., 2015), (Gastine a kol., 2016), pri okrajovej podmienke danej teplotou a podmienkou no-slip, $Pr = 1$, $\eta = 0.60$. Lineárne pole zodpovedá prípadu $\vec{g}' = -\vec{r}/r$, homogénne pole prípadu $\vec{g}' = -\vec{e}_r$ a Newtonovské pole prípadu $\vec{g}' = -(1/r^2)\vec{e}_r$. Rozlíšenie je v prípade Kvorka dané ako počet radiálnych vrstiev \times max. harmonický stupeň, v prípade Gastine ako max. stupeň Chebyshevových polynómov \times max. harmonický stupeň.

	Nu (Gastine) $n_r \times j_{max}$	Nu (Kvorka) $n_r \times j_{max}$
$Ra = 10^6$, $Ek = \inf$ homogénne pole	7.98 (65 \times 128)	8.01 (80 \times 90)
$Ra = 5 \times 10^6$, $Ek = \inf$ lineárne pole	10.55 (65 \times 133)	10.54 (81 \times 128)
$Ra = 5 \times 10^6$, $Ek = 3 \times 10^{-4}$ Newton. pole	11.97 (81 \times 133)	12.11 (80 \times 90)
$Ra = 1 \times 10^5$, $Ek = 1 \times 10^{-3}$ Newton. pole	2.24 (65 \times 85)	2.25 (80 \times 90)

3. Výsledky simulácií a diskusia

3.1 Doplnok k teoretickému úvodu

3.1.1 Časové a priestorové stredovanie

Okamžité hodnoty veličín majú, vzhľadom na chaotickosť systému, tendenciu oscilovať okolo určitej, v čase konštantnej, strednej hodnoty. Aby boli výsledky jednoznačné a reprodukovateľné, udávame (analogicky odbornej literatúre, (Hernlund a Tackley, 2008), (Gastine a kol., 2015)) výsledky vo forme časovo stredovaných hodnôt. Ďalej v práci preto budú okamžité hodnoty veličiny $\psi(t)$ nahradené strednou hodnotou ψ danou predpisom

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \psi(\vec{r}, t) dt , \quad (3.1)$$

kde t_1 je daný kritériom $\partial_t \theta \approx 0$ a $t_2 - t_1 > 0.02$ (stredovanie cez úsek s dĺžkou aspoň 0.02 difúzneho času postačuje na dosiahnutie ustáleného vzoru prúdenia, (Amit a kol., 2020), (Soderlund, 2019)). Vzhľadom na silnú zonálnu symetriu povrchu ľadových mesiacov (Soderlund a kol., 2014), (Kvorka a kol., 2018) a očakávaný zonálny charakter máp tepelného toku (Aurnou a kol., 2008), (Amit a kol., 2020) má zmysel uvádzať aj priestorovo, a to zonálne, stredované hodnoty veličín dané predpisom

$$\psi^z(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\vec{r}) d\phi . \quad (3.2)$$

Pre úplnosť definujeme úplne sféricky stredovanú hodnotu veličiny v tvare

$$\bar{\psi}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi(\vec{r}) \sin \theta d\phi d\theta . \quad (3.3)$$

3.1.2 Zonálna variácia tepelného toku

Cieľom práce je popísať možné geometrické vzory tepelného toku na hornej hranici oceána v závislosti na hodnotách Ra , Ek . Simulácie ukázali existenciu 4 základných vzorov, určených mierou dominancie rotácie na usmerňovanie prúdenia (viď série obrázkov (3.4)-(3.7)) - rovníkové chladenie (v spektre najvýznamnejšia harmonická funkcia Y_{20} s ostrým maximom na rovníku), prechodový stav

(najvýznamnejšia harmonická funkcia Y_{40}), polárne chladenie (najvýznamnejšia harmonická funkcia Y_{20} s ostrým maximom na póloch) a chaotické prúdenie (tepelný tok distribuovaný rovnomerne, spektrum je chaotické). Harmonické spektrum tepelného toku teda predstavuje efektívny nástroj pre kvalitatívny popis máp tepelného toku. Pre kvantitatívne porovnanie výsledkov predstavujeme tzv. zonálnu variáciu tepelného toku definovanú predpisom (Amit a kol., 2020)

$$\delta q = \frac{q_{max}^z - q_{min}^z}{2\bar{q}} , \quad (3.4)$$

kde q^z predstavuje, v zmysle definície (3.2), vystredovanú radiálnu zložku tepelného toku ($\vec{e}_r \cdot \vec{q}$) na hornej hranici ($r = r_u$). Maximum a minimum je chápané v zmysle maxima/minima funkcie $q^z(\theta)$ pre $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

3.1.3 Miery vplyvu rotácie v systéme

Pre detailnú diskusiu viď doplňujúce informácie k (Soderlund a kol., 2014) a tam uvedenú literatúru.

O miere vplyvu rotácie v systéme je vždy nutné premýšľať ako o relatívnej veličine danej pomerom rotačných a vztlakových síl. V odbornej literatúre je tento pomer reprezentovaný rôznymi bezrozmernými ukazovateľmi. Najbežnejšie je tzv. Rossbyho číslo

$$Ro = (RaEk^2/Pr)^{1/2} . \quad (3.5)$$

Za prechod medzi systémom bez vplyvu rotácie a systémom s vplyvom rotácie sa považuje $Ro \approx 1$. Alternatívne je možné tento prechod popisovať veličinou

$$Ra/Ra_T = 0.1RaEk^{3/2} , \quad (3.6)$$

kde Ra_T je prechodové Rayleighovo číslo (pre vodu je jeho hodnota experimentálne určená ako $Ra_T \approx 10E^{-3/2}$). Analogicky Rossbyho číslu, podmienkou pre prechod k systému s vplyvom rotácie je $Ra/Ra_T \approx 1$.

V tejto práci budeme mieru vplyvu rotácie popisovať lokálnym Rossbyho číslom, ktoré je definované predpisom

$$Ro_{loc} = Ra^{5/4}Ek^2 . \quad (3.7)$$

Výber je založený na výsledkoch najnovších štúdií, kde je toto číslo hlavným ukazovateľom, a teda táto voľba umožňuje jednoduchšie porovnanie výsledkov.

Vyššia hodnota Ro_{loc} zodpovedá menšiemu vplyvu rotácie a naopak. V práci sa zameriame na popis závislosti $\delta q, Nu = f(Ro_{loc})$ a odhadneme intervaly pre hodnoty Ro_{loc} zodpovedajúce jednotlivým vzorom chladenia pre rôzne okrajové podmienky.

3.2 Výsledky

3.2.1 Nusseltovo číslo

Základným prejavom pôsobenia Coriolisovej sily je vznik prúdenia usporiadaného do valcových štruktúr rovnobežných s osou rotácie (Taylor a Lamb, 1917), ktoré sa v oblasti rovníka dotýkajú spodnej hranice, čím efektívne prenášajú teplo len smerom k rovníkovej oblasti na povrchu oceána. To má za následok zníženie efektivity prenosu tepla voči chaotickému konvektívnemu stavu, čo sa prejaví znížením Nusseltovho čísla so zvýšením vplyvu rotácie v systéme (viď tabuľka 3.1 - so znižovaním Ek pri konštantnom Ra rastie vplyv Coriolisovej sily v systéme a Nusseltovo číslo klesá, graficky predstavené červenou čiarou na grafe 3.1). Analogicky, pri udržaní konštantného Ek a zvyšovaní Ra , t.j. zvyšovaní relatívneho vplyvu vztlakovej sily voči Coriolisovej sile, sa hodnota Nu zvyšuje (viď tabuľka 3.2 - modrá čiara na grafe 3.1).

Tabuľka 3.1: Porovnanie hodnôt Nusseltovho čísla a variácie tepelného toku pre prípady mechanických podmienok free-slip a no-slip, konštantné $Ra = 2 \times 10^7$ a rôzne hodnoty Ek .

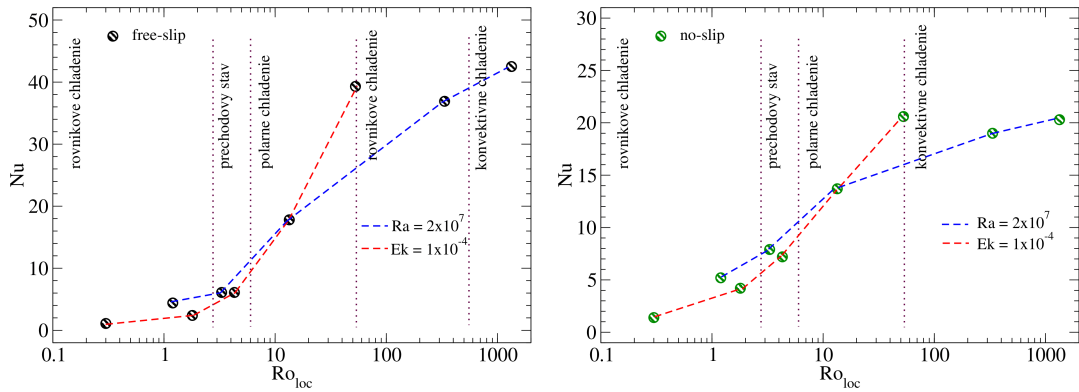
Ra & Ek	$Nu_{free-slip}/Nu_{no-slip}$	$\delta q_{free-slip}/\delta q_{no-slip}$
2×10^7 & 3×10^{-5}	4.4/5.2	1.15/0.96
2×10^7 & 5×10^{-5}	6.7/7.9	0.47/0.48
2×10^7 & 1×10^{-4}	17.8/13.7	0.70/0.33
2×10^7 & 5×10^{-4}	36.9/19.0	0.30/0.12
2×10^7 & 1×10^{-3}	42.5/20.3	0.16/0.11

Popísaný trend závislosti Nusseltovho čísla na pomere vplyvu Coriolisovej a vztlakovej sily sa kvalitatívne pri oboch uvažovaných okrajových podmienkach

Tabuľka 3.2: Porovnanie hodnôt Nusseltovho čísla a variácie tepelného toku pre prípady mechanických podmienok free-slip a no-slip, konštantné $Ek = 1 \times 10^{-4}$ a rôzne hodnoty Ra .

Ra & Ek	$Nu_{free-slip}/Nu_{no-slip}$	$\delta q_{free-slip}/\delta q_{no-slip}$
1×10^6 & 1×10^{-4}	1.1/1.4	0.38/0.66
4×10^6 & 1×10^{-4}	2.4/4.2	0.67/0.73
8×10^6 & 1×10^{-4}	6.1/7.2	0.61/0.43
2×10^7 & 1×10^{-4}	17.8/13.7	0.70/0.33
6×10^7 & 1×10^{-4}	39.3/20.6	0.23/0.16

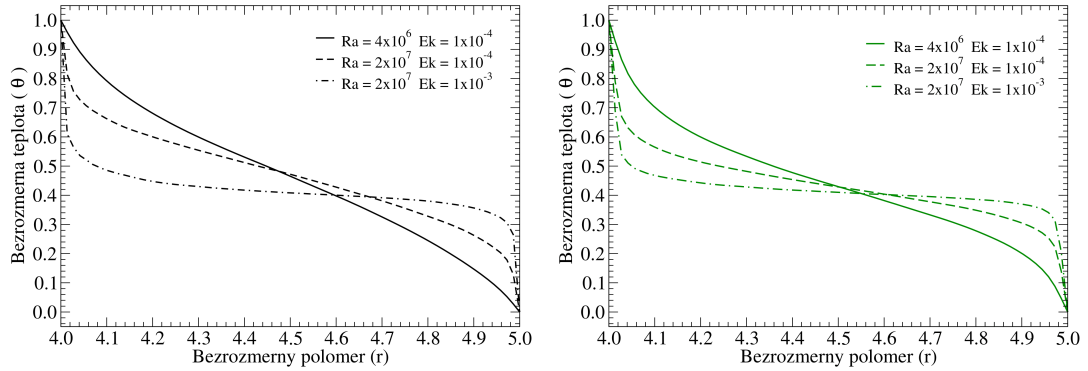
Obr. 3.1: Grafické spracovanie závislosti Nu na Ro_{loc} . Hranice naznačené medzi jednotlivými vzormi tepelného toku sú len orientačné.



nelíši. Dosažené hodnoty Nusseltovho čísla sa však pri rovnakých hodnotách Ra , Ek a rôznych okrajových podmienkach zásadne odlišujú (viď porovnanie v tabuľkách 3.1, 3.2). Dôvodom je vplyv mechanickej okrajovej podmienky na vznik a udržanie tenkých hraničných vrstiev definovaných prudkým gradientom teploty (viď obrázok 3.2). V slabo rotujúcom systéme (bodkočiarkovaná čiara) dochádza v prípade podmienky free-slip k vzniku veľmi tenkej hraničnej vrstvy. V prípade podmienky no-slip je hraničná vrstva rozbitá vynútením nulovej rýchlosti a prenos tepla medzi turbulentným vnútrom oceána a ľadovou kôrou prebieha cez hrubšiu prechodovú vrstvu, čo zníži hodnotu Nu , a dostávame nerovnosť $Nu_{no-slip} < Nu_{free-slip}$.

V prudko rotujúcom systéme je inak usporiadané prúdenie v okolí hraníc v prípade podmienky no-slip narušené nulovou rýchlosťou a dochádza k zvráteniu,

Obr. 3.2: Grafické spracovanie radiálnych priebehov bezrozmernej teploty v závislosti na bezrozmernom polomere oceána.



ktoré zvyšuje efektívnosť prenosu tepla voči podmienke s nulovým trením (free-slip). Výsledkom je otočenie nerovnosti na tvar $Nu_{no-slip} > Nu_{free-slip}$.

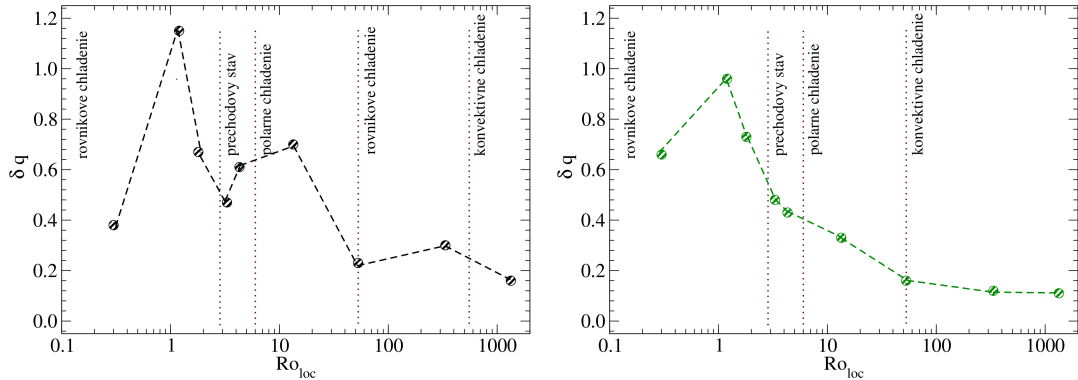
3.2.2 Variácia tepelného toku a vzory chladenia

Vzľadom na zonálny charakter topografických anomálií je vhodným kritériom pre klasifikáciu geometrických vzorov tepelného toku jeho zonálna variácia na hornej hranici (daná predpisom 3.4). Pretože celkový prenos tepla je daný hrúbkou hraničnej vrstvy, ktorá je silne ovplyvnená predpísanou mechanickou okrajovou podmienkou (viď diskusia Nusseltovho čísla), je možné podobne silnú závislosť očakávať aj pre Δq .

Závislosť na Rossbyho čísle, $\Delta q = f(Ro_{loc})$, je v prípade podmienky no-slip monotónna klesajúca až na oblasť dominantného vplyvu rotácie ($Ro_{loc} < 1$), kde krivka rastie po ostré globálne maximum (v bode $Ro_{loc} \approx 1$). Objavujú sa všetky popísané vzory tepelného toku, ilustrované tvarom krivky $q^z(\theta)$, a to rovníkové chladenie v oblasti prudko rotujúceho systému ($Ro_{loc} \in (0, 3)$), prechodový stav a polárne chladenie ($Ro_{loc} \in (3, 60)$) v oblasti prechodu medzi konvektívnym a prudko rotujúcim stavom, a chaotický stav ($Ro_{loc} > 60$) bez vplyvu rotácie.

Jednotlivé mapy tepelného toku, uvedené na obrázkoch (3.5), (3.7), sú radené od hora nadol podľa klesajúceho vplyvu Coriolisovej sily. V porovnaní s podmienkou free-slip (viď diskusia nižšie) sú obrázky chaotickejšie a objavujú sa vzory naznačujúce netriviálne hodnoty vyššieho spektra (pásová štruktúra tepelného toku v oblasti rovníka). Ide o charakteristickú črtu podmienky no-slip a vzory

Obr. 3.3: Grafické spracovanie radiálnych priebehov bezrozmernej teploty v závislosti na bezrozmernom polomere oceána.



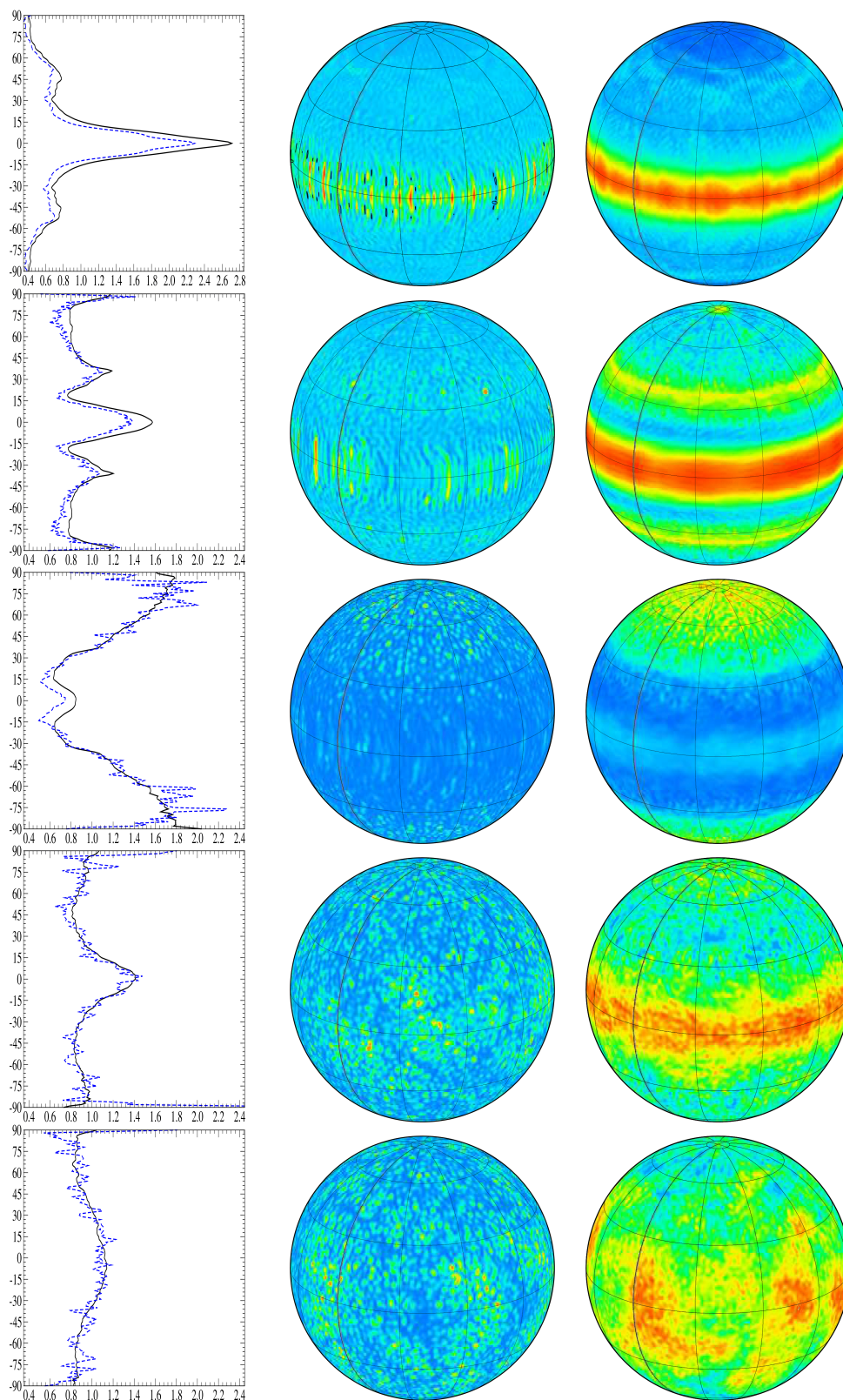
nie sú spôsobené nedostatočným rozlíšením hraničných vrstiev (analogické správanie systému popisuje štúdia (Yadav a kol., 2016) v kontexte systému s geometriou zemského plášťa). Význam Coriolisovej sily je demonštrovaný hneď dvoma efektmi - postupným prechodom od rovníkového chladenia k polárnemu v priemerovanom spektre (t.j. výrazné maximum v rovníkovej oblasti sa postupne presúva k pólom), prechodom od severo-južne orientovaných pásov k listovej štruktúre v mapách okamžitého tepelného toku (znižovanie vplyvu Coriolisovej sily vedie k rozpadu severo-južnej štruktúry toku popísanej v úvode kapitoly na malej škále, t.j. vznikajú charakteristické masy ohriatej tekutiny, ktoré pri styku s povrchom zanechávajú obraz pripomínajúci listy, ale z pohľadu priemerovania má rotácia dostatočný vplyv na vytvorenie globálneho vzoru nazývaného polárne chladenie).

Predpísaním podmienky free-slip nenadhodnocujeme vplyv hraničných vrstiev, a teda očakávame chaotickejšiu závislosť. Analogicky prípadu no-slip (viď vyššie) sa objavujú 4 základné vzory chladenia oceána, avšak v rôznom poradí - rovníkové chladenie v prudko rotujúcom systéme ($Ro_{loc} \in (0, 3)$), prechodový stav a polárne chladenie ($Ro_{loc} \in (3, 60)$), druhé rovníkové chladenie ($Ro_{loc} \in (60, 800)$) a chaotický stav ($Ro_{loc} > 800$). Závislosť $\Delta q = f(Ro_{loc})$, na rozdiel od predošlého prípadu, nie je za oblasťou prudko rotujúceho systému monotónna, ale prebieha dvoma lokálnymi maximami, ktoré odpovedajú polárnemu chladeniu a druhému rovníkovému chladeniu (viď graf (3.3)), lokálne minimá odpovedajú prechodovému stavu (viď série obrázkov (3.4), (3.6)).

Obr. 3.4: Vývoj variácií tep. toku. Výsl. pre const. $Ra = 2 \times 10^7$ a sériu (zhora nadol) $Ek = \{3 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-3}\}$. Zľava doprava: variácia zonálneho toku so zemepisnou dĺžkou (čierna označuje časový priemer a modrá snapshot tep. toku), snapshot variácie a časový priemer tep. toku.

Farebná škála je na každom obrázku určená od lok. min po lok. max.

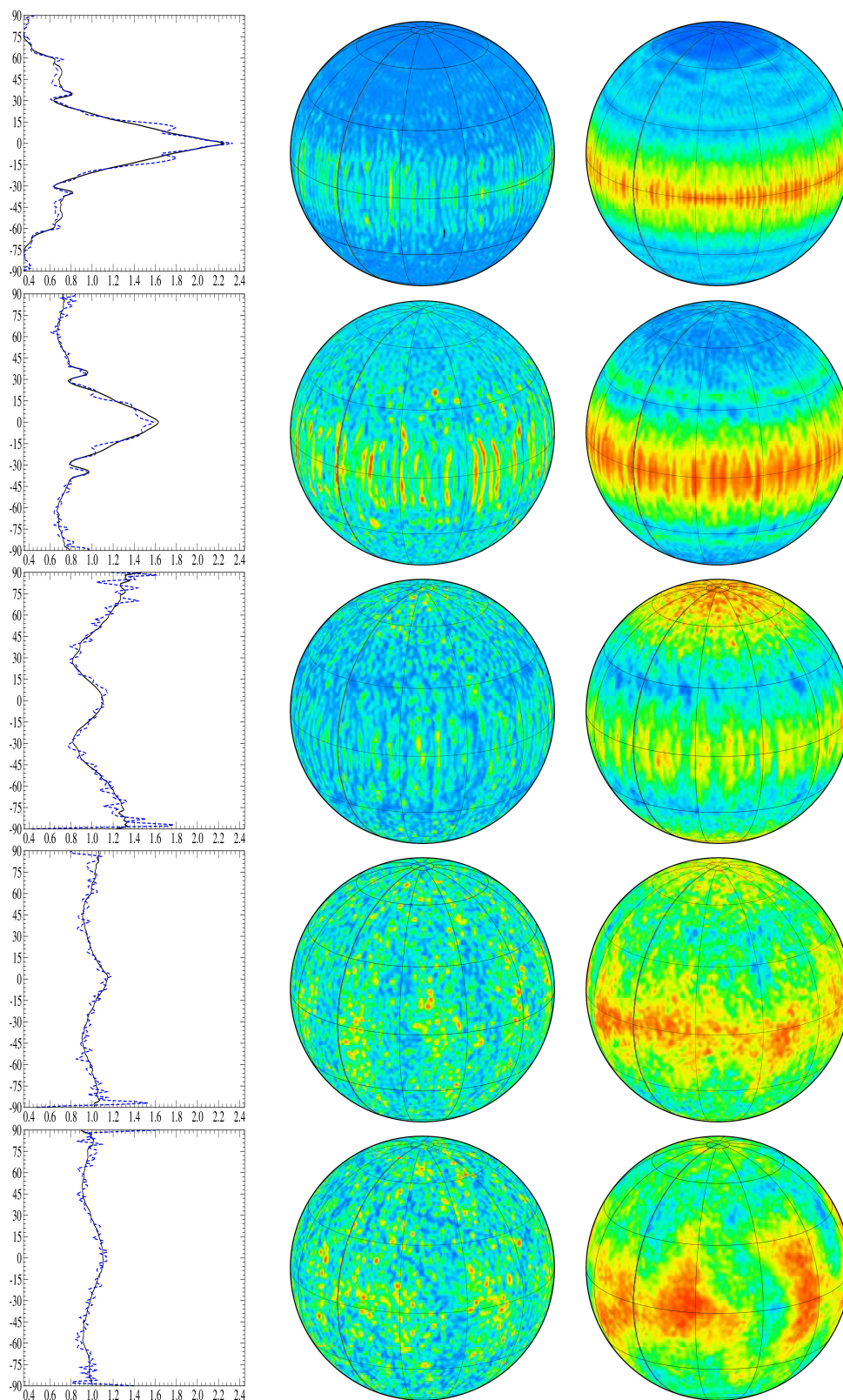
Mechanická okrajová podmienka: free-slip, $r_d/r_u = 0.8$



Obr. 3.5: Vývoj variácií tep. toku. Výsl. pre const. $Ra = 2 \times 10^7$ a sériu (zhora nadol) $Ek = \{3 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-3}\}$. Zľava doprava: variácia zonálneho toku so zemepisnou dĺžkou (čierna označuje časový priemer a modrá snapshot tep. toku), snapshot variácie a časový priemer tep. toku.

Farebná škála je na každom obrázku určená od lok. min po lok. max.

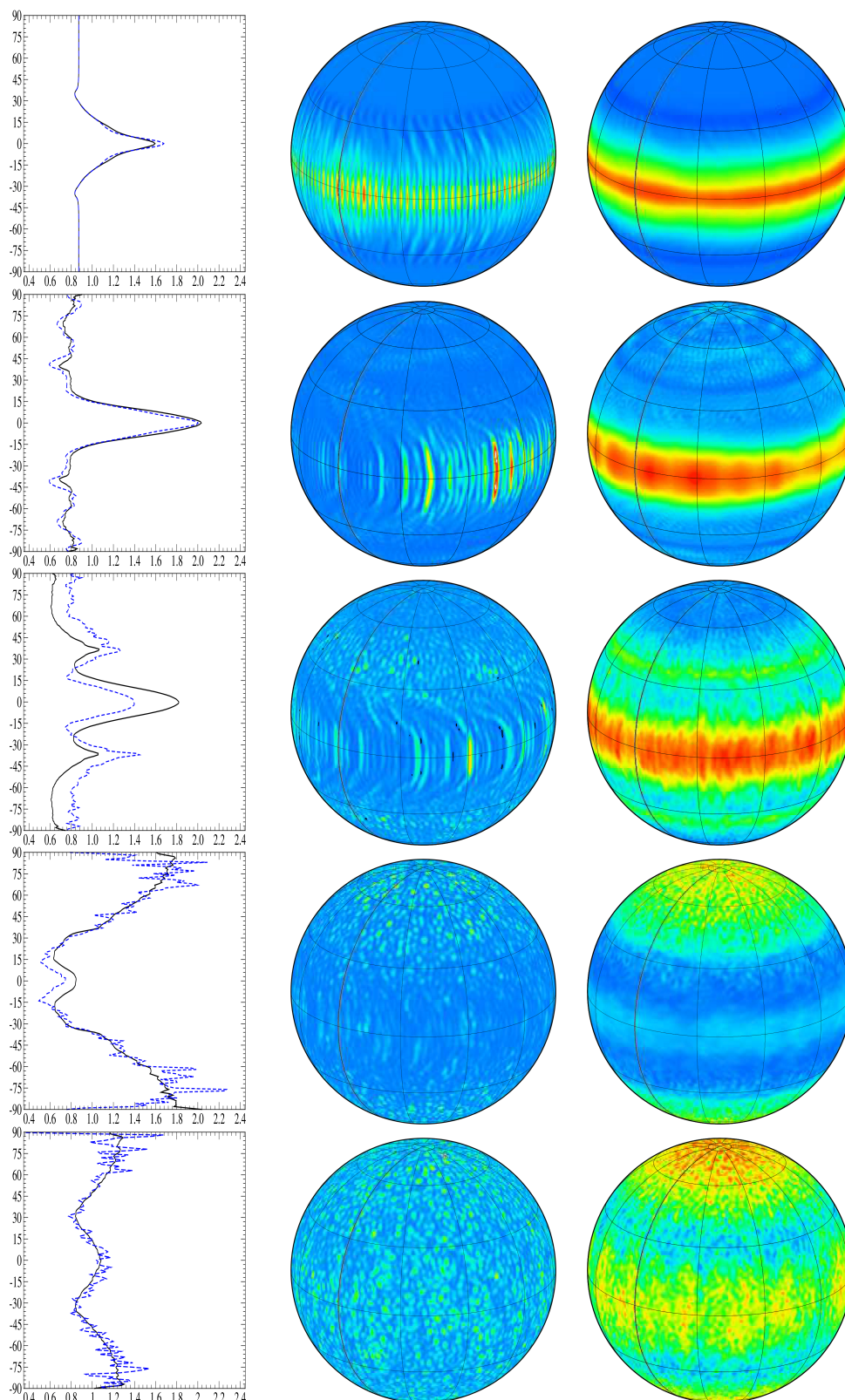
Mechanická okrajová podmienka: no-slip, $r_d/r_u = 0.8$



Obr. 3.6: Vývoj variácií tep. toku. Výsl. pre const. $Ek = 1 \times 10^{-4}$ a sériu (zhora nadol) $Ra = \{1 \times 10^6, 4 \times 10^6, 8 \times 10^6, 2 \times 10^7, 6 \times 10^7\}$. Zľava doprava: variácia zónálneho toku so zemepisnou dĺžkou (čierna označuje časový priemer a modrá snapshot tep. toku), snapshot variácie a časový priemer tep. toku.

Farebná škála je na každom obrázku určená od lok. min po lok. max.

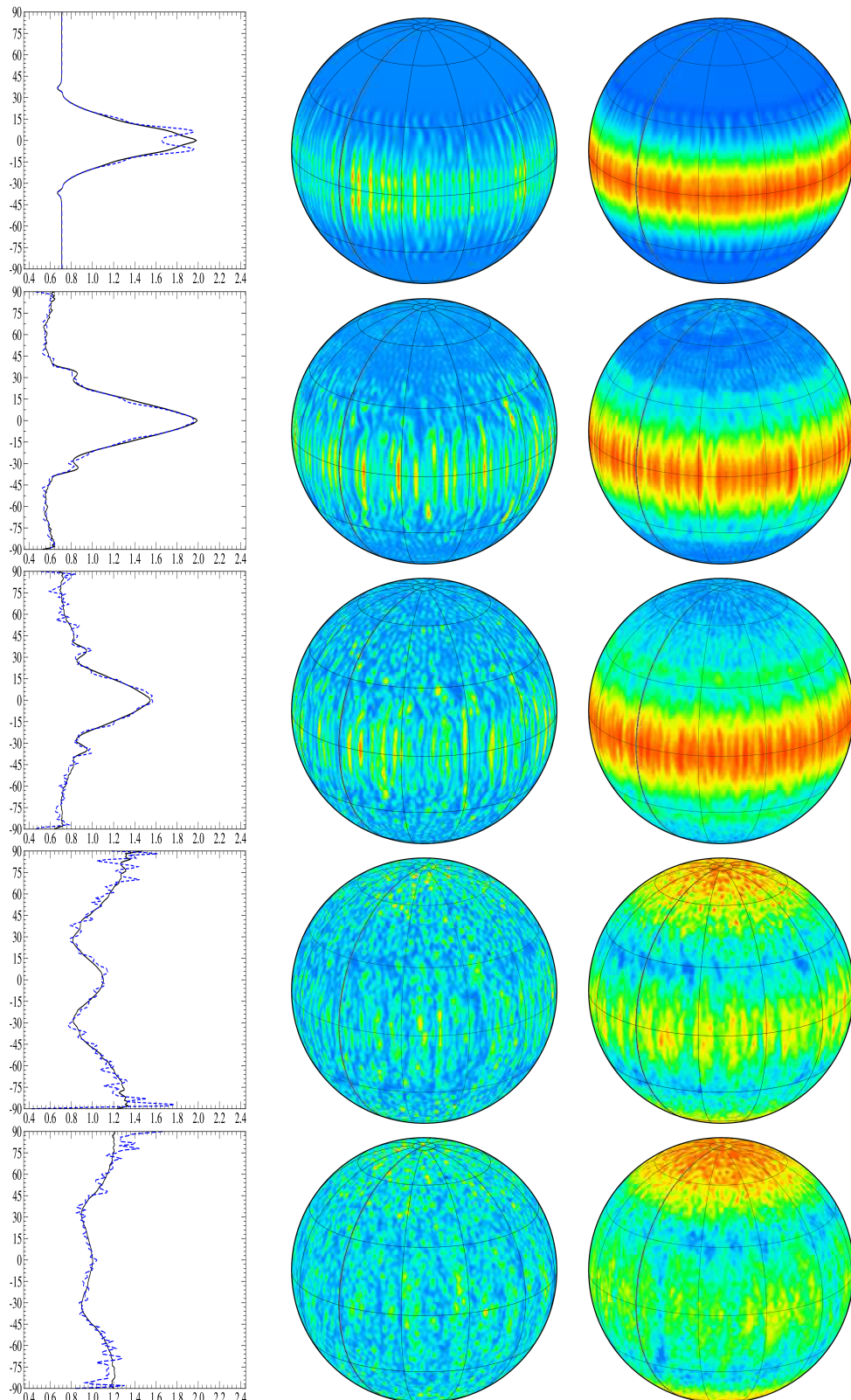
Mechanická okrajová podmienka: free-slip, $r_d/r_u = 0.8$



Obr. 3.7: Vývoj variácií tep. toku. Výsl. pre const. $Ek = 1 \times 10^{-4}$ a sériu (zhora nadol) $Ra = \{1 \times 10^6, 4 \times 10^6, 8 \times 10^6, 2 \times 10^7, 6 \times 10^7\}$. Zľava doprava: variácia zónálneho toku so zemepisnou dĺžkou (čierna označuje časový priemer a modrá snapshot tep. toku), snapshot variácie a časový priemer tep. toku.

Farebná škála je na každom obrázku určená od lok. min po lok. max.

Mechanická okrajová podmienka: no-slip, $r_d/r_u = 0.8$



3.2.3 Extrapolácia výsledkov na reálne objekty, diskusia

Dostupný hardware obmedzuje v súčasnosti dosiahnuteľné hodnoty bezrozmerných riadiacich parametrov na $Ra \approx O(10^{10})$ a $Ek \approx O(10^{-8})$ (Gastine a kol., 2016), resp. (Yadav a kol., 2016), a to len v prípade modelovania relatívne hrubého oceána ($r_d/r_u = 0.6$, resp. $r_d/r_u = 0.35$). V praxi nedosiahnuteľné hodnoty prislúchajúce reálnym oceánom (viď tabuľka 3.3) je nutné nahradiť extrapoláciou výsledkov. V tejto práci predstavíme jeden zo spôsobov založený na výsledkoch štúdií (Gastine a kol., 2015), (Gastine a kol., 2016).

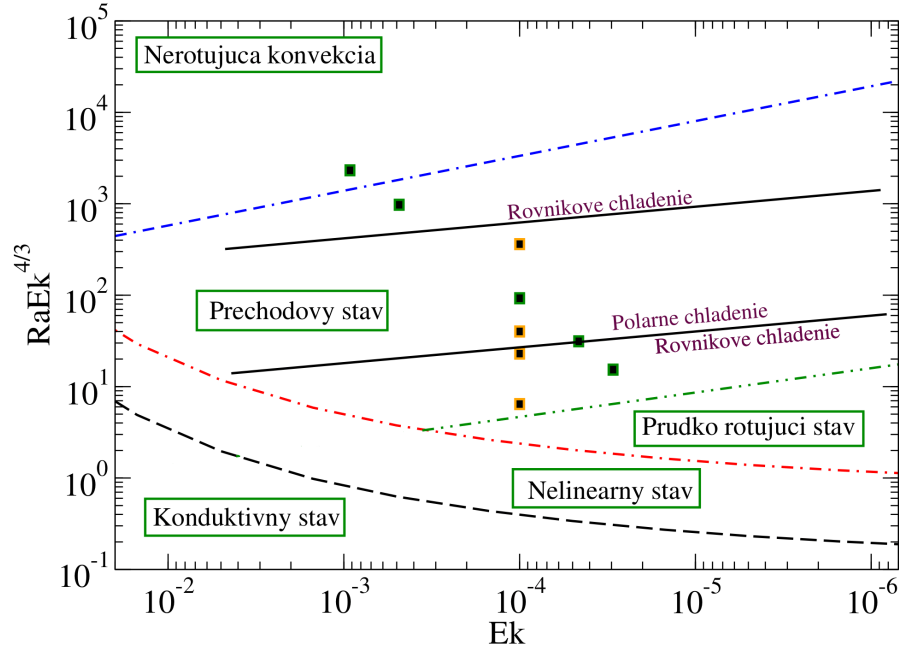
Tabuľka 3.3: Hodnoty bezrozmerných čísel pre oceány na mesiacoch Titan a Európa.

Teleso	Ek	Ra	Ro_{loc}
Titan	$O(10^{-10})$ - $O(10^{-12})$	$O(10^{19})$ - $O(10^{23})$	$O(1)$ - $O(10^9)$
Európa	$O(10^{-12})$	$O(10^{20})$ - $O(10^{23})$	$O(1)$ - $O(10^5)$

Uvedené štúdie predstavili diagram (viď obrázok 3.8) popisujúci rôzne dynamické stavy oceána, dané vplyvom Coriolisovej sily voči vztlakovým silám, ktoré sa navzájom líšia škálou turbulencie, hrúbkou hraničných vrstiev a lokálnym priebehom závislosti $Nu(Ra, Ek)$ (pre detailnú diskusiu viď štúdie uvedené vyššie). Súčasný modely geofyzikálnych procesov a tepelnej produkcie ladových mesiacov (Hussmann a kol., 2002), (Tobie a kol., 2006), spolu s dostupnými škálovaním Nusseltovho čísla ukazujú, že ladové mesiace spadajú do hraničnej oblasti medzi nerotujúcou konvekciou a prechodovým stavom.

Vzhľadom na, v tejto práci popísanú, závislosť Nusseltovho čísla na okrajovej podmienke a fakt, že všetky škálovacie predpisy sú odvodené pre podmienku no-slip, predpokladáme v prípade škálovania nerotujúcou konvekciou nadhodnotenie Ra o 1-2 rády (viď porovnanie závislosti Nusseltovho čísla pre obe okrajové podmienky vyššie), čo vedie k neprimerane vysokej hornej hranici pre hodnoty Ro_{loc} (viď tabuľka 3.3). Škálovanie rotujúcou konvekciou dáva hodnoty spadajúce do oblasti mierneho vplyvu Coriolisovej sily, kde vplyv hraničnej podmienky na hodnoty Nu nie je taký výrazný. V tejto práci predstavujeme iný prístup určenia čísla Ra , založený na modelovaní procesov v ladovej kôre a určení variácie

Obr. 3.8: Adaptácia diagramu uverejneného v štúdií (Gastine a kol., 2016), rozdeľujúca priestor bezrozmerných parametrov na rôzne podmnožiny charakterizované podobnou dynamikou. Delenie je obohatené o nájdené prechody medzi rôznymi vzormi chladenia v prechodovej oblasti. Zelené body zodpovedajú simuláciám s $Ra = const$, žlté s $Ek = const$.

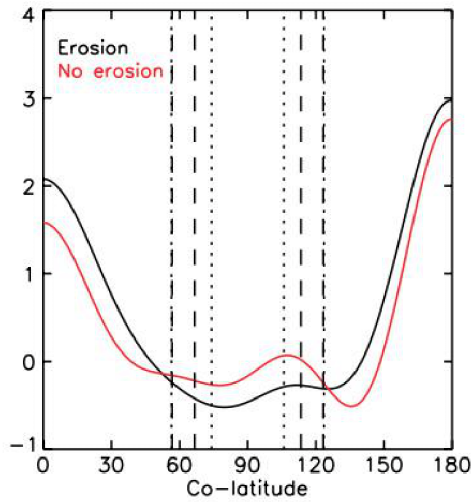


tepelného toku z pozorovanej topografie.

V štúdií (Kvorka a kol., 2018) vysvetľujú autori pozorovanú symetriu topografie na Titane pomocou oceánskeho prúdenia, ktoré generuje variáciu tepelného toku v tejto práci označovanú ako polárne chladenie (viď obrázok 3.9). K rovnakému záveru dospeli autori štúdie (Amit a kol., 2020), ktorí pomocou oceánskeho modelu s podmienkou no-slip prišli k záveru, že v oceáne na Titane dosahuje lokálne Rossbyho číslo hodnoty 5-10 so zonálnou variáciou tepelného toku v intervale $[0.12, 0.26]$, dobre vyhovujúcim predpovedanej hodnote 0.21. Ich model teda predpovedá relatívne veľký vplyv Coriolisovej sily v relatívne hrubom Titanskom oceáne. Ak tento model budeme aplikovať na Európu, resp. jej podpoверхový oceán, nie je možné dosiahnuť pozorovanú rovníkovú anomáliu inak ako predpokladom o oceánskom prúdení v režime prudkej rotácie, kam však Európa nespadá (viď 3.3). Naopak, obrátené výsledky dosiahla štúdia (Soderlund a kol., 2014), ktorá, pomocou modelu s okrajovou podmienkou free-slip, popisuje anomálie na Európe ako dôsledok dynamiky oceána s miernym vplyvom Coriolisovej

sily, t.j. ako dôsledok, v našej práci nazývaného, druhého rovníkového chladenia. V nadväzujúcej štúdií (Soderlund, 2019) kvôli obmedzenému počtu simulácií (5) však uzatvára skúmanie výpočtom polárneho chladenia v oblasti dominovanej rotáciou, avšak s príliš veľkou variáciou tepelného toku a nevytvára hypotézu pre mesiac Titan.

Obr. 3.9: $q^z(\theta)$ pre Titan (Kvorka a kol., 2018), graf zo štúdie (Amit a kol., 2020). Zvislá os udaná v mW/m^2 .



Z vyššie uvedených výsledkov našej práce vyplýva, že protichodné výsledky uvedených štúdií je možné vysvetliť rôznymi okrajovými podmienkami. Vyvstáva teda otázka, ktorá okrajová podmienka je vhodná pre popis vzdialených ladových svetov. Riešenie vidíme v obrázkoch popisujúcich variáciu tepelného toku ako funkciu lokálneho Rossbyho čísla 3.3. Podmienka no-slip posúva Titan príliš hlboko do oblasti dominantnej rotácie, $Ro_{loc} \approx 10$, a Európu vkladá priamo do nej, $Ro_{loc} \approx 1$. Podmienka free-slip, vzhľadom na nelineárny priebeh variácie tepelného toku, posúva Titan do oblasti $Ro_{loc} \approx 60$ a Európu do oblasti $Ro_{loc} \approx 500$, vyhovujúcu súčasným odhadom (hypotézu o oceáne dominovanom rotáciou nepovažujeme za reálnu, analogicky doplnku (Soderlund a kol., 2014)). Výsledky popísaných simulácií teda naznačujú, že podmienka free-slip predstavuje, na rozdiel od podmienky no-slip, vhodnú aproximáciu interakcie oceán/ladová kôra, oceán/kamenné jadro.

Naviac výsledky nabádajú k hypotéze, že variácia tepelného toku nesie o dynamike oceána presnejšiu informáciu, ako celková tepelná produkcia telesa (Nu). Predpokladajme, že Ekmanovo číslo, t.j. uhlová rýchlosť rotácie, je určené s uspokojivou presnosťou. Potom pre Titan, resp. Európu, môžeme, na základe odvodených grafov, písať $Ra \approx O(10^{18}) - O(10^{20})$, resp. $Ra \approx O(10^{21})$. Takto získané hodnoty Raylieghovho čísla sú jednak kompatibilné s hodnotami určenými škálo-

vaním (spadajú do spodnej polovice predpokladaného oboru, viď 3.3), jednak nie sú postihnuté nepresnosťou, ktorá je do odhadov prenesená neurčitostou v dynamickom stave oceána. Práve kvôli nej je nutné pri odhade Rayleighovho čísla vziať do úvahy vzťahy platné pre oblasť nerotujúcej aj prudko rotujúcej konvekcie, čo vedie k odhadu o rozsahu 4 rádov. V prístupe uvedenom v našej práci je tento problém odstránený porovnaním tvaru zonálnej variácie (polárne vs rovníkové chladenie).

Záver

Práca nadviazala na štúdiu (Kvorka a kol., 2018), v ktorej boli topografické anomálie, pozorované na mesiaci Titan, vysvetlené pomocou nehomogénneho tepelného toku na spodnej hranici ľadovej kôry (t.j. na hornej hranici podpovrchového oceána). Cieľom našej práce bolo potvrdiť domnienku, že variácia tepelného toku, a teda aj pozorované topografické anomálie, je spôsobená usmerňovaním prúdenia v oceáne Coriolisovou silou (Soderlund a kol., 2014). Špeciálne sa práca sústredila na popis kvantitatívnych a kvalitatívnych rozdielov v geometrii tepelného toku na hornej hranici oceána pri predpísaní rôznych okrajových podmienok. Efektívne riešenie úlohy vyžadovalo prípravu vlastného programu v jazyku Fortran90. Správnosť a presnosť vyvinutého programu bola otestovaná pomocou publikovaných benchmarkov (Bercovici a kol., 1989), (Gastine a kol., 2015).

Hodnoty veličín, popisujúcich fyzikálne vlastnosti oceána, boli vybrané s cieľom vysvetlenia rozdielov medzi nedávnymi štúdiami (Amit a kol., 2020) a (Soderlund, 2019), ktoré dosiahli na prvý pohľad protichodné výsledky. Prvá štúdia popisuje prechod od polárneho chladenia k rovníkovému pri náraste vplyvu rotácie, zatiaľ čo druhá štúdia popisuje, pri tomto nastavení, prechod obrátený. Predpokladom bolo, že tento rozdiel je spôsobený rôznymi mechanickými okrajovými podmienkami, ktoré v prácach autori predpísali. Ako porovnávané mechanické podmienky boli zvolené predpis nulovej rýchlosti na hranici (no-slip) a predpis nulového trenia na hranici (free-slip). Vplyv okrajovej podmienky na usmerňovanie prúdenia sa ukázal ako kľúčový. Výsledky potvrdili navzájom opačné správanie systému pri predpísaní uvedených okrajových podmienok. Na základe štúdia výsledkov, menovite porovnanie škálovania Nusseltovho čísla, sme ukázali, že podmienka no-slip, vzhľadom na nereálne vysoké Ekmanovo číslo v našich simuláciách, nie je vhodná pre numerické modelovanie konvekcie v rotujúcom oceáne (analogické tvrdenie je možné nájsť v (Kuang a Bloxham, 1997) pre modely popisujúce konvekciu v zemskom plášti). Modely pracujúce s podmienkou no-slip nedokážu zachytiť prúdenie v oceáne správne a predpovedajú nereálne chaotické mapy tepelného toku v prípade mierneho vplyvu rotácie (t.j. v prípade mesiaca Európa nie je možné modelovať pozorované anomálie ako dôsledok prenosu tepla

z oceána do ľadovej kôry ako v (Soderlund a kol., 2014)). Vzhľadom na hardwarové obmedzenia numerických výpočtov je priame modelovanie reálnych systémov v súčasnosti nedosiahnuteľné (Glatzmaier, 2002), a preto považujeme predpis podmienky free-slip za vhodný kompromis, najmä z pohľadu ďalšieho spracovania výsledkov pomocou extrapolácie.

V súčasnosti slúžia na extrapoláciu výsledkov predpisy pre škálovanie Nusseltovho čísla pomocou Rayleighovho a Ekmanovho čísla, graficky znázornené diagramom popisujúcim rôzne dynamické stavy oceána (Gastine a kol., 2016). V našej práci sme ukázali slabé miesta tohto prístupu a navrhli sme nový prístup k určaniu dynamického stavu oceána založený na modelovaní ľadovej kôry a veličine nazvanej variácia tepelného toku. Výsledky uvedeného prístupu pre mesiac Titan, publikované v tejto práci, považujeme za sľubné. Ďalší vývoj by sa mal sústrediť na výpočty s predpisom tepelného toku na spodnej hranici. Je to veličina, ktorú dokážeme veľmi dobre odhadovať z celkovej tepelnej produkcie telesa (Tobie a kol., 2006) a predstavuje vhodnú náhradu neznámeho teplotného rozdielu pri škálovaní systému. V posledných rokoch sa začali objavovať prvé práce zaoberajúce sa škálovacími zákonmi pre túto úlohu, napr. (Mound a Davies, 2017). Ďalším krokom bude využitie odvodených zákonov na extrapoláciu reálnych telies do oblastí, v ktorej sa pohybujú súčasné modely, a porovnanie predikovanej variácie tepelného toku s hodnotami plynúcimi z riešenia inverznej úlohy pre ľadovú kôru, napr. (Kvorka a kol., 2018). Vyriešenie tohto problému je kľúčové pre pochopenie vnútornej dynamiky ľadových telies, najmä s ohľadom na dlhodobú stabilitu oceánu, ktorá určuje habilitačný potenciál telesa. Modely, simulujúce dlhodobý vývoj telesa, budú v nasledujúcich rokoch potrebné hlavne pre Jupiterove mesiace Európu a Ganymed, ktoré budú študovať vesmírne sondy Juice (ESA) a Europa Clipper (NASA), a taktiež pre Saturnov mesiac Enceladus, kde sa po skončení misie Cassini uvažuje o ďalšom výzume prostredníctvom sondy pracovne nazvanej Enceladus Sample Return Mission (NASA). Tieto sondy by sa mali pokúsiť zodpovedať otázku, či život v Slnčnej sústave môže existovať aj inde ako na Zemi - otázku, ktorej zodpovedanie môže úplne zmeniť náš pohľad na postavenie človeka vo Vesmíre.

Seznam použité literatury

- ČADEK, O., BĚHOUNKOVÁ, M., TOBIE, G. a CHOBLET, G. (2017). Viscoelastic relaxation of enceladus's ice shell. *Icarus*, **291**, 31–35. doi: 10.1016/j.icarus.2017.03.011.
- ČADEK, O., SOUČEK, O., BĚHOUNKOVÁ, M., CHOBLET, M., TOBIE, G. a HRON, J. (2019). Long-term stability of enceladus' uneven ice shell. *Icarus*, **319**, 476–484. doi: 10.1016/j.icarus.2018.10.003.
- AMIT, H., CHOBLET, G., TOBIE, G., TERRA-NOVA, F., ČADEK, O. a BOUFFARD, M. (2020). Cooling patterns in rotating thin spherical shells — application to titan's subsurface ocean. *Icarus*, **338**, 113509. doi: 10.1016/j.icarus.2019.113509.
- AUBERT, J., GASTINE, T. a FOURNIER, A. (2017). Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime. *Journal of Fluid Mechanics*, **813**, 558–593. doi: 10.1017/jfm.2016.789.
- AURNOU, J., HEIMPEL, M., ALLEM, L., KING, E. a WICHT, J. (2008). Convective heat transfer and the pattern of thermal emission on the gas giants. *Geophysical Journal International*, **173**, 793–801. doi: 10.1111/j.1365-246X.2008.03764.x.
- AURNOU, J. M., CALKINS, M. A., CHENG, J. S., JULIEN, K., KING, E. M., NIEVES, D., SODERLUND, K. M. a STELLMACH, S. (2015). Rotating convecting turbulence in earth and planetary cores. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **246**, 52–71. doi: 10.1016/j.pepi.2015.07.001.
- BENEŠOVÁ, N. (2015). *Thermal convection in terrestrial planetary mantles*. PhD thesis.
- BERCOVICI, D., SCHUBERT, G., GLATZMAIER, G. A. a ZEBIB, A. (1989). Three-dimensional thermal convection in a spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics*, **206**, 75–104. doi: 10.1017/S0022112089002235.

- BÉGHIN, C., RANDRIAMBOARISON, O., HAMELIN, M., KARKOSCHKA, E., SOTTIN, C., WHITTEN, R. C., BERTHELIER, J.-J., GRARD, R. a SIMÕES, F. (2012). Analytic theory of titan’s schumann resonance: Constraints on ionospheric conductivity and buried water ocean. *Icarus*, **218**, 1028–1042. doi: 10.1016/j.icarus.2012.02.005.
- BROWN, M. E. a HAND, K. P. (2013). Salts and radiation products on the surface of europa. *The Astronomical Journal*, **145**(4), 110. doi: 10.1088/0004-6256/145/4/110.
- BUSSE, F. H. a SIMITEV, R. D. (2006). Parameter dependences of convection-driven dynamos in rotating spherical fluid shells. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **100**, 341–361. doi: 10.1080/03091920600784873.
- CHENG, J. S., AURNOU, J. M., JULIEN, K. a KUNNEN, R. P. J. (2018). A heuristic framework for next-generation models of geostrophic convective turbulence. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **112**, 277–300. doi: 10.1080/03091929.2018.1506024.
- CHOBLET, C., ČADEK, O., COUTURIER, F. a DUMOULIN, C. (2007). Œdipus: a new tool to study the dynamics of planetary interiors. *Geophysical Journal International*, **170**, 9–30. doi: 10.1111/j.1365-246X.2007.03419.x.
- CHRISTENSEN, U. R. a WICHT, J. (2007). 8.08 numerical dynamo simulations. *Treatise on Geophysics*, **8**, 245–282. doi: 10.1016/B978-044452748-6.00134-6.
- FIGUEREDO, P. H. a GREELEY, R. (2004). Resurfacing history of europa from pole-to-pole geological mapping. *Icarus*, **167**, 287–312. doi: 10.1016/j.icarus.2003.09.016.
- GASTINE, T., WICHT, J. a ARNOU, J. M. (2015). Turbulent rayleigh–bénard convection in spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics*, **778**, 721–764. doi: 10.1017/jfm.2015.401.
- GASTINE, T., WICHT, J. a AUBERT, J. (2016). Scaling regimes in spherical shell rotating convection. *Journal of Fluid Mechanics*, **808**, 690–732. doi: 10.1017/jfm.2016.659.

- GLATZMAIER, G. A. (1984). Numerical simulations of stellar convective dynamics. i. the model and method. *Journal of Computational Physics*, **55**, 461–484. doi: 10.1016/0021-9991(84)90033-0.
- GLATZMAIER, G. A. (2002). Geodynamo simulations - how realistic are they? *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **30**, 237–257. doi: 10.1146/annurev.earth.30.091201.140817.
- GLATZMAIER, G. A. a ROBERTS, P. (1995). A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **91**, 63–75. doi: 10.1016/0031-9201(95)03049-3.
- HERNLUND, J. W. a TACKLEY, P. J. (2008). Modeling mantle convection in spherical annulus. *Modeling mantle convection in the spherical annulus*, **171**, 48–54. doi: 10.1016/j.pepi.2008.07.037.
- HUSSMANN, H., SPOHN, T. a WIECZERKOWSKI, K. (2002). Thermal equilibrium states of europa’s ice shell: Implications for internal ocean thickness and surface heat flow. *Icarus*, **156**, 143–151. doi: 10.1006/icar.2001.6776.
- IESS, L., RAPPAPORT, N. J., JACOBSON, R. A., RACCIOPA, P., STEVENSON, D. J., TORTORA, P. a ASMAR, J. W. A. S. W. (2010). Gravity field, shape, and moment of inertia of titan. *Science*, **327**, 1367–1369. doi: 10.1126/science.1182583.
- IESS, L., JACOBSON, R., DUCCI, M., STEVENSON, D., LUNINE, J. I., ARMSTRONG, J. W., ASMAR, S., RACIOPPA, P., RAPPAPORT, N. J. a TORTORA, P. (2012). The tides of titan. *Science*, **337**, 457–459. doi: 10.1126/science.1219631.
- IVERS, D. J. a PHILLIPS, C. G. (2008). Scalar and vector spherical harmonic spectral equations of rotating magnetohydrodynamics. *Geophysical Journal International*, **175**, 955–974. doi: 10.1111/j.1365-246X.2008.03944.x.

- KHURANA, K. K., KIVELSON, M. G. a RUSSEL, C. T. (2002). Searching for liquid water in europa by using surface observatories. *Astrobiology*, **2**, 93–103. doi: 10.1089/153110702753621376.
- KIVELSON, M. a KHURANA, K. (2002). The permanent and inductive magnetic moments of ganymede. *Icarus*, **157**, 507–522. doi: 10.1006/icar.2002.6834.
- KUANG, W. a BLOXHAM, J. (1997). On the dynamics of topographical core-mantle coupling. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **99**, 289–294. doi: 10.1016/S0031-9201(96)03203-7.
- KVORKA, J., ČADEK, O., TOBIE, G. a CHOBLET, G. (2018). Does titan’s long-wavelength topography contain information about subsurface ocean dynamics? *Icarus*, **310**, 149–164. doi: 10.1016/j.icarus.2017.12.010.
- LUNIN, J. I. (2017). Ocean worlds exploration. *Acta Astronautica*, **131**, 123–130. doi: 10.1016/j.actaastro.2016.11.017.
- MARTINEC, Z. (1989). Program to calculate the spectral harmonic expansion coefficients of the two scalar fields product. *Computer Physics Communications*, **54**, 177–182. doi: 10.1016/0010-4655(89)90043-X.
- MATAS, J. (1995). Mantle viscosity and density structure. Master’s thesis, Matematicko-fyzikální fakulta UK.
- MATYSKA, C. (2005). *Mathematical introduction to geothermics and geodynamics (lecture notes)*. Department of Geophysics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague.
- MIQUEL, B., XIE, J.-H., FEATHERSTONE, N., JULIEN, K. a KNOBLOCH, E. (2018). Equatorially trapped convection in a rapidly rotating shallow shell. *Physical Review Fluids*, **3**, 053801. doi: 10.1103/PhysRevFluids.3.053801.
- MÜLLER, I. (1985). *Thermodynamics*. Pitman.
- MOUND, J. E. a DAVIES, C. J. (2017). Heat transfer in rapidly rotating convection with heterogenous thermal boundary condition. *Journal of Fluid Mechanics*, **828**, 601–629. doi: 10.1017/jfm.2017.539.

- NIMMO, F. a PAPPALARDO, R. (2016). Ocean worlds in the outer solar system. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **121**. doi: 10.1002/2016JE005081.
- SLATTERY, J. C., SAGIS, L. a OH, E.-S. (2007). *Interfacial transport phenomena, Second Edition*. Springer.
- SODERLUND, K. M. (2019). Ocean dynamics of outer solar system satellites. *Geophysical Research Letters*, **46**, 8700–8710. doi: 10.1029/2018GL081880.
- SODERLUND, K. M., SCHMIDT, B. E., WICHT, J. a BLANKENSHIP, D. D. (2014). Ocean-driven heating of europa’s icy shell at low latitudes. *Nature Geoscience*, **7**, 16–19. doi: 10.1038/ngeo2021.
- TAYLOR, G. I. a LAMB, H. (1917). Motion of solids in fluids when the flow is not irrotational. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **93**. doi: 10.1098/rspa.1917.0007.
- THOMAS, P., TAJEDDINE, R., TISCARENO, M., BURNS, J., JOSEPH, J., LOREDO, T., HELFENSTEIN, P. a PORCO, C. (2016). Enceladus’s measured physical libration requires a global subsurface ocean. *Icarus*, **264**, 37–47. doi: 10.1016/j.icarus.2015.08.037.
- TOBIE, G., LUNINE, J. I. a SOTIN, C. (2006). Episodic outgassing as the origin of atmospheric methane on titan. *Nature*, **440**, 61–64. doi: 10.1038/nature04497.
- VARSHALOVICH, D. A., MOSKALEV, A. N. a KHERSONSKII, V. K. (1988). *Quantum theory of angular momentum*. World Scientific. doi: 10.1142/0270.
- WICHT, J. (2002). Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **132**, 281–302. doi: 10.1016/S0031-9201(02)00078-X.
- YADAV, R., GASTINE, T., CHRISTENSEN, U., DUARTE, L. a REINERS, A. (2016). Effect of shear and magnetic field on the heat-transfer efficiency of convection in rotating spherical shells. *Geophysical Journal International*, **204**, 1120 – 1133. doi: 10.1093/gji/ggv506.

- YOSHIDA, M. a KAGEYAMA, A. (2004). Application of the yin-yang grid to a thermal convection of a boussinesq fluid with infinite prandtl number in a three-dimensional spherical shell. *Geophysical Research Letters*, **31**(12). doi: 10.1029/2004GL019970.
- ZHONG, S., MCNAMARA, A., TAN, E., MORESI, L. a GURNIS, M. (2008). A benchmark study on mantle convection in a 3-d spherical shell using citcoms. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, **9**. doi: 10.1029/2008GC002048.
- ZIMMER, C., KHURANA, K. K. a KIVELSON, M. G. (2000). Subsurface oceans on europa and calisto: constraints from galileo magnetometer observations. *Icarus*, **147**, 329–347. doi: 10.1006/icar.2000.6456.

Zoznam obrázkov

1.1	Schematický nákres oceána	6
1.2	Schematický nákres radiálnej diskretizácie	20
3.1	Grafické spracovanie závislosti Nu na Ro_{loc} . Hranice naznačené medzi jednotlivými vzormi tepelného toku sú len orientačné.	28
3.2	Grafické spracovanie radiálnych priebehov bezrozmernej teploty v závislosti na bezrozmernom polomere oceána.	29
3.3	Grafické spracovanie radiálnych priebehov bezrozmernej teploty v závislosti na bezrozmernom polomere oceána.	30
3.4	Vývoj variácií tep. toku. Výsl. pre const. $Ra = 2 \times 10^7$ a sériu (zhora nadol) $Ek = \{3 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-3}\}$. Zľava doprava: variácia zonálneho toku so zemepisnou dĺžkou (čierna označuje časový priemer a modrá snapshot tep. toku), snapshot variácie a časový priemer tep. toku. Farebná škála je na každom obrázku určená od lok. min po lok. max. Mechanická okrajová podmienka: free-slip, $r_d/r_u = 0.8$	31
3.5	Vývoj variácií tep. toku. Výsl. pre const. $Ra = 2 \times 10^7$ a sériu (zhora nadol) $Ek = \{3 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-3}\}$. Zľava doprava: variácia zonálneho toku so zemepisnou dĺžkou (čierna označuje časový priemer a modrá snapshot tep. toku), snapshot variácie a časový priemer tep. toku. Farebná škála je na každom obrázku určená od lok. min po lok. max. Mechanická okrajová podmienka: no-slip, $r_d/r_u = 0.8$	32
3.6	Vývoj variácií tep. toku. Výsl. pre const. $Ek = 1 \times 10^{-4}$ a sériu (zhora nadol) $Ra = \{1 \times 10^6, 4 \times 10^6, 8 \times 10^6, 2 \times 10^7, 6 \times 10^7\}$. Zľava doprava: variácia zonálneho toku so zemepisnou dĺžkou (čierna označuje časový priemer a modrá snapshot tep. toku), snapshot variácie a časový priemer tep. toku. Farebná škála je na každom obrázku určená od lok. min po lok. max. Mechanická okrajová podmienka: free-slip, $r_d/r_u = 0.8$	33

3.7	Vývoj variácií tep. toku. Výsl. pre const. $Ek = 1 \times 10^{-4}$ a sériu (zhora nadol) $Ra = \{1 \times 10^6, 4 \times 10^6, 8 \times 10^6, 2 \times 10^7, 6 \times 10^7\}$. Zľava doprava: variácia zonálneho toku so zemepisnou dĺžkou (čierna označuje časový priemer a modrá snapshot tep. toku), snapshot variácie a časový priemer tep. toku. Farebná škála je na každom obrázku určená od lok. min po lok. max. Mechanická okrajová podmienka: no-slip, $r_d/r_u = 0.8$	34
3.8	Adaptácia diagramu uverejneného v štúdií (Gastine a kol., 2016), rozdeľujúca priestor bezrozmerných parametrov na rôzne podmnožiny charakterizované podobnou dynamikou. Delenie je obohatené o nájdené prechody medzi rôznymi vzormi chladenia v prechodovej oblasti. Zelené body zodpovedajú simuláciám s $Ra = const$, žlté s $Ek = const$	36
3.9	$q^z(\theta)$ pre Titan (Kvorka a kol., 2018), graf zo štúdie (Amit a kol., 2020). Zvislá os udaná v mW/m^2	37

Zoznam tabuliek

2.1	Výsledky benchmarku danému metastabilnými riešeniami (C) a (T) pri okrajovej podmienke danej teplotou a podmienkou free-slip, $Pr = \text{inf}$, $Ek = \text{inf}$, $\eta = 0.55$	23
2.2	Výsledky benchmarku danému kódu STAGYY pri okrajovej podmienke danej teplotou a podmienkou free-slip, $Pr = \text{inf}$, $Ek = \text{inf}$, $\eta = 0.55$	23
2.3	Výsledky benchmarku danému prácami (Gastine a kol., 2015), (Gastine a kol., 2016), pri okrajovej podmienke danej teplotou a podmienkou no-slip, $Pr = 1$, $\eta = 0.60$. Lineárne pole zodpovedá prípadu $\vec{g}' = -\vec{r}/r$, homogénne pole prípadu $\vec{g}' = -\vec{e}_r$ a Newtonské pole prípadu $\vec{g}' = -(1/r^2)\vec{e}_r$. Rozlíšenie je v prípade Kvorka dané ako počet radiálnych vrstiev \times max. harmonický stupeň, v prípade Gastine ako max. stupeň Chebyshevových polynómov \times max. harmonický stupeň.	24
3.1	Porovnanie hodnôt Nusseltovho čísla a variácie tepelného toku pre prípady mechanických podmienok free-slip a no-slip, konštantné $Ra = 2 \times 10^7$ a rôzne hodnoty Ek	27
3.2	Porovnanie hodnôt Nusseltovho čísla a variácie tepelného toku pre prípady mechanických podmienok free-slip a no-slip, konštantné $Ek = 1 \times 10^{-4}$ a rôzne hodnoty Ra	28
3.3	Hodnoty bezrozmerných čísel pre oceány na mesiacoch Titan a Európa.	35

A. Apendix

Apendix A obsahuje harmonické rozklady členov vystupujúcich v práci. Tematicky je delený na členy mechanickej sústavy, členy teplotnej sústavy a okrajové podmienky.

A.1 Členy mechanickej sústavy

$$[\nabla \cdot \vec{v}]_{jm} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) v_{jm}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) v_{jm}^{j+1}, \quad (\text{A.1})$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{T}]_{jm}^{j-1} = \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) T_{jm}^{j-2,2} - \sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) T_{jm}^{j,0} -$$

$$- \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) T_{jm}^{j,2},$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{T}]_{jm}^j = \sqrt{\frac{j-1}{2(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) T_{jm}^{j-1,2} - \sqrt{\frac{j+2}{2(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) T_{jm}^{j+1,2}, \quad (\text{A.3})$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{T}]_{jm}^{j+1} = \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) T_{jm}^{j,0} + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) T_{jm}^{j,2} -$$

$$- \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) T_{jm}^{j+2,2}, \quad (\text{A.4})$$

$$[\mathbf{T}]_{jm}^{j-2,2} = 2 \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) v_{jm}^{j-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$[\mathbf{T}]_{jm}^{j-1,2} = 2 \sqrt{\frac{j-1}{2(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) v_{jm}^j, \quad (\text{A.6})$$

$$[\mathbf{T}]_{jm}^{j,2} = -2 \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) v_{jm}^{j-1} +$$

$$+ 2 \sqrt{\frac{(2j-1)j}{6(2j+1)(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) v_{jm}^{j+1}, \quad (\text{A.7})$$

$$[\mathbf{T}]_{jm}^{j+1,2} = -2\sqrt{\frac{j+2}{2(2j+1)}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)v_{jm}^j, \quad (\text{A.8})$$

$$[\mathbf{T}]_{jm}^{j+2,2} = -2\sqrt{\frac{j+2}{2j+3}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right)v_{jm}^{j+1}, \quad (\text{A.9})$$

$$[(\theta - \theta_0)\vec{e}_r]_{jm}^{j-1} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}(\theta - \theta_0)_{jm}, \quad (\text{A.10})$$

$$[(\theta - \theta_0)\vec{e}_r]_{jm}^j = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$[(\theta - \theta_0)\vec{e}_r]_{jm}^{j+1} = -\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}(\theta - \theta_0)_{jm}, \quad (\text{A.12})$$

$$[\vec{e}_z \times \vec{v}]_{jm}^{j-1} = \frac{i}{j}\sqrt{\frac{(j-1)(j^2-m^2)}{2j-1}}v_{j-1,m}^{j-1} - \frac{im}{j}v_{jm}^{j-1}, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} [\vec{e}_z \times \vec{v}]_{jm}^j &= \frac{i}{j}\sqrt{\frac{(j+1)(j^2-m^2)}{2j+1}}v_{j-1,m}^j - \frac{im}{j(j+1)}v_{jm}^j + \\ &\quad + \frac{i}{j+1}\sqrt{\frac{j((j+1)^2-m^2)}{2j+1}}v_{j+1,m}^j, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$[\vec{e}_z \times \vec{v}]_{jm}^{j+1} = \frac{im}{j+1}v_{jm}^{j+1} + \frac{i}{j+1}\sqrt{\frac{(j+2)((j+1)^2-m^2)}{2j+3}}v_{j+1,m}^{j+1}. \quad (\text{A.15})$$

A.2 Členy teplotnej sústavy

$$[\nabla \cdot \vec{q}]_{jm} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)q_{jm}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)q_{jm}^{j+1}, \quad (\text{A.16})$$

$$[\vec{q}]_{jm}^{j-1} = -\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\theta_{jm}, \quad (\text{A.17})$$

$$[\vec{q}]_{jm}^j = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$[\vec{q}]_{jm}^{j+1} = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\theta_{jm}. \quad (\text{A.19})$$

A.3 Okrajové podmienky

Okrajová podmienka v napätí (1.31) je vektorová, avšak lineárne nezávislé sú len 2 rovnice z nej plynúce v tvare (Matas, 1995)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(j-1)(j+1)}{(2j-1)(2j+1)}} T_{jm}^{j-2,2} - \sqrt{\frac{3}{2(2j-1)(2j+3)}} T_{jm}^{j,2} - \\ - \sqrt{\frac{j(j+2)}{(2j+1)(2j+3)}} T_{jm}^{j+2,2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\sqrt{\frac{j-1}{2(2j+1)}} T_{jm}^{j-1,2} - \sqrt{\frac{j+2}{2(2j+1)}} T_{jm}^{j+1,2} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Podmienka na rýchlosť má tvar

$$\sqrt{\frac{j}{2j+1}} v_{jm}^{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} v_{jm}^{j+1} = 0. \quad (\text{A.22})$$

A.4 Rozklad momentu hybnosti

$$[\vec{e}_r \times \vec{v}]_{jm}^{j-1} = i \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} v_{jm}^j, \quad (\text{A.23})$$

$$[\vec{e}_r \times \vec{v}]_{jm}^j = i \left(\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} v_{jm}^{j-1} + \sqrt{\frac{j}{2j+1}} v_{jm}^{j+1} \right), \quad (\text{A.24})$$

$$[\vec{e}_r \times \vec{v}]_{jm}^{j+1} = i \sqrt{\frac{j}{2j+1}} v_{jm}^j, \quad (\text{A.25})$$

B. Prílohy

B.1 Príloha 1

CD obsahujúce vyladený program vyvinutý pre efektívne riešenie konvekcie v rotujúcom, sféricky symetrickom oceáne.