



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Marek Pšenka

# **Elektrická impedanční tomografie měkkých tkání: Řešení přímé a obrácené úlohy**

Katedra Geofyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Matematické a počítačové modelování ve fyzice

Praha 2017



Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora





Název práce: Elektrická impedanční tomografie měkkých tkání: Řešení přímé a obrácené úlohy

Autor: Marek Pšenka

Katedra: Katedra Geofyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D., Katedra Geofyziky

Abstrakt: Diplomová práce obsahuje veškerý aparát, potřebný k formulaci obrácené úlohy Elektroimpedanční tomografie (EIT) a k zavedení některých strategií dodatečného podmínění této úlohy. Samotná úloha spočívá v odhalení struktury vybraného tělesa pomocí proudových stimulací, vedených elektrodami připojenými k jeho povrchu. Cílem práce je studium chování živočišných tkání v elektromagnetickém poli a přípravou odpovídajících numerických experimentů prověřit použitelnost této metody v medicínských aplikacích, zejména možnosti odhalení maligních formací v ženském prsu. Práce obsahuje sadu numerických experimentů v nejjednodušším možném uspořádání, na základě které je v prvním přiblížení vyhodnocena citlivost metody vůči šumu. Tyto numerické experimenty byly připraveny s pomocí kompletního softwarového řešení prs4D, vyvíjeného autorem a vedoucím práce, které je přikládáno k práci a některé aspekty jeho implementace jsou blíže rozebrány.

Klíčová slova: Radiologie Obrácená úloha Regularizace Tomografie

Title: Electrical impedance tomography of soft tissue: Forward and inverse modelling

Author: Marek Pšenka

Department: Department of Geophysics

Supervisor: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: The diploma thesis builds the necessary apparatus to formulate and solve the inverse problem of Electrical Impedance Tomography (EIT), including strategies to remedy the ill-conditioning of the problem. The problem itself lies in determining the structure of a body of interest by driving a set of electrical currents through electrodes connected to its surface. The aim of the thesis is to investigate possible utility of this method in medical applications, namely scanning for malignancies in the female breast, by studying the interaction of tissue with the electromagnetic field and by preparing a set of corresponding numerical experiments. An approximate characterization of the method's sensitivity with respect to noise is derived based on the most basic set of such numerical experiments, which were prepared by a complete software solution called prs4D developed by the author and his advisor, while some aspects of its implementation are included in the thesis.

Keywords: Radiology Inverse problem Regularisation Tomography

Děkuji mým rodičům Radimovi a Daně. Jen díky jejich trvalé podpoře jsem se mohl plně věnovat svým studiím a předložit tuto práci. Ze všech osob, které se jejím vzniku podílely, bych chtěl nejprve poděkovat zaměstnancům společnosti RSDynamics, neboť bez nich bych se tématem nikdy nezačal zabývat. Děkuji vedoucímu práce Dr. Velímskému, který položil základy předkládaných postupů a vždy mi ochotně pomáhal rozvíjet myšlenky jeho i mé vlastní. Děkuji kolegům ze skupiny matematického modelování, zejména Mgr. Blechtovi, Dr. Hronovi a Dr. Součkovi, za pomoc v úzkých a možnost s nimi spolupracovat. V neposlední řadě děkuji přátelům a mé přítelkyni Monice, neboť bez nich bych si nemohl udržet zdravou mysl.

# Obsah

Úvod	1
<b>1 Koncept</b>	<b>3</b>
1.1 Motivace pro vývoj EIT	3
1.2 Současný stav problematiky	4
1.3 Tkáně v elektromagnetickém poli	4
1.3.1 Výchozí fyzikální úvahy	4
1.3.2 Obecné dielektrické vlastnosti tkání	6
1.3.3 Parametrické modely	8
1.3.4 Experimentální data	8
1.3.5 Experimentální data charakterizující tkáň ženských prsou	12
<b>2 Přímá úloha</b>	<b>13</b>
2.1 Klasická formulace okrajové úlohy	13
2.2 Slabá formulace okrajové úlohy	15
2.3 Numerické řešení okrajové úlohy	16
<b>3 Obrácená úloha</b>	<b>19</b>
3.1 Formulace obrácené úlohy	19
3.1.1 Obecná obrácená úloha	19
3.1.2 Obrácená úloha EIT	20
3.1.3 Diskrétní obrácená úloha EIT	21
3.2 Metoda adjungovaných stavů	21
3.2.1 Obecný postup	22
3.2.2 Aplikace pro problém EIT	23
3.3 Numerické řešení obrácené úlohy	24
<b>4 Regularizace</b>	<b>25</b>
4.1 Proč ji potřebujeme?	25
4.2 Regularizace obecných obrácených úloh	26
4.2.1 Regularizační schéma	26
4.2.2 Tichonovova regularizace	26
4.3 Regularizace obrácené úlohy EIT	28
4.3.1 Stimulační vzory a spektrální informace	28
4.3.2 Architektura modelového prostoru	29
4.3.3 Konstrukce Tichonovova funkcionálu	33
4.4 Volba regularizačního parametru	36
<b>5 Implementace</b>	<b>39</b>
5.1 Modul eitsolver	39
5.1.1 Přímá úloha	41
5.2 Program prs4D	42
5.2.1 Vývoj	42
5.2.2 Popis komponent	43
5.2.3 Složitost přímé úlohy	44
5.2.4 Složitost obrácené úlohy	45

<b>6</b>	<b>Numerické experimenty</b>	<b>49</b>
6.1	Srovnání přímých řešení . . . . .	49
6.2	Experiment s vnořenou koulí . . . . .	49
6.2.1	Syntetická data . . . . .	49
6.2.2	Simulace šumu . . . . .	50
6.2.3	Výsledky . . . . .	52
6.2.4	Diskuse . . . . .	56
	<b>Závěr</b>	<b>77</b>
	<b>Dodatky</b>	<b>79</b>
A	Potřebné pojmy z matematické analýzy . . . . .	81
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>85</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>91</b>
	<b>Rejstřík</b>	<b>93</b>

# Úvod

Diplomová práce obsahuje veškerý aparát, potřebný k formulaci obrácené úlohy Elektroimpedanční tomografie (EIT) a k zavedení některých strategií dodatečného podmínění této úlohy. Úloha spočívá v odhalení struktury vybraného tělesa pomocí napětí snímaných elektrodami, připojenými k jeho povrchu, při dané proudové stimulaci, vedené některými z těchto elektrod.

Úvodní kapitola je věnována historii metody, současnému stavu problematiky a výchozím fyzikálním úvahám pro studium interakce tkáni s elektromagnetickým polem. Součástí těchto úvah je také zavedení fyzikálních veličin, vhodných pro popis materiálových vlastností tkáně — zejména vodivosti, permitivity a admitivity, z jejichž rozložení chceme usoudit na strukturu studované části těla. Úvodní kapitolu uzavírají experimentální data, klíčová pro posouzení vzájemného kontrastu tkání.

Na zmíněné fyzikální úvahy v druhé kapitole přirozeně navazuje formulace okrajové úlohy pro kompletní elektrodový model EIT, jejímž řešením můžeme simulovat sběr dat pomocí EIT přístroje, neboli při daném rozložení materiálových veličin uvnitř studovaného tělesa vypočítat napětí na elektrodách, připojených k jeho povrchu.

Schopnost modelovat experiment využijeme ve třetí kapitole k formulaci nejdůležitějšího pojmu celé práce, kterým je obrácená úloha EIT. V rámci této kapitoly bude představen jeden ze způsobů, jakým je možné tuto úlohu diskretizovat a řešit numericky, přičemž popíšeme také klíčovou ingredienci, takzvanou metodu adjungovaných stavů, která dovolí realizovat výpočet v přijatelném čase.

Čtvrtá kapitola obsahuje některé z dobře známých strategií dodatečného podmínění obrácené úlohy EIT. Konkrétně se jedná o zavedení vhodné sady stimulačních vzorů, volbu kódování rozložení materiálových veličin uvnitř tělesa (realizace modelového prostoru) a v neposlední řadě výstavbu Tichonovova regularizačního schématu na základě vhodně zvoleného penalizačního funkcionálu.

Řešení obrácené úlohy, včetně různých strategií pro její dodatečné podmínění, bylo implementováno jako součást kompletního softwarového nástroje, který vznikl při spolupráci se společností RSDynamics, za účelem vyhodnocení přínosu metody pro diagnostiku rakoviny prsu. Z toho důvodu pracuje tento software s původním geometrickým uspořádáním dodaným zmíněným průmyslovým partnerem a jsou mu uzpůsobeny také numerické experimenty, jež byly softwarovým nástrojem provedeny. Vybrané aspekty softwarové implementace a výsledky zmíněných experimentů jsou obsahem páté resp. šesté kapitoly.



# 1. Koncept

Elektrická impedanční tomografie (EIT) představuje, byť zatím pouze teoretickou, alternativu k současně používaným zobrazovacím technikám v medicíně. Metoda spočívá v rekonstrukci vodivostního rozložení ve tkáni pacienta na základě elektrického napětí naměřeného systémem elektrod připojených k jeho tělu. Napěťové odezvy jsou zaznamenány pro množství proudových stimulací vedených některou kombinací elektrod.

Otázka, zda je takto možné rozkrýt strukturu studovaného tělesa, je již poměrně stará a původně se zrodila na poli geofyziky, konkrétněji za účelem prospekce na základě rezistivity půdy. První tomografický obrázek, získaný metodou EIT, byl řez lidským předloktím pořízený autory Barber a Brown [6] v osmdesátých letech minulého století. Od té doby došlo na poli EIT k mnoha pokrokům a byly představeny nové přístupy, které často využívají dodatečných informací získaných jinými metodami. Některé z těchto technik jsou nastíněny v autorově bakalářské práci [44].

Nejrozsáhlejší všeobecnou referencí k metodě EIT, je publikace [25] z roku 2004. Aktuálnější stav problematiky, včetně detailního rozboru doposud zkonstruovaných aparátů pro realizaci EIT snímání, je možné najít ve zmíněné bakalářské práci.

## 1.1 Motivace pro vývoj EIT

Snad každý klinický specialista by si přál, aby měl k dispozici neinvazivní nástroj k zjištění struktury tkáně pacienta, který je zároveň levný a jeho použití nepředstavuje pro ošetřovaného riziko. Právě bezpečnost je hlavní motivací pro vývoj EIT a poptávka po neškodné metodě vychází zejména z oblasti včasné detekce karcinomu prsu, kde se ukazuje, že modalitty založené na prozařování Rentgenovými paprsky jsou odpovědné za vznik nezanedbatelného množství sekundárních karcinomů [21, 16]. Nutno podotknout, že detekce rakoviny prsu není jedinou potenciální aplikací této metody, neboť je prověřována v dalších medicínských aplikacích (zobrazování mozku a jeho aktivity [38], odhalení cévních mozkových příhod [45], studium plicní ventilace [2] apod.), nedestruktivním testování a geofyzice.

Koncepce metody Elektrické impedanční tomografie spočívá v hypotéze, která říká, že je možné prostorově lokalizovat struktury ve studovaném tělese skrze korepondenci s rozložením elektrické vodivosti, či komplexní admitivity. Tato hypotéza je přirozeně fundována experimentálními daty, charakterizujícími odezvu tkání vůči elektromagnetickými jevům — tzv. dielektrickými charakteristikami. Podstatná je v tomto ohledu míra kontrastu tkání, které chceme detekovat, vůči jejich okolí. V případě hledání rakoviny je zásadní skutečnost, že maligní tkáně vykazují odlišné charakteristiky než tkáně běžné či benigní [28]. Podrobnější pojednání o dielektrických vlastnostech tkání následuje v sekci 1.3.

## 1.2 Současný stav problematiky

Prvotní nadšení ve vývoji EIT pro včasnou detekci rakoviny prsu bylo vyvoláno úspěchem raných EIT systémů, které můžeme zařadit do třídy tzv. "přístrojů pro impedanční mapování". Příkladem je studie [41] klinických aplikací přístroje TS2000 [4], kde si metoda EIT vedla ze všech zobrazovacích metod nejlépe co se senzitivity týče. Přístroje pro impedanční mapování se vyznačují jednoduchostí koncepce, zejména možností přímočaře rekonstruovat dvourozměrné vodivostní mapy pomocí algoritmů pro zpětnou projekci podél ekvipotenciálních ploch. Nicméně, použití těchto metod je podmíněno jednoduchou geometrií přístroje (rovinné uspořádání elektrod), což je v rozporu se současným směřováním vývoje EIT systémů, kdy je kladen důraz na schopnost rekonstruovat kompletní trojrozměrný vodivostní profil studované oblasti. Přirozeně tomu odpovídá zvýšená náročnost výpočtu, plynoucí z potřeby použít sofistikovanější rekonstrukční algoritmy. Podrobnější klasifikaci EIT systémů je možné nalézt v autorově bakalářské práci [44].

Doposud nebyl žádný EIT přístroj, provádějící trojrozměrnou rekonstrukci, shledán klinicky použitelným, ať už z důvodu nedostatečného rozlišení v dané aplikaci, či náročnosti přípravy vyšetření. Návrh robustního EIT aparátu vyžaduje řešení mnoha optimalizačních problémů, zejména již nastíněného hledání rovnováhy mezi časovou náročností přípravy vyšetření a výpočtu rekonstrukce na jedné straně a kvalitou výsledných snímků na straně druhé. Každá z těchto úloh má mnoho dílčích podproblémů, které překračují hranice vědních oborů, a proto vývoj EIT řešení vyžaduje spolupráci lékařů, fyzikálních a elektrotechnických inženýrů. Do oboru matematicko-fyzikálního spadá formulace a řešení tzv. *přímé a obrácené* úlohy elektrické impedanční tomografie. Řešit přímou úlohu EIT znamená vypočítat na základě vodivostního profilu oblasti, geometrie elektrod a tzv. *stimulačních vzorů* rozložení napětí v dané oblasti včetně potenciálu na elektrodách. Naopak řešením obrácené úlohy rozumíme rekonstrukci rozložení elektrické vodivosti popř. admitivity ve studované oblasti ze sady napěťových odezev na elektrodách při různých stimulacích elektrickým proudem.

## 1.3 Tkáně v elektromagnetickém poli

V předchozích odstavcích jsme uvedli, že pro použitelnost metody EIT je podstatné, aby se různé tkáně, a zejména maligní formace, vyznačovaly odlišnými materiálovými charakteristikami, se kterými se setkáváme v teorii elektromagnetického pole. Tkáně v tomto smyslu popisujeme pomocí tzv. *dielektrických charakteristik* — frekvenčních závislostí jejich vodivosti a relativní permitivity. V následujících sekcích tyto materiálové veličiny definujeme a jejich popis zredukujeme pomocí centrálního pojmu admitivity, přičemž dále budeme prezentovat parametrické modely frekvenční závislosti této veličiny.

