



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Kihoulou

**Viskoelastická deformace ledových těles
ve sluneční soustavě**

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Klára Kalousová, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Na tomto místě bych rád poděkoval všem, díky kterým tato práce mohla vzniknout. Předně děkuji prof. RNDr. Ondřeji Čadkovi, CSc. za trpělivost a důvěru v nelehkých počátcích modelování ledových těles a vedoucí práce RNDr. Kláře Kalousové, PhD. za množství věnovaného času a profesionální, motivující vedení. Velký dík patří také RNDr. Ondřeji Součkovi, PhD. za pomoc s relaxací, RNDr. Jakubovi Velímskému, PhD. za rychlou pomoc s elektronickou verzí práce a celé katedře geofyziky za vytvoření přátelského prostředí. Děkuji svým (pra)rodičům za finanční podporu při studiu. Speciální poděkování pak patří mé nejdražší Báře a všem blízkým přátelům, zejména Pavlovi a Hance Rohlenovým.

Název práce: Viskoelastická deformace ledových těles ve sluneční soustavě

Autor: Martin Kihoulou

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Klára Kalousová, Ph.D., Katedra geofyziky

Abstrakt: V této práci studujeme dvě tělesa sluneční soustavy – Saturnův měsíc Titan a trpasličí planetu Pluto. Titan vykazuje polární zploštění, které lze vysvětlit vsakováním ethanových srážek a následnou methan-ethanovou substitucí pod povrchem. Ledovou slupku uvažujeme jako kontinuum s viskoelastickou (maxwellovskou) reologií a deformaci řešíme spektrální metodou. Dostáváme výsledky shodné s literaturou. V případě Pluta poloha kráteru Sputnik Planitia blízko slapové osy naznačuje přítomnost podpovrchového oceánu. Tuto polohu lze vysvětlit reorientací tělesa, pokud se kráter chová jako kladná gravitační anomálie. V tom případě musí být kráter kompenzován a spodní kráter vyplněn materiálem s hustotou větší než led, např. vodou. Problém řešíme nejprve spektrální metodou, která podává výsledky v souladu s hypotézou. Poté provádíme výpočet viskózní deformace v oblasti s volnou hranicí metodou konečných elementů. Výsledky těchto simulací naznačují, že relaxace spodního kráteru probíhá rychleji, než by bylo k reorientaci potřeba.

Klíčová slova: viskoelastická deformace, izostáze, Titan, Pluto

Title: Viscoelastic deformation of ice bodies in the Solar System

Author: Martin Kihoulou

Department: Department of Geophysics

Supervisor: RNDr. Klára Kalousová, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: Two icy bodies of the Solar System, a moon of Saturn Titan and a dwarf planet Pluto, are studied in this thesis. Titan's polar radius is smaller than expected, which can be explained by soaking of the ethane rain followed by methane-ethane substitution in the crust. We treat the crust as continuum with viscoelastic (Maxwell) rheology and solve its loading by spectral method. We obtain results in agreement with those published. On Pluto, the position of Sputnik Planitia crater close to the tidal axis might be a sign of subsurface ocean. This unlikely location can be explained by reorientation of the body, if the gravity anomaly of the crater is positive. This requires isostatic compensation, which would mean a material denser than ice, e.g. water, filling the lower crater. Solving by spectral method we obtain results consistent with the hypothesis. However, solving viscous deformation in domain with free surface by finite element method indicates that the lower crater relaxes too fast to explain reorientation.

Keywords: viscoelastic deformation, isostasy, Titan, Pluto

Obsah

Úvod	2
I Viskoelastická deformace - spektrální metoda	4
1 Matematická formulace	5
1.1 Deformace ledové slupky	5
1.2 Numerické řešení	9
1.3 Test programu	10
2 Titan	12
2.1 Topografická anomálie	13
2.2 Výsledky modelu	14
3 Pluto	21
3.1 Existence podpovrchového oceánu	21
3.2 Proces relaxace	22
3.3 Výsledky modelu	23
II Viskózní tečení - metoda konečných elementů	26
4 Matematická formulace	27
4.1 Zákony zachování	27
4.2 ALE metoda	29
4.3 Okrajové podmínky	30
4.4 Pohyb volného povrchu	30
4.5 Numerické řešení	31
4.5.1 Slabá formulace	31
4.5.2 Časová diskretizace	34
4.6 Test programu	36
4.6.1 Konvekční část	36
4.6.2 Volný povrch	37
5 Pluto	39
5.1 Chladnutí ledové slupky	39
5.2 Relaxace kráteru	41
Diskuse	43
Závěr	45
Literatura	46
Seznam obrázků	49
A Přílohy	50

Úvod

Ledová tělesa sluneční soustavy jsou poslední dobou předmětem zájmu především kvůli možné přítomnosti kapalné vody pod jejich ledovou slupkou, což je z astrobiologického hlediska jeden ze základů pro vznik života jaký známe. Jedná se především o ledové měsíce plynných obrů Jupiteru a Saturnu, v neposlední řadě také o trpasličí planetu Pluto. O existenci kapalného oceánu svědčí silné důkazy v případě pěti těles: výtrysky ledových částic z povrchu Enceladu, indukované magnetické pole Europy a Callisto, polární záře na Ganymedu a sklon rotační osy Titanu [Nimmo a Pappalardo, 2016]. Významným zdrojem informací o vnitřní struktuře jsou kromě snímků také gravitační a topografická data získaná oběhem nebo průletem sondy.

V této práci se budeme zabývat dvěma ledovými tělesy, která mají z hlediska pochopení vnitřních dějů zásadní význam. Prvním z těchto těles je Titan, největší Saturnův měsíc, pro který máme díky misi Cassini-Huygens topografická a gravitační data [Iess a kol., 2010]. Uhlovodíková jezera a dusíková atmosféra vytvářejí prebiotické prostředí podobné tomu, jaké bylo dříve na Zemi. Doposud nedořešeným problémem jsou Titanovy polární oblasti, které vykazují v průměru asi o 300 m nižší topografii než rovníkové oblasti. Tento jev se pokusily vysvětlit dvě hypotézy. Dynamická deprese vznikající táním na rozhraní led-oceán v polárních oblastech [Kvorka a kol., 2017] a precipitace v polárních oblastech s následnou ethanovou substitucí [Choukroun a Sotin, 2012]. První model vyžaduje velmi tuhou ledovou slupku, což nedovoluje vysvětlit přítomnost atmosféry únikem volatilních prvků z nitra měsíce. V této práci ověříme druhou hypotézu na základě numerického modelu viskoelastické deformace kulového tělesa.

Druhým z ledových těles, kterým se budeme zabývat, je trpasličí planeta Pluto. Nejnovější poznatky ukazují, že by se pod jeho ledovou slupkou mohl nacházet kapalný oceán, a to i přesto, že Pluto má velmi omezené zdroje tepla a kvůli absenci atmosféry nízkou povrchovou teplotu. Klíčovou stopou je zde poloha kráteru Sputnik Planitia, který se navzdory své negativní topografii chová jako kladná gravitační anomálie [Nimmo a kol., 2016]. Pomocí modelu relaxace tohoto útvaru se pokusíme hypotézu podpovrchového oceánu ověřit.

K modelování viskoelastické deformace použijeme spektrální metodu, která je obecně aplikována na problémy (přibližně) sférické symetrie. Přítomností kráteru se geometrie stává silně nesférickou, proto lze výsledek této metody brát pouze jako odhad. Z toho důvodu budeme problém dále řešit pomocí metody konečných elementů jako viskózní tečení v kartézské 2D geometrii.

Cílem práce je vyvinout programy pro numerickou simulaci deformace obou těles a výsledky porovnat s výše zmíněnými hypotézami. V případě Titanu by mohly výsledky sloužit jako podklad pro další výzkum. NASA již od roku 2017 plánuje na Titan vyslat misi *Dragonfly*, jehož cílem bude studovat chemické složení na několika místech povrchu. Se znalostí vnitřních procesů můžeme vybrat nejvhodnější místa pro přistání. Pokud by se potvrdilo, že se pod povrchem Pluta nachází ledový oceán, s největší pravděpodobností se vyskytuje i na stovkách až tisících dalších těles v Kuiperově pásu, odkud Pluto pochází.

Práce je rozdělena do dvou hlavních částí. První část je věnována řešení problémů spektrální metodou. V kapitole 1 nejprve odvodíme rovnice a hraniční podmínky pro viskoelastickou deformaci ledové slupky a zformulujeme je pro řešení spektrální metodou. Program řešící tuto úlohu otestujeme. V kapitole 2 stručně představíme Titan a dvě hypotézy vysvětlující jeho topografickou anomálii. Dále prezentujeme výsledky zatěžování ledové slupky různými typy zátěže - konstantní silou, srážkami a srážkami s vsakováním. V kapitole 3 uvádíme základní informace o Plutu a představíme úvahu o přítomnosti vodního oceánu na základě polohy pánve Sputnik Planitia. Relaxaci kráteru řešíme spektrální metodou a diskutujeme správnost výsledků.

Ve druhé části formulujeme úlohu relaxace kráteru pomocí metody konečných elementů. V kapitole 4 odvodíme rovnice pro viskózní tečení v Boussinesquově aproximaci, převedeme je do slabé formulace a ověříme funkčnost základního konvekčního programu. Pro simulaci vývoje volné hranice použijeme ALE metodu, kterou porovnáme s dynamickou topografií. V kapitole 5 program upravíme pro geometrii a fyzikální parametry ledové slupky a zkusíme relaxační čas horního a spodního kráteru. Na závěr diskutujeme výsledky, zjednodušení modelu a další možný vývoj práce.

Část I

Viskoelastická deformace - spektrální metoda

1. Matematická formulace

1.1 Deformace ledové slupky

Ledovou slupku uvažujeme jako kontinuum popsané viskoelastickou reologií. Pomocí zákonů zachování odvodíme rovnice popisující deformaci kontinua. Tyto rovnice pak formulujeme ve tvaru sférických harmonických funkcí a budeme je numericky řešit ve 3D geometrii.

Zákon zachování hmoty má tvar

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \, dV = 0,$$

kde ρ je hustota kontinua a $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ materiálová derivace. Použitím Reynoldsova transportního teorému [Martinec, 2011] získáme tvar

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \, dV = \int_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right) dV = 0,$$

kde \vec{v} je rychlost. Dále použijeme identitu $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$ a předpokládáme konstantní hustotu. Získáme rovnici kontinuity ve tvaru

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

kteřou lze za pomoci posunutí \vec{u} zapsat jako

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.1)$$

Dále použijeme zákon zachování hybnosti.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} \, dV = \int_{S(t)} \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{V(t)} \rho \vec{f} \, dV,$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je Cauchyho tenzor napětí a \vec{f} je objemová síla působící na jednotku hmoty. Analogicky jako výše použitím Reynoldsova transportního teorému a rovnice kontinuity dostáváme

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \vec{f}.$$

Za předpokladu malých rychlostí lze zanedbat setrvačný člen na levé straně a dostaneme tak pohybovou rovnici ve tvaru

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \vec{f} = 0. \quad (1.2)$$

Dalším vztahem je reologický vztah pro elastický model

$$\boldsymbol{\sigma} - \mu [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] = 0, \quad (1.3)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je deviatorická část tenzoru napětí ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + p\mathbf{I}$), p je tlak, μ je modul pružnosti. Pro výpočet relaxace použijeme modifikaci tohoto vztahu pro maxwellovské viskoelastické těleso

$$\boldsymbol{\sigma} - \mu [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] = - \int_0^t \frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma} \, dt, \quad (1.4)$$

kde η je viskozita.

Hraniční podmínky na povrchu (pro $r = R_s$) píšeme ve tvaru

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_r + \rho_i g u_r \vec{e}_r = 0, \quad (1.5)$$

a na hranici oceánu a ledu (pro $r = R_b$)

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_r + (\rho_w - \rho_i) g u_r \vec{e}_r = 0, \quad (1.6)$$

kde \vec{e}_r je radiální vektor, ρ_w a ρ_i hustoty vody a ledu a u_r je radiální část posunutí.

Závislost viskozity ledu na teplotě lze popsat následujícím vztahem [Kuchta a kol., 2015]

$$\eta = \frac{T^l d^m}{2A\sigma_{II}^{n-1}} \exp\left(\frac{E}{RT}\right), \quad (1.7)$$

kde T je teplota, d je velikost zrna, E a A jsou parametry pro daný typ tečení, R je molární plynová konstanta a σ_{II} je druhý invariant napětí. Mocniny l , m a n závisejí na druhu tečení (creepu), který uvažujeme. Zde bereme v úvahu difúzní creep η_{diff} . Parametry pro tento druh tečení jsou uvedeny v tabulce 1.1.

	A ($\text{Pa}^{-n} \text{K}^1 \text{m}^m \text{s}^{-1}$)	l	n	m	E (kJ mol^{-1})
η_{diff}	$9.0 \cdot 10^{-8}$	1	1	2	59

Tabulka 1.1: Creepové parametry ledu.

Jelikož difúzní creep pro nízké teploty dává extrémně velkou viskozitu ($> 10^{30} \text{ Pa} \cdot \text{s}$), používáme pro numerickou stabilitu rovnic limitor viskozity (tzv. cut-off viskozitu)

$$\eta = \min\{\eta_{\text{diff}}, \eta_{\text{cut}}\}. \quad (1.8)$$

Hodnota η_{cut} se obvykle volí mezi $10^{22} - 10^{26} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, vliv konkrétní hodnoty bude diskutován v dalších částech. Teplotní profil ledové slupky uvažujeme jako aproximaci řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích s pevnými okrajovými podmínkami, a to ve tvaru lineárního poklesu z povrchu na hranici ledové slupky a oceánu.

Pokud má ledová slupka sférický (nebo slabě asférický) tvar, k výpočtu můžeme použít sférických harmonických funkcí. Předpokládáme přitom pouze radiální závislost parametrů. Funkce vystupující v rovnicích (1.1)–(1.6) rozložíme do báze funkcí [Varshalovich a kol., 1988]:

$$\begin{aligned} \vec{u}(t, r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=j-1}^{j+1} u_{jm}^l(t, r) \mathbf{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi), \\ \vec{f}(t, r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=j-1}^{j+1} f_{jm}^l(t, r) \mathbf{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi), \\ \boldsymbol{\tau}(t, r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=0,2}^j \sum_{k=j-l}^{j+l} \tau_{jm}^{kl}(t, r) \mathbf{Y}_{jm}^{kl}(\vartheta, \varphi), \\ \boldsymbol{\sigma}(t, r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{n=-1}^1 \tau_{jm}^{j+2n,2}(t, r) \mathbf{Y}_{jm}^{j+2n,2}(\vartheta, \varphi), \\ -p\mathbf{I}(t, r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tau_{jm}^{j0}(t, r) \mathbf{Y}_{jm}^{j0}(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Pokud tyto tvary dosadíme do rovnic (1.1)–(1.6), můžeme je řešit pro každý stupeň j a řád m zvlášť. Jelikož náš model budeme uvažovat axiálně symetrický, zůstanou nenulové pouze některé koeficienty v sumách (1.9). Vztahy pro působení operátorů na báze funkce lze nalézt např. v práci Varshalovich a kol. [1988]. Píšeme tedy následovně rovnici kontinuity

$$0 = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right) u_{jm}^{j-1}(t,r) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm}^{j+1}(t,r), \quad (1.10)$$

pohybové rovnice

$$\begin{aligned} -f_{jm}^{j-1}(t,r) &= -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \tau_{jm}^{j0}(t,r) \\ &+ \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j-2}{r} \right) \tau_{jm}^{j-2,2}(t,r) \\ &- \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r} \right) \tau_{jm}^{j2}(t,r), \end{aligned} \quad (1.11a)$$

$$\begin{aligned} -f_{jm}^{j+1}(t,r) &= \sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \tau_{jm}^{j0}(t,r) \\ &+ \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+3)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r} \right) \tau_{jm}^{j2}(t,r) \\ &- \sqrt{\frac{j+2}{(2j+3)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+3}{r} \right) \tau_{jm}^{j+2,2}(t,r), \end{aligned} \quad (1.11b)$$

elastickou část reologických rovnic

$$0 = -2\mu \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r} \right) u_{jm}^{j-1}(t,r) + \tau_{jm}^{j-2,2}(t,r), \quad (1.12a)$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mu \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j-1)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{-1j}{r} \right) u_{jm}^{j-1}(t,r) \\ &- 2\mu \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j+3)(2j+1)}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right) u_{jm}^{j+1}(t,r) + \tau_{jm}^{j2}(t,r), \end{aligned} \quad (1.12b)$$

$$0 = 2\mu \sqrt{\frac{j+2}{2j+3}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r} \right) u_{jm}^{j+1}(t,r) + \tau_{jm}^{j+2,2}(t,r), \quad (1.12c)$$

rovnice horních okrajových podmínek

$$\begin{aligned}
-\sqrt{\frac{j}{2j+1}} &= -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}}\tau_{jm}^{j0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}}\tau_{jm}^{j-2,2} + \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j+3)}}\tau_{jm}^{j,2} \\
&\quad + \rho_i g \frac{j}{2j+1} u_{jm}^{j-1} - \rho_i g \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm}^{j+1},
\end{aligned} \tag{1.13a}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} &= -\sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}}\tau_{jm}^{j0} + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j-1)(2j+1)}}\tau_{jm}^{j,2} + \sqrt{\frac{(j+2)}{2j+3}}\tau_{jm}^{j+2,2} \\
&\quad + \rho_i g \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm}^{j-1} - \rho_i g \frac{j}{2j+1} u_{jm}^{j+1},
\end{aligned} \tag{1.13b}$$

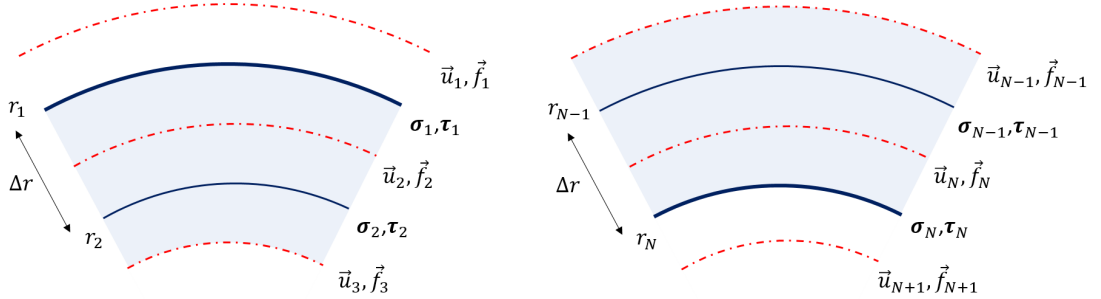
a rovnice spodních okrajových podmínek

$$\begin{aligned}
0 &= -\sqrt{\frac{j}{3(2j+1)}}\tau_{jm}^{j0} + \sqrt{\frac{j-1}{2j-1}}\tau_{jm}^{j-2,2} + \sqrt{\frac{(j+1)(2j+3)}{6(2j+1)(2j+3)}}\tau_{jm}^{j,2} \\
&\quad + (\rho_w - \rho_i) g \frac{j}{2j+1} u_{jm}^{j-1} - (\rho_w - \rho_i) g \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm}^{j+1},
\end{aligned} \tag{1.14a}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\sqrt{\frac{j+1}{3(2j+1)}}\tau_{jm}^{j0} + \sqrt{\frac{j(2j-1)}{6(2j-1)(2j+1)}}\tau_{jm}^{j,2} + \sqrt{\frac{(j+2)}{2j+3}}\tau_{jm}^{j+2,2} \\
&\quad + (\rho_w - \rho_i) g \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} u_{jm}^{j-1} - (\rho_w - \rho_i) g \frac{j}{2j+1} u_{jm}^{j+1}.
\end{aligned} \tag{1.14b}$$

1.2 Numerické řešení

Ledovou slupku rozdělíme ekvidistantně na $N - 1$ vrstev oddělených N rozhraními (obr. 1.1). Funkce \vec{u} a \vec{f} předepisujeme ve vrstvách (čerkované), funkce τ a σ na rozhraních (plnou čarou).



Obr. 1.1: Diskretizační schéma slupky. Nalevo vrstvy u povrchu, napravo u dolní hranice.

Hodnotu radiální derivace libovolné funkce f na rozhraní i aproximujeme pomocí sousedních hodnot funkce jako

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{r=r_i} \approx \frac{f_i - f_{i+1}}{\Delta r}, \quad (1.15)$$

a hodnotu funkce samotné jako

$$f(r_i) = \frac{f_i + f_{i+1}}{2}. \quad (1.16)$$

Pro libovolnou funkci h ležící ve vrstvě i derivaci aproximujeme pomocí sousedních hodnot funkce jako

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=r_i+\Delta r/2} \approx \frac{h_{i-1} - h_i}{\Delta r}, \quad (1.17)$$

a hodnotu funkce samotné jako

$$h(r_i + \Delta r/2) = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}. \quad (1.18)$$

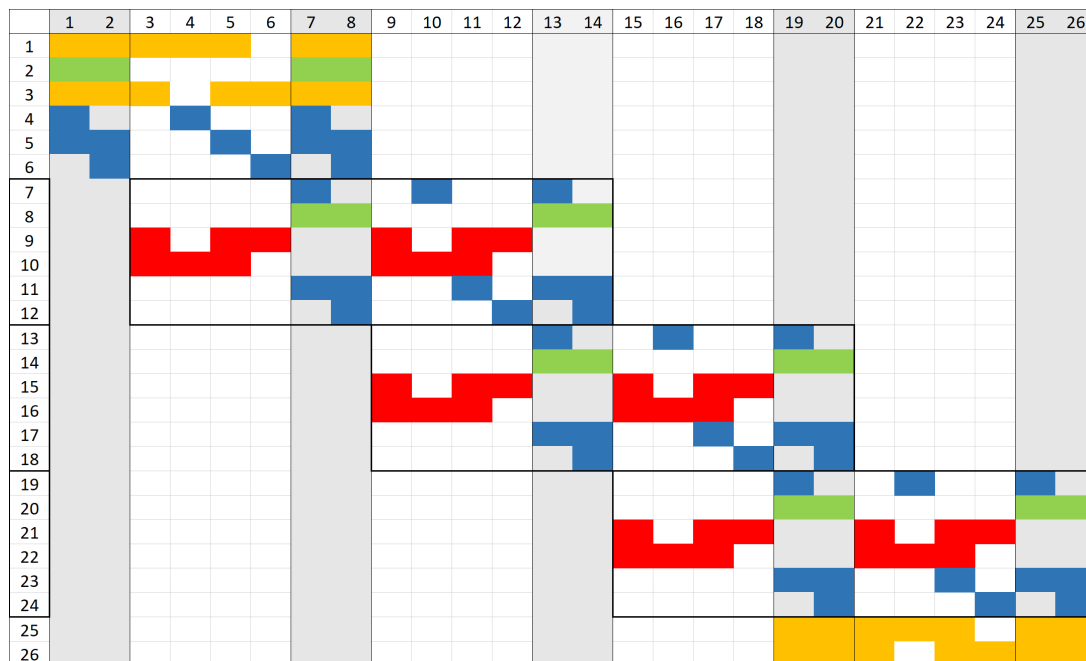
Rovnice (1.10) a (1.12a)–(1.12c) řešíme na rozhraních, zatímco rovnice (1.11a) a (1.11b) řešíme ve vrstvách. Získáme tím 4 rovnice okrajových podmínek, $2(N - 1)$ pohybových rovnic, $3N$ reologických rovnic a N rovnic kontinuity, celkem tedy $(6N + 2)$ rovnic.

Viskózní člen ve vztahu (1.4) integrujeme pomocí lichoběžníkového pravidla

$$\begin{aligned} \int_0^t f d\tau &= \Delta\tau \left[\frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{f_2 + f_3}{2} + \dots + \frac{f_{N-1} + f_N}{2} \right] \\ &= \frac{f_1}{2} \Delta\tau + \sum_{i=2}^{N-1} f_i \Delta\tau + \frac{f_N}{2} \Delta\tau, \end{aligned} \quad (1.19)$$

kde $\Delta\tau$ je časový krok.

Na obr. 1.2 je znázorněna pásová struktura matice soustavy diskretizovaných PDR pro $N = 3$. S ohledem na řídkost matice je pořadí rovnic zvoleno tak, aby měla výsledná matice pásovou strukturu s minimální šířkou pásu a nenulové členy na hlavní diagonále. Takovou soustavu lze pak efektivně řešit pomocí procedur *bandec* a *banbks* [Press a kol., 1993].



Obr. 1.2: Grafické znázornění matice diskretizovaných rovnic pro $N = 4$. Žlutě jsou znázorněny členy rovnic okrajových podmínek, zeleně rovnice kontinuity, modře reologické rovnice a červeně pohybové rovnice. Tučnými rámečky jsou vyznačeny rovnice, které přísluší jednotlivým vrstvám. Ve sloupcích jsou uspořádané členy odpovídající neznámým $u_1^{j-1}, u_1^{j+1}, \tau_1^{j0}, \tau_1^{j-2,2}, \tau_1^{j,2}, \tau_1^{j+2,2}, \dots, u_4^{j-1}, u_4^{j+1}$, kde dolní index značí číslo rozhraní.

1.3 Test programu

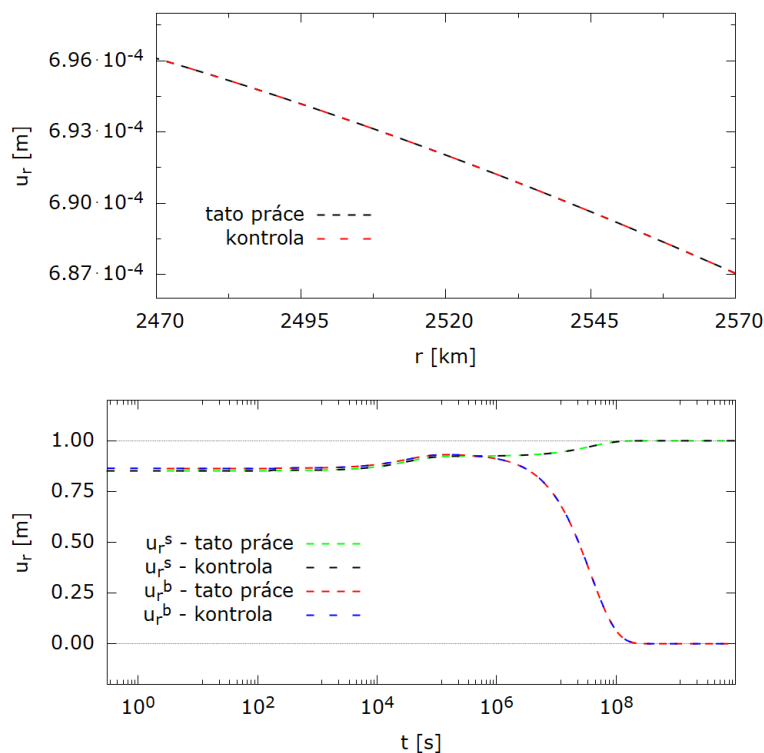
Správnost výsledků programu byla ověřena s výsledky programu již dříve vyvinutého Ondřejem Čadkem. Parametry pro testovací výpočet shrnuje tabulka 1.2.

Vnější poloměr	R_s	2570	km
Vnitřní poloměr	R_b	2470	km
Hustota vody	ρ_w	1000	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Hustota ledu	ρ_i	920	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Tíhové zrychlení	g	1,35	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Modul pružnosti	E	3,3	GPa
Viskozita	η	10^{14}	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
Počet vrstev	n	100	–

Tabulka 1.2: Parametry testovacího programu.

Testujeme elastickou část řešení, kdy porovnááme hodnotu posunutí v závislosti na poloměru, a viskózní část, kdy porovnááme časový vývoj radiálního posunutí horní u_r^s a dolní u_r^b hranice při relaxaci (obr. 1.3).

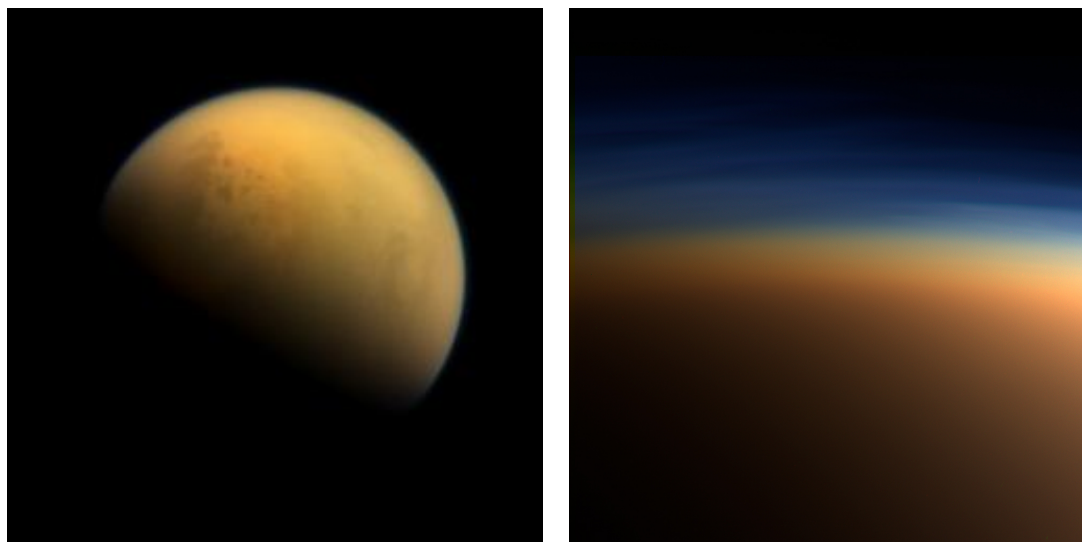
Obě části řešíme na stupni $j = 2$. V případě elastické části zatěžíme slupku konstantní silou o velikosti $f_{20}^l = 1$, v případě viskózní části silou $f_{20}^l = \rho_i g$. Pro elastickou část dosahujeme průměrně přesnosti řádu $\approx 10^{-15}$ m, pro viskózní část $\approx 10^{-7}$ m. Řešení se spolu shodují výborně.



Obr. 1.3: Test elastické (nahore) a viskózní (dole) části programu.

2. Titan

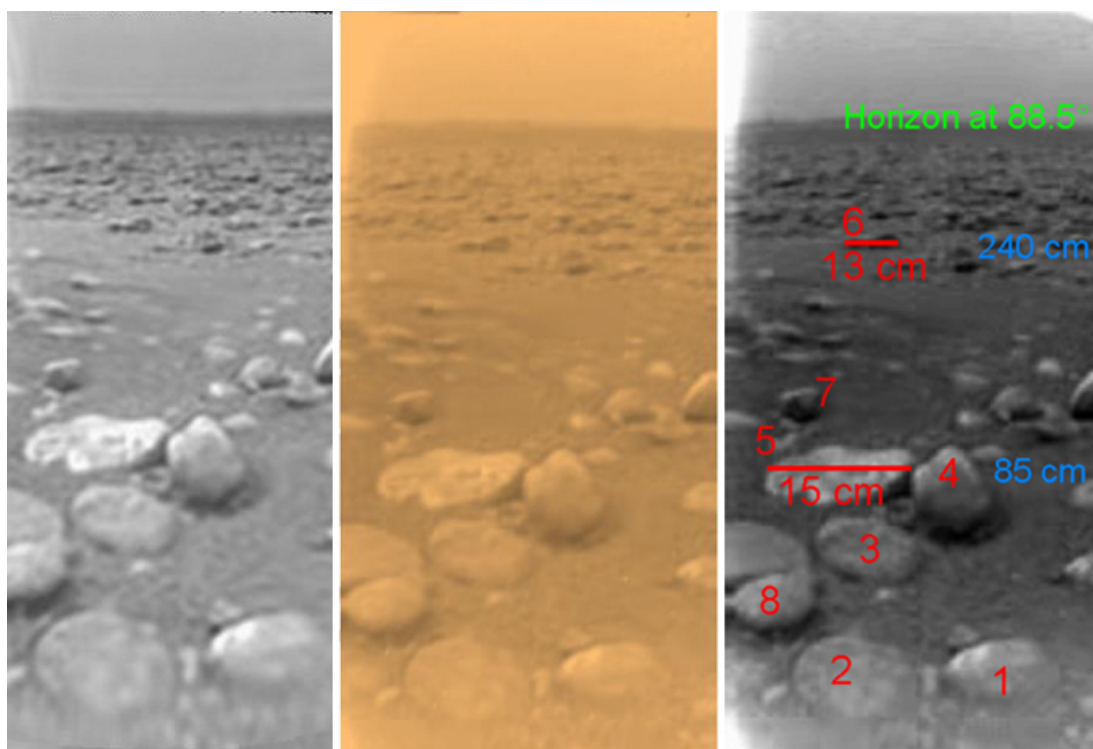
Titan je největší měsíc Saturnu objevený v roce 1655 Christianem Huygensem. Zároveň je druhým největším měsícem ve sluneční soustavě. Doposud nejvíce informací o Titanu poskytla mise Cassini-Huygens (1997–2017), díky které máme k dispozici fotografie (obr. 2.1) a gravitační a topografická data. V roce 2004 přistávací modul Huygens sestoupil na povrch Titanu a poskytl údaje o vlastnostech atmosféry a povrchu (obr. 2.2).



Obr. 2.1: Vlevo: Titan ve skutečných barvách. Hustá dusíková atmosféra zabraňuje pozorování povrchu ve viditelném spektru. Vpravo: Atmosféra Titanu, modré a oranžové zabarvení je dobře rozeznatelné [NASA, 2018].

Titan má tvar trojosého rotačního elipsoidu s hlavní osou o velikosti 2 575 km. Předpokládá se plná diferenciace na silikátové jádro a hydrosféru, která by měla být tvořena vysokotlakou a nízkotlakou fází ledu oddělenými oceánem. Jednou z výjimečností Titanu je přítomnost husté dusíkové atmosféry, která na žádném jiném měsíci doposud pozorována nebyla. Díky tomu existují klimatické jevy, které mohou různými způsoby ovlivňovat vlastnosti povrchu. Jedná se především o větrnou erozi a kapalně srážky. Srážky jsou příčinou další výjimečnosti, a to stabilních kapalných uhlovodíkových jezer. V důsledku mírné inklinace lze na Titanu rozlišovat roční období [Hussmann a kol., 2015].

Přítomný oceán musí obsahovat příměs, která snižuje teplotu tání (pravděpodobně amoniak). Topografie Titanu je charakterizována malým rozpětím (cca 1 km peak-to-peak), což spolu s malými gravitačními anomáliemi (~ 20 m [Iess a kol., 2010]) značí vysoký stupeň kompenzace. Zvláštností je, že póly jsou zploštělé asi o 300 m oproti sféroidu. Vysvětlení tohoto fenoménu momentálně navrhuje dvě hlavní hypotézy. První hypotézou je methan-ethanová substituce pod povrchem [Choukroun a Sotin, 2012], druhou je slapové zahřívání s laterálními variacemi tepelného toku [Kvorka a kol., 2017]. Nyní tyto hypotézy krátce představíme.



Obr. 2.2: Snímky z povrchu Titanu pořízené modulem Huygens v roce 2004 [NASA, 2018].

2.1 Topografická anomálie

Methan-ethanová substituce

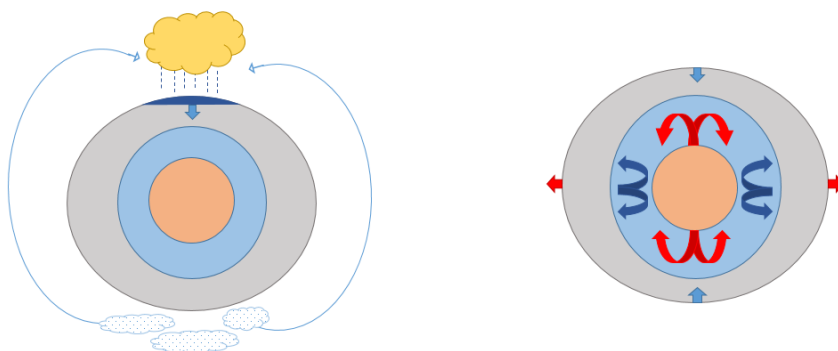
Methan je po dusíku druhou nejčastěji zastoupenou látkou v atmosféře Titanu. Předpokládá se, že je jednak uvolňován z methanových klatrátů, které tvoří pevný povrch, jednak je vyvrhován do atmosféry kryovulkány a případnými impakty. Ve vyšších částech atmosféry dochází k fotolýze methanu a rekombinací dvou methanových radikálů vznikne molekula ethanu. Ethan následně z kondenzuje, formou kapalných srážek zformuje jezera, a nadále se vsakuje pod povrch. Na základě laboratorních experimentů bylo zjištěno, že v klatrátech může dojít k substituci ethanu za methan [Choukroun a Sotin, 2012].

Methan vyloučený takovým procesem se pak dostává opět na povrch výše zmíněnými cestami. Substituce se předpokládá do hloubky $(2,9 \pm 1,3)$ km, přičemž stabilita ethanových klatrátů se uvádí až do hloubky 10 km. Ethanové klatráty mají větší (cca o 8 %) hustotu než methanové (které jsou přibližně stejně husté jako led), působí tedy v ledové slupce jako objemová zátěž, [Choukroun a Sotin, 2012]. Důvodem koncentrace srážek v polárních oblastech je charakter proudění atmosféry Titanu (obr. 2.3a). Díky pomalé rotaci je proudění uspořádáno do jedné konvekční buňky, která míří od pólu k pólu, orientace závisí na ročním období. Ethan vzniká fotolýzou v oblasti, kde je momentálně léto, a díky atmosférickému proudění kondenzuje na opačném pólu, kde právě probíhá zima.

Dynamická topografie

Topografie Titanu může být také ovlivněna dynamikou podpovrchového oceánu, zejména fázovými přechody na rozhraní s ledovou slupkou. Existuje-li v oceánu teplý vzestupný proud, způsobí natavení rozhraní - naopak, sestupný studený proud způsobí namrzání (obr. 2.3b). Oba děje mají za důsledek změnu topografie ve snaze kompenzovat gravitační anomálii vytvořenou na spodním rozhraní. Autoři Kvorka a kol. [2017] uvádí, že snížení pólů o 300 m může být vysvětleno laterálními variacemi tepelného toku z oceánu o velikosti $0,1 - 1 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$. Dalšími předpoklady je stabilita tepelného toku alespoň po dobu 10 mil. let a značná viskozita spodní části slupky. Toho může být dosaženo buďto chladným oceánem ($< 233 \text{ K}$) nebo velkým ledovým zrnem ($> 10 \text{ mm}$).

(a) Zatížení polárními srážkami. (b) Laterální variace tepelného toku.



Obr. 2.3: Grafické znázornění hypotéz methan-ethanové substituce a dynamické topografie.

2.2 Výsledky modelu

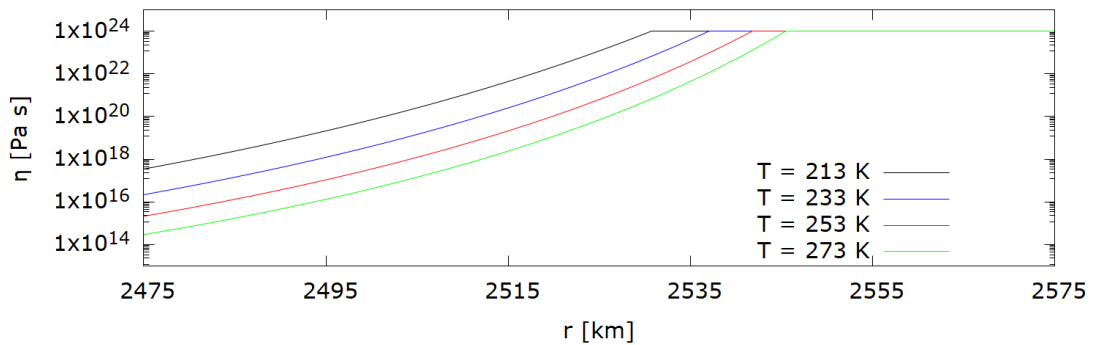
Parametry použité pro simulaci jsou uvedeny v tabulce 2.1. Nejprve byl vypočten viskózní profil ledové slupky (obr. 2.4) pro čtyři různé teploty oceánu v intervalu od 213 K do 273 K (teplota tání ledu). V tomto případě uvažujeme difúzní creep (1.7) a limitor viskozity (1.8). Vidíme, že pro spodní rozhraní je teplota oceánu zásadním parametrem, neboť nárůst o 20 K způsobí pokles viskozity o jeden řád. Všechny křivky s rostoucím poloměrem strmě rostou a nejvýše 30 km pod povrchem dospějí do limitní hodnoty viskozity, lze tedy očekávat, že horní část slupky bude tužší než spodní. Z toho můžeme také vyvodit, že pokles relaxačního času s rostoucí teplotou bude znatelný pro dolní rozhraní více než pro horní.

Zatížení konstantní silou

Nejprve studujeme, jak bude slupka reagovat na zátěž o konstantní velikosti $f_{j0}^l = 1 \cdot g\rho_i$ působící v radiálním směru na daném stupni j v závislosti na teplotě oceánu. Obrázek 2.5 zobrazuje časový vývoj posunutí hranice daného poloměru na stupních $j = 2, 4, 6$ a 8. Levý sloupec náleží hranici slupka/oceán ($r = 2475 \text{ km}$), sloupec vpravo povrchu ($r = 2575 \text{ km}$).

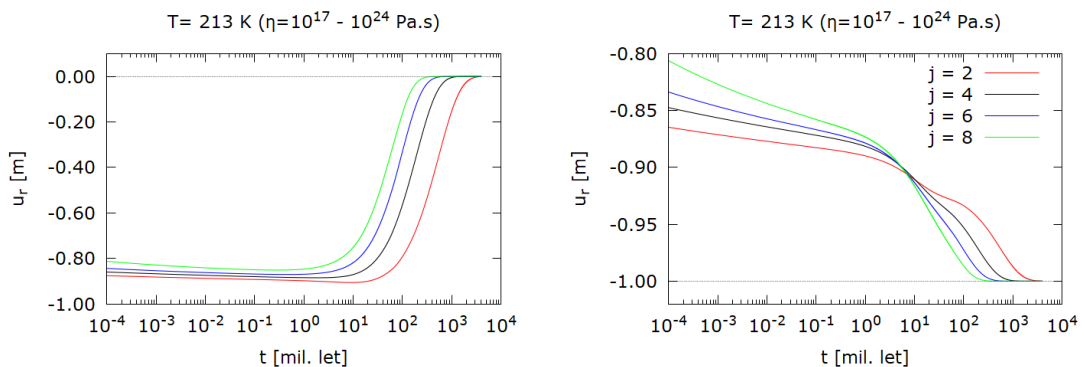
Hustota ledu	ρ_i	920	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Hustota vody	ρ_w	1000	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Hustota ethanu	ρ_{meth}	565	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Hustota eth. klatrátů	ρ_{ek}	993	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Vnější poloměr	R_s	2575	km
Vnitřní poloměr	R_b	2475	km
Teplota na povrchu	T_s	93	K
Teplota na rozhraní	T_b	213 - 273	K
Tíhové zrychlení	g	1,35	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Modul pružnosti	E	3,3	GPa
Cut-off viskozita	η_{cut}	10^{24}	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
Velikost zrna	d	1	mm

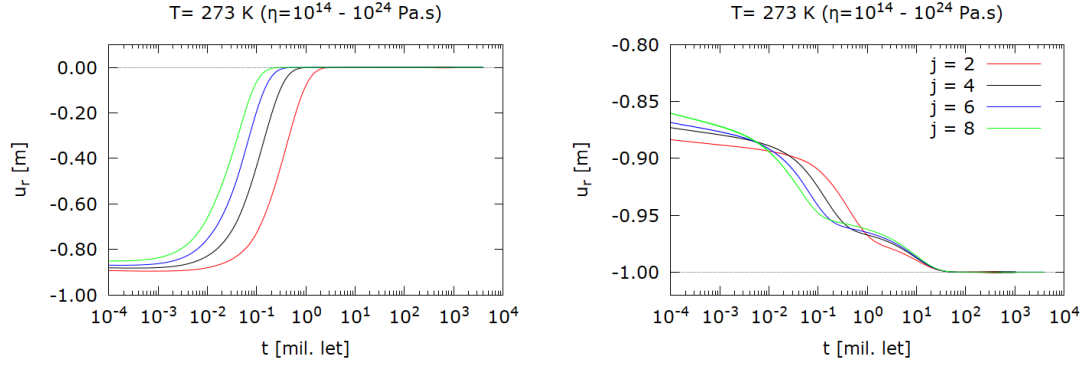
Tabulka 2.1: Parametry úlohy pro Titan.



Obr. 2.4: Radiální průběh viskozity v ledové slupce Titanu.

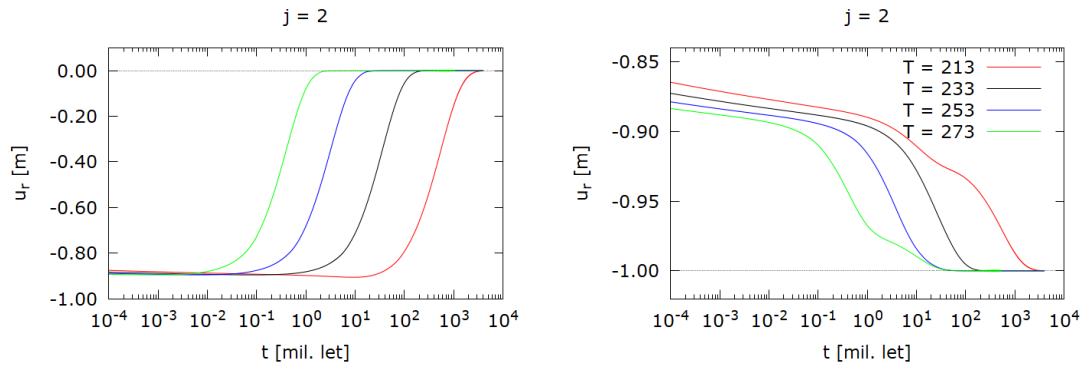
Při nejnižší teplotě relaxuje slupka nejprve od vyšších stupňů k nižším. S rostoucí teplotou se tento trend pro povrch mění a zároveň se sobě relaxační časy jednotlivých stupňů přibližují. Spodní hranice si udržuje pořadí relaxace stupňů stále stejné. Na obr. 2.6 je pro přehlednost vyneseno posunutí na stupni $j = 2$ pro čtyři různé teploty od 213 K do 273 K. Vidíme, že nárůst teploty oceánu o 20 K zkracuje relaxační čas obou hranic zhruba o řád.





Obr. 2.5: Zatížení konstantní silou. Posunutí na stupních $j = 2 - 8$ pro různé teploty oceánu. Vlevo rozhraní slupka/oceán, vpravo povrch.

Nad 253 K už další navýšení teploty nemá na relaxaci horní hranice vliv. Volba síly o velikosti $g\rho_i$ slouží také k ověření, že deformace relaxací dospěla do hydrostatické rovnováhy. Tuto zátěž si lze představit jako zatížení jedním metrem hmoty o hustotě ρ_i . Spodní hranice po viskoelastické deformaci zrelaxovala do své původní pozice ($u_r = 0$ m), zatímco horní do pozice ($u_r = -1$ m).



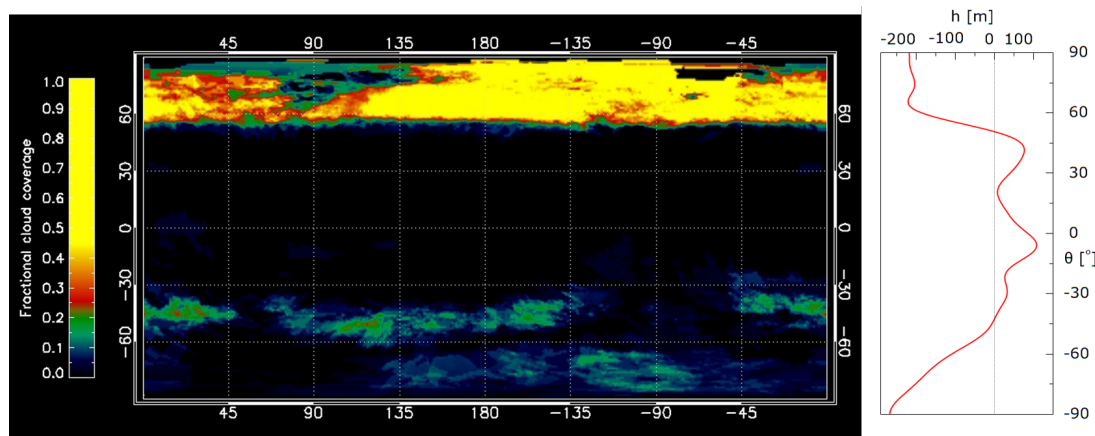
Obr. 2.6: Zatížení konstantní silou. Posunutí na stupni $j = 2$ v závislosti na teplotě oceánu. Vlevo rozhraní slupka/oceán, vpravo povrch.

Zatížení srážkami

Dále studujeme deformaci slupky zatížením ethanovými srážkami. Analýza topografie a radarových dat nasvědčuje tomu, že ke srážkám dochází v poměrně striktně vymezeném okruhu 30° okolo pólů. Autoři Choukroun a Sotin [2012] uvádí četnost srážek $50 \mu\text{m}/\text{titánský rok}$ (cca 30 pozemských let). S ohledem na to, že viskózní relaxace probíhá na mnohem delších škálách než je 30 let (obr. 2.5), nemá smysl rozlišovat sezónní střídání srážek mezi póly. Oba póly zatěžujeme stejnou silou odpovídající výše zmíněnému úhrnu srážek. Zátěž generovaná srážkami v čase t má tedy velikost

$$f_{jm}^l(t) = \min \left\{ \frac{t}{50 \text{ mil. let}}, 1 \right\} \cdot g\rho_{\text{eth}}. \quad (2.1)$$

Zaměříme-li se na průměrnou topografii pro danou zeměpisnou šířku (obr. 2.7 vpravo), vidíme, že v polárních oblastech dochází ke zdatelnému poklesu oproti zbytku povrchu. Oblast severního pólu vykazuje pokles velmi náhlý a strmý, z čehož můžeme usuzovat na lokální zatížení. Na mapě pokrytí povrchu mraky (obr. 2.7 vlevo), tomu odpovídá severní oblast končící 60. rovnoběžkou, kde byl naměřen v průměru nadpoloviční výskyt oblačnosti. Naopak v jižní oblasti nejsou mraky celistvé a celkové pokrytí povrchu je mnohem menší. Topografie v této oblasti, na rozdíl od severu, klesá pozvolna. Avšak vzhledem k rychlosti střídání období oproti geologickým časovým škálám není souvislost s pokrytím mraky samozřejmá.



Obr. 2.7: Mapa procentuálního pokrytí povrchu mraky v letech 2004 – 2010 [NASA, 2010], v porovnání s průměrnou topografií v závislosti na zeměpisné šířce.

Na obr. 2.8 je prezentován časový vývoj řešení zatížení povrchu srážkami. Úlohu jsme formulovali tak, aby byla axiálně symetrická, vyobrazujeme tedy hodnoty radiálního posunutí podél 0. a 180. poledníku. Výpočet byl proveden do stupně $j = 20$. Na levé y -ové ose vynášíme posunutí h [m], na x -ové ose zeměpisnou košířku θ [°] od severního pólu (0°) k rovníku ($\pm 90^\circ$). Na pravé y -ové ose vynášíme výšku geoidu danou vztahem

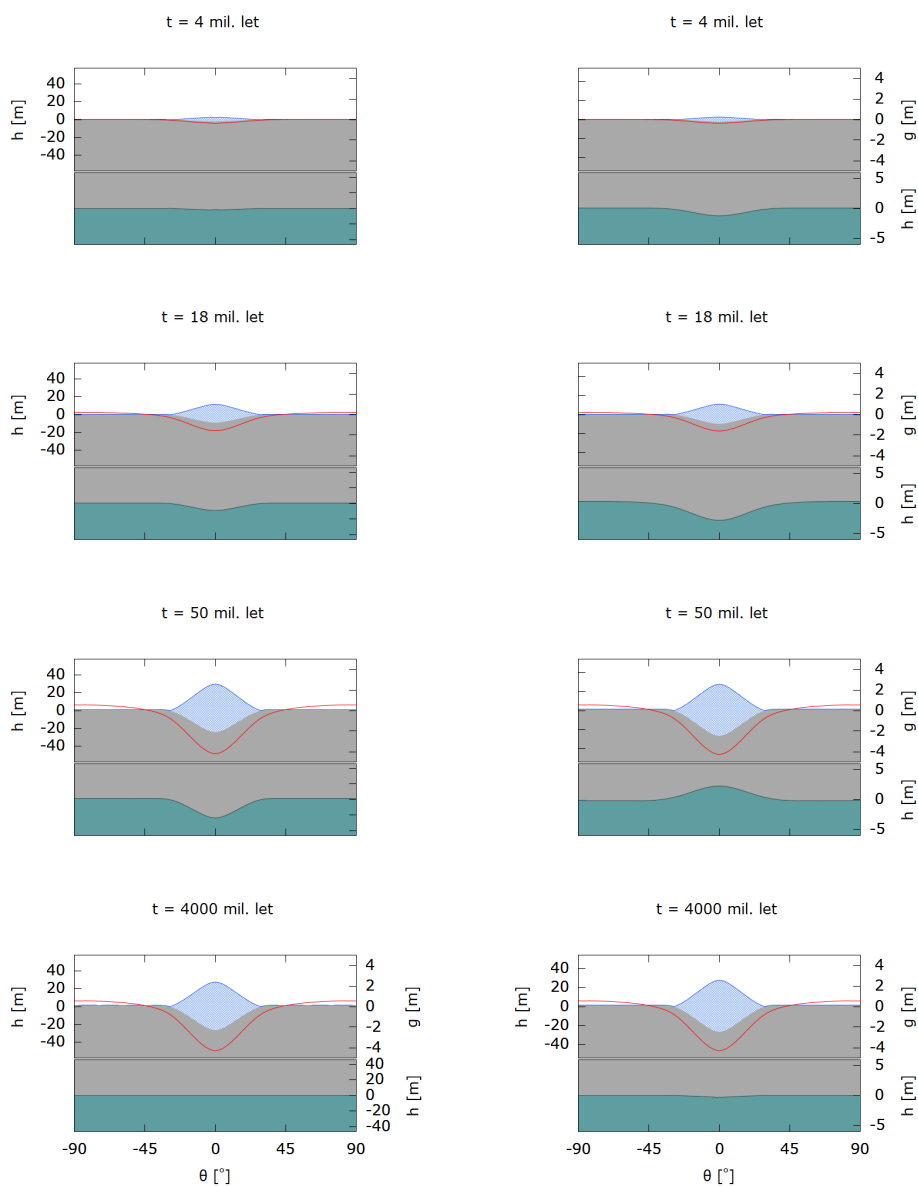
$$g_{jm} = \frac{4\pi\kappa R_s}{(2j+1)g} \left[u_{jm}^{R_s} \rho_i + u_{jm}^{R_b} (\rho_w - \rho_i) \left(\frac{R_b}{R_s} \right)^{j+2} \right]. \quad (2.2)$$

Z důvodu tloušťky ledové slupky a velikosti deformace zobrazujeme pouze okolí horního resp. dolního rozhraní, které se v obrázcích nacházejí v horní resp. dolní polovině, oddělené černou čarou. Světle modře jsou znázorněny uhlovodíkové srážky, šedě ledová slupka a tyrkysově oceán. Červená křivka reprezentuje výšku geoidu.

Zpočátku pozorujeme, jak oceán reaguje na deformaci povrchu pohybem ve stejném směru. S rostoucím časem dochází k relaxaci. Pokles povrchu pod srážkami činí jen 20 m, samotné srážky topografickou anomálii nevysvětlí. Vidíme také, že výška geoidu je velmi malá, řádově v metrech, což je méně než uvádí Iess a kol. [2010].

(a) Teplota oceánu $T_b = 213$ K.

(b) Teplota oceánu $T_b = 273$ K.



Obr. 2.8: Zatížení povrchu srážkami. Topografie povrchu dosahuje pouze několika desítek metrů. Rozhraní slupka/oceán na zatížení také reaguje, nakonec zrelaxuje do původního stavu. Rozdíl v teplotách oceánu topografii rozhraní ani výšku geoidu významně neovlivňuje, pouze topografii na rozhraní, která je pro studenější oceán zhruba 4× větší.

Zatížení srážkami a vsakováním

Za předpokladu hustotního kontrastu ethanu a methan-klatrátů $400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a viskozity ethanu řádu $\approx 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ se předpokládá, že k vsáknutí ethanu do hloubky 5 km dojde za méně než 200 milionů let [Choukroun a Sotin, 2012]. Vsakování simulujeme tak, že ve všech vrstvách od povrchu do 5 km hloubky předepisujeme lineární nárůst hustoty v čase t

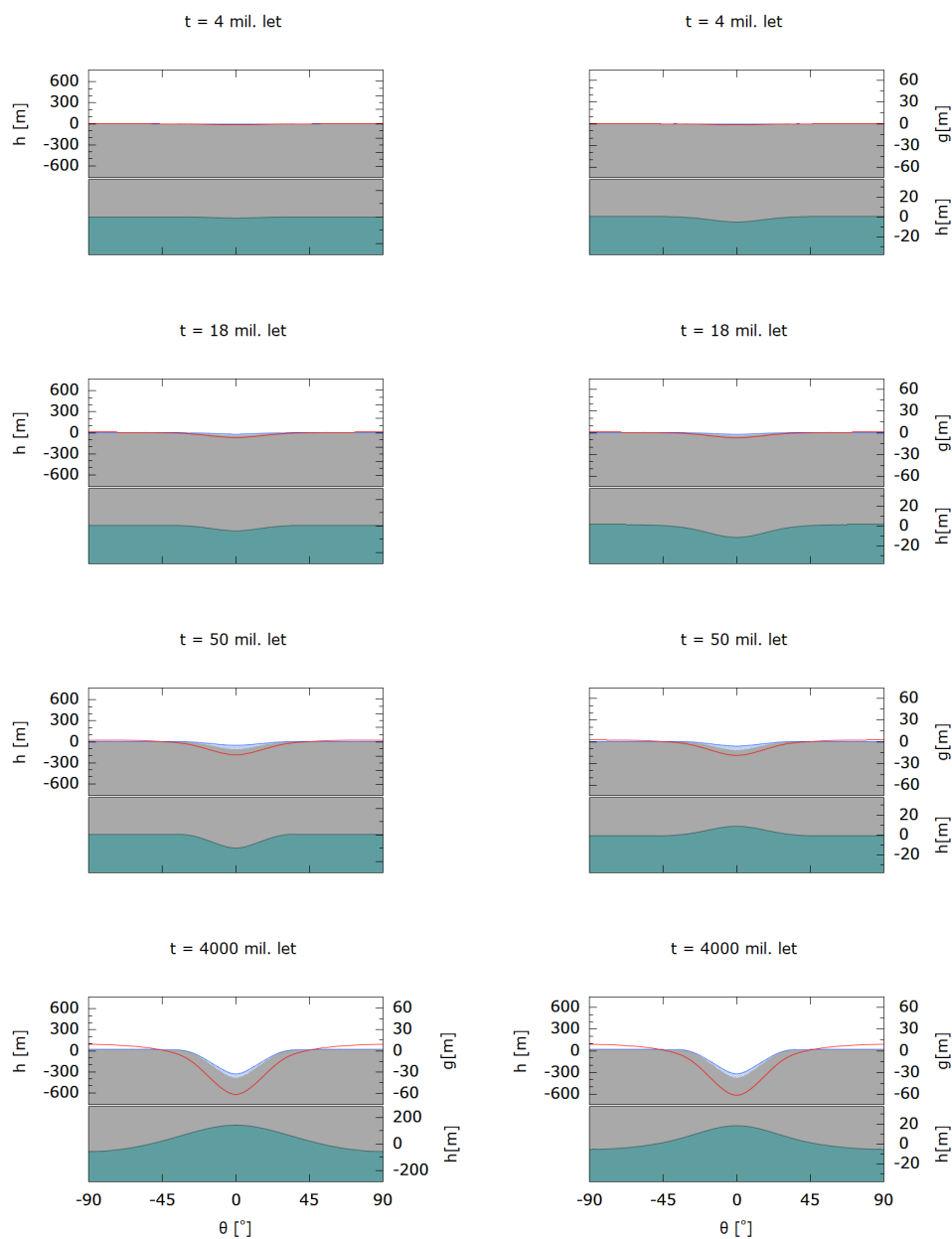
$$f_{jm}^l(t) = \min \left\{ \frac{t}{200 \text{ mil. let}}, 1 \right\} \cdot \rho_{\text{ek}} g. \quad (2.3)$$

K tomu i nadále uvažujeme povrchovou zátěž srážkami. Výpočet byl opět proveden pro různé teploty do stupně $j = 20$. Z obr. 2.9 je patrné, že přidání objemového zatížení výrazně ovlivní míru deformace. Radiální posunutí v polárních oblastech dosahuje cca 400 m, což je velmi blízko pozorované hodnotě. Amplituda geoidu je zhruba desetkrát vyšší než v případě bez vsakování.

Shrňme si nyní výsledky této kapitoly. Ačkoliv v polárních oblastech Titanu pozorujeme mnoho jezer o různých hloubkách, jejich přítomnost nezpůsobí pokles větší než několik desítek metrů. Navíc, námi uvažovaná výška zátěže (cca 50 m) je vyšší než průměrná hloubka jezer na Titanu (jednotky metrů) [Foley, 2013]. V případě vsakování dostáváme pro zvolené parametry výsledek blízký požadované hodnotě topografie. Jsou zde navíc proměnné, které mohou výslednou hodnotu ovlivnit a nejsou zcela přesně určené, např. hloubka nebo doba vsakování. Navíc v tomto případě zůstává spodní rozhraní zvlněné. Velikost výšky geoidu, který pro objemovou zátěž dostáváme, odpovídá pozorovaným hodnotám [Iess a kol., 2010]. Uvažovali jsme ovšem nejvyšší hloubku vsakování. V obou případech je ale generován především topografií povrchu, neboť topografie rozhraní slupka/oceán je položena 100 km hluboko a její vliv je slabý.

(a) Teplota oceánu $T_b = 213$ K.

(b) Teplota oceánu $T_b = 273$ K.



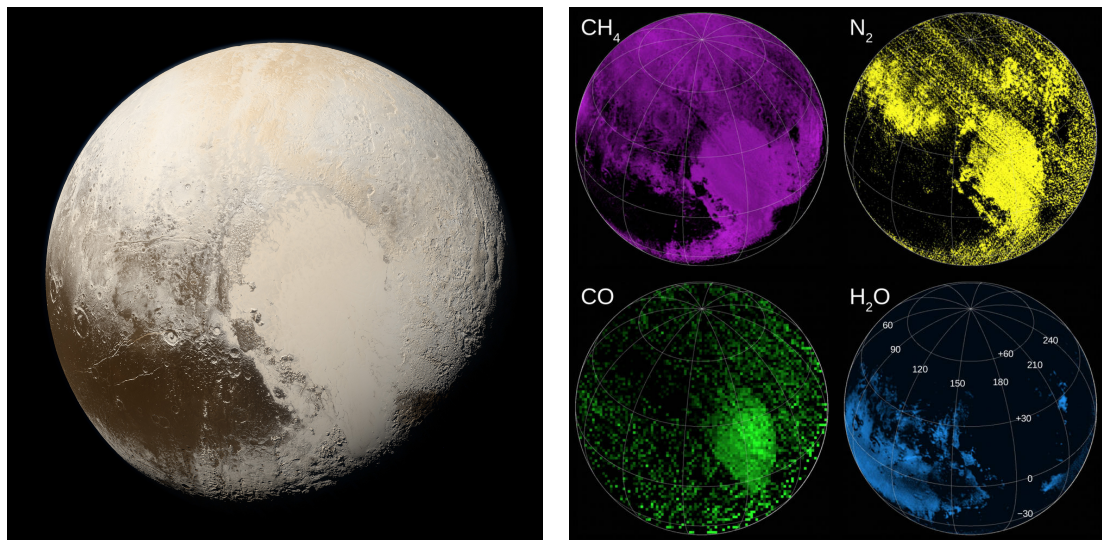
Obr. 2.9: Zatížení povrchu srážkami se vsakováním. Pokles povrchu je v tomto případě přibližně 300 m. Zároveň pozorujeme i topografii na rozhraní slupka/oceán, která je pro studenější oceán zhruba $10\times$ větší. Na rozdíl od zatížení samotnými srážkami u rozhraní slupka/oceán pozorujeme po 4 mld. let výzdvih.

3. Pluto

Pluto je trpasličí planeta, která se nachází na okraji sluneční soustavy v Kuiperově pásu. Bylo objeveno v roce 1930 P. Lowellem, přičemž první náznaky poukazující na existenci dalšího tělesa za Neptunem se objevily už v polovině 19. století. Krátce po objevu byl objeven jeho největší měsíc Charón, který je vůči rozměrům Pluta mimořádně velký. Poměr jejich hmotností je příčinou vzájemné vázané rotace a polohy těžiště, které leží neobvykle nad povrchem Pluta. Trajektorie je nápadná svým výrazným sklonem k rovině ekliptiky (cca 17°) a svou excentricitou. Bližší výzkum planety odstartovala sonda New Horizons, která v roce 2015 poskytla informace o její topografii, chemickém složení povrchu a řídké atmosféře.

3.1 Existence podpovrchového oceánu

Nejnápadnějším útvarem celého Pluta je cca 1000 km rozlehlá pánev, neformálně nazývaná Sputnik Planitia. New Horizons na jejím dně objevila vrstvu pevného dusíku a oxidu uhelnatého (obr. 3.1 vpravo), separovaného do tzv. konvekčních buněk svědčících o přenosu tepla prouděním.

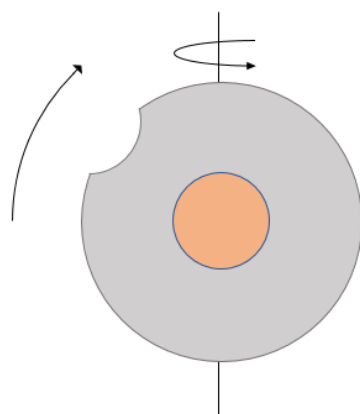


Obr. 3.1: Vlevo: Pluto ve skutečných barvách [NASA, 2015a]. Vpravo: Snímky ukazující zastoupení látek na povrchu Pluta. Pozorujeme, že se v oblasti kráteru koncentrují např. CH₄, CO a N₂, kdežto led nikoliv [NASA, 2015b].

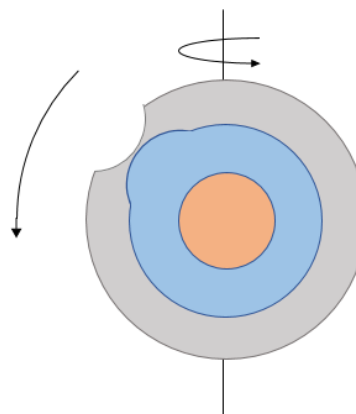
Předpokládá se, že pánev, původně asi 7 km hluboká, je impaktního původu, přičemž její nynější hloubka je zhruba poloviční. Vzhledem k poloze pánve vůči rotační ose se kráter (pánev) jeví jako pozitivní gravitační anomálie, přestože se jeho střed nachází na souřadnicích 175°E , 18°N , což je 400 km od slapové osy. Bod náhodně umístěný na povrchu má pouze 5% pravděpodobnost, že se slapové osy bude nacházet tak blízko [Nimmo a kol., 2016].

Právě z nynější pozice pánve lze usoudit, že v tomto směru má rotující Pluto nejvyšší moment setrvačnosti vůči rotační ose a pánev se chová jako kladná

(a) Bez oceánu.



(b) S oceánem.



Obr. 3.2: V případě, že je plášť pouze z ledu (a), je gravitační anomálie kráteru záporná a otáčí Pluto kráterem k rotační ose. V případě přítomnosti vody (b) je gravitační anomálie kráteru kladná a otáčí Pluto kráterem k rovníku.

gravitační anomálie (obr. 3.2b). V případě, že bychom brali v úvahu pouze chybějící hmotu z impaktu a vrstvu pevného dusíku, dospěli bychom k záporné gravitační anomálii (obr. 3.2a). Teprve pro 40km vrstvu dusíku bychom ve středu kráteru získali anomálii nulovou. Tato možnost je ale vzhledem k požadované tloušťce dusíkové vrstvy velmi nepravděpodobná. Naopak, pokud by impaktní kráter způsobil izostatický výzdvih podpovrchového oceánu, i tenká vrstva dusíku by způsobila pozitivní anomálii potřebnou k reorientaci pánve [Nimmo a kol., 2016, *Extended Data Figure 1*].

Předpokládá se, že kráter vznikl zhruba před 4 miliardami let. Budeme zkoumat čas a průběh relaxace horního a spodního kráteru (dále neformálně nazývaného „antikráter“) v závislosti na tloušťce slupky a teplotě oceánu. I přestože autoři neuvádějí, jak dlouho by měla reorientace probíhat, je zřejmě nutné požadovat, aby byla anomálie dlouhodobě stabilní. Jedině tak může být poloha kráteru vysvětlena navrhaným způsobem.

3.2 Proces relaxace

Autoři Nimmo a kol. [2016] uvádějí eliptický tvar kráteru o rozměrech přibližně 1300 km × 900 km. Pro zjednodušení jej budeme modelovat jako kruhový útvar o průměru 1100 km symetricky kolem pólu. Při poloměru Pluta 1188 km bude tedy zasahovat do cca 65° severní šířky. Použití spektrální metody vyžaduje, aby byl deformovaný povrch kulového tvaru. Nelze tedy vycházet z kulového povrchu, na kterém bude umístěn kráter. Nabízí se tedy na ledovou slupku působit konstantní silou ve tvaru kráteru a nechat ji relaxovat. Slupka takto dospěje do tvaru kráteru (daného předepsanou silou). Pokud poté odejmeme zátěž, proces relaxace se obrátí a kráter bude relaxovat do hydrostatického tvaru, což je proces, který nás zajímá. Charakter deformace je však v obou směrech totožný, proto požadované výsledky dostaneme i zatížením konstantní silou.

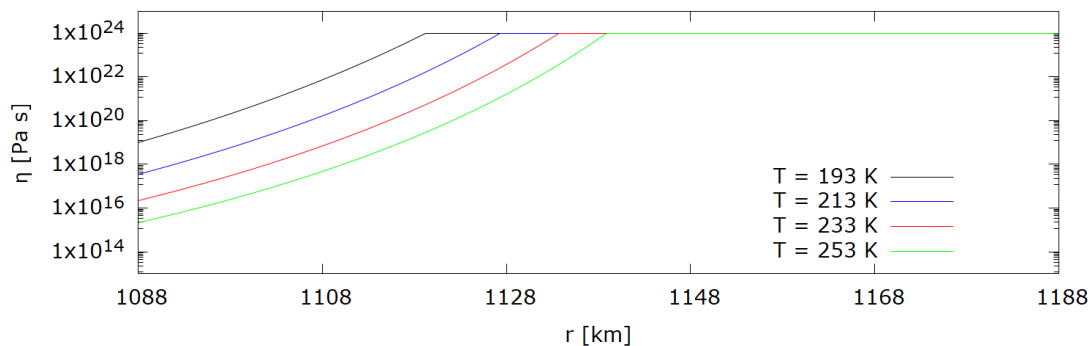
3.3 Výsledky modelu

Jako počáteční stav modelu uvažujeme izostaticky kompenzovaný kráter [Nimmo a kol., 2016], tedy 7 km hluboký kráter na povrchu a 80 km vysoký antikráter. Ostatní použité parametry shrnuje tabulka 3.1.

Hustota ledu	ρ_i	920	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Tíhové zrychlení	g	0,65	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Vnější poloměr	R_s	1188	km
Vnitřní poloměr	R_b	1088	km
Teplota na povrchu	T_s	40	K
Teplota oceánu	T_b	193 – 253	K
Cut-off viskozita	η_{cut}	10^{24}	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
Modul pružnosti	E	9	GPa

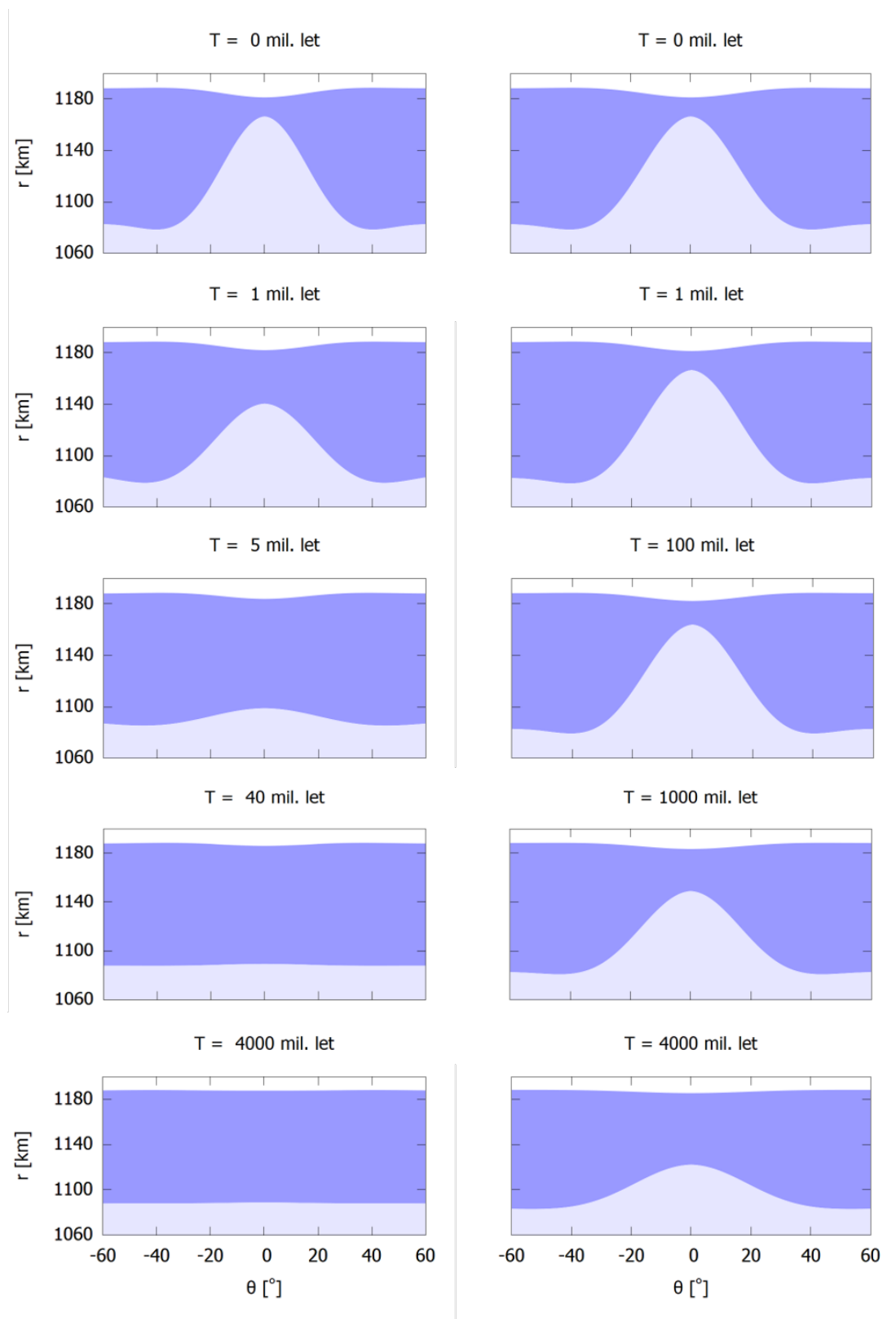
Tabulka 3.1: Parametry úlohy relaxace kráteru.

Hlavním studovaným parametrem je teplota oceánu. Viskozita závisí na teplotě exponenciálně (1.7), proto můžeme očekávat významnou závislost mezi teplotou oceánu a relaxačním časem. Radiální průběh viskozity v závislosti na teplotě oceánu znázorňuje obr. 3.3. Je patrné, že cut-off viskozita je v každém případě dosažena nejdále v polovině ledové slupky.



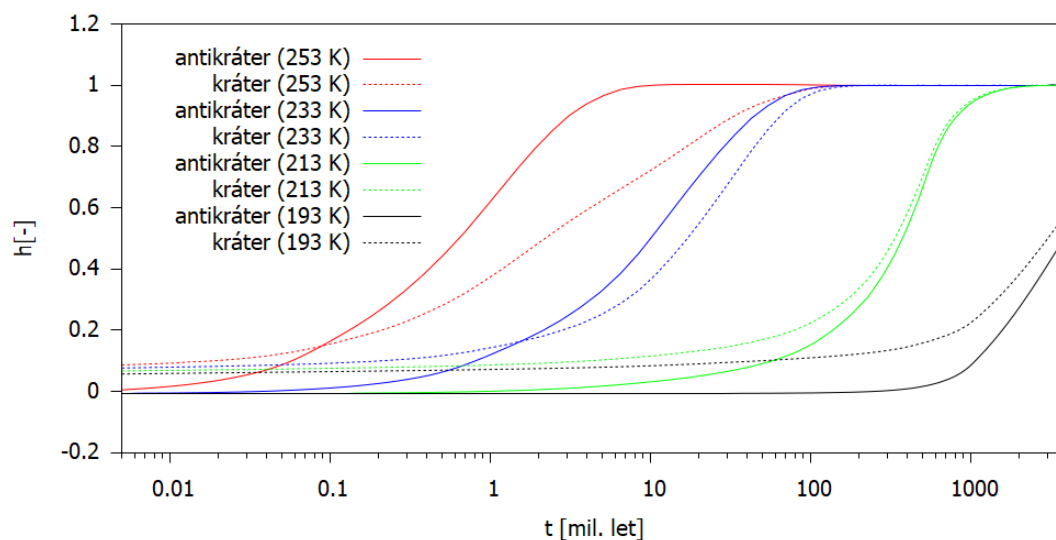
Obr. 3.3: Radiální průběh viskozity v ledové slupce Pluta.

Následuje série obrázků 3.4 lokálně znázorňující relaxaci kráteru a antikráteru. Tmavě modře je znázorněna ledová slupka, světle modře podpovrchový oceán. Na ose x je vynesena zeměpisná šířka, na ose y poloměr.



Obr. 3.4: Průběh relaxace pro teploty oceánu 253 K (vlevo) a 193 K (vpravo). Je patrné, že pro vyšší teplotu oba krátery relaxují mnohem rychleji. Teprve při teplotě zhruba 193 K je relaxace natolik pomalá, že spodní kráter nezrelaxuje ani po 4 miliardách let.

Časový průběh relaxace je znázorněn ještě na obr. 3.5, kde můžeme lépe porovnat čas relaxace kráteru a antikráteru. Na ose x vynášíme čas a na ose y normovanou velikost kráterů. Vidíme že pro teplý oceán ($T = 253$ K) zrelaxuje spodní kráter oproti hornímu velmi rychle. S klesající teplotou se tento rozdíl zmenšuje. Z výsledků je patrné, že teplota oceánu musí být velmi nízká, aby kráter (zejména spodní) vydržel nezrelaxovaný po dobu 4 miliard let.



Obr. 3.5: Relaxační křivky pro různé teploty oceánu.

Jak již bylo zmíněno v úvodu, spektrální metoda je vhodná pro problémy přibližně sférické symetrie. V případě izostatického spodního kráteru je tato podmínka porušena a získaný výsledek je třeba chápat pouze jako odhad. V následující části k modelu relaxace kráteru použijeme metodu konečných elementů a problém budeme řešit lokálně kartézsky.

Část II

Viskózní tečení - metoda konečných elementů

4. Matematická formulace

4.1 Zákony zachování

Pro modelování viskózního tečení použijeme zákony zachování v Boussinesquově aproximaci (např. [Matyska, 2005]).

Zákon zachování hmoty

Rovnici kontinuity získáme stejným způsobem jako v části (1.1), tedy

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (4.1)$$

Zákon zachování hybnosti

Pohybovou rovnici použijeme v již odvozeném tvaru (1.2)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \vec{f} = 0,$$

kam dosadíme konstitutivní vztah pro newtonovskou kapalinu

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta(\nabla\vec{v} + \nabla^T\vec{v}).$$

Z objemových sil budeme uvažovat pouze gravitační sílu a zahrneme navíc teplotní roztažnost materiálu

$$\rho \vec{f} = \rho \vec{g} = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g},$$

kde α je koeficient teplotní roztažnosti, ρ_0 referenční hustota a T_0 referenční teplota. Celkově tedy dostáváme

$$-\nabla p + \nabla \cdot \eta(\nabla v + \nabla^T v) + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g} = 0. \quad (4.2)$$

Zákon zachování energie

Bilanční rovnice pro energii dávající do rovnosti změnu vnitřní a kinetické energie kontinua s výkonem sil (povrchových a objemových) a tepelným tokem skrze hranici S , má tvar

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\vec{v} \cdot \vec{v})dV = \int_S \vec{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho\vec{g} \cdot \vec{v} dS - \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS.$$

kde je ϵ hustota vnitřní energie a \vec{q} tepelný tok. Aplikací Reynoldsova transportního teorému, Gaussovy věty a dosazením pohybové rovnice dostáváme

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \boldsymbol{\tau} : \nabla\vec{v} - \nabla \cdot \vec{q},$$

tedy bilanci hustoty vnitřní energie ϵ . Za použití Gibbsovy relace, konstitutivního vztahu pro napětí, Maxwellovy relace a Fourierova zákona můžeme psát

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \alpha T \frac{Dp}{Dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla\vec{v}$$

kde c_p je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku a k tepelná vodivost. Po zanedbání adiabatického členu a viskózní disipace dostáváme výsledný vztah

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) - \rho c_p \vec{v} \cdot \nabla T, \quad (4.3)$$

který vyjadřuje lokální časovou změnu teploty způsobenou vedením tepla (člen $\nabla \cdot (k \nabla T)$) a prouděním materiálu (člen $\rho c_p \vec{v} \cdot \nabla T$).

Máme tedy soustavu parciálních diferenciálních rovnic:

$$0 = \nabla \cdot \vec{v}, \quad (4.4a)$$

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \eta(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g}, \quad (4.4b)$$

$$\rho_0 c_P \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) - \rho_0 c_P \vec{v} \cdot \nabla T. \quad (4.4c)$$

Oproti klasické Boussinesquově aproximaci zde uvažujeme teplotně závislou viskozitu a plný tvar pohybové rovnice. V rovnicích termální konvekce se tlak obvykle rozkládá na hydrostatický a přírůstkový $p = p_h + \Pi$ a členy v rovnici (4.4b) $\rho_0 \vec{g}$ a $-\nabla p_h$ se pak odečtou. V tomto případě ponecháváme plný tvar z důvodu stability řešení úlohy s volným povrchem.

Rovnice (4.4) můžeme převést do bezrozměrného tvaru za použití škálovacích vztahů v tabulce (4.1), kde D je výška oblasti, T_s teplota horní hranice oblasti, k_0 , η_0 referenční hodnoty tepelné vodivosti a viskozity, $\Delta T = T_b - T_s$ teplotní rozdíl mezi horní a dolní hranicí, κ je difuzivita definovaná jako

$$\kappa = \frac{k_0}{\rho_0 c_p}. \quad (4.5)$$

Škálovací vztah pro tlak odpovídá hydrostatickému tlaku.

$$\begin{array}{cccc} \overline{r = Dr'} & \overline{t = \frac{D^2}{\kappa} t'} & \overline{v = \frac{\kappa}{D} v'} & \overline{k = k_0 k'} \\ \overline{p = \rho_0 g D p'} & \overline{\eta = \eta_0 \eta'} & \overline{T = T_s + \Delta T T'} & \end{array}$$

Tabulka 4.1: Škálovací vztahy.

Přeškálované veličiny dosadíme do rovnic (4.4) a upravíme pomocí Rayleighova čísla

$$\text{Ra} = \frac{\alpha \rho_0 g \Delta T D^3}{\kappa \eta_0}. \quad (4.6)$$

Získaná bezrozměrná formulace má tvar

$$0 = \nabla' \cdot \vec{v}', \quad (4.7a)$$

$$0 = -\frac{\text{Ra}}{\alpha \Delta T} \nabla' p' + \nabla' \cdot \eta'(\nabla' \vec{v}' + \nabla'^T \vec{v}') + \text{Ra}(T' - T'_0)\vec{e}_z - \frac{\text{Ra}}{\alpha \Delta T} \vec{e}_z, \quad (4.7b)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \nabla' \cdot (k' \nabla' T') - \vec{v}' \cdot \nabla' T', \quad (4.7c)$$

kde \vec{e}_z je jednotkový vektor mířící proti směru tíhového zrychlení, tedy

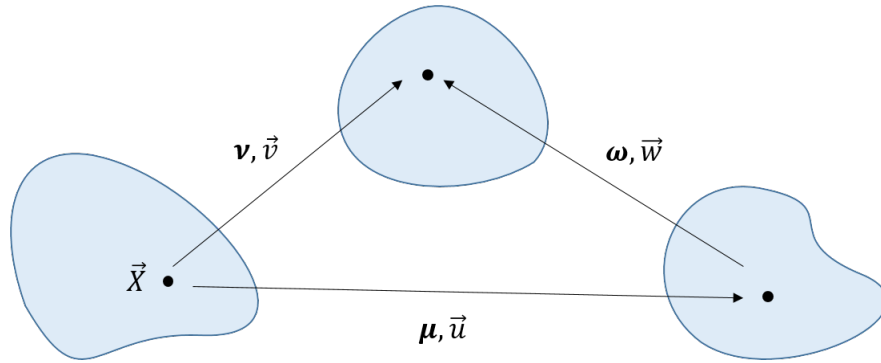
$$\vec{g} = -g \vec{e}_z. \quad (4.8)$$

4.2 ALE metoda (Arbitrary Lagrangian-Eulerian)

K popisu deformace kontinua jsou nejčastěji používány Lagrangeovská (referenční) a Eulerovská (okamžitá) konfigurace. ALE metoda (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) kromě výše zmíněných dvou využívá nové konfigurace, kterou ztotožníme s výpočetní sítí. Hlavní předností je, že tato síťová konfigurace se může měnit v čase a není svázaná s materiálovým bodem, je tedy možné s ní pohybovat nezávisle. Nyní si zavedeme označení jednotlivých konfigurací a odvodíme vztahy pro derivaci libovolné skalární veličiny. Zobrazení mezi jednotlivými konfiguracemi jsou znázorněna na obr. 4.1. Podrobné odvození lze nalézt např. v práci Scovazzi a Hughes [2007].

Lagrangeovskou, Eulerovskou resp. síťovou konfiguraci značíme v pořadí Ω_X , Ω_x a Ω_χ a polohové vektory v nich \vec{X} , \vec{x} resp. $\vec{\chi}$. Zobrazení ν z Lagrangeovské do Eulerovské konfigurace zavedeme jako

$$\begin{aligned}\nu(\cdot, t) : \Omega_X &\longmapsto \Omega_x = \nu(\Omega_X, t), \\ \vec{X} &\longmapsto \vec{x} = \nu(\vec{X}, t).\end{aligned}\tag{4.9}$$



Obr. 4.1: Zobrazení ν , ω a μ mezi Lagrangeovskou (vlevo), Eulerovskou (nahore) a síťovou (vpravo) konfigurací.

Nyní vyjádříme vztah pro Lagrangeovskou (materiálovou) časovou derivaci skalární funkce $\alpha(\vec{x}, t)$ v Eulerovské konfiguraci

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{x}} &= \left. \frac{\partial \alpha(\nu(\vec{X}, t), t)}{\partial t} \right|_{\vec{x}} \\ &= \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} \\ &= \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \nabla_{\vec{x}} \alpha \cdot \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} = \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} \alpha,\end{aligned}\tag{4.10}$$

kde \vec{v} je materiálová rychlost bodu \vec{X} . Totéž provedeme pro zobrazení ω z konfigurace sítě do Eulerovské konfigurace

$$\begin{aligned}\omega(\cdot, t) : \Omega_\chi &\longmapsto \Omega_x = \omega(\Omega_\chi, t), \\ \vec{\chi} &\longmapsto \vec{x} = \omega(\vec{\chi}, t).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Analogickým způsobem jako výše dostaneme

$$\left. \frac{\partial \alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{x}} = \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \vec{w} \cdot \nabla_{\vec{x}} \alpha, \quad (4.12)$$

kde \vec{w} je rychlost síťového bodu \vec{x} .

Nyní do materiálové časové derivace (4.10) dosadíme vztah (4.12), abychom měli časovou derivaci vyjádřenou v síťovém bodě \vec{x}

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{x}} &= \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} \alpha = \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{\vec{x}} - \vec{w} \cdot \nabla_{\vec{x}} \alpha + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} \alpha \\ &= \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \vec{c} \cdot \nabla_{\vec{x}} \alpha. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Zavádíme zde konvektivní rychlost $\vec{c} = \vec{v} - \vec{w}$, která vyjadřuje rozdíl mezi materiálovou a síťovou rychlostí. Materiálová derivace (4.10) se vyskytuje pouze v rovnici přenosu tepla (4.4c), kterou upravíme pomocí konvektivní rychlosti

$$\rho_0 c_P \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) - \rho_0 c_P \vec{c} \cdot \nabla T. \quad (4.14)$$

4.3 Okrajové podmínky

Nechť Ω je oblast a Γ její hranice. Hranici rozdělíme na tři disjunktní podmnožiny $\Gamma = \Gamma_{\text{top}} \cup \Gamma_{\text{bot}} \cup \Gamma_{\text{side}}$ pro rozlišení horní hranice, spodní hranice a dvou bočních hranic. Pro teplotní rovnici (4.4c) předepisujeme konstantní teplotu na horní a spodní hranici (Dirichletova podmínka) a nulový tepelný tok skrze boční hranice (Neumannova podmínka)

$$\begin{aligned} T &= T_{\text{surf}} \quad \text{na } \Gamma_{\text{top}}, \\ T &= T_{\text{oc}} \quad \text{na } \Gamma_{\text{bot}}, \\ \nabla T \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{na } \Gamma_{\text{side}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Jako okrajovou podmínku pro rychlosti volíme tzv. „free-slip“ podmínku (volný prokluz)

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{na } \Gamma, \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_t &= 0 \quad \text{na } \Gamma, \end{aligned} \quad (4.16)$$

kde dolní index t značí tečnou složku. Tlak je určený až na konstantu, proto jej fixujeme ve vybraném bodě výpočetní oblasti.

4.4 Pohyb volného povrchu

Uvažujeme vždy pohyb pouze jedné hranice Γ_{top} nebo Γ_{bot} . Volnou hranici pak označíme Γ_{free} a fixovanou označíme Γ_{fix} . Dále uvažujeme, že výška volné hranice je funkcí souřadnice x a času t , tedy $z = h(t, x(t))$. Derivací podle t dostáváme

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} v_x = v_z. \quad (4.17)$$

Úlohu formulujeme pomocí dvou funkcí $h_1(x,t)$ a $h_2(x,z,t)$, které definujeme následovně.

Funkce $h_1(x,t)$ odpovídá výšce volné hranice a prodloužíme ji na zbytek sítě tak, aby byla ve směru z konstantní. Toho docílíme Neumannovými podmínkami na bočních hranicích a na fixní hranici, Dirichletovou podmínkou (4.17) na volné hranici a ponecháním pouze z -ové složky Laplaceova operátoru. Inicializujeme ji tvarem v počátečním stavu (např. rovná hranice nebo kráter). Řešíme tedy úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} &= 0 & \text{v } \Omega, \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x} v_x &= v_z & \text{na } \Gamma_{\text{free}}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial z} &= 0 & \text{na } \Gamma_{\text{fix}}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} &= 0 & \text{na } \Gamma_{\text{side}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Funkce $h_2(x,z,t)$, kterou používáme k posunu sítě, je poté harmonickým rozšířením funkce $h_1(x,t)$ s Dirichletovými podmínkami na volné a fixované hranici a s Neumannovými na bočních stranách:

$$\begin{aligned} \Delta h_2 &= 0 & \text{v } \Omega, \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} &= 0 & \text{na } \Gamma_{\text{side}}, \\ h_2 &= h_1 & \text{na } \Gamma_{\text{free}}, \\ h_2 &= 0 & \text{na } \Gamma_{\text{fix}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

K posunu sítě pak použijeme rozdíl funkcí $h_2(x,z,t)$ z aktuálního a předchozího časového kroku. V případě volného povrchu upravíme okrajové podmínky (4.16)

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &= 0 & \text{na } \Gamma \setminus \Gamma_{\text{free}}, \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_t &= 0 & \text{na } \Gamma \setminus \Gamma_{\text{free}}, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n} &= 0 & \text{na } \Gamma_{\text{free}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

a podmínku na tlak nepoužíváme.

4.5 Numerické řešení

Program jsme vyvinuli pomocí volně dostupného softwaru FEniCS [Alnæs a kol., 2015; Logg a kol., 2012], určeného pro numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou konečných prvků (FEM - finite element method). Uvažujeme klasickou Galerkinovu metodu [Quarteroni a Valli, 1994]. Nejprve odvodíme slabou formulaci rovnic, poté diskutujeme časovou diskretizaci.

4.5.1 Slabá formulace

Rovnice kontinuity

Rovnici kontinuity ve tvaru

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

přenásobíme skalární testovací funkcí φ a integrujeme přes oblast Ω

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v}) \varphi \, dx = 0. \quad (4.21)$$

Pohybová rovnice

Pohybovou rovnicí

$$-\nabla p + \nabla \cdot \eta(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) + \rho_0 \alpha g(T - T_0) \vec{e}_z - \rho_0 g \vec{e}_z = 0,$$

přenásobíme vektorovou testovací funkcí $\vec{\chi}$ a integrujeme přes oblast Ω . Zavedeme dočasné označení $\mathbf{A} = \eta(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v})$:

$$\int_{\Omega} (-\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{A} + \rho_0 \alpha g(T - T_0) \vec{e}_z - \rho_0 g \vec{e}_z) \cdot \vec{\chi} \, dx = 0.$$

Upravujeme:

$$\nabla \cdot [\mathbf{A} \cdot \vec{\chi}] = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i (A_{jk} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) \cdot (\chi_l \vec{e}_l) = \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ik} \chi_k = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \vec{\chi} + \mathbf{A} : \nabla^T \vec{\chi}.$$

Aplikací Greenovy věty dostaneme

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \eta(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v})] \cdot \vec{\chi} \, dx = \int_{\partial \Omega} \eta(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) \cdot \vec{\chi} \cdot \vec{n} \, dS - \int_{\Omega} \eta(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) : \nabla^T \vec{\chi} \, dx.$$

Plošný integrál bude roven nule díky hraničním podmínkám typu „free-slip“ (resp. „free surface“)

$$\begin{aligned} \vec{\chi} \cdot \vec{n} &= 0, \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_t &= (\eta(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) \cdot \vec{n})_t = 0. \end{aligned}$$

Pro pohybovou rovnici nakonec dostáváme tvar

$$\int_{\Omega} p \nabla \cdot \chi + [\rho_0 \alpha g(T - T_0) \vec{e}_z - \rho_0 g \vec{e}_z] \cdot \vec{\chi} - \eta(\nabla \vec{v} + \nabla^T \vec{v}) : \nabla^T \vec{\chi} \, dx = 0. \quad (4.22)$$

Rovnice kontinuity se spolu s pohybovou rovnicí nazývá Stokesův problém a řeší se spárovaně. Pro Stokesův problém používáme z důvodu stability tzv. Taylor-Hood elementy [Taylor a Hood, 1973], tedy po částech kvadratické elementy pro rychlost a po částech lineární elementy pro tlak.

Rovnice přenosu tepla

Rovnici přenosu tepla

$$\rho_0 c_P \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) - \rho_0 c_P \vec{v} \cdot \nabla T$$

přenásobíme skalární testovací funkcí ψ a integrujeme přes oblast Ω

$$\rho_0 c_P \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} \psi + \vec{v} \cdot \nabla T \psi \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) \psi \, dx.$$

Druhá derivace se zde vyskytuje opět jen v jednom členu, který upravíme analogickým způsobem jako v pohybové rovnici

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) \psi \, dx = \int_{\partial \Omega} k \nabla T \psi \cdot \vec{n} \, dS - \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \psi \, dx.$$

Díky Dirichletovým hraničním podmínkám na horizontálních hranicích a nulovému tepelnému toku přes boční hranice je hraniční integrál opět roven nule a celkově tedy platí

$$\rho_0 c_P \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} \psi + \vec{v} \cdot \nabla T \psi \, dx = - \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \psi \, dx. \quad (4.23)$$

Pro řešení zde používáme po částech kvadratické elementy z důvodu zachování numerické přesnosti na bočních hranicích.

Rovnice volného povrchu

Dirichletova podmínka (4.18) pro funkci $h_1(x,t)$ v sobě obsahuje derivaci funkce $h_1(x,t)$, kvůli čemuž ji není možné zapsat klasickým způsobem. Tento problém řeší Nietzcheho metoda [Juntunen a Stenberg, 2009], která umožňuje z obecného tvaru okrajové podmínky limitou jednoduše přejít k Dirichletově nebo Neumannově podmínce a implementovat ji do slabé formulace dané rovnice.

Uvažujme Laplaceovu rovnici ve tvaru

$$\Delta h = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad (4.24)$$

s okrajovou podmínkou ve tvaru

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon}(h_0 - h) + g, \quad (4.25)$$

kde $\varepsilon \in [0, \infty]$ je parametr a $\frac{\partial h}{\partial n} = \nabla h \cdot \vec{n}$ je derivace ve směru normály. Jednotlivé okrajové podmínky dostaneme limitou $\varepsilon \rightarrow \infty$ (Neumannova) nebo $\varepsilon \rightarrow 0$ (Dirichletova). Nyní rovnici (4.24) přenásobíme testovací funkcí ϕ , zintegrujeme přes oblast Ω a aplikujeme Greenovu větu. Z Laplaceovy rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla \phi \, dx - \int_{\Gamma_{\text{free}}} \frac{\partial h}{\partial n} \phi \, ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla \phi \, dx - \int_{\Gamma_{\text{free}}} \frac{\partial h}{\partial n} \phi \, ds + \int_{\Gamma_{\text{free}}} (h_0 - h) \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds, \end{aligned} \quad (4.26)$$

kde v posledním řádku z důvodu symetrie bilineární formy přičítáme člen nulový na hranici.

Okrajovou podmínku (4.25) přenásobíme testovací funkcí ϕ a zintegrujeme přes element E

$$\varepsilon \int_E \frac{\partial h}{\partial n} \phi \, ds + \int_E h \phi \, ds = \int_E h_0 \phi \, ds + \varepsilon \int_E g \phi \, ds,$$

přičemž limitou $\varepsilon \rightarrow 0$ dostaneme Dirichletovu podmínku

$$\int_E h \phi \, ds = \int_E h_0 \phi \, ds.$$

Pro celou volnou hranici pak píšeme

$$\sum_{E \in \Gamma_{\text{free}}} \frac{1}{\gamma h_E} \int_E h \phi \, ds = \sum_{E \in \Gamma_{\text{free}}} \frac{1}{\gamma h_E} \int_E h_0 \phi \, ds,$$

resp.

$$\frac{1}{\gamma h_E} \int_{\Gamma_{\text{free}}} h \phi \, ds = \frac{1}{\gamma h_E} \int_{\Gamma_{\text{free}}} h_0 \phi \, ds, \quad (4.27)$$

kde $\gamma > 0$ je stabilizační parametr a h_E je velikost hraničního elementu.

Vztahy (4.26) a (4.27) nyní sečteme a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla \phi \, dx - \int_{\Gamma_{\text{free}}} \frac{\partial h}{\partial n} \phi \, ds - \int_{\Gamma_{\text{free}}} h \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds + \frac{1}{\gamma h_E} \int_{\Gamma_{\text{free}}} h \phi \, ds \\ &\quad - \frac{1}{\gamma h_E} \int_{\Gamma_{\text{free}}} h_0 \phi \, ds + \int_{\Gamma_{\text{free}}} h_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds \\ &= \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla \phi \, dx - \int_{\Gamma_{\text{free}}} \frac{\partial h}{\partial n} \phi \, ds - \int_{\Gamma_{\text{free}}} (h - h_0) \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\phi}{\gamma h_E} \right) \, ds. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Za člen $(h - h_0)$ v posledním integrálu nyní dosadíme rovnici volného povrchu (4.17). Výsledná rovnice pro funkci $h_1(x, t)$ bude mít tvar

$$0 = \int_{\Omega} \frac{\partial h_1}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} dx - \int_{\Gamma_{\text{free}}} \frac{\partial h_1}{\partial z} \phi ds - \int_{\Gamma_{\text{free}}} \left[\Delta h + \Delta t \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} v_x - v_z \right) \right] \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\phi}{\gamma h_E} \right) ds. \quad (4.29)$$

Pro funkci $h_2(x, z, t)$ a testovací funkci ν bude mít slabá formulace tvar

$$\int_{\Omega} \nabla h_2 \cdot \nabla \nu dx = 0. \quad (4.30)$$

V případě funkcí $h_1(x, t)$ a $h_2(x, z, t)$ používáme po částech lineární elementy.

Přítomnost oceánu

Pokud je volnou hranicí Γ_{bot} , je nutné vzít v úvahu, že na tuto hranici působí trakce odpovídající tlaku oceánu p_o

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n} = -p_o \vec{n}.$$

Tlak oceánu bude funkcí vertikální souřadnice z a pro jeho velikost platí

$$p_o = g(\rho_i D - \rho_w z), \quad (4.31)$$

kde D je tloušťka ledové slupky. Ve slabé formulaci k levé straně rovnice (4.22) přičteme člen

$$\int_{\Gamma_{\text{free}}} g(\rho_w z - \rho_i D) \vec{n} \cdot \vec{\chi} dS. \quad (4.32)$$

4.5.2 Časová diskretizace

Rovnice přenosu tepla a rovnice volného povrchu obsahují časové derivace. K jejich diskretizaci v případě rovnice přenosu tepla používáme schéma Crank-Nikolsonové

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(T, \vec{v}),$$

$$\frac{T - T^k}{\Delta t} = \frac{1}{2} [f(T, \vec{v}) + f^k(T, \vec{v})], \quad (4.33)$$

kde index k značí řešení z předchozího časového kroku. V případě rovnice volného povrchu použijeme implicitní Eulerovo schéma

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = f(h_1, v_z, v_x),$$

$$\frac{h_1 - h_1^k}{\Delta t} = f(h_1, v_z, v_x). \quad (4.34)$$

Časový krok počítáme dle CFL (Courant–Friedrichs–Lewyho) kritéria, tedy

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{conv}} &= cfl \cdot \frac{x_{\text{min}}}{u_{\text{max}}}, \\ \Delta t_{\text{cond}} &= cfl \cdot \frac{x_{\text{min}}^2 \rho_i c_p}{k(T_o)},\end{aligned}\tag{4.35}$$

kde Δt_{cond} je kondukční časový krok, Δt_{conv} je konvekční časový krok a cfl parametr typicky v intervalu $\langle 0,1; 1 \rangle$. Výsledný časový krok bereme jako

$$\Delta t = \min\{dt_{\text{conv}}, dt_{\text{cond}}\}.\tag{4.36}$$

Následuje algoritmus použitý k výpočtu.

```
inicializace teploty
inicializace h1

řešení rovnice h2

while t < t_end
    řešení teplotní rovnice
    řešení Stokesovy úlohy

    inicializace h1_k
    inicializace h2_k

    řešení rovnice h1
    řešení rovnice h2

    projekce posunutí sítě (dh=h2-h2_k)
    výpočet rychlosti sítě (v_sit=dh/dt)

    posunutí sítě o dh

    výpočet adaptivního časového kroku
    přičtení časového kroku delta t
```

4.6 Test programu

4.6.1 Konvekční část

K otestování konvekčního kódu jsme použili tzv. Blankenbachův benchmark [Blankenbach a kol., 1989], který srovnává výsledky konvekčních kódů 14 autorů. Porovnání provádíme pomocí veličin charakterizujících přenos tepla a rychlosti proudění: Nusseltova čísla a střední kvadratické rychlosti. Nusseltovo číslo je definováno jako poměr celkového ku konduktivnímu přenosu tepla. V benchmarku je vypočteno jako

$$\text{Nu} = -h \frac{\int_0^l \partial_z T(x, z = h) dx}{\int_0^l T(x, z = 0) dx}, \quad (4.37)$$

a střední kvadratickou rychlost lze psát jako

$$v_{\text{rms}} = \frac{h}{\kappa} \left[\frac{1}{hl} \int_0^l \int_0^h (v, v) dx dz \right]^{1/2}, \quad (4.38)$$

kde h, l jsou výška a délka boxu, (\cdot, \cdot) značí skalární součin. Kontrolu jsme provedli v bezrozměrném tvaru pro případy (1a) - (1c). Fyzikální parametry pro tyto výpočty shrnuje tabulka 4.2.

Výška oblasti	h	10^6	m
Teplotní kontrast	ΔT	1000	K
Hustota	ρ	1000	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Difuzivita	κ	10^{-6}	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Tíhové zrychlení	g	10	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Teplotní roztažnost	α	$2,5 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
Měrná tepelná kapacita	c_p	1250	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Kinematická viskozita	ν	$2,5 \cdot 10^{19}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (1a)
		$2,5 \cdot 10^{18}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (1b)
		$2,5 \cdot 10^{17}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (1c)

Tabulka 4.2: Parametry výpočtu pro test konvekčního programu.

Případ (1a) - (1c)

Počítáme termální konvekci na oblasti $\Omega = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ s hraničními podmínkami na teplotu (4.15), free-slip podmínkou (4.16) a konstantní viskozitou. Porovnání bylo provedeno na rovnoměrné síti pro tři velikosti Rayleighova čísla $\text{Ra} = 10^4, 10^5$ a 10^6 (případy (1a), (1b) a (1c)) při hustotě sítě 100×100 elementů.

Průběh konvekce, Nusseltova čísla a střední kvadratické rychlosti znázorňuje série obrázků 4.2.

		Blankenbach a kol.	tato práce	relat. chyba
(1a)	Nu	4,8844	4,8866	0,0004%
	v_{rms}	42,8650	42,8649	0,00002%
(1b)	Nu	10,5341	10,5578	0,002 %
	v_{rms}	193,2145	193,2144	0,0000005 %
(1c)	Nu	21,9725	22,2072	0,01 %
	v_{rms}	833,9909	833,9834	0,00001 %

Tabulka 4.3: Srovnání ustálených stavů konvekčních kódů pro případy (1a) - (1c).

Z tabulky 4.3 je patrné, že pro nízké hodnoty Rayleighova čísla je shoda programu s benchmarkem velmi dobrá, přičemž rychlosti vycházejí přesněji než Nusseltovo číslo. S rostoucím Rayleighovým číslem se nesoulad Nusseltova čísla mírně zvětšuje, což je způsobeno nepřesným numerickým výpočtem ∇T na horní hranici.

4.6.2 Volný povrch

Pokud horní hranice oblasti nebude fixovaná, ale volná, její tvar bude ovlivněn vnitřní dynamikou. V jednoduchém případě (např. (1a) - 1(c)) očekáváme v oblasti vzestupného teplého proudu kladnou topografii (výzdvih), v oblasti sestupného proudu naopak zápornou (pokles). Pro správnou funkci je třeba implementovat stabilizační člen v pohybové rovnici [Kaus a kol., 2010], který zabrání nadměrnému růstu rychlosti (což vede na tzv. „drunken sailor effect“)

$$\vec{t} = -\lambda g \rho_0 \Delta t (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{e}_z, \quad (4.39)$$

kde $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ je parametr a Δt časový krok. Ve slabé formulaci na levou stranu rovnice (4.22) přičteme člen

$$\int_{\Gamma_{\text{free}}} \lambda g \rho_0 \Delta t (\vec{v} \cdot \vec{n}) [\alpha(T - T_0) - 1] \vec{e}_z \cdot \vec{\chi} \, dS \quad (4.40)$$

Implementace tohoto členu by nebyla potřeba při dostatečně malém časovém kroku, to ale vede ke značnému navýšení výpočetního času.

Dynamická topografie

Pro ověření výpočtu posunu hranice ALE metodou použijeme koncept dynamické topografie, který je založen na rovnováze tíhové síly a napětí v normálovém směru

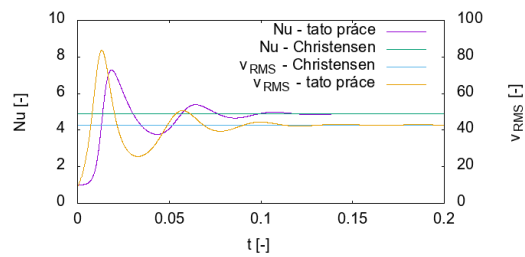
$$\Delta h \rho g = -\vec{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n},$$

kde \vec{n} je normála na hranici oblasti mířící směrem ven. Dostáváme tedy

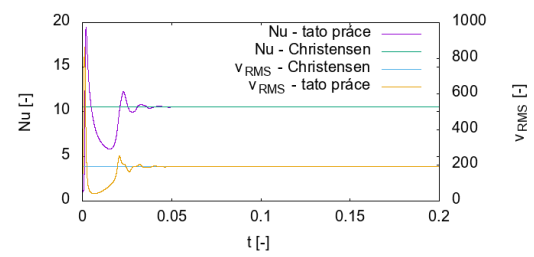
$$\Delta h = -\frac{\vec{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n}}{\rho g}. \quad (4.41)$$

Na obr. 4.2d vidíme časový průběh polohy levého horního bodu $[0,1]$ získaný ALE metodou a pomocí dynamické topografie v případě (1a). Vidíme, že obě metody dávají velmi podobný výsledek a korespondují s průběhem konvekce.

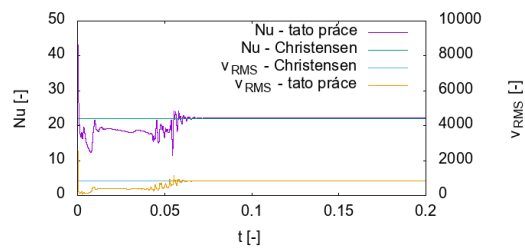
(a) Příklad (1a), $Ra = 10^4$.



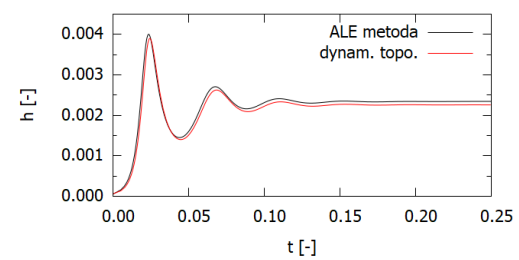
(b) Příklad (1b), $Ra = 10^5$



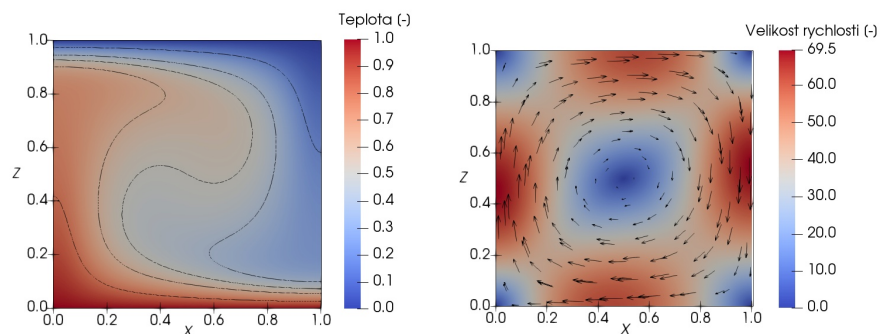
(c) Příklad (1c), $Ra = 10^6$



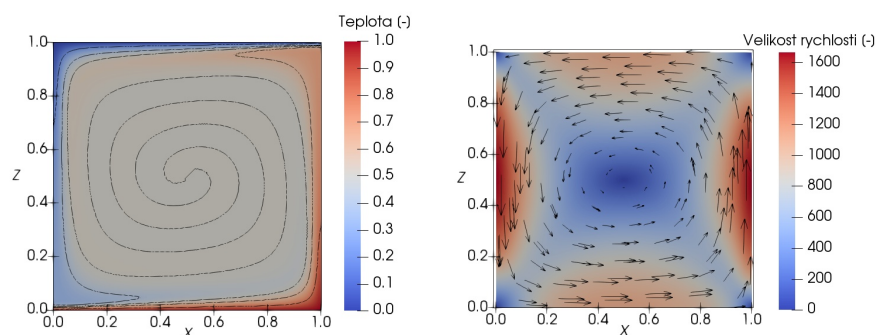
(d) Dynamická topografie a ALE metoda.



(e) Ustálený stav termální konvekce pro případ (1a)



(f) Ustálený stav termální konvekce pro případ (1c)



Obr. 4.2: (a),(b) Konvekce s nízkým Rayleighovým číslem (1a), (1b) je charakterizována hladkým průběhem Nusseltova čísla i střední kvadratické rychlosti. Proudění skončí v ustáleném stavu. (c) Pro $Ra = 10^6$ je zpočátku průběh chaotický, ale i zde proudění dospěje do ustáleného stavu. (d) Porovnání ALE metody a dynamické topografie. (e),(f) Pole teploty (vlevo) a velikosti rychlosti (vpravo). Kontury v teplotním poli znázorňují interval 0,2.

5. Pluto

Hlavním cílem této kapitoly je aplikovat postupy z předešlé kapitoly na úlohu relaxace kráteru a prozkoumat vliv fyzikálních a výpočetních parametrů na čas relaxace. Pro ověření hypotézy existence podpovrchového oceánu (kapitola 3.1) je klíčovým faktorem právě čas relaxace antikráteru. Poté, co určíme charakter přenosu tepla v ledové slupce a aplikujeme volný povrch, budeme studovat relaxaci horního kráteru a antikráteru odděleně.

5.1 Chladnutí ledové slupky

Způsob přenosu tepla v ledové slupce je pro průběh relaxace kráteru zásadní. Uvažujeme totiž materiálové parametry η a k závislé na teplotě skrze vztahy (5.1) a (5.2). Pokud by přenos tepla probíhal konvekcí, znamenalo by to např. vyšší průměrnou teplotu ve slupce, a tedy menší viskozitu a rychlejší relaxaci.

$$k(T) = \frac{k_1}{T} + k_2, \quad (5.1)$$

$$\eta(T) = \min \left\{ \eta_0 \cdot \exp \left[\frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_m} \right) \right], \eta_{cut} \right\}, \quad (5.2)$$

kde $k_1, k_2, Q, R, T_m, \eta_0$ a η_{cut} jsou konstanty uvedené v tabulce 5.1.

Hustota ledu	ρ_i	920	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Tloušťka slupky	D	100	km
Tíhové zrychlení	g	0,62	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Teplota na povrchu	T_s	40	K
Teplota oceánu	T_o	190	K
Měrná tepel. kapacita ledu při konst. p	c_p	2100	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Koeficient viskozity	η_0	10^{14}	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
Mol. plyn. konstanta	R	8,314	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Aktivační energie	Q	$5 \cdot 10^4$	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
Teplota tání ledu	T_m	270	K
Cut-off viskozita	η_{cut}	10^{24}	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
Parametry tep. vodivosti	k_1	488,12	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$
	k_2	0,468	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Tabulka 5.1: Parametry úlohy pro relaxaci kráteru [Nimmo a kol., 2016].

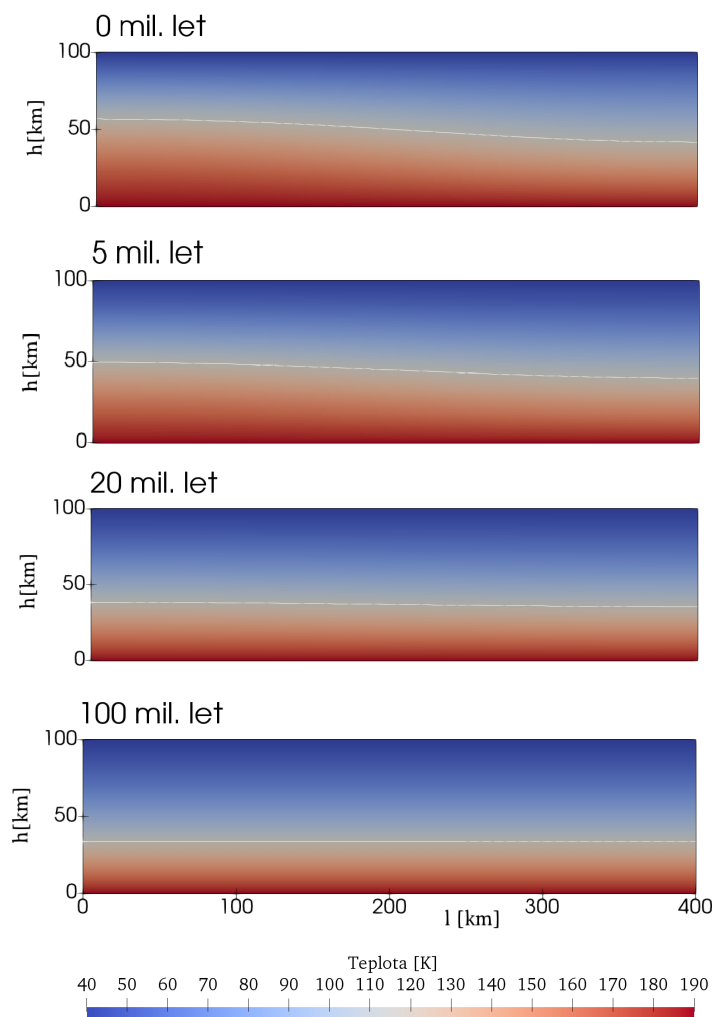
Horní odhad Rayleighova čísla (4.6) pomocí viskozity na bázi ($10^{18} \text{ Pa} \cdot \text{s}$) dává $\text{Ra} \approx 10^0$, což je méně než kritická hodnota pro konvekci ¹. Očekáváme

¹Kritická hodnota Rayleighova čísla pro nekonečnou vrstvu a konstantní viskozitu je $\text{Ra}_{\text{krit}} \approx 657$ [Ricard, 2015].

tedy, že slupka bude chladnout konduktivně. Jako výpočetní oblast použijeme rovnoměrnou síť o velikosti 80×20 elementů a řešíme rovnice (4.4). Použité fyzikální parametry modelu shrnuje tabulka 5.1. Série obrázků 5.1 potvrzuje, že slupka chladne kondukcí. Počáteční teplotní pole (0 mil. let) je dáno vztahem

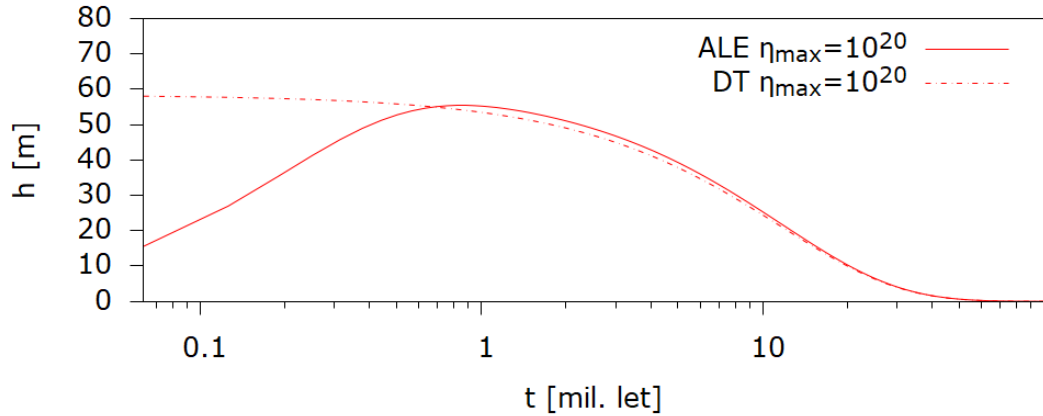
$$T(x,z) = \left[T_o - \frac{z}{h}(T_o - T_s) \right] \cdot \left[1 + 0,1 \cdot \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right) \cdot \cos\left(\frac{x\pi}{l}\right) \right], \quad (5.3)$$

kde h je výška oblasti a l její šířka.



Obr. 5.1: Konduktivní chladnutí ledové slupky. Bílá kontura odpovídá střední teplotě 115 K.

Dalším krokem je implementace volného povrchu, která byla vyzkoušena na benchmarku v předcházející kapitole, na ledovou slupku. Obrázek 5.2 znázorňuje časový vývoj topografie levého horního bodu $[0,100 \text{ km}]$ pro ALE metodu i dynamickou topografii.



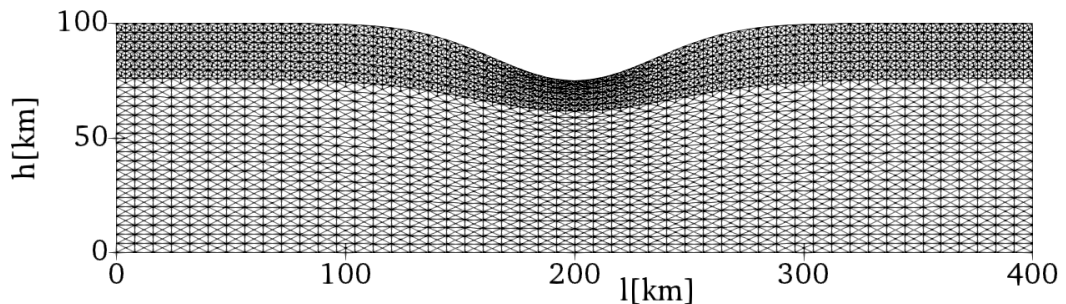
Obr. 5.2: Srovnání ALE metody a dynamické topografie pro parametry úlohy na obdélníkové oblasti. Viskozita na bázi slupky je řádu 10^{18} Pa · s, na povrchu 10^{20} Pa · s. Pro tuto situaci dostáváme dobrou shodu obou metod.

5.2 Relaxace kráteru

Pro tento model jsme pomocí softwaru FEniCS vytvořili strukturovanou výpočetní síť. Uvažujeme obdélníkovou oblast, ze které je nahoře nebo dole odebrána plocha ve tvaru kráteru (obr. 5.3), jehož tvar předepisujeme Gaussovou funkcí

$$y = h - a \cdot \exp \left[-\frac{(x - b)^2}{2c^2} \right], \quad (5.4)$$

kde a je výška kráteru, b x -ová poloha středu kráteru, c jeho pološířka. Pro větší přesnost síť zahušťujeme v blízkosti relaxující hranice. Jako referenční model pro naše simulace uvažujeme oblast o rozměrech 100 km × 400 km, s kráterem o hloubce 25 km uprostřed.

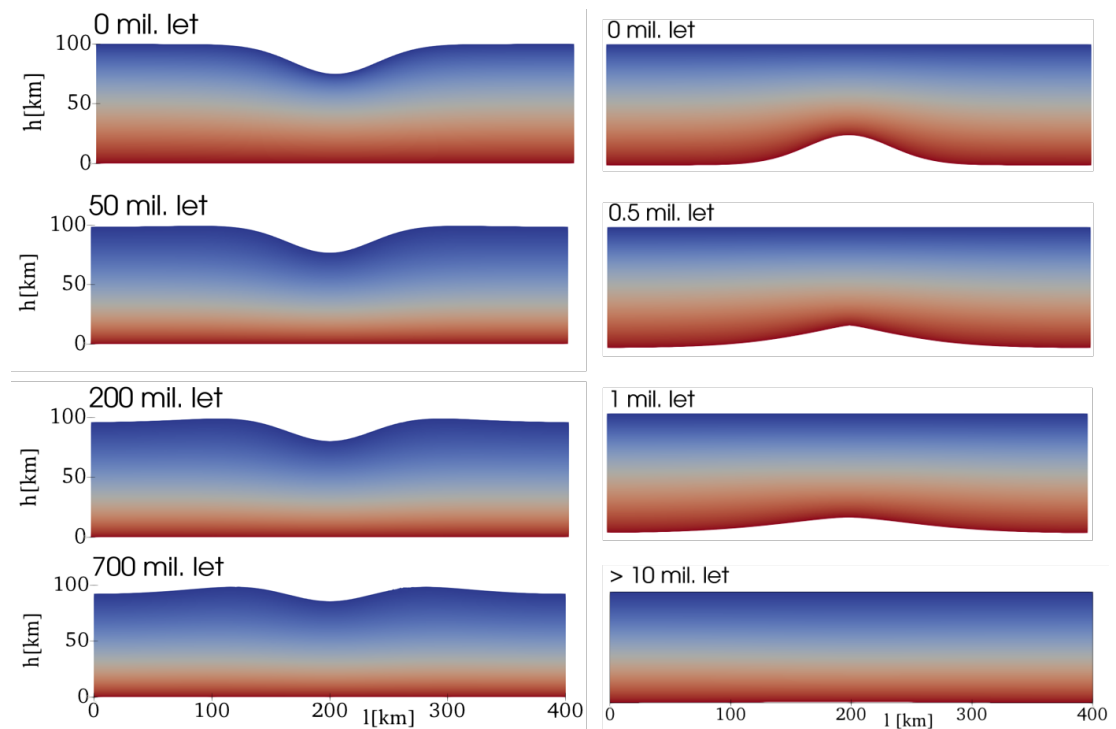


Obr. 5.3: Výpočetní síť pro relaxaci kráteru se zahuštěním horní hranice.

Pro referenční model použijeme parametry uvedené v tabulce 5.2. Výsledek znázorňuje obr. 5.4. Vidíme, že antikráter dle očekávání relaxuje rychleji než kráter na povrchu. Relaxace antikráteru je natolik rychlá (\approx desítky mil. let), že nemůže poskytovat izostatickou kompenzaci navrhovanou v článku [Nimmo a kol., 2016].

Výška oblasti	h	100	km
Šířka oblasti	l	400	km
Hloubka kráteru	a	25	km
Pološířka kráteru	c	35	km
Teplota oceánu	T_o	90	K
Koeficient viskozity	η_0	10^{14}	Pa · s
Cut-off viskozita	η_{cut}	10^{24}	Pa · s

Tabulka 5.2: Parametry pro referenční simulaci kráteru.



Obr. 5.4: Relaxace kráteru (vlevo) a antikráteru (vpravo). Viskozita v oblasti horní hranice má velikost 10^{24} Pa · s, v oblasti spodní hranice 10^{18} Pa · s. Pozorujeme, že viskozita v oblasti relaxující hranice ovlivňuje nejen čas relaxace, ale i tvar relaxující hranice.

Diskuse

Výsledky našeho modelu zatížení Titanu srážkami a vsakováním se shodují s výsledky [Choukroun a Sotin, 2012]. Model ale obsahuje některé parametry, které nejsou zcela známé a jejichž hodnota je pro velikost výsledného zploštění určující, zejména doba a intenzita ethanových srážek. Na druhou stranu, koncept methan-ethanové substituce je dobrým vysvětlením, proč je methan v atmosféře Titanu stále přítomný. Autoři uvádí, že nynější množství methanu přítomného v atmosféře by se působením UV záření rozložilo během 10 – 100 mil. let. Mezi navrženými mechanismy obnovy (uvolňování methanu z klatrátů při impaktech, kryovulkanismus, difúze) dominuje právě methan-ethanová substituce (48 %), přičemž v souhrnu tyto mechanismy vysvětlují 90 % přítomného methanu.

V kapitole 3 jsme uvažovali jako počáteční stav izostatickou kompenzaci kráteru, tedy 7 km hluboký kráter a 80 km vysoký antikráter [Nimmo a kol., 2016]. Tito autoři uvádějí vztah pro Airyho izostázi, kterým k hodnotě 80 km dospěli, jako

$$t_b = t_s \frac{\rho_i}{\rho_w - \rho_i}, \quad (5.5)$$

kde t_b resp. t_s jsou topografie rozhraní voda-led resp. povrchu. Tento vztah platí ale pouze za předpokladů $\frac{R_s^2}{R_b^2} \approx 1$ a $H \ll 2\pi R_s$, kde H je charakteristický horizontální rozměr anomálie. Tyto předpoklady nejsou v případě Pluta splněny, proto je třeba vztah (5.5) uvažovat ve sférické geometrii

$$t_b = t_s \frac{\rho_i}{\rho_w - \rho_i} \frac{R_s^2}{R_b^2}, \quad (5.6)$$

jak uvádí např. [Lambeck, 1988]. Tento vztah pro 7 km hluboký kráter dává 96 km vysoký antikráter, což v součtu převyšuje tloušťku slupky 100 km a předpoklad izostáze pro tuto tloušťku ztrácí smysl.

Izostatická kompenzace po impaktu se předpokládá na základě prudkého zvýšení teploty a napětí způsobených impaktem. Obě tyto změny vedou k lokálnímu snížení viskozity, které umožní slupce téct na mnohem kratší časové škále. Pokud je tedy pánev Sputnik Planitia skutečně impaktního původu, je pravděpodobné, že v tomto místě byla ledová slupka po dopadu do jisté míry ztenčená. Velikost tohoto ztenčení (resp. velikost antikráteru) může být jedním z dalších parametrů modelu.

Modelováním procesů po impaktu se zabývají autoři [Johnson a kol., 2016]. Tento model předpokládá celkovou tloušťku oceánu a ledové slupky 328 km. Deformaci ledové slupky prezentují pro teplý (230 K) a studený (170 K) oceán v kombinaci s různými tloušťkami oceánu (50 – 200 km), resp. tloušťkami slupky (278 – 128 km). Pro všechny uvažované scénáře dochází k maximálnímu ztenčení slupky o 60 km (tedy méně než uvádí Nimmo a kol. [2016]).

Pozitivní gravitační anomálie je docíleno (s uvažováním dusíkové vrstvy) pouze pro hustotu oceánu $> 1100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, založené na příměsi soli jako nemrznoucí příměsi. Sůl ale sníží teplotu tání jen o 20 – 50 K [Richardson, 1976], což poskytuje vysvětlení pouze pro teplý oceán. Náš odhad spektrální metodou ale ukázal, že anomálie pro takovou teplotu nebude stabilní. Pokud bychom uvažovali studený oceán, jako nemrznoucí příměs připadá v úvahu amoniak, který ale hustotu vody

naopak snižuje [Choukroun a Grasset, 2010], a tudíž podle Johnsona a kol. [2016] by anomálie byla negativní.

Model viskózního tečení obsahuje několik zjednodušení, která mohou mít na výsledek vliv. Viskozita může kromě teploty záviset i na napětí. Velká napětí lze očekávat v nejbližším okolí kráterů, kde by tento příspěvek k viskozitě mohl způsobit (zvláště u tuhé horní hranice) rychlejší relaxaci. Dále mohou mít vliv výpočetní parametry: hodnota cut-off viskozity a šířka (resp. aspect ratio, tj. poměr l/h) výpočetní oblasti. Pro náš referenční model jsme zvolili hodnoty $\eta_{\text{cut}} = 10^{24}$ Pa · s a aspect ratio 4 (skutečným rozměrem kráteru by odpovídalo aspect ratio cca 20). Předběžné výpočty ale ukazují, že nad $\eta_{\text{cut}} = 10^{25}$ Pa · s se již čas relaxace nemění, stejně tak pro aspect ratio 6 a vyšší. Nejpodstatnějším zjednodušením je pak pravděpodobně výpočet v kartézské geometrii. Jelikož kráter zaujímá zhruba šestinu obvodu Pluta, dá se předpokládat, že výpočet ve sférické axisymetrické geometrii podá mírně odlišný výsledek.

Závěr

V této práci jsme se zabývali deformací dvou ledových těles sluneční soustavy. Pro Titan jsme ověřili hypotézu methan-ethanové substituce [Choukroun a Sotin, 2012]. Vyvinuli jsme program, který za použití viskoelastické reologie řeší spektrální metodou zatěžování povrchu srážkami a vsakováním. Výsledky korespondují se závěry autorů: četnost srážek $50 \mu\text{m}/30$ let po dobu 50 mil. let spolu se substitucí do 5 km pod povrchem dokážou vysvětlit pokles pólů o 300 m nezávisle na teplotě oceánu.

V případě Pluta jsme ověřovali hypotézu, zda poloha kráteru Sputnik Planitia implikuje přítomnost podpovrchového oceánu [Nimmo a kol., 2016]. Modifikací spektrálního kódu jsme řešili relaxaci izostaticky kompenzovaného kráteru. Touto metodou docházíme ke stejnému závěru jako autoři: pro nízké teploty oceánu (190 K a méně) antikráter relaxuje natolik pomalu, že výsledná kladná gravitační anomálie může způsobit reorientaci kráteru. Spektrální metoda ale pro zadané parametry nedává dobrý smysl, neboť se hranice ledové slupky v oblasti kráteru příliš odchyľují od sféry.

Simulace relaxace kráteru jako viskózního tečení metodou konečných elementů naznačuje, že antikráter relaxuje mnohem rychleji (cca 10 mil. let). Tento model ale obsahuje několik zjednodušení, proto si žádá další vývoj. Předpokládáme, že nejdůležitějším faktorem je sférická geometrie problému, kterou je při rozměrech kráteru nutno vzít v úvahu. Je ale pravděpodobné, že navrhované úpravy nezmění čas relaxace antikráteru více než o řád. To by mohlo znamenat, že závěry prezentované v článku [Nimmo a kol., 2016] nejsou správné – analýza dat z oblasti Sputnik Planitia přítomnost oceánu nepotvrzuje.

Literatura

- ALNÆS, M., BLECHTA, J., HAKE, J., JOHANSSON, A., KEHLET, B., LOGG, A., RICHARDSON, C., RING, J., ROGNES, M. E. a WELLS, G. N. (2015). The FEniCS Project Version 1.5. *Archive of Numerical Software*, **3**. doi: 10.11588/ans.2015.100.20553.
- BLANKENBACH, B., BUSSE, F., CHRISTENSEN, U., CSEREPES, L., GUNKEL, D., HANSEN, U., HARDER, H., JARVIS, G., KOCH, M., MARQUART, G., MOORE, D., OLSON, P., SCHMELING, H. a SCHNAUBELT, T. (1989). A benchmark comparison for mantle convection codes. *Geophys. J. Int.*, **98**, 23–38. doi: 10.1111/j.1365-246X.1989.tb05511.x.
- CHOUKROUN, M. a GRASSET, O. (2010). Thermodynamic data and modeling of the water and ammonia-water phase diagrams up to 2.2 gpa for planetary geophysics. *The Journal of Chemical Physics*, **133**(14), 144502. doi: 10.1063/1.3487520.
- CHOUKROUN, M. a SOTIN, C. (2012). Is Titan’s shape caused by its meteorology and carbon cycle? *Geophysical Research Letters*, **39**, 6158–. doi: 10.1029/2011GL050747.
- FOLEY, J. A. (2013). Depth and Volume of Methane Seas on Saturn Moon Titan Calculated. URL <https://www.natureworldnews.com/articles/5388/20131220/depth-volume-methane-seas-saturn-moon-titan-calculated.htm>. Navštíveno dne 2. 5. 2019.
- HUSSMANN, H., SOTIN, C. a LUNINE, J. (2015). 10.18 - interiors and evolution of icy satellites. In SCHUBERT, G., editor, *Treatise on Geophysics (Second Edition)*, pages 605 – 635. Elsevier, Oxford, second edition edition. ISBN 978-0-444-53803-1. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00178-0>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444538024001780>.
- IESS, L., J RAPPAPORT, N., JACOBSON, R., RACIOPPA, P., STEVENSON, D., TORTORA, P., W ARMSTRONG, J. a ASMAR, S. (2010). Gravity Field, Shape, and Moment of Inertia of Titan. *Science (New York, N.Y.)*, **327**, 1367–9. doi: 10.1126/science.1182583.
- JOHNSON, B. C., BOWLING, T. J., TROWBRIDGE, A. J. a FREED, A. M. (2016). Formation of the Sputnik Planum basin and the thickness of Pluto’s subsurface ocean. *Geophysical Research Letters*, **43**, 10068–10077. doi: 10.1002/2016GL070694.
- JUNTUNEN, M. a STENBERG, R. (2009). Nitsche’s method for general boundary conditions. *Mathematics of computation*, **78**, 1353–1374. doi: 10.1090/S0025-5718-08-02183-2.
- KAUS, B. J. P., MÜHLHAUS, H. a MAY, D. A. (2010). A stabilization algorithm for geodynamic numerical simulations with a free surface. *Phys. Earth Planet. In.*, **181**, 12–20. doi: 10.1016/j.pepi.2010.04.007.

- KUCHTA, M., TOBIE, G., MILJKOVIĆ, K., BĚHOUNKOVÁ, M., SOUČEK, O., CHOBLET, G. a ČADEK, O. (2015). Despinning and shape evolution of Saturn's moon Iapetus triggered by a giant impact. *Icarus*, **252**, 454–465. doi: 10.1016/j.icarus.2015.02.010.
- KVORKA, J., ČADEK, O., TOBIE, G. a CHOBLET, G. (2017). Does Titan's long-wavelength topography contain information about subsurface ocean dynamics? *Icarus*, **310**, 139–164. doi: 10.1016/j.icarus.2017.12.010.
- LAMBECK, K. (1988). Geophysical geodesy - The slow deformations of the Earth. *Research supported by CNES and Université de Paris VI. Oxford and New York, Oxford University Press, 1988, 727 p.* doi: 10.1029/GM060p0007.
- LOGG, A., MARDAL, K.-A. a WELLS, G., editors (2012). *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, volume 84 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-23099-8.
- MARTINEC, Z. (2011). Continuum Mechanics (Lecture Notes). URL <http://geo.mff.cuni.cz/studium/Martinec-ContinuumMechanics.pdf>. Navštíveno dne 10. 4. 2019.
- MATYSKA, C. (2005). Mathematical introduction to geothermics and geodynamics (Lecture Notes). URL <http://geo.mff.cuni.cz/studium/Matyska-MathIntroToGeothermicsGeodynamics.pdf>. Navštíveno dne 10. 4. 2019.
- NASA (2010). Mapping Titan's Cloud Coverage. URL <https://solarsystem.nasa.gov/resources/15140/mapping-titans-cloud-coverage/>. Navštíveno dne 10. 4. 2019.
- NASA (2015a). Pluto. URL <https://solarsystem.nasa.gov/planets/dwarf-planets/pluto/galleries/>. Navštíveno dne 10. 4. 2019.
- NASA (2015b). NASA, New Horizons' Pluto Pics. URL <https://www.nasa.gov/feature/new-horizons-top-10-pluto-pics>. Navštíveno dne 10. 4. 2019.
- NASA (2018). Nasa JPL Photojournal. URL <https://photojournal.jpl.nasa.gov/target/Titan>. Navštíveno dne 10. 4. 2019.
- NIMMO, F. a PAPPALARDO, R. (2016). Ocean Worlds in the Outer Solar System. *Journal of Geophysical Research: Planets*, **121**, 1378–1399. doi: 10.1002/2016JE005081.
- NIMMO, F., HAMILTON, D. P., MCKINNON, W. B., SCHENK, P. M., BINZEL, R. P., BIERSON, C. J., BEYER, R. A., MOORE, J. M., STERN, S. A., WEAVER, H. A., OLKIN, C. B., YOUNG, L. A. a SMITH, K. E. (2016). Reorientation of Sputnik Planitia implies a subsurface ocean on Pluto. *Nature*, **540**, 94–96. doi: 10.1038/nature20148.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. a FLANNERY, B. P. (1993). *Numerical Recipes in FORTRAN; The Art of Scientific*

Computing. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2nd edition. ISBN 0521437164.

QUARTERONI, A. a VALLI, A. (1994). *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-85268-1. doi: 10.1007/978-3-540-85268-1.

RICARD, Y. (2015). 7.02 - Physics of Mantle Convection. In SCHUBERT, G., editor, *Treatise on Geophysics (Second Edition)*, pages 23 – 71. Elsevier, Oxford, second edition edition. ISBN 978-0-444-53803-1. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00127-5>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780444538024001275>.

RICHARDSON, C. (1976). Phase Relationships in Sea Ice as a Function of Temperature. *Journal of Glaciology*, **17**(77), 507–519. doi: 10.3189/S0022143000013770.

SCOVAZZI, G. a HUGHES, T. J. R. (2007). *Lecture Notes on Continuum Mechanics on Arbitrary Moving Domains*. Sandia National Laboratories.

TAYLOR, C. a HOOD, P. (1973). A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Computers and Fluids*, **1**(1), 73 – 100. doi: 10.1016/0045-7930(73)90027-3.

VARSHALOVICH, D. A., MOSKALEV, A. N. a KHERSONSKII, V. K. (1988). *Quantum Theory of Angular Momentum*. WORLD SCIENTIFIC. doi: 10.1142/0270. URL <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/0270>.

Seznam obrázků

1.1	Diskretizační schéma ledové slupky.	9
1.2	Grafické znázornění matice diskretizovaných rovnic pro $N = 4$. . .	10
1.3	Test elastické a viskózní části.	11
2.1	Titan ve skutečných barvách, atmosféra.	12
2.2	Snímky z povrchu Titanu pořízené modulem Huygens.	13
2.3	Grafické znázornění hypotéz methan-ethanové substituce a dynamické topografie.	14
2.4	Radiální průběh viskozity v ledové slupce Titanu.	15
2.5	Zatížení konstantní silou. Posunutí na stupních $j = 2 - 8$ pro různé teploty oceánu.	16
2.6	Zatížení konstantní silou. Posunutí na stupni $j = 2$ v závislosti na teplotě oceánu.	16
2.7	Mapa pokrytí mraky v letech 2004 – 2010, průměrná topografie. .	17
2.8	Zatížení povrchu srážkami.	18
2.9	Zatížení povrchu srážkami a vsakováním.	20
3.1	Pluto ve skutečných barvách, zastoupení látek na povrchu.	21
3.2	Pohyb Pluta pro různá znaménka gravitační anomálie.	22
3.3	Radiální průběh viskozity v ledové slupce Pluta.	23
3.4	Průběh relaxace kráteru pro různé teploty oceánu.	24
3.5	Relaxační křivky pro různé teploty oceánu.	25
4.1	Zobrazení ν, ω a μ mezi Lagrangeovskou, Eulerovskou a síťovou konfigurací.	29
4.2	Průběh Nu a v_{rms} pro případy (1a) - (1c), pole teploty a rychlosti, ALE metoda a dynamická topografie.	38
5.1	Konduktivní chladnutí ledové slupky.	40
5.2	Srovnání ALE metody a dynamické topografie.	41
5.3	Výpočetní síť pro relaxaci kráteru se zahuštěním horní hranice. . .	41
5.4	Relaxace kráteru a antikráteru.	42

A. Přílohy

Příloha č.1: CD obsahující vyvinuté programy a animace výsledků.