### 1.3.1 Výchozí fyzikální úvahy

Interakci hmoty s elektromagnetickým polem obecně popisujeme pomocí úplné sady Maxwellových rovnic na omezené oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , která v pro naše



účely představuje studované těleso

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(x,t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(x,t) \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(x,t) = \mathbf{j}(x,t) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}(x,t) \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(x,t) = \rho(x,t) \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(x,t) = 0 \quad , \quad (1.4)$$

kde  $x \in \Omega$ ,  $\mathbf{j}(x,t)$  reprezentuje hustotu volného proudu a  $\rho(x,t)$  hustotu volného náboje.  $\mathbf{E}(x,t)$  a  $\mathbf{B}(x,t)$  jsou vektory elektrické intenzity a magnetické indukce.

Zkoumané těleso podrobujeme proudové stimulaci pevně zvolené frekvence, a tudíž budeme uvažovat pole mající časově periodický charakter daný úhlovou frekvencí  $\omega$ . V této situaci je výhodné pracovat s komplexní reprezentací polí v podobě

$$\mathbf{E}(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mathbf{E}}(x) e^{i\omega t} \right\} \quad \mathbf{B}(x,t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mathbf{B}}(x) e^{i\omega t} \right\}, \quad (1.5)$$

kde  $\hat{\mathbf{E}}(x)$ ,  $\hat{\mathbf{B}}(x)$  představují komplexní amplitudu vektoru elektrické intenzity resp. magnetické indukce. Tyto polní veličiny již budeme v dalším výkladu uvažovat pouze ve frekvenční oblasti a značení pomocí stříšky vynecháme.

V sadě Maxwellových rovnic výše navíc vystupují vektory magnetické intenzity a elektrické indukce —  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ , pro které je zapotřebí zadat konstitutivní vztahy. Pro naše účely můžeme vycházet ze vztahů pro lineární izotropní materiál

$$\mathbf{D} = \varepsilon(x) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x) \mathbf{E} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu(x)} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r(x)} \quad , \quad (1.7)$$

kde se poprvé setkáváme s veličinou  $\varepsilon(x)$ , jež představuje frekvenčně závislou komplexní *elektrickou permitivitu* materiálu, zatímco veličina  $\mu(x)$  reprezentuje jeho *magnetickou permeabilitu*. Dále  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  jsou odpovídající hodnoty pro vakuum a  $\varepsilon_r(x)$ ,  $\mu_r(x)$  vztahují vlastnosti materiálu k těmto konstantám — komplexní *relativní permitivita* a *relativní permeabilita*.

V této formulaci zbývá zadat konstitutivní vztah pro hustotu volného proudu. Jelikož modelujeme lineární izotropní těleso, volíme konkrétně Ohmův zákon

$$\mathbf{j} = \sigma(x) \mathbf{E} \quad , \quad (1.8)$$

kde  $\sigma$  představuje reálnou *vodivost* materiálu.

Uvedené konstitutivní vztahy dosadíme do sady Maxwellových rovnic, kde, díky harmonickému charakteru polí, dojde k separaci časových a prostorových proměnných

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(x) = -i\omega \mathbf{B}(x) \quad (1.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(x) = (\sigma(x) + i\omega \varepsilon(x)) \mathbf{E}(x) \quad (1.10)$$

Komplexní veličinu  $\sigma + i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r$  na pravé straně takto upraveného Ampérova zákona označíme  $\gamma$  a budeme ji nazývat *admitivitou*.

Způsob zavedení komplexní admitivity předkládaný výše není jediným, neboť mnoho autorů experimentálních studií dielektrických vlastností živočišných tkání

zavádí relativní permitivitu způsobem běžným v teorii elektromagnetického vlnění [11]. Tohoto přístupu se budeme v práci dále držet, neboť takto jsou v literatuře prezentovány parametrické modely dielektrických vlastností tkání, jež představují výchozí bod mnoha dalších úvah prezentovaných v této práci.

Konkrétně nebudeme volný proud uvažovat jako explicitní součást Ampérova zákona (1.2) a psát pro něj zvlášť konstitutivní vztah (1.8), neboli

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} \quad \mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r \mathbf{E} \quad , \quad (1.11)$$

místo toho jej budeme považovat za implicitní součást vztahu pro komplexní relativní permitivitu, kterou při této redefinici značíme  $\hat{\varepsilon}_r$ . Admitivitou v tomto případě rozumíme veličinu

$$\gamma = i\omega \hat{\varepsilon} = i\omega \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r \quad (1.12)$$

Jako názorný příklad tohoto přístupu uvádíme vyjádření relativní permitivity lineárního ztrátového dielektrika

$$\hat{\varepsilon}_r = \varepsilon'_r + \frac{\sigma}{i\omega \varepsilon_0} \quad . \quad (1.13)$$

Dosadíme-li tento vztah do rovnice (1.12) dostaneme stejný výraz jako na pravé straně rovnice (1.10).

### 1.3.2 Obecné dielektrické vlastnosti tkání

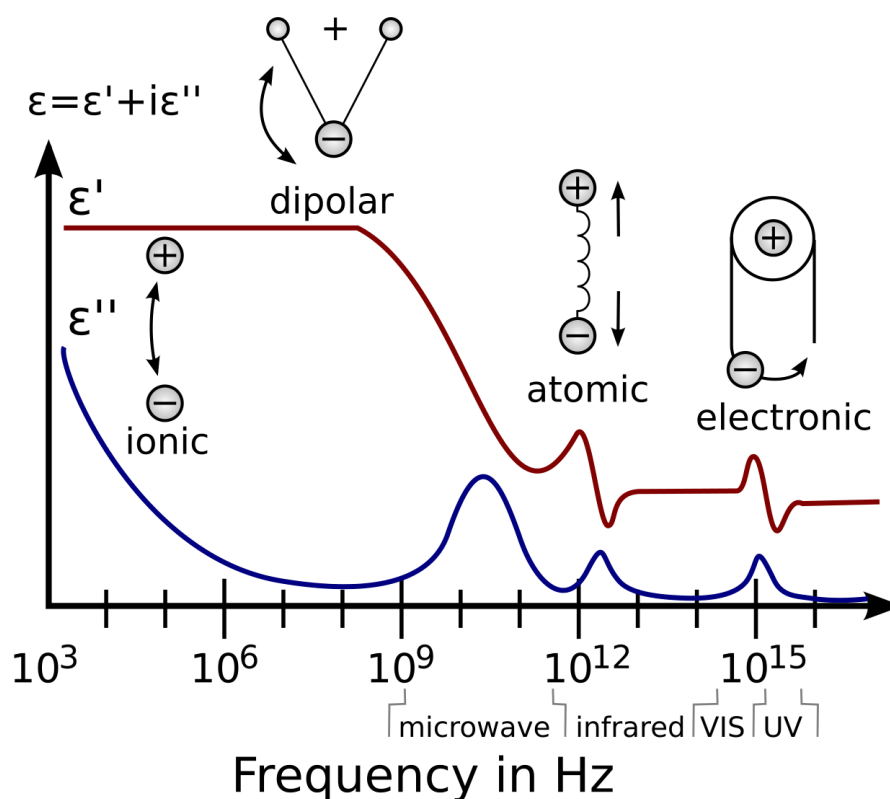
Dielektrické vlastnosti tkáně charakterizujeme frekvenční závislostí materiálových veličin zavedených v předchozí sekci — tzv. *disperzí* .

Obrázek 1.1 ukazuje příklad závislosti permitivity materiálu na frekvenci aplikovaného pole. Zejména vidíme, že okolo jisté charakteristické frekvence dochází ke skokovému poklesu reálné složky permitivity. To je zapříčiněno skutečností, že převrácená hodnota frekvence je v okolí těchto hodnot přibližně rovna *relaxační době* různých polarizačních jevů, v důsledku čehož nejsou příslušné dipólové systavy schopné počínaje touto frekvencí přispívat k vektoru polarizace. Tento jev nazýváme *dielektrickou relaxací* .

Na obrázku jsou pro ilustraci vyznačeny relaxace dipolární, atomární a elektronové, pojmenované podle relaxujících struktur. V dalších odstavcích ukážeme, že k dielektrické relaxaci dochází také v živočišných tkáních, přičemž se ukazuje, že různé relaxace a jejich pozice v rámci spektra je nám od sebe mohou pomoci rozlišit.

Předtím, než začneme charakteristiky tkání podrobněji rozebírat, je nutné zabývat se vlastní fyzickou strukturou tkání. Z hlediska biologie je tkáň souborem buněk, které mají společný původ a funkci. Častokrát je tkáň těsným uspořádáním buněk, jehož mezery nazýváme tzv. intercelulárním prostorem. Každá buňka je ohraničena cytoplazmatickou membránou, která se stará o transport látek mezi buňkou a jejím okolím. Všudypřítomným médiem je jak vně, tak uvnitř buňky voda, v níž jsou rozpuštěny ionty, a proto je iontová vodivost hlavní zprostředkovatel elektrického proudu při aplikaci stejnosměrného napětí [40].

Nejpodstatnějším z kapacitních jevů, ke kterému dochází ve tkáních, je hromadění náboje na membránách buněk, a z tohoto důvodu v oboru nízkých frekvencí aplikovaný střídavý proud vstupuje do vnitřního prostředí buněk pouze v



Obrázek 1.1: Ilustrace spektrální závislosti permitivity, přejato z [39]

omezené míře. Se zvyšující se frekvencí přestává kapacitní charakter membrán klást odpor aplikovanému proudu — dochází k relaxaci. V tomto zjednodušeném modelu dosahuje celkový proud tkáně svého maxima při jisté frekvenci, kterou nazýváme centrální.

Charakteristickým znakem frekvenční závislosti materiálových parametrů živočišných tkání je přítomnost relaxací které označujeme řeckými písmeny  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$ , popř  $\delta$  [19, 48]. Relaxaci, popsanou v předchozím odstavci, za kterou zodpovídá hromadění náboje na membránách buněk tkáně, nazýváme  $\beta$ -disperze. Konkrétněji, jedná se o speciální případ Maxwell-Wagnerovy polarizace a nastává v oboru 0.1 - 10 MHz. V oboru vyšších frekvencí — okolo 20 GHz — dochází ke  $\gamma$ -disperzi, jež je charakterizována relaxací molekul vody. Přítomnost této disperze je možné očekávat kvůli zmíněné přítomnosti vody v tkáních. Slabším jevem tohoto charakteru, který je někdy pozorován, je tzv.  $\delta$ -disperze způsobená relaxací molekul vody vázaných ve strukturách proteinů a jiných makromolekul [47]. Nakonec, existence  $\alpha$ -disperze v oboru 10 Hz - 1 MHz překvapila její objevitele a nebylo snadné ji úplně vysvětlit [48]. Ukazuje se, že jde o souhrn několika jevů z nichž nejvýznamnějším je relaxace elektrické dvojrstvy tvořené kontraionty nahromaděnými okolo nabitých buňčných membrán spolu s iontovou vodivostí napříč membránou. Tento mechanismus byl také pozorován v koloidních suspenzích za přítomnosti elektrolytů, tedy v uspořádání velmi podobném tkáním. Podrobné pojednání o podstatě relaxačních mechanismů vyskytujících se v tkáních a jejich biochemickém původu je možné nalézt v publikaci Pethig et. al [40].

### 1.3.3 Parametrické modely

Každou jednotlivou dielektrickou relaxaci lze v prvním přiblížení popsat pomocí *Debyeova vztahu* [19]

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega\tau} \quad , \quad (1.14)$$

Permitivita materiálu zadaná tímto vztahem klesá z limity nízkých frekvencí  $\varepsilon_s$ , neboli statické permitivity, na hodnotu limity vysokých frekvencí  $\varepsilon_\infty$  okolo frekvence dané převrácenou hodnotou relaxační doby  $\tau$ .

Vykazuje-li disperze relativní permitivity materiálu překryv několika relaxačních mechanismů v okolí jisté frekvence, může být výhodnější jej modelovat jako jednu relaxaci a použít tzv. *Cole-Cole vztah*

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (i\omega\tau)^{(1-\alpha)}} \quad , \quad (1.15)$$

kde empirický parametr  $\alpha$  charakterizuje šíři rozdělení okolo charakteristické relaxační frekvence.

Dle diskuse v předchozí sekci je však nutné uvážit, že tkáně dielektricky relaxují v několika krocích. Hurt [26] odpovídajícím způsobem generalizoval model (1.14) a popsal dielektrické vlastnosti svaloviny vztahem

$$\hat{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_{n=1}^5 \frac{\Delta\varepsilon_n}{1 + i\omega\tau_n} + \frac{\sigma_i}{i\omega\varepsilon_0} \quad , \quad (1.16)$$

kde  $\sigma_i$  reprezentuje statickou iontovou vodivost tkání. Obecnou syntézou modelů popsaných výše je *násobný Cole-Cole model* [19]

$$\hat{\varepsilon}_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_n \frac{\Delta\varepsilon_n}{1 + (i\omega\tau_n)^{(1-\alpha_n)}} + \frac{\sigma_i}{i\omega\varepsilon_0} \quad , \quad (1.17)$$

ve kterém parametry  $\alpha_n, \tau_n, \varepsilon_n$  charakterizují n-tý relaxační mechanismus, který jsme ve disperzi charakteristik materiálu schopni rozlišit.

### 1.3.4 Experimentální data

V tomto oddíle budou shrnuta dostupná experimentální data popisující dielektrické vlastnosti tkání se zaměřením právě na prsní tkáně, které byly v tomto ohledu extenzivně zkoumány pro účely verifikace konceptu elektrické impedanční tomografie pro detekci rakoviny prsu.

Poměrně rozsáhlá kompilace dat, vzniklých zkoumáním rozličných typů různých živočišných druhů, vznikla jako součást autorovy bakalářské práce [44], ve formě tabelovaných dat popisujících disperzi dielektrických vlastností těchto tkání ve frekvenčním rozsahu  $10^1 - 10^7$  Hz — viz tabulky 1.1, 1.2. Ačkoliv byly údaje nashromážděny z několika zdrojů, je obtížné data, jež například odpovídají stejnému orgánu, napříč prameny přímo srovnávat, neboť měření mohla probíhat za různých vnějších podmínek a užitím odlišných metodik. V tomto ohledu je pravděpodobně nejpodstatnější rozlišit, zda byly vzorky tkáně proměřeny po vyjmutí z těla klinicky mrtvých subjektů (ex vivo, in vitro), či byly pomocí sofistikovanějších metod zkoumány v živých jedincích (in vivo). Experimentální poznatky

dvojice Blad a Baldetorp (1996), zejména zkoumaný vývoj dielektrických charakteristik tkáně ženských prsou v čase po vyjmutí z těla, ukazují, že může v tomto ohledu docházet k velkým změnám, charakteristickým pro danou tkáň [7].

Jako zdroj experimentálních dat posloužila bakalářské práci například nejrozsáhlejší ucelená publikace v tomto oboru — rozsáhlá kompilace C. Gabrielové [17] z roku 1996, která obsahuje charakteristiky velkého množství různých tkání, zejména lidských a ovčích, jež byly proměřeny ex vivo v rozsahu  $10^1 - 10^9$  Hz. Kromě toho, C. Gabrielová spolu s S. Gabrielem na svou publikaci záhy navazuje sérií článků *The dielectric properties of biological tissues I [20], II [18], III [19]*, které obsahují po řadě rešerši dostupné literatury, shrnutí zmíněné kompilace [17] a diskuzi parametrických modelů, kterým byla věnována předchozí sekce. Tyto publikace je možné považovat za standardní referenci, byť již 20 let starou, a budou sloužit jako opěrný bod úvah prezentovaných v této práci.

Důležitým opěrným bodem dalšího výkladu jsou experimentální data potvrzující, že je skutečně možné rozlišit tkáně na základě frekvenční závislosti jejich dielektrických charakteristik. Měřeními napětových odezev pro více frekvencí stimulačního proudu je tedy možné získat jistou dodatečnou informaci, která může pomoci identifikovat heterogenitu ve zkoumaném tělese.

V sekcích, věnovaných řešení obrácené úlohy pro nás bude dalším významným odrazovým můstkem redukce popisu dielektrických vlastností tkání na parametrické modely tvaru (1.17). Kromě proměrování těchto charakteristik existuje mezi autory studií snaha je prokládat modely dielektrických relaxací, které jsme probírali v předchozí sekci. Této problematice je např. věnována třetí část zmíněné publikace C. Gabrielové [19], kde se ukazuje, že něco takového je skutečně možné. V práci jsou do společných grafů vynesena experimentální data kompilovaná od různých autorů spolu s proloženými násobnými Cole-Cole modely (1.17). Pro ilustraci jsou v tabulce 1.3 uvedeny parametry relaxací dielektrických charakteristik svalové tkáně přejaté ze zmíněné publikace a odpovídající Cole-Cole model je vykreslen v grafech 1.2 a 1.3.

Prsní tuk		
$f$ [Hz]	$\varepsilon_r$	$\sigma$ [S·m <sup>-1</sup> ]
10	$1.3 \cdot 10^7$	$1.57 \cdot 10^{-2}$
100	$4.3 \cdot 10^5$	$2.15 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^3$	$1.2 \cdot 10^4$	$2.29 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^3$	$1.2 \cdot 10^3$	$2.31 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^4$	$5.3 \cdot 10^2$	$2.31 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^2$	$2.35 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^5$	$6.2 \cdot 10^1$	$2.35 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^5$	$2.2 \cdot 10^1$	$2.34 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^6$	$1.5 \cdot 10^1$	$2.34 \cdot 10^{-2}$
$4.8 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^1$	$2.81 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^7$	$1.0 \cdot 10^1$	$2.96 \cdot 10^{-2}$

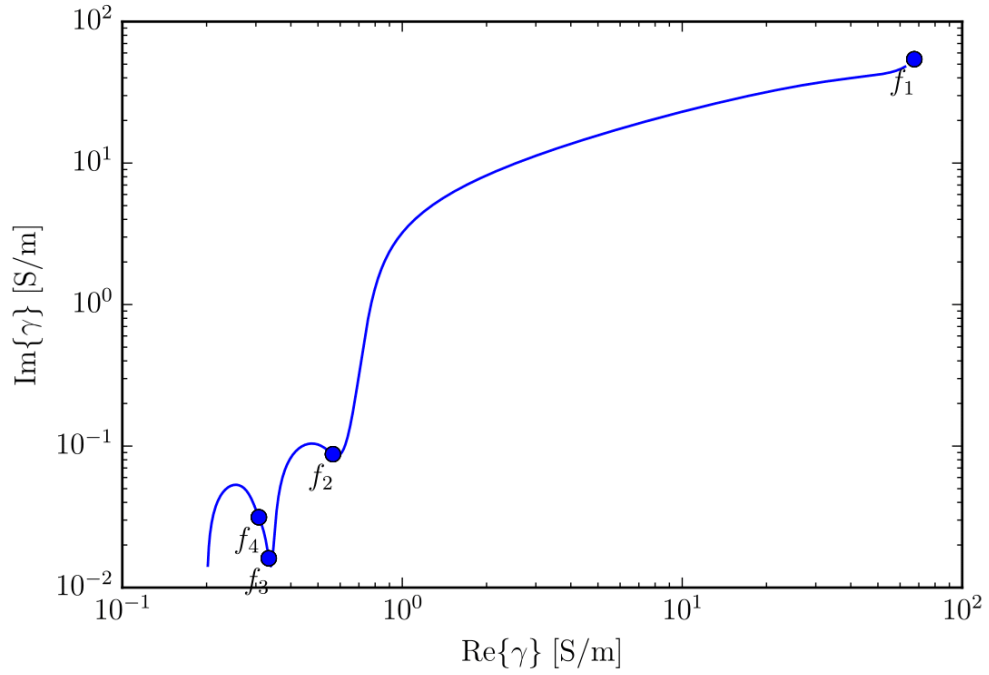
Tabulka 1.1: Dielektrické charakteristiky relevantních tkání, přejato z [44, 17]

Mokrá kůže			Suchá kůže		
$f$ [Hz]	$\varepsilon_r$	$\sigma$ [S·m <sup>-1</sup> ]	$f$ [Hz]	$\varepsilon_r$	$\sigma$ [S·m <sup>-1</sup> ]
20	$8.0 \cdot 10^4$	$2.89 \cdot 10^{-4}$	100	$1.3 \cdot 10^3$	$1.81 \cdot 10^{-4}$
100	$5.6 \cdot 10^4$	$3.32 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^3$	$1.2 \cdot 10^3$	$1.80 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^3$	$4.0 \cdot 10^4$	$7.10 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^3$	$2.10 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^3$	$3.3 \cdot 10^4$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^3$	$2.49 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^4$	$3.0 \cdot 10^4$	$4.49 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^4$	$9.7 \cdot 10^2$	$5.34 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^4$	$2.80 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^5$	$9.3 \cdot 10^2$	$8.93 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^5$	$1.6 \cdot 10^4$	$5.93 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^5$	$8.51 \cdot 10^2$	$4.86 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^5$	$4.7 \cdot 10^3$	$2.06 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^6$	$7.9 \cdot 10^2$	$1.19 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^6$	$2.1 \cdot 10^3$	$2.70 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^6$	$4.9 \cdot 10^2$	$9.54 \cdot 10^{-2}$
$4.8 \cdot 10^6$	$5.5 \cdot 10^2$	$3.80 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^7$	$3.0 \cdot 10^2$	$1.74 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^7$	$2.4 \cdot 10^2$	$4.30 \cdot 10^{-1}$			

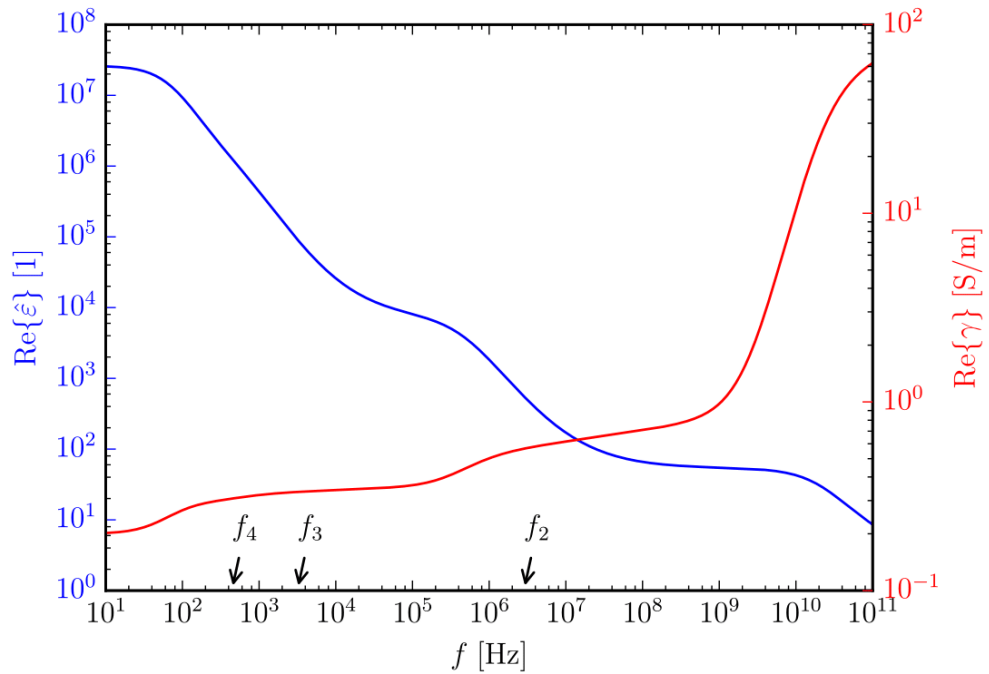
Tabulka 1.2: Dielektrické charakteristiky relevantních tkání, přejato z [44, 17]

	$\Delta\varepsilon$ [1]	$\tau$ [s]	$\alpha$ [1]
1	5.000e+01	7.230e-12	0.10
2	7.000e+03	3.537e-07	0.10
3	1.200e+06	3.183e-04	0.10
4	2.500e+07	2.274e-03	0.00

Tabulka 1.3: Parametry jednotlivých relaxací dielektrických charakteristik svaloviny dle modelu (1.17). Svalovina je dodatečně charakterizována  $\sigma_i = 0.2$  S/m a  $\varepsilon_\infty = 4$ . Přejato z [19]



Obrázek 1.2: Frekvenční závislost admitivity daná násobným Cole-Cole modelem (1.17) na základě konkrétních parametrů relaxací svaloviny uvedených v tabulce 1.3.



Obrázek 1.3: Frekvenční závislost reálné složky relativní permitivity spolu s reálnou částí admitivity daná modelem (1.17) na základě parametrů relaxací uvedených v tabulce 1.3.

### 1.3.5 Experimentální data charakterizující tkáň ženských prsou

V následujících odstavcích budou diskutovány charakteristiky tkání ženských prsou, které jsou relevantní pro studované aplikace. Oproti množství projektů zabývajících se vývojem EIT přístrojů, se počet studií, majících za cíl přesně kvantifikovat dielektrické vlastnosti různých tkání konstituujících ženský prs, jeví nedostatečným. Ve snaze získat kvantitativní představu o míře kontrastu mezi zdravou a maligní tkání byly některé z těchto studií shromážděny a jejich přehled je uveden v tabulce 1.4

Autoři	Reference	Rok	Obor frekvencí [Hz]	Kontrast
Lazebnik, Popovic	[35]	2007	$10^8 - 10^{10}$	Ano
Campbell, Land	[10]	1991	$10^9$	Ne
Blad, Baldetorp	[7]	1996	$10^3 - 10^5$	Ano
Jossinet	[28, 29]	1998	$10^2 - 10^6$	Ano
Surowiec, Stuchly	[51]	1988	$10^1 - 10^8$	Ano
Halter, Zhou	[23]	2009	$10^2 - 10^9$	Ano

Tabulka 1.4: Přehled experimentálních studií zabývajících se tkáněmi ženských prsou

Ačkoliv je studií několik, je obtížné získat ucelenou představu a formulovat doporučení pro vývoj přístrojů, které v praxi zajistí odhalení maligních formací. Jeden z problémů, který bychom měli vyřešit předtím, než začneme vyvíjet EIT systém, by měl být frekvenční rozsah stimulací přístroje. Tabulka 1.4 ukazuje, že různí autoři volili pro své studie různé frekvenční rozsahy a ve většině případů sice kontrast mezi dielektrickými vlastnostmi maligních tkání odhalili, ale po prostudování jejich závěrů zjistíme, že se jim víceméně nepodařilo výsledky přesně kvalifikovat pomocí veličin a modelů zmíněných v sekcích 1.3.1 a 1.3.3.

Autoři prokládali naměřené charakteristiky například Cole-Cole modely (1.15), ale ty byly mnohdy nekonformní vůči tomuto jednoduchému modelu. Následující postup se různil, přičemž například J. Jossinet zavedl mnoho dodatečných parametrů, jejichž netriviálními kombinacemi bylo od sebe možné odlišit skupiny běžných, benigních a maligních tkání [29].

V neposlední řadě je nutné poznamenat, že většina autorů prováděla svá měření *ex vivo* v různých časech po vyjmutí z těla subjektu, vyvstává zde tedy otázka opírající se o zmíněnou studii Blad et.al [7], zda jsou prezentované údaje relevantní, neboť může docházet k podstatným změnám charakteristik tkání v čase bezprostředně po jejich separaci od těla.



## 2. Přímá úloha

Ačkoliv je naším hlavním cílem vyřešit obrácenou úlohu, musí být EIT systém schopen vypočítat úlohu přímou, neboli určit elektrodová napětí, která odpovídají zvolené stimulaci elektrickým proudem, při daném rozložení admitivity uvnitř studované oblasti. To je dáno skutečností, že většina rekonstrukčních algoritmů je iterativního charakteru a v každém kroku je zapotřebí porovnat tato napětí, odpovídající aktuálnímu odhadu rozložení admitivity, s těmi naměřenými.

Není překvapivé, že k nalezení elektrodových potenciálů, odpovídajících dané stimulaci, bude zapotřebí vyřešit jistou okrajovou úlohu. Ze sady Maxwellových rovnic, kterou jsme již přizpůsobovali naší situaci v sekci 1.3.1, nejprve odvodíme parciální diferenciální rovnici a následně pro ni budeme hledat okrajové podmínky, jenž nejlépe zachytí diskrétní charakter elektrod a stimulací. Řešením úlohy přímé budeme rozumět řešení okrajové úlohy, kterou takto odvodíme.

### 2.1 Klasická formulace okrajové úlohy

Navážeme nyní na rozbor Maxwellových rovnic, který v předchozí kapitole skončil vztahy (1.9), (1.10). Tuto soustavu nebudeme dále uvažovat v plné obecnosti. Zatímco člen, reprezentující posuvný proud v rovnici (1.10), není možné zanedbat díky kapacitvím vlastnostem tkání, indukční člen na pravé straně rovnice (1.9) můžeme zanedbat, jelikož tkáně jsou většinou složeny z vody, jejíž relativní magnetická permeabilita je téměř rovna jedné. Podrobnou rozměrovou analýzu je možné najít v dodatku k publikaci Cheney et. al. [12]. Tudíž, omezíme-li se na jednoduše souvislé domény, můžeme vyjádřit intenzitu elektrického pole pomocí odpovídajícího skalárního potenciálu  $u(x)$ , abychom implicitně splnili zákon elektromagnetické indukce, neboli psát

$$\mathbf{E}(x) = -\nabla u(x) \implies \operatorname{rot} \mathbf{E}(x) = 0 \quad x \in \Omega \quad . \quad (2.1)$$

Aplikujeme-li operátor divergence na Ampérův zákon (1.10), dospějeme k parciální diferenciální rovnici

$$\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = 0 \quad x \in \Omega \quad , \quad (2.2)$$

kteřou nazýváme *Kirchhoffův zákon pro kontinuum*. Přejdeme nyní k formulaci vhodných okrajových podmínek pro tuto rovnici.

Základní sadou okrajových podmínek pro tuto rovnici, reflektující naši situaci, se jeví následující vztahy

$$\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{n} \quad x \in \partial\Omega \quad (2.3)$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (2.4)$$

jež charakterizují tzv. *kontinuální model (continuum model)* (CM). Tento přístup zjednodušuje teoretické úvahy týkající se přímé a obrácené úlohy, avšak není prakticky použitelný, neboť proudová hustota není v experimentálním uspořádání známa na celé hranici. Přímočarou korekci na diskrétní charakter elektrod

představují podmínky

$$\int_{E_k} \gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = I_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0 \quad (2.6)$$

$$\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad x \in \partial\Omega / \bigcup_{k=1}^N E_k \quad (2.7)$$

$$u = U_k \quad x \in E_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

kde  $I_k$  je proud tekoucí k-tou elektrodou a  $E_k \subset \partial\Omega$  reprezentuje její povrch. Tento model je v literatuře nazýván *shunt model*, což je možné volně přeložit jako *svodový model*. Rovnice (2.5) a (2.6) nás vedou k následující definici

**Definice 2.1** (Stimulační vzor).  $N$ -tici  $(I_k)_{k=1}^N \in \mathbb{C}^N$  nazveme *stimulačním vzorem*, jestliže splňuje podmínku (2.6)

*Značení.* Jelikož komplexní  $N$ -tice  $(A_k)_{k=1}^N \in \mathbb{C}^N$ , kde  $N$  je počet elektrod (podmnožin  $\partial\Omega$ , které představují elektrody), v následujícím textu často reprezentují různé veličiny, budeme pro pohodlí značit  $\mathbf{A} = (A_k)_{k=1}^N \in \mathbb{C}^N$ .

Nicméně ani svodový model nepředpovídá experimentální data přesně. K tomu je potřeba uvažovat, že elektrody nejsou dokonalými vodiči, neboť mezi elektrodou a povrchem těla vzniká vrstva představující elektrický odpor. Existence tohoto jevu byla experimentálně ověřena týmem Cheng et. al. [13] a zároveň byl jimi navržen model, který jej zachycuje a správně předpovídá měřená elektrodová napětí — tzv. *kompletní elektrodový model* (CEM). Konkrétně, podmínku (2.8) je nutné rozšířit o pokles napětí v důsledku vlastní impedance elektrody

$$u + Z_k \gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = U_k \quad x \in E_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad , \quad (2.9)$$

kde  $Z_k$  představuje *kontaktní impedanci*  $k$ -té elektrody.

**Definice 2.2** (Okrajová úloha pro kompletní elektrodový model (CEM) EIT). *Bud'  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  jednoduše souvislá omezená oblast. Necht' jsou  $E_k \subset \partial\Omega$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  otevřené souvislé s disjunktními uzávěry. Dále  $\gamma \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  reprezentuje rozložení admitivity,  $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^N$  je stimulační vzor,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^N$  představuje impedance elektrod. Funkci  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  spolu s  $N$ -ticí  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^N$  nazýváme řešením okrajové úlohy pro kompletní elektrodový model (CEM) EIT, jestliže*

$$\operatorname{div}(\gamma(x) \nabla u(x)) = 0 \quad x \in \Omega \quad (2.2)$$

$$\int_{E_k} \gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = I_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

$$u + Z_k \gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = U_k \quad \text{na } E_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

$$\gamma \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega / \bigcup_{k=1}^N E_k \quad . \quad (2.7)$$

Abychom mohli tuto úlohu řešit numericky, odvodíme nejprve její slabou formulaci a problém převedeme na hledání Galerkinovy aproximace slabého řešení založené na metodě konečných prvků.

## 2.2 Slabá formulace okrajové úlohy

Uvažujme nyní pro jednoduchost, že  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ ,  $\gamma \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  a  $\Omega$  je oblast třídy  $C^1$ . Vynásobme rovnici (2.2) komplexním sdružením funkce  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$ , integrujeme přes celou oblast. Aplikací první Greenovy věty (A.2) získáme

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) \bar{\varphi} \, dx = - \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma \bar{\varphi} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad .$$

Vzhledem k podmínkám (2.7), (2.9) dále píšeme

$$0 = - \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} \, dx + \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (U_k - u) \bar{\varphi} \, dS \quad . \quad (2.10)$$

Nakonec přepíšeme podmínku (2.5) pomocí (2.9),

$$\int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (U_k - u) \, dS = I_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad ,$$

k-tou rovnicí vynásobíme komplexním číslem  $\bar{V}_k$  a sčítáme přes  $k$ , čímž získáme

$$\sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (U_k - u) \bar{V}_k \, dS = \sum_{k=1}^N I_k \bar{V}_k \quad . \quad (2.11)$$

Odečtením rovnice (2.10) od (2.11) je možné veškeré podmínky shrnout do jediné rovnice, která platí  $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^N$  :

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} \, dx + \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (U_k - u) (\bar{V}_k - \bar{\varphi}) \, dS = \sum_{k=1}^N I_k \bar{V}_k \quad . \quad (2.12)$$

Vztahy výše slouží jako motivace k zavedení pojmu slabého řešení

*Značení.* Snadno nahlédneme, že samotná rovnice (2.12) bude nadále smysluplná pokud oslabíme předpoklad existence a spojitosti klasických derivací řešení  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  a admitivity  $\gamma \in \mathcal{C}^1$ . Stačí předpokládat integrovatelnost prvních slabých derivací řešení,  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , a omezenost admitivity,  $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ . Standardní výsledky teorie Sobolevových prostorů neuvádíme, zatímco složitější teorie je uvedena v dodatku. Elektrodotový člen zůstane omezený díky vnoření  $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ . Abychom nadále usnadnili zápis, budeme značit

$$\mathcal{W} := W^{1,2}(\Omega) \times \mathbb{C}^N \quad . \quad (2.13)$$

**Definice 2.3** (Slabé řešení okrajové úlohy pro CEM EIT). *Nechť  $\Omega$  je jednoduše souvislá oblast třídy  $C^{0,1}$ ,  $E_k \subset \partial\Omega$  jsou otevřené s vzájemně disjunktními uzávěry. Dále buď  $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^N$  a  $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^N$  stimulační vzor.  $(u, \mathbf{U}) \in \mathcal{W}$  nazýváme slabým řešením okrajové úlohy pro CEM EIT, jestliže  $\forall (v, \mathbf{V}) \in \mathcal{W}$*

$$\begin{aligned} B((u, \mathbf{U}), (v, \mathbf{V})) &= \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx + \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (U_k - u) (\bar{V}_k - \bar{v}) \, dS \\ &= \sum_{k=1}^N I_k \bar{V}_k \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Věta 2.1** (Somersalo, Cheney, Isaacson 1992, [49]). *Zavedme faktorprostor prostoru  $\mathcal{W}$  pomocí relace  $f \sim g \iff f - g \in \mathbb{C}$ . Formálně zapišme*

$$\mathcal{W} \setminus \mathbb{C} \quad , \quad (2.15)$$

*přičemž tato definice je korektní, jelikož prostor polynomů nultého stupně tvoří uzavřený podprostor  $W^{1,2}$ . Předpokládejme navíc, že existují  $\gamma_0 > 0$  a  $Z > 0$ , pro které platí*

$$\operatorname{Re} \gamma \geq \gamma_0 \quad (2.16)$$

$$\operatorname{Re} Z_k > Z \quad k = 1, 2, \dots, N \quad . \quad (2.17)$$

*Pak pro daný stimulační vzor  $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^N$  existuje právě jedno slabé řešení  $(\tilde{u}, \tilde{\mathbf{U}}) \in \mathcal{W} \setminus \mathbb{C}$  okrajové úlohy pro CEM EIT.*

*Důkaz.* Viz [49]. Důkaz je veden pomocí komplexní Lax-Milgramovy věty (A.3), jelikož  $\mathcal{W} \setminus \mathbb{C}$  je Hilbertův, jakožto  $\mathcal{W}$  je Hilbertův. Podmínky (2.16), (2.17) slouží k důkazu koercivity bilineární formy  $B(\cdot, \cdot)$  na  $\mathcal{W} \setminus \mathbb{C}$ . □

**Tvrzení 2.2.** *Podmínka*

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0 \quad (2.18)$$

*je postačující pro jednoznačné určení slabého řešení  $(u, \mathbf{U}) \in W^{1,2}(\Omega) \times \mathbb{C}^N$*

## 2.3 Numerické řešení okrajové úlohy

V této sekci bude popsána diskretizace okrajové úlohy pro CEM EIT dle definice 2.3. Vzhledem k tomu, že se jedná o okrajovou úlohu pro lineární eliptickou parciální diferenciální rovnici druhého řádu, využijeme dobře známý postup a budeme hledat Galerkinovu aproximaci řešení v podprostoru konstruovaném metodou konečných prvků.

Konkrétně, aproximaci řešení  $(u_h, \mathbf{U}_h)$  budeme hledat v podprostoru  $V_h \times \mathbb{C}^N$ , kde  $V_h$  představuje prostor spojitých, po částech lineárních funkcí na čtyřstěnech diskretizujících doménu. Přesněji, pro polyhedrální aproximaci oblasti  $\Omega$ , reprezentující zkoumané těleso, nejprve nalezneme její triangulaci

$$\mathcal{T} = \{(K_i, \mathcal{P}_1, \mathcal{N})\}_{i=1}^N \quad ,$$

kde  $(K_i, \mathcal{P}_1, \mathcal{N})$ ,  $i = 1, \dots, N$  je konečný prvek affinně ekvivalentní simplicialnímu Lagrangeovu prvku prvního řádu. Této triangulaci přísluší na  $\bar{\Omega}$  globální interpolant  $\mathcal{I}_h$  definovaný vztahem

$$\mathcal{I}_h v \Big|_{K_i} = \mathcal{I}_{K_i} \quad \forall K_i \in \mathcal{T}, v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \quad , \quad (2.19)$$

kde  $\mathcal{I}_{K_i}$  je lokální interpolant prvku  $(K_i, \mathcal{P}_1, \mathcal{N})$  ve tvaru

$$\mathcal{I}_{K_i} v = \sum_{i=1}^k N_i(v) \psi_i \quad . \quad (2.20)$$

Přičemž  $\psi_i, i = 1, \dots, k$  jsou prvky báze  $\mathcal{P}_1$  na  $K_i$  a  $\{N_i\}_{i=1}^k = \mathcal{N}$  je odpovídající unisolventní systém funkcionalů na  $\mathcal{P}_1$ . Takto definovaný interpolant je spojitý řádu 0 [50]. Snadno bychom ověřili, že prostor

$$V_h = \{\mathcal{I}_h v \mid v \in C^0(\bar{\Omega})\} \quad (2.21)$$

je konečnědimenzionálním lineárním podprostorem prostoru  $W^{1,2}(\Omega)$ . Je nutné poznamenat, že tato interpolace nemá pro obecnou funkci z prostoru  $W^{1,2}$  smysl. Tudíž bez důkazu dodatečné regularity řešení problému 2.3, garantující vnoření do  $C^0(\bar{\Omega})$ , musíme tyto vlastnosti pouze předpokládat.

Podrobnějšímu popisu diskretizace problému a sestavení matice výsledné lineární soustavy se autor věnuje ve své bakalářské práci [44]. Přihlédnutím ke skutečnosti, že tyto úvahy jsou součástí v současnosti standardní teorie, zde uvedeme pouze strukturu zmíněné matice soustavy —

$$\begin{bmatrix} A_M + A_Z & A_V \\ A_V^T & A_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{U}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Bloková struktura matice odpovídá skutečnosti, že se aproximativní řešení skládá ze dvou složek, z nichž první odpovídá prvku prostoru  $V_h$  (2.21) a druhá komplexnímu vektoru představujícímu  $N$ -tici elektrokových napětí. Označíme-li počet uzlů sítě jako  $N_{nod}$ , blok  $A_M \in \mathbb{C}^{N_{nod} \times N_{nod}}$  představuje diskretizaci prvního členu na levé straně (2.14). Obdobně bloky  $A_Z \in \mathbb{C}^{N_{nod} \times N_{nod}}$ ,  $A_V \in \mathbb{C}^{N_{nod} \times N}$ ,  $A_D \in \mathbb{C}^{N \times N}$  reprezentují hraniční integrál tamtéž. Tuto řídkou, symetrickou, indefinitní matici nazýváme *maticí admitivity* a řešení  $(u_h, \mathbf{U}_h)$  problému (2.22) diskrétním řešením okrajové úlohy pro CEM EIT — v přeneseném významu také řešením přímé úlohy EIT.



# 3. Obrácená úloha

Řešením obrácené úlohy EIT dosáhneme původního záměru odhalit strukturu tělesa s pomocí napěťových měření získaných na jeho povrchu. Otázkou je míra informace, kterou v daném uspořádání elektrod a na základě zvolené sady stimulačních vzorů můžeme získat. Jestliže rozumíme podstatě úlohy přímé, tedy skutečnosti, že se její řešení sestává jak z elektrodových napětí, tak z kompletní informace o rozložení elektrického potenciálu v tělese, intuice nám napovídá, že chceme-li úlohu obrátit a ze sady diskretních napětí naměřených při známých stimulačních jednoznačně odhalit rozložení admitivity v doméně, část informace zůstane skryta. V praxi bude sada získaných měření reprezentovat jen část informace o rozložení vodivosti a nezávisle na konkrétním přístupu k řešení obrácené úlohy se budeme potýkat s nedostatečnou podmíněností této úlohy (angl. *ill-posedness*). Proto musíme navrhnout způsob, jakým poskytnout řešícímu algoritmu dodatečné informace, například aplikací vhodného regularizačního schématu. Tato kapitola slouží formulaci obrácené úlohy a její diskretizaci. Problematice regularizace se budeme podrobněji věnovat v následující kapitole.

Z hlediska matematické teorie je tak zvaný *Obrácený problém vodivosti* již poměrně starý a byl poprvé rigorózně formulován A. P. Calderónem [9], a proto je často nazýván *problémem Calderónovým*. Řadou matematiků byl proveden rozsáhlý teoretický rozbor jeho mnoha variant [52, 30, 54], jenž pomohl nalézt specifické metody řešení obrácené úlohy jakými jsou například *layer-stripping* [27, 33] a metoda  *$\partial$ -bar* [32, 31, 14]. Zmíněné metody vychází z teoretické analýzy problému, a tudíž jsou mu takřka vyvíjeny na míru. V této práci volíme odlišný přístup, a to z hlediska všeobecné teorie obrácených úloh, jíž rozumíme společný rámec pro studium vztahu parametrů a odezvy fyzikálního systému s četnými aplikacemi např. v geofyzice [53].

## 3.1 Formulace obrácené úlohy

Přístup k řešení obrácené úlohy předkládaný v této práci bude založen na všeobecné teorii obrácených úloh jejíž postupy budou shrnuty v dalším odstavci. Poté následující sekce jsou věnovány zasazení obrácené úlohy EIT do tohoto obecného rámce, resp. její diskretizaci pro účely numerického řešení.

### 3.1.1 Obecná obrácená úloha

Ve standardní teorii obrácených úloh definujeme *modelový prostor*  $\mathcal{M}$ , představující veškeré myslitelné parametry našeho fyzikálního systému, a *datový prostor*  $\mathcal{D}$  reprezentující jeho odezvy (pozorovatelné veličiny). Tyto prostory mohou obecně mít strukturu variet, ale pro zjednodušení úvah předpokládáme, že jde o Banachovy prostory. V principu je vždy možné formulovat obrácenou úlohu jako problém nelineární optimalizace, neboli hledání minima tzv. *misfit* funkcionálu  $\chi^2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tomu v pravděpodobnostním přístupu k řešení obrácených úloh odpovídá maximalizace tzv. posteriorní hustoty pravděpodobnosti v modelovém prostoru. V ideálním případě bychom chtěli, aby byl misfit funkcionál konvexní na konvexní množině přípustných modelů  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ , což by garantovalo existenci

jednoznačného řešení. V praxi je však situace mnohem složitější a při řešení obrácených úloh se obecně potýkáme s jejich špatnou podmíněností.

*Značení.* Ačkoliv prostory  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{D}$  mohou být obecnější, než prostory konečné dimenze, budeme jejich prvky značit tučnými malými písmeny  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{d}$ . Poznamenejme, že musíme dát pozor na kolizi se značením komplexních  $N$ -tic elektrodo- vých veličin.

Porozumění studovanému fyzikálnímu jevu vyjadřujeme konstrukcí operátoru přímé úlohy  $\mathcal{F} : \mathcal{D} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$ , který dává obecně implicitní vztah modelových parametrů a pozorovatelných veličin. Za předpokladu, že při jeho odvození neopomeneme žádné aspekty studovaného děje, dává tento operátor bijektivní vztah mezi přípustnými modely a pozorovatelnými daty. Pro jednoduchost předpokládáme, že z implicitního vztahu  $\mathcal{F}(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mathbf{0}$  můžeme vyloučit proměnnou  $\mathbf{d}$  a získat explicitní operátor přímé úlohy  $\mathcal{G} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$ .

Přirozené je definovat misfit funkcionál  $\chi(\mathbf{m})$  v bodě  $\mathbf{m}$  jako vzdálenost příslušné odezvy  $\mathcal{G}(\mathbf{m})$  od pozorovaných dat  $\mathbf{d}_{obs} \in \mathcal{D}$ .

$$\chi(\mathbf{m}) := \|\mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}\| \quad (3.1)$$

Vidíme, že vlastnosti misfit funkcionálu závisí na volbě normy na datovém prostoru  $\mathcal{D}$  a charakteru explicitního operátoru přímé úlohy  $\mathcal{G}$ .

### 3.1.2 Obrácená úloha EIT

V kontextu obrácené úlohy EIT jednotlivé modely vzájemně korespondují s rozloženými admitivitou  $\gamma$  uvnitř studované domény  $\Omega$ . Při výběru modelového prostoru proto musíme brát v potaz předpoklady řešitelnosti přímé úlohy, tedy okrajové úlohy pro CEM EIT 2.3. V nejobecnějším případě tedy můžeme za modelový prostor  $\mathcal{M}$  považovat prostor  $L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ , ve kterém vymežíme přípustnou podmnožinu  $\mathcal{A}_\gamma$  takových rozložených, splňujících podmínku (2.16).

Za prostor dat  $\mathcal{D}$  přirozeně volíme prostor  $\mathbb{C}^N$  reprezentující měřená elektrodo- vá napětí, která dokážeme předpovědět na základě explicitního operátoru přímé úlohy  $\mathcal{G} : \mathcal{A}_\gamma \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$

$$\mathcal{G} : (\gamma, \mathbf{I}) \mapsto \mathbf{U} \quad , \quad (3.2)$$

přičemž  $\mathbf{I}$  je stimulační vzor a  $(u, \mathbf{U}) \in \mathcal{W}$  je řešení přímé úlohy EIT. Obrácenou úlohu elektroimpedanční tomografie je pak možné formulovat jako problém minimalizace misfit funkcionálu  $\chi^2(\gamma)$

$$\hat{\gamma} = \arg \min_{\gamma \in \mathcal{A}_\gamma} \chi^2(\gamma) = \arg \min_{\gamma \in \mathcal{A}_\gamma} \frac{1}{2} \|\mathcal{G}(\gamma, \mathbf{I}) - \mathbf{U}_{obs}\|_2^2 \quad , \quad (3.3)$$

kde jsme na datovém prostoru zvolili 2-normu, která je indukovaná standardním skalárním součinem na  $\mathbb{C}^N$ . Tato volba nám v následujících pasážích usnadní úvahy týkající se výpočtu Fréchetovy derivace tohoto funkcionálu.

Ve formulaci výše vystupuje stimulační vzor jako parametr a uvažujeme pouze jednu sadu elektrodo- vých napětí, v praxi však měříme pro vícero vzorů, přičemž napětí nemusíme nutně snímat na každé elektrodě. Problematice stimulačních vzorů se budeme blíže věnovat v sekci 4.3.1. V experimentálním uspořádání společnosti RSDynamics snímáme ve skutečnosti sadu rozdílů elektrodo- vých napětí, tím však naše úvahy neztrácí na obecnosti.



### 3.1.3 Diskrétní obrácená úloha EIT

Abychom obrácenou úlohu EIT dokázali řešit numericky, diskretizujeme operátor přímé úlohy, a proto musíme diskretizovat také modelový prostor. Jinými slovy, v úvahách předchozí sekce je zapotřebí sestoupit o úroveň níže a definovat modelový prostor  $\mathcal{M}$  konečné dimenze  $N_m$ , který bude *kóduvat* přípustná rozložení admitivity

$$\mathcal{A}_\gamma = \{\gamma \in L^\infty(\Omega) \mid \operatorname{Re}\{\gamma\} > 0\} \quad (3.4)$$

To znamená, při daném počtu modelových parametrů  $N_m$  volit  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{N_m}$ , a konstruovat zobrazení  $\gamma : \mathcal{M} \rightarrow L^\infty(\Omega)$ , které je do  $\mathcal{A}_\gamma$ .

Vezmeme-li například  $N_t$  čtyřstěnů  $K_i$  sítě Lagrangeových prvků prvního řádu, použité k řešení přímé úlohy (viz sekce 2.3), můžeme vzít  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N_t}$  a definovat zobrazení  $\gamma(\mathbf{m})$  následovně

$$\gamma(\mathbf{m})|_{K_i} = \operatorname{Re}\left\{\gamma_0|_{K_i}\right\} \exp_{10}\left(m_{l(i)}\right) + i \operatorname{Im}\left\{\gamma_0|_{K_i}\right\} \exp_{10}\left(m_{p(i)}\right) \quad , \quad (3.5)$$

kde  $\gamma_0$  je zvolená referenční admitivita a  $l(i)$ ,  $p(i)$  jsou indexy. Takto definované  $\gamma(\mathbf{m})$  je zřejmě do  $\mathcal{A}_\gamma$  pokud  $\operatorname{Re}\{\gamma_0\} > 0$ .

Diskrétní obrácenou úlohu EIT můžeme na základě diskuse výše formulovat následovně: hledáme  $\hat{\mathbf{m}}$  argument minima misfit funkcionálu  $\chi^2(\mathbf{m})$

$$\hat{\mathbf{m}} = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \chi^2(\mathbf{m}) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \frac{1}{2} \|\mathcal{G}(\gamma(\mathbf{m}), \mathbf{I}) - \mathbf{U}_{obs}\|_2^2 \quad , \quad (3.6)$$

kde  $\gamma : \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}_\gamma \subset L^\infty(\Omega)$ ,  $\dim \mathcal{M} = N_m < \infty$ . Zde  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  představuje množinu těch  $\mathbf{m}$ , pro které  $\gamma(\mathbf{m}) \in \mathcal{A}_\gamma$ . Konkrétně v konstrukci (3.5) je  $\mathcal{A}$  každá omezená podmnožina  $\mathbb{R}^{2N_t}$ . Kóduování přípustných rozložení admitivity pomocí reálného prostoru konečné dimenze se budeme blíže věnovat v sekci 4.3.2.

## 3.2 Metoda adjungovaných stavů

Prakticky budeme obrácenou úlohu EIT řešit některou z iterativních metod nelineární optimalizace, které vyžadují znalost gradientu minimalizovaného funkcionálu v každém kroku. Tudiž, bez ohledu na použitou metodu, stojíme před praktickým problémem výpočtu gradientu misfit funkcionálu v daném bodě modelového prostoru.

Vzhledem k enormnímu počtu stupňů volnosti (např. vztah (3.5) — složky vektoru modelových parametrů zhruba korespondují s admitivitou desetitisíců elementů FEM sítě) a celkové výpočetní náročnosti přímé úlohy, nemáme možnost použít pro výpočet gradientu misfit funkcionálu  $\chi^2$  v daném bodě  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$  konečné diference.

Alternativní metodou výpočtu je tzv. *metoda adjungovaných stavů* (angl. Adjoint state method, Co-state method, Adjoint method), jejíž četné aplikace v geofyzice popisuje R.-E. Plessix v přehledovém článku [42]. V geofyzikální literatuře je odvození této metody vždy vázáno ke konkrétní aplikaci, a v důsledku může být obtížné nahlédnout obecný princip metody, který osvětluje např. C. Vogel ve své knize [55, kap. 6]

Techniky založené na stejném principu jako metoda adjungovaných stavů byly již pro účely EIT rekonstrukčních algoritmů využity v minulosti [43, §4.3], [36, §5] a často se nazývají metodami výpočtu *matice citlivosti*. V následujících odstavcích nejprve rigorózně formulujeme pojem adjungovaného řešení obecné obrácené úlohy a následně provedeme neformální odvození adjungované úlohy pro problém EIT. V obou sekcích budou v průběhu odvození jednotlivé členy barevně rozlišeny, aby byla korespondence teoretického přístupu a konkrétní aplikace zřejmá.

### 3.2.1 Obecný postup

Uvažujme nyní misfit funkcionál (3.1) a pro jednoduchost označme  $\mathbf{d}(\mathbf{m}) := \mathcal{G}(\mathbf{m})$ , kde  $\mathcal{G}(\mathbf{m})$  je explicitní operátor přímé úlohy  $\mathcal{G} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$ . Předpokládejme, že existuje Fréchetova derivace  $\nabla \mathbf{d}(\mathbf{m})$  (dle definice A.5) operátoru  $\mathbf{d}(\mathbf{m})$  v  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$  a Fréchetova derivace  $\nabla \chi^2(\mathbf{d}(\mathbf{m}))$  funkcionálu  $\chi^2(\mathbf{d})$  v bodě  $\mathbf{d}(\mathbf{m})$ . Pak existuje Fréchetova derivace  $\nabla \chi^2 \circ \mathbf{d}(\mathbf{m}) \in \mathcal{M}^*$  a můžeme psát

$$\langle \nabla \chi^2 \circ \mathbf{d}(\mathbf{m}), \delta \mathbf{m} \rangle_{\mathcal{M}^*, \mathcal{M}} = \langle \nabla \chi^2(\mathbf{d}(\mathbf{m})) \nabla \mathbf{d}(\mathbf{m}), \delta \mathbf{m} \rangle_{\mathcal{M}^*, \mathcal{M}} \quad (3.7)$$

Dále předpokládejme, že existuje Fréchetova derivace  $\nabla \mathcal{F}$  implicitního operátoru přímé úlohy  $\mathcal{F} : \mathcal{D} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$  v bodě  $(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m})$ , tudíž můžeme vyjádřit derivaci vztahu  $\mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m}) = \mathbf{0}$  pomocí parciálních derivací -

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m})(\mathbf{m}') &= \nabla_{\mathbf{d}} \mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m}) \nabla \mathbf{d}(\mathbf{m})(\mathbf{m}') + \\ &\quad \nabla_{\mathbf{m}} \mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m})(\mathbf{m}') = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{m}' \in \mathcal{M} \quad . \end{aligned} \quad (3.8)$$

V této rovnici pro případ  $\mathbf{m}' = \delta \mathbf{m}$  aplikací duálního párování s libovolným prvkem  $\mathbf{d}^\dagger \in \mathcal{D}^*$  a sečtením s rovnicí (3.7) získáme

$$\begin{aligned} \langle \nabla \chi^2 \circ \mathbf{d}(\mathbf{m}), \delta \mathbf{m} \rangle_{\mathcal{M}^*, \mathcal{M}} &= \langle \nabla \chi^2(\mathbf{d}(\mathbf{m})) \nabla \mathbf{d}(\mathbf{m}), \delta \mathbf{m} \rangle_{\mathcal{M}^*, \mathcal{M}} + \\ &\quad \langle \nabla_{\mathbf{d}} \mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m}) \nabla \mathbf{d}(\mathbf{m})(\delta \mathbf{m}), \mathbf{d}^\dagger \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}^*} + \\ &\quad \langle \nabla_{\mathbf{m}} \mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m})(\delta \mathbf{m}), \mathbf{d}^\dagger \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}^*} \quad . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Označme nyní problematický člen  $\delta \mathbf{d} := \nabla \mathbf{d}(\mathbf{m}) \delta \mathbf{m}$  a přepišme naše rovnice

$$\begin{aligned} \langle \nabla \chi^2 \circ \mathbf{d}(\mathbf{m}), \delta \mathbf{m} \rangle_{\mathcal{M}^*, \mathcal{M}} &= \langle \delta \mathbf{d}, \nabla \chi^2(\mathbf{d}(\mathbf{m})) \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}^*} + \\ &\quad \langle \nabla_{\mathbf{d}} \mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m})(\delta \mathbf{d}), \mathbf{d}^\dagger \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}^*} + \\ &\quad \langle \nabla_{\mathbf{m}} \mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m})(\delta \mathbf{m}), \mathbf{d}^\dagger \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}^*} \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Všimneme si, že nalezením  $\mathbf{d}^\dagger$  pro které platí

$$-\nabla \chi^2(\mathbf{d}(\mathbf{m})) = [\nabla_{\mathbf{d}} \mathcal{F}]'(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m}) \mathbf{d}^\dagger \quad , \quad (3.11)$$

kde  $[\nabla_{\mathbf{d}} \mathcal{F}]'$  značí duální operátor, můžeme eliminovat problematický člen z naší rovnice a získat gradient misfit funkcionálu na základě

$$\langle \nabla \chi^2 \circ \mathbf{d}(\mathbf{m}), \delta \mathbf{m} \rangle_{\mathcal{M}^*, \mathcal{M}} = \langle \nabla_{\mathbf{m}} \mathcal{F}(\mathbf{d}(\mathbf{m}), \mathbf{m})(\delta \mathbf{m}), \mathbf{d}^\dagger \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}^*} \quad . \quad (3.12)$$

Vyměnili jsme tedy výpočet gradientu explicitního operátoru přímé úlohy za řešení problému (3.11), který nazýváme *adjungovanou úlohou* a  $\mathbf{d}^\dagger$  řešením *adjungované úlohy*.

### 3.2.2 Aplikace pro problém EIT

V duchu obecných úvah předchozí sekce provedeme neformální odvození úlohy adjungované k okrajovému problému EIT dle definic 2.2, 2.3.

V tomto případě je datovým prostorem prostor  $\mathcal{W}$ , jenž je Hilbertův. Jelikož je datový prostor vybaven skalárním součinem, jsou úvahy týkající se duality snažší (díky Rieszově větě o reprezentaci) a místo obecného duálního operátoru můžeme pracovat s operátorem adjungovaným. Na konkrétní struktuře modelového prostoru následující úvahy nezávisí. Abychom předešli kolizi, budeme pro prostorový gradient funkce  $f$  používat značení  $\text{grad } f$ .

V duchu (3.7) vypočtíme Fréchetovu derivaci misfit funkcionálu  $\chi^2$  v bodě  $(u, \mathbf{U})(\mathbf{m}) \in \mathcal{W}$  ve směru  $\delta(u, \mathbf{U})$

$$\langle \nabla \chi^2, \delta(u, \mathbf{U}) \rangle = \text{Re} \left\{ ((\mathbf{U} - \mathbf{U}^{obs}), \delta \mathbf{U})_{\mathbb{C}^N} \right\} \quad , \quad (3.13)$$

neboť, kdykoliv  $(H, (\cdot, \cdot)_H)$  je Hilbertův prostor,  $u, b, h \in H$ , můžeme vypočítat Gateaxovu derivaci funkcionálu  $u \mapsto \|u - b\|_H^2$  dle definice A.4 následovně

$$\begin{aligned} D \|u - b\|_H^2(u, h) &:= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\|u + th - b\|_H^2 - \|u - b\|_H^2) \\ &= (u - b, h)_H + \overline{(u - b, h)}_H = 2 \text{Re} \{ (u - b, h)_H \} \quad . \end{aligned}$$

Význam  $\delta(u, \mathbf{U})$  si můžeme neformálně vysvětlit následovně : pokud bychom uměli vyjádřit explicitní operátor přímé úlohy  $\mathcal{G} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{W}$ , mohli bychom psát

$$\delta(u, \mathbf{U}) := \nabla \mathcal{G}(\mathbf{m}) \delta \mathbf{m} \quad . \quad (3.14)$$

Nicméně explicitní operátor přímé úlohy na úrovni slabé formulace k dispozici nemáme a musíme pracovat s operátorem implicitním  $\mathcal{F} : \mathcal{W} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{W}$ , jehož testování v kontextu obrácené úlohy EIT přirozeně odpovídá variační forma slabé formulace okrajové úlohy EIT (2.14), tudíž v následujícím kroku kombinujeme body (3.8) a (3.9) obecného odvození. Předpokládejme tedy, že můžeme tuto variační formu derivovat v bodě  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$  ve směru  $\delta \mathbf{m}$  v analogii s rovnicí (3.8), a že můžeme volně zaměňovat

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{m}} \gamma(\delta \mathbf{m}) \text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{u}^\dagger \, dx + \int_{\Omega} \gamma \text{grad } \delta u \cdot \text{grad } \bar{u}^\dagger \, dx \\ + \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (\delta U_k - \delta u) (\bar{U}_k^\dagger - \bar{u}^\dagger) \, dS = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Přičtením reálné části získané rovnice k rovnici (3.13) výše získáme obdobu vztahu (3.10),

$$\begin{aligned} \langle \nabla \chi^2, \delta(u, \mathbf{U}) \rangle &= \\ &= \text{Re} \left\{ ((\mathbf{U} - \mathbf{U}^{obs}), \delta \mathbf{U})_{\mathbb{C}^N} \right\} + \text{Re} \left\{ \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{m}} \gamma(\delta \mathbf{m}) \text{grad } u \cdot \text{grad } \bar{u}^\dagger \, dx \right\} \\ &+ \text{Re} \left\{ \int_{\Omega} \gamma \text{grad } \delta u \cdot \text{grad } \bar{u}^\dagger \, dx \right\} + \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (\delta U_k - \delta u) (\bar{U}_k^\dagger - \bar{u}^\dagger) \, dS \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Odtud je patrné, že problematického členu  $\delta(u, \mathbf{U})$  se zbavíme, pokud najdeme  $(u^\dagger, \mathbf{U}^\dagger) \in \mathcal{W}$  takové, že  $\forall (v, \mathbf{V}) \in \mathcal{W}$

$$\begin{aligned} B^\dagger((u^\dagger, \mathbf{U}^\dagger), (v, \mathbf{V})) &:= \int_{\Omega} \gamma \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \bar{u}^\dagger \, dx + \sum_{k=1}^N \int_{E_k} \frac{1}{Z_k} (V_k - v) (\bar{U}_k^\dagger - \bar{u}^\dagger) \, dS \\ &= - \overbrace{\sum_{k=1}^N (\bar{U}_k - \bar{U}_k^{obs}) V_k} =: \overbrace{\sum_{k=1}^N I_k^\dagger V_k} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Budeme-li při hledání úspěšní, můžeme následně vypočítat gradient misfit funkcionálu  $\chi^2$  ve směru  $\delta(u, \mathbf{U})$  pomocí

$$\langle \nabla \chi^2, \delta(u, \mathbf{U}) \rangle = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{m}} \gamma (\delta \mathbf{m}) \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \bar{u}^\dagger \, dx \right\} \quad (3.18)$$

Problém (3.17) nazýváme *úlohou adjungovanou k okrajové úloze pro CEM EIT* a jeho řešení  $(u^\dagger, \mathbf{U}^\dagger)$  nazýváme *řešením adjungovaným*. Ve vztahu výše jsme definovali  $N$ -tici  $\mathbf{I}^\dagger$ , která má v kontextu okrajové úlohy pro CEM EIT význam proudového vzoru, a proto ji nazýváme *adjungovaný proud*. Snadno ověříme, že je také stimulačním vzorem ve smyslu definice 2.1, neboť vypočtená i pozorovaná napětí  $\mathbf{U}, \mathbf{U}^{obs}$  jsou určena podmínkou z tvrzení 2.2.

Nyní přirozeně vzniká otázka existence adjungovaného řešení. Tuto otázku nebudeme podrobněji rozebírat, neboť vzhledem k patrné symetrii mezi přímou a adjungovanou úlohou, která má původ v Hilbertovské struktuře prostoru  $\mathcal{W}$ , bychom snadno zasadili adjungovanou úlohu do formulace 2.3 úlohy přímé a dospěli k analogickému existenčnímu výsledku jako v tvrzení 2.1.

### 3.3 Numerické řešení obrácené úlohy

Jako optimalizační algoritmus pro řešení diskrétní obrácené úlohy dle formulace (3.6) volíme LM-BFGS [37]. Jedná se o kvazi-Newtonovu metodu: k nalezení směrového vektoru  $p_k$  v  $k$ -tém kroku používá pouze aproximaci Hessiánu  $B_k$  minimalizované funkce  $f$ ,

$$B_k p_k = -\nabla f(x_k) \quad . \quad (3.19)$$

Přívlastek LM znamená *Limited Memory*, neboť aproximace Hessiánu není ukládána hustě, ale ukládá se pouze několik vektorů, ze kterých je možné ji přibližně sestavit. Výsledkem je redukce paměťových nároků, a tudíž je tato metoda použitelná pro řešení problému vysoké dimenze, například diskrétní obrácené úlohy EIT.

## 4. Regularizace

Uvážíme-li podstatu obrácených úloh, není překvapivé, že pouhou minimalizací datového misfitu  $\chi^2(\mathbf{m})$  — efektivní neshody měřených a predikovaných dat — často nebudeme schopni získat rozumný výsledek. Samotné rozložení  $\chi^2(\mathbf{m})$  v modelovém prostoru může být velmi vzdálené od ideálního konvexního případu, a metody pro hladkou optimalizaci mohou tudíž jednoduše selhat. Pro dodatečné podmínění úlohy využijeme některou z regularizačních technik, které si v následujících odstavcích popíšeme.

### 4.1 Proč ji potřebujeme?

Jak již bylo zmíněno v úvodu do této sekce, samotnou úlohu (3.6) nemusíme být schopni řešit, neboť narážíme na její špatnou podmíněnost, která může být důsledkem několika faktorů. Obecně můžeme říct, že informace o modelových parametrech, kterou se řešením obrácené úlohy snažíme extrahovat, nemusí být přenositelná pomocí užitého misfit funkcionálu a operátoru přímé úlohy, který jsme zkonstruovali.

Jinými slovy, zvolený misfit funkcionál nemusí být v daném bodě modelového prostoru  $\mathbf{m}$  citlivý vůči perturbacím  $\delta\mathbf{m}$ , nebo naopak může malé perturbaci (ve smyslu vhodné normy) odpovídat značně odlišná hodnota  $\chi^2(\mathbf{m} + \delta\mathbf{m})$ . Chování misfit funkcionálu vůči perturbacím je zcela rozhodující, neboť pozorovaná data jsou v praktické situaci zatížena šumem, který můžeme považovat za perturbaci skutečných pozorovaných dat. Intuitivně, bude-li misfit funkcionál příliš citlivý, povede malá změna pozorovaných dat způsobená šumem k selhávní rekonstrukčního algoritmu. Myšlenky tohoto odstavce je v obecné teorii obrácených úloh do různé míry běžné shrnout pojmem *špatná podmíněnost*. Tento pojem je obtížné přesně definovat a jeho podrobnou interpretaci, kterou je možné nalézt například v knize [55, §2.1], se v této práci zabývat nebudeme.

Zmíněná citlivost misfit funkcionálu vůči perturbacím může mít nejméně dvojí původ: náš operátor přímé úlohy nedostatečně modeluje fyzikální realitu, nebo jsme v konstrukci misfit funkcionálu nevyužili část informace, kterou nám tento operátor poskytuje, neboť ji neumíme měřit. Zaměříme-li se konkrétně na problém EIT, můžeme konstatovat, že informaci ztrácíme z onoho druhého důvodu, jelikož v praxi jsme schopni měřit napětí pouze na elektrodách připojených k tělu. Numerickým řešením přímé úlohy získáme dvojici  $(\mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h)$  tvořenou potenciálem v uzlech FEM sítě, respektive elektrodovými potenciály. Tuto úlohu typicky řešíme na sítích, jejichž počet uzlů čítá řádově desetitisíce, zatímco elektrod zatím sestavených EIT systémů není více než pár set. Konstrukcí  $\chi^2(\mathbf{m})$  jako v rovnici (3.6), konkrétně pouhým porovnáváním elektrodových napětí, přicházíme o značnou část informace, kterou poskytuje přímá úloha, jejíž přesnost je díky užití kompletního elektrodového modelu vysoká [13].

Se špatnou podmíněností úlohy se můžeme do jisté míry vypořádat zavedením regularizace, což znamená rozšířit obrácenou úlohu o mechanismy, které vynucují konformitu modelu vůči dané apriorní informaci. Tu volíme tak, aby se vůči ní šum odlišoval, s cílem potlačit jeho vliv na řešení obrácené úlohy. Podstatu regularizace si objasníme na obecném schématu *Tichonovovy regularizace* pro operátorové

rovnice v následující sekci. Konkrétními metodami regularizace obrácené úlohy EIT se budeme zabývat v sekci 4.3.

## 4.2 Regularizace obecných obrácených úloh

V této sekci popíšeme podstatu regularizace v teorii obecných obrácených úloh na základě knihy [55]. Začneme definicí obecného regularizačního schématu a probereme konkrétní konstrukci založenou na Tichonovově funkcionálu.

### 4.2.1 Regularizační schéma

Výchozím bodem bude obecná operátorová rovnice

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{m}) \quad , \quad (4.1)$$

kde  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$  je obecný operátor mezi reálnými Hilbertovy prostory  $\mathcal{M}, \mathcal{D}$ . Jako konkrétní příklad si můžeme vzít již zmíněné explicitní vyjádření přímé úlohy kde  $\mathcal{M}, \mathcal{D}$  představují modelový, resp. datový prostor. Předpokládejme, že existuje operátor  $R_*$ , který každému  $\mathbf{d} \in \text{Range}(G)$  přiřazuje právě jedno  $R_*(\mathbf{d}) \in \mathcal{M}$ , pro které  $G(R_*(\mathbf{d})) = \mathbf{d}$ . Operátor  $R_*$  tedy představuje jistou formu pseudoinverze. *Regularizačním schématem* rozumíme předmět následující definice.

**Definice 4.1** (Regularizační schéma, [55]). *Systém operátorů  $\{R_\lambda\}_{\lambda \in I}$  indexovaný regularizačním parametrem  $\lambda \in I$ , kde  $I$  je množina indexů, nazýváme regularizačním schématem konvergujícím k  $R_*$  pokud*

1. pro všechna  $\lambda \in I$  je  $R_\lambda$  spojitý operátor,
2. pro každou posloupnost  $\{\mathbf{d}_n\} \subset \mathcal{D}$  konvergující k vybranému  $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  můžeme vybrat posloupnost  $\{\lambda_n\} \subset I$  pro kterou

$$R_{\lambda_n}(\mathbf{d}_n) \rightarrow R_*(\mathbf{d}) \quad n \rightarrow \infty \quad .$$

*Regularizační schéma nazýváme lineárním, pokud je každý  $R_\lambda$  lineární.*

V následujícím odstavci si ukážeme sestavení regularizačního schématu založeném na konstrukci *Tichonovova funkcionálu*

### 4.2.2 Tichonovova regularizace

V předchozí kapitole jsme obecnou obrácenou úlohu formulovali jako problém nalezení minima funkcionálu datového misfitu  $\chi^2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{\mathbf{m}} = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \chi^2(\mathbf{m}) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \frac{1}{2} \|\mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}\|_{\mathcal{D}}^2 \quad , \quad (4.2)$$

Rozšířením tohoto funkcionálu o *penalizační funkcionál*  $J(\mathbf{m}) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  vznikne tzv. *Tichonovův funkcionál* [55]

$$S_\lambda(\mathbf{m}) = \chi^2(\mathbf{m}) + \lambda J(\mathbf{m}) \quad . \quad (4.3)$$

Samotné *Tichonovovo regularizační schéma* získáme, položíme-li pro dané  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$

$$R_\lambda(\mathbf{d}) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} S_\lambda(\mathbf{m}) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \chi^2(\mathbf{m}) + \lambda J(\mathbf{m}) \quad (4.4)$$

Indexovou množinou, ze které vybíráme regularizační parametr, jsou v tomto případě kladná reálná čísla.

Penalizační funkcionál slouží k upřednostnění řešení, které spadají do „třídy“ vydělené jistou apriorní informací, která je skryta v jeho konstrukci. Typickou volbou je standardní *Tichonovův penalizační funkcionál*

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{m}\|_{\mathcal{M}}^2 \quad , \quad (4.5)$$

který upřednostňuje modely „malé“ ve smyslu normy na  $\mathcal{M}$ .

Tímto výčet možných strategií nekončí, neboť zmíněná apriorní informace může mít mnoho podob. Je-li například  $\mathcal{M} = W^{1,2}(\Omega)$ , kde  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  je omezená oblast, pak můžeme definovat *zhlazovací funkcionál*

$$J_{W^{1,2}}(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \quad , \quad (4.6)$$

kde derivaci uvažujeme ve slabém smyslu.

Extenzivně studovaný v kontextu obrácené úlohy EIT je penalizační funkcionál *totální variace* [55, kap. 8], [8], který má smysl pro  $f \in L^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$J(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n); \|\varphi\|_{\infty} = 1 \right\} \quad , \quad (4.7)$$

kde  $\mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  značí všechny spojitě diferencovatelné vektorové funkce s kompaktním nosičem.

Další zajímavou volbou  $J(\mathbf{m})$  je *negativní entropie*

$$J(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \log \mathbf{m})_{\mathcal{M}} \quad , \quad (4.8)$$

kde význam logaritmu závisí na konkrétní volbě  $\mathcal{M}$  pro  $\mathbf{m} > 0$  ve smyslu tohoto prostoru. K interpretaci této volby penalizačního funkcionálu se podrobně vrátíme v sekci 4.3.3 věnované konstrukci Tichonovova schématu pro úlohu EIT.

Zbývá uvážit, zda systém  $\{R_\lambda\}_{\lambda \in I}$  představuje regularizační schéma ve smyslu definice 4.1. Odpověď obecně závisí na charakteru operátoru  $\mathcal{G}$  a funkcionálů  $\chi^2$ ,  $J$ . Příklad, kdy je možné na položenou otázku získat kladnou odpověď, dává následující tvrzení

**Tvrzení 4.1** ([55]). *Nechť  $\mathcal{M}, \mathcal{D}$  jsou reálné Hilbertovy prostory,  $\mathcal{G}$  je omezený lineární operátor na  $\mathcal{M}$ . Definujme Tichonovův funkcionál resp. Tichonovovo regularizační schéma následovně*

$$S_\lambda(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}\|_{\mathcal{D}}^2 + \lambda (L\mathbf{m}, \mathbf{m})_{\mathcal{M}} \quad \lambda > 0 \quad , \quad (4.9)$$

$$R_\lambda(\mathbf{d}) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} S_\lambda(\mathbf{m}, \mathbf{d}) \quad . \quad (4.10)$$

Za předpokladu, že

1.  $\mathcal{A}$  je uzavřená, konvexní podmnožina  $\mathcal{M}$  ,

2.  $L$  je samoadjungovaný, silně monotónní operátor na  $\mathcal{M}$ ,  
představuje  $\{R_\lambda\}_{\mathbb{R}^+}$  regularizační schéma dle definice 4.1.

*Důkaz.* Skutečnost, že  $R_\lambda$  je dobře definovaný plyne z přímé metody variačního počtu. Pro pevné  $\mathbf{d}$  je  $S_\lambda(\mathbf{m})$  konvexní tudíž slabě zdola polospojité (dle definice A.6). Díky druhému předpokladu je také koercivní a podmínky užití přímé metody variačního počtu (Věta A.4) jsou splněny. Pro důkaz spojitosti  $R_\lambda$  viz. [55, §2.4.3].

□

Tvrzení výše představuje speciální případ, kdy je operátor přímé úlohy  $\mathcal{G}$  lineární a spojitý. Za těchto podmínek je  $R_\lambda$  dobře definován pro všechny hodnoty  $\lambda > 0$ . V obecném případě tomu tak být nemusí a neformálně můžeme pracovat s představou, že zkonstruujeme-li posloupnosti  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , bude za jistých podmínek existovat  $k \in \mathbb{N}$ , pro které budou  $R_{\lambda_l}$ , pro  $l > k$ , dobře definovány, neboli  $S_\lambda(\mathbf{m}, \mathbf{d})$  bude mít na  $\mathcal{A}$  minimizer. Neformálně tedy můžeme říci, že s rostoucím  $\lambda$  nabývá penalizační funkcionál  $J(\mathbf{m})$  v rámci funkcionálu  $S_\lambda(\mathbf{m}, \mathbf{d})$  na významu a ten jako celek spěje k ideálu „konvexity“.

V situaci, kdy jsme zkonstruovali vhodné regularizační schéma pro náš problém, je nutné se ptát, jaká volba regularizačního parametru  $\lambda$  je ta „správná“. V sekci 4.4 ukážeme, že tato otázka nemá valný smysl a konkrétně po Tichonovovu regularizaci uvedeme příklad heuristického principu, kterým je možné kvalitativně rozdělit  $\mathbb{R}^+$  na obory nedostatečně, či naopak příliš regularizovaného řešení.

### 4.3 Regularizace obrácené úlohy EIT

Chceme-li dodatečně podmínit obrácenou úlohu EIT, úvahy sekce 4.1 nás vedou nejméně ke třem různým strategiím, které můžeme kombinovat

1. Rozšířit datový prostor, aby představoval sadu elektrodoových napětí, odpovídajících různým stimulačním vzorům. Ba co více, datový prostor můžeme rozšířit ještě v dalším nezávislém směru, a tím je měření pro vícero frekvencí stimulačního proudu s cílem extrahovat tzv. *spektrální informaci*.
2. Volit výhodnou architekturu modelového prostoru, neboli konstruovat zobrazení  $\gamma : \mathcal{M} \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ , které zobrazuje modelový vektor do množiny  $\mathcal{A}_\gamma$  přípustných rozložení admitivity a může vymežit dostatečně „úzkou“  $\text{Range}(\gamma(\mathbf{m})) \subset \mathcal{A}_\gamma$ .
3. Konstruovat Tichonovovo regularizační schéma pro úlohu EIT na základě vhodného penalizačního funkcionálu.

Zmíněným strategiím dodatečného podmínění problému EIT se budeme po řadě podrobněji věnovat v následujících sekcích.

#### 4.3.1 Stimulační vzory a spektrální informace

Rozšíření datového prostoru je zcela přirozenou strategií jak získat dodatečnou informaci pro obrácení úlohy. První způsob, jak toho dosáhnout, je měřit



elektrodová napětí pro vícero proudových stimulací, které volíme tak, abychom maximálně lokalizovali proudovou hustotu ve studované oblasti a takto proměřili celou oblast. Zjednodušeně řečeno, pokud budeme proud pouštět blízkými elektrodami, získáme dobré rozlišení admitivity v jejich okolí, ale téměř žádné hluboko uvnitř domény, nebo okolo vzdálených elektrod.

Takto rozšířenou diskrétní obrácenou úlohu EIT zapíšeme následovně -

$$\hat{\mathbf{m}} = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \chi^2(\mathbf{m}) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} \left\| \mathcal{G}(\gamma(\mathbf{m}), \mathbf{I}_s) - \mathbf{U}_s^{obs} \right\|_2^2, \quad (4.11)$$

kde  $\{\mathbf{I}_s\}_{s=1}^{N_s}$  je zvolená sada stimulačních vzorů a  $\mathbf{U}_s^{obs}$  jsou napětí pozorovaná při podrobení tělesa  $s$ -tému stimulačnímu vzoru.

V praxi není možné takto rozšiřovat datový prostor neomezeně, nýbrž je z hlediska elektrotechniky nutné vážit velikost zvolené sady, neboť k ní úměrně roste doba a také chyba měření, což je zapříčiněno časovou náročností spínání obvodů zařízení, respektive parazitními jevy v těchto obvodech.

Problematicke optimality volby stimulačních vzorů a rozborem konkrétních sad, které byly doposud použity v EIT přístrojích se autor podrobně věnuje ve své bakalářské práci [44, §3.3].

Druhou možností rozšíření datového prostoru v nezávislém směru je měření napěťové odezvy na několika frekvencích s cílem extrahovat *spektrální informaci*. Spektrální informaci rozumíme možnost lokalizovat kontrast materiálů ve studované oblasti na základě odlišného vývoje jejich dielektrických charakteristik, které jsme podrobně rozebírali v sekci 1.3. Existence a míra této spektrální informace pro účely odhalení rakoviny prsu je zřejmě podmíněna dostatečně odlišným spektrálním průběhem dielektrických vlastností maligních a běžných tkání. Diskrétní obrácenou úlohu EIT tedy znova reformulujeme jako

$$\hat{\mathbf{m}} = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \chi^2(\mathbf{m}) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_f} \left\| \mathcal{G}(\gamma(\omega_k, \mathbf{m}), \mathbf{I}_s) - \mathbf{U}(\omega_k)_s^{obs} \right\|_2^2, \quad (4.12)$$

kde  $N_f$  je počet frekvencí  $\omega_k$  z relevantní oblasti spektra a  $U_s^{obs}(\omega_k)$  jsou elektrodová napětí naměřená při podrobení tělesa  $s$ -tému stimulačnímu vzoru o  $k$ -té frekvenci.

Klíčovou ingrediencí tohoto přístupu je za první realizace zobrazení  $\gamma(\omega_k, \mathbf{m})$  tak, aby bylo možné úlohu propojit napříč frekvencemi a za druhé zavedení regularizačního schématu, které bude vynucovat jistý spektrální průběh admitivity domény, např. jeden ze sady experimentálně získaných. Touto problematikou se budeme zabývat v následujících sekcích a je zapotřebí věnovat zvýšenou pozornost poznámkám ke každé sekci.

### 4.3.2 Architektura modelového prostoru

V následujících odstavcích navrhne možnosti konstrukce zobrazení  $\gamma(\omega_k, \mathbf{m})$  a vysvětlíme úskalí předkládaných přístupů.

#### Architektura a kódování

Volit *architekturu modelového prostoru* znamená pro daný počet modelových parametrů  $N_m < \infty$  položit  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{N_m}$  a konstruovat zobrazení  $\gamma : \mathcal{M} \rightarrow$

$L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$  které je do  $\mathcal{A}_\gamma$  - množiny přípustných rozložení admitivity (viz. rovnice (3.4)). Jinými slovy, volíme *kódování* prvků  $\mathcal{A}_\gamma \subset L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$  pomocí  $\mathbb{R}^{N_m}$ .

V sekci 3.1.3 jsme uvedli následující příklad pro  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N_t}$ , kde  $N_t$  počet čtyřstěnnů sítě Lagrangeových prvků prvního řádu, použité k řešení přímé úlohy (viz sekce 2.3)

$$\gamma(\mathbf{m})|_{K_i} = \operatorname{Re} \left\{ \gamma_0|_{K_i} \right\} \exp_{10} \left( m_{l(i)} \right) + i \operatorname{Im} \left\{ \gamma_0|_{K_i} \right\} \exp_{10} \left( m_{p(i)} \right) \quad , \quad (3.5)$$

kde  $\gamma_0$  je zvolená *referenční admitivita* a  $l(i)$ ,  $p(i)$  jsou indexy. Takto definované  $\gamma(\mathbf{m})$  je zřejmě do  $\mathcal{A}_\gamma$  pokud  $\operatorname{Re} \{ \gamma_0 \} > 0$ . V tomto případě je přípustnou množinou modelových vektorů  $\mathcal{A}$  každá omezená podmnožina  $\mathbb{R}^{2N_t}$ , a to díky *logaritmickému kódování* vůči referenční admitivitě  $\gamma_0$ .

### Kódování spektrální závislosti

Chceme-li extrahovat spektrální informaci, stojíme před nesnadnou volbou rozšíření zobrazení  $\gamma(\mathbf{m})$  na spektrálně závislé  $\gamma(\omega_k, \mathbf{m})$ . Máme nejméně dvě možnosti,

1. *Individuální kódování* — rozšířit vztah (3.5) hrubou silou, aby  $N_f$  kopií  $\mathbb{R}^{2N_t}$  po řadě kódovalo admitivitu  $\gamma(\omega_k)|_{K_i}$  čtyřstěnnů  $K_i$ , při  $k$ -té frekvenci  $k = 1, \dots, N_f$ ,
2. *Kódování parametrů disperzí* — místo přímého kódování admitivity využít parametrických modelů dielektrických vlastností tkání probíraných v sekci 1.3.3 a kódovat parametry těchto modelů.

Vydáme-li se první cestou, odvodíme generalizaci vztahu (3.5) v podobě

$$\gamma(\omega_k, \mathbf{m})|_{K_i} = \operatorname{Re} \left\{ \gamma_0(\omega_k)|_{K_i} \right\} \exp_{10} \left( m_{l(i,k)} \right) + \quad (4.13)$$

$$i \operatorname{Im} \left\{ \gamma_0(\omega_k)|_{K_i} \right\} \exp_{10} \left( m_{p(i,k)} \right) \quad ,$$

kde  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{2N_f N_t}$ ,  $\gamma_0(\omega_k)$  je disperze referenční admitivity a  $l(i, k)$ ,  $p(i, k)$  jsou indexy. Takto zkonstruované  $\gamma(\omega_k, \mathbf{m})$  je z omezené  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{2N_f N_t}$  do  $\mathcal{A}_\gamma$  pokud  $\operatorname{Re} \{ \gamma_0(\omega_k) \} > 0$ ,  $k = 1, \dots, N_f$ . K vizuální ilustraci tohoto přístupu slouží obrázek 4.1

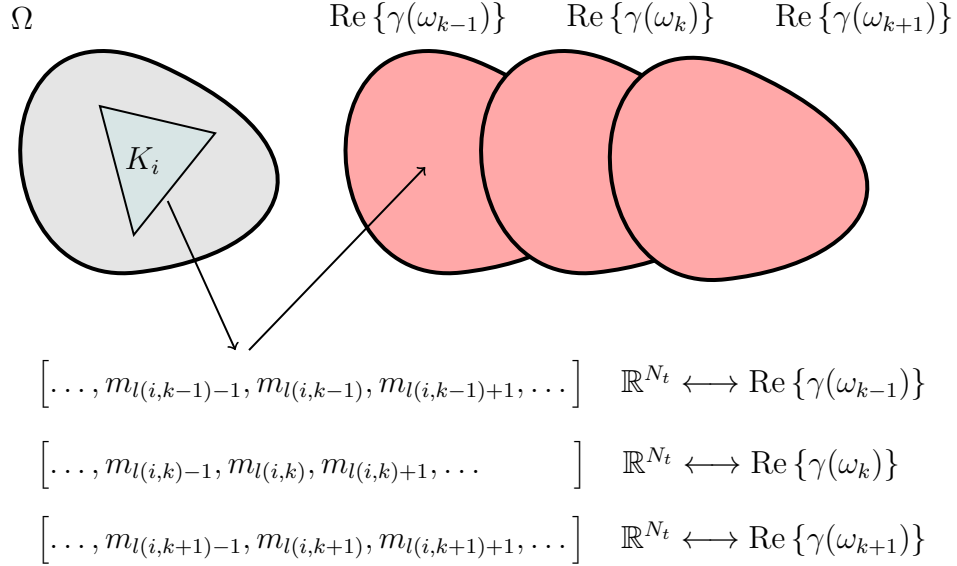
Chceme-li pro kódování prvků  $\mathcal{A}_\gamma$  využít parametrizaci disperzí dielektrických vlastností tkání, musíme vyjít z některého z modelů diskutovaných v sekci 1.3.3. Pro maximální obecnost bychom mohli uvažovat násobný Cole-Cole model,

$$\hat{\varepsilon}_r(\omega_k) = \varepsilon_\infty + \sum_n \frac{\Delta\varepsilon_n}{1 + (i\omega_k\tau_n)^{(1-\alpha_n)}} + \frac{\sigma_i}{i\omega\varepsilon_0} \quad , \quad (1.17)$$

jehož parametry byly týmem Gabriel et. al určeny na základě experimentu [19]. Tento analytický vztah dává možnost pro libovolnou frekvenci  $\omega_k$  vyjádřit  $\gamma(\omega_k)$  pomocí reálných veličin  $\varepsilon_\infty > 0$ ,  $\sigma_i > 0$ ,  $\Delta\varepsilon_n > 0$ ,  $\tau_n > 0$  a  $\alpha_n \in [0, 1)$  následovně

$$\gamma(\omega_k) = i\omega_k\varepsilon_0\hat{\varepsilon}(\omega_k) \quad . \quad (4.14)$$

Obrázek 4.1: Ilustrace individuálního kódování reálné části admitivity. V případě imaginární části bude schéma stejné.



Významnou skutečností je, že touto konstrukcí se zbavíme jak nutnosti kódovat spektrální závislost admitivity na síti kopiemi  $\mathbb{R}^{2N_t}$ , jak je tomu ve vztahu (4.13), tak samotného dělení modelového vektoru na část popisující zvlášť reálné a komplexní složky admitivity tamtéž. Je zřejmé, že tímto podstatně redukuje dimenzi modelového prostoru.

Abychom si usnadnili další odvození, nebudeme pracovat s násobným Cole-Cole modelem v plné obecnosti, ale budeme uvažovat pouze obyčejný Cole-Cole model (1.15) o jedné relaxaci  $n = 1$ , pro pevné  $\tau > 0$ ,  $\alpha \in [0, 1)$ .

Jako konkrétní realizace  $\gamma(\omega_k, \mathbf{m})$  se nabízí nejprve logaritmičsky kódovat  $\varepsilon_\infty$ ,  $\Delta\varepsilon$ ,  $\sigma_i$  pomocí  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{3N_t}$  v Cole-Cole vztahu

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_r(\omega_k, \mathbf{m}) \Big|_{K_i} &= \varepsilon_\infty^0 \Big|_{K_i} \exp_{10}(m_{l(i)}) + \frac{\Delta\varepsilon^0 \Big|_{K_i} \exp_{10}(m_{p(i)})}{1 + (i\omega_k\tau)^{(1-\alpha)}} \\ &+ \frac{\sigma_i^0 \Big|_{K_i} \exp_{10}(m_{q(i)})}{i\omega_k\varepsilon_0} \quad , \end{aligned} \quad (4.15)$$

kde  $\varepsilon_\infty^0$ ,  $\Delta\varepsilon^0$ ,  $\sigma_i^0$  jsou po řadě referenční hodnoty limity vysokofrekvenční permitivity, absolutní velikosti relaxace, iontové vodivosti a  $l(i)$ ,  $p(i)$ ,  $q(i)$  jsou indexy. Následně můžeme vyjádřit admitivitu pomocí vztahu (4.14)

$$\gamma(\omega_k, \mathbf{m}) \Big|_{K_i} = i\omega_k\varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_r(\omega_k, \mathbf{m}) \Big|_{K_i} \quad . \quad (4.16)$$

Pro usnadnění pochopení je schéma postupu vykresleno na obrázku 4.2 .

Zbývá určit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ , aby takto definované  $\gamma(\omega_k, \mathbf{m})$  bylo do  $\mathcal{A}_\gamma$ . Snadno odvodíme, že pro reálné a imaginární složky permitivity dané Cole-Cole modelem

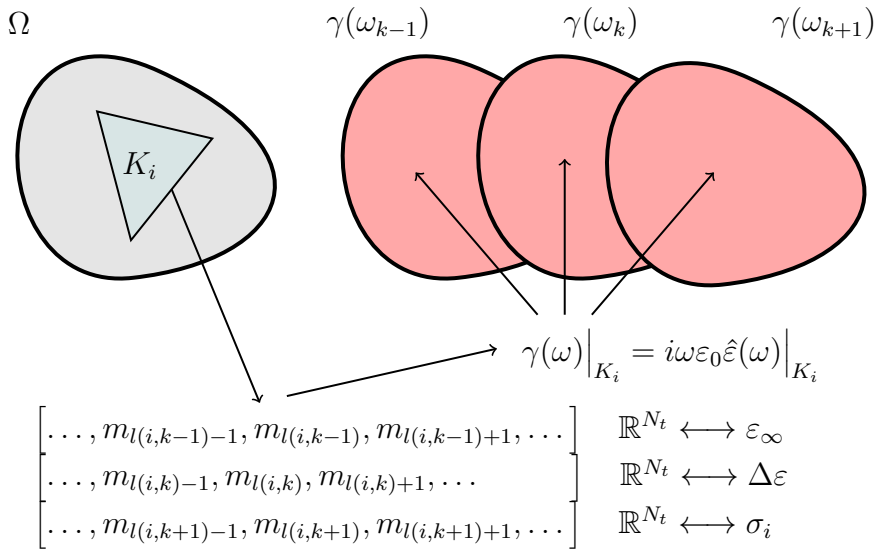
(1.15) platí

$$\operatorname{Re} \{\hat{\varepsilon}_r\} = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon \left[ 1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) \right]}{1 + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}} \quad (4.17)$$

$$\operatorname{Im} \{\hat{\varepsilon}_r\} = -\frac{\Delta\varepsilon(\omega\tau)^{1-\alpha}}{1 + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) - \frac{\sigma_i}{\omega\varepsilon_0 r} \quad , \quad (4.18)$$

tudíž, zobrazení (4.16) bude z  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{3N_t}$  omezené do  $\mathcal{A}_\gamma$  pokud  $\Delta\varepsilon^0 > 0$ ,  $\varepsilon_\infty^0 > 0$  a  $\sigma_i^0 > 0$ , což obecně odpovídá fyzikálnímu významu parametrických modelů.

Obrázek 4.2: Ilustrace kódování parametrů disperzí admitivity



## Poznámky

V následujících odstavcích probereme některé praktické aspekty výše uvede-ných konstrukcí.

V každém ze vztahů (4.16), (4.13) jsme kódované veličiny vztahovali k jisté referenční hodnotě, přičemž její volba bude mít důsledky pro chování rekonstrukč-ního algoritmu. Volbu těchto referenčních veličin je možné vnímat jako formu apriorní informace vkládané do konstrukce modelového prostoru.

V sekci 3.2 jsme diskutovali složitost výpočtu derivace misfit funkcionálu  $\chi^2$ , zejména nemožnost jej z časových důvodů uskutečnit pomocí konečných diferencí. V dalších pasážích jsme odvodili alternativní způsob zprostředkovaný metodou adjungovaných stavů. Klíčovou ingrediencí pro realizaci výpočtu pomocí této me-tody je znalost analytické derivace  $\gamma(\mathbf{m})$  podle modelových parametrů. Kódování admitivity tedy hledáme tak, abychom mohli snadno vypočítat jeho derivaci.

Chceme-li ke kódování spektrální závislosti admitivity využít parametrické modely, přirozeně vyvstává otázka konformity reálných tkání vůči těmto mode-lům. Tato problematika byla studována v sekci 1.3.3, kde byl uveden příklad pa-rametrického popisu dielektrické relaxace svalové tkáně. Výchozí experimentální

data pocházela z rozsáhlé studie [19], která obsahuje porovnání experimentálních dat a jimi prokládaných parametrických modelů. Existuje riziko, že rozptyl dielektrických charakteristik tkání různých subjektů vylučuje jednoduchý popis pomocí těchto modelů. Tato skutečnost je do jisté míry potvrzena studiemi tkáně ženských prsou provedenými J. Jossinetem [28, 29], a parametrický popis těchto tkání je v důsledku mnohem složitější. Nicméně, je nutné vyhodnotit přínos spektrální informace pro dodatečné podmínění obrácené úlohy EIT, a pro tento účel je možnost redukovat modelový prostor pomocí kódování parametrů spektrální závislosti dielektrických charakteristik značně výhodná.

Zbývá porovnat metody kódování spektrální závislosti admitivity. Již byla zmíněna výhoda kódování parametrů disperzí vůči individuálnímu kódování daná redukcí dimenze modelového prostoru. V praxi to znamená mírný pokles paměťových nároků implementace, ale časově nejnáročnější část výpočtu — sestavení derivace misfit funkcionálu pomocí adjungovaného řešení — bude stejně složitá pro oba modely.

Kódujeme-li parametry disperzí na čtyřstěnech sítě, efektivně tím omezujeme spektrální závislost jejich admitivity na relaxaci danou zvoleným modelem. Konkrétně, zvolíme-li například jako výchozí model Cole-Cole disperzi, vynucujeme, aby se tedy každý čtyřstěn sítě choval jako materiál, který dielektricky relaxuje z nějaké statické hodnoty  $\varepsilon_s$  k vysokofrekvenční limitě  $\varepsilon_\infty$  — pro vizuální ilustraci viz obr. 1.3, 1.2. Omezení spektrálního průběhu charakteristik na relaxaci danou zvoleným modelem, může představovat výhodu i nevýhodu. Benefítovat z tohoto přístupu můžeme z perspektivy regularizace: redukce počtu nezávislých parametrů může zlepšit podmíněnost úlohy. Naopak individuální kódování může zachytit disperze, které nejsou pouhými relaxacemi a umožnit řešení obrácené úlohy v situaci, kdy naměřená data neodpovídají materiálu striktně konformnímu vůči výchozím parametrickým modelům dielektrické relaxace.

### 4.3.3 Konstrukce Tichonovova funkcionálu

V sekci 4.2.2 jsme konstruovali Tichonovovo regularizační schéma (4.3) pro obecnou obrácenou úlohu. Rozšíření misfit funkcionálu  $\chi^2$  o penalizační funkcionál  $J$  je součástí většiny doposud popsanych algortimů pro řešení obrácené úlohy EIT. Této problematice je věnován nespočet publikací a závěrečných prací, jež představují pestrou paletu konstrukcí penalizačního funkcionálu. Penalizační funkcionály dělíme zejména na základě apriorní informace, kterou vynucují, přičemž přehled různých přístupů je možné nalézt v autorově bakalářské práci [44]. V zásadě se odvíjejí od některého ze vztahů (4.5), (4.6) a (4.7), které po řadě penalizují normu, hladkost a variaci. V této práci se zaměříme na netradiční konstrukci Tikhonova regularizačního schématu pomocí penalizačního funkcionálu negativní entropie

$$J(\mathbf{m}) = (\mathbf{m}, \log \mathbf{m})_{\mathcal{M}} \quad . \quad (4.8)$$

### Regularizace obrácených úloh pomocí maximální entropie

Interpretaci regularizace obrácených úloh pomocí metody maximální entropie na základě statistické mechaniky a teorie pravděpodobnosti, kde se pojem entropie zrodil, dává C. Groetsch ve své knize [22, §5.5]. Některé myšlenky zde

uvedeme, přičemž začneme vztahem

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k \quad , \quad (4.19)$$

což je známé vyjádření Shannonovy informační entropie diskrétního rozdělení pravděpodobnosti  $p_i$ . Interpretací této funkce je míra neurčitosti daného diskrétního rozdělení ve smyslu nejistoty lokalizace systému v daném stavu. Snadno nahlédneme, že pokud by platilo  $p_i = 1$  a  $p_j = 0, i \neq j$  pak by  $H(p_i) = 0$ . Naopak intuitivně tušíme, že rozdělení, které entropii maximalizuje je rovnoměrné rozdělení  $p_i = 1/n$ .

Způsob jakým zavedeme informační entropii jako penalizační funkcionál pro regularizaci obrácených úloh je následující. Předpokládejme pro jednoduchost, že  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{N_m}$  a přípustné modely vybíráme z množiny

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{m} \in \mathcal{M} \mid m_i > 0 \quad i = 1, \dots, N_m\} \quad , \quad (4.20)$$

o které předpokládáme, že je omezená. Proto, pro pevné  $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$ , můžeme nalézt  $M > 0$ , aby platilo

$$\sum_{i=1}^{N_m} \frac{m_i}{M} = 1 \quad . \quad (4.21)$$

Jinými slovy, každé  $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$  můžeme „normalizovat“ a výsledek  $(m_i/M)_{i=1}^{N_m}$  interpretovat jako diskrétní rozdělení pravděpodobnosti. Za předpokladů výše nám nic nebrání vyjádřit informační entropii výsledku dle formule (4.19). Užitím penalizačního funkcionálu (4.8) tedy upřednostňujeme modelové vektory, které v interpretaci na základě vztahu (4.21) představují neurčitá rozdělení.

Při řešení obrácených úloh se úlohu snažíme dodatečně podmínit apriorními informacemi. Metoda maximální entropie založená na vztahu (4.19) v tomto smyslu neklade na řešení žádné požadavky kromě maximalizace neurčitosti rozdělení (4.21). Výraz pro informační entropii je možné modifikovat, aby byla tato veličina maximální pro dané apriorní rozdělení  $q_i$ ,

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln \left( \frac{p_k}{q_k} \right) \quad . \quad (4.22)$$

Takto generalizovat je možné také penalizační funkcionál (4.8) jak uvidíme v následujících odstavcích věnovaným metodě maximální entropie pro řešení obrácené úlohy EIT.

## Regularizace obrácené úlohy EIT pomocí metody maximální entropie

Abychom mohli konstruovat penalizační funkcionál (4.8) pro regularizaci diskrétní obrácené úlohy EIT. Musíme zvolit objekt, jehož „normalizaci“ budeme interpretovat jako diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, aby měla formule pro Shannonovu entropii (4.19) v tomto přeneseném významu smysl. Následující konstrukcí ukážeme, jak je možné takto interpretovat prvky množiny přípustných diskrétních rozložení admitivity na síti  $\{K_i\}_{i=1}^{N_t}$  (viz. sekce 2.3)

$$\mathcal{A}_\gamma = \left\{ \gamma \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \mid \gamma = \sum_{i=1}^{N_t} \gamma|_{K_i} \chi_{K_i} ; \operatorname{Re} \{\gamma\} > 0 \right\} \quad (4.23)$$

Jelikož je  $\Omega$  omezená, platí

$$\frac{1}{\langle \text{Re} \{ \gamma \} \rangle} \sum_{j=1}^{N_t} \frac{\text{Re} \{ \gamma \} \Big|_{K_j} |K_j|}{|\Omega|} = 1 \quad , \quad (4.24)$$

kde jsme označili

$$\langle \text{Re} \{ \gamma \} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \text{Re} \{ \gamma \} dx \quad (4.25)$$

vztah (4.24) představuje analogii vztahu (4.21) a v přeneseném významu tedy také diskretní rozdělení pravděpodobnosti jehož Shannonovu entropii můžeme vyčíslit buď na základě (4.19), nebo obecněji ve vztahu k nějakému referenčnímu rozložení admitivity  $\gamma_0$  na základě (4.22).

Prakticky je konstrukce penalizačního funkcionálu o něco složitější neboť, pro účely numerického řešení obrácené úlohy navíc kódujeme prvky množiny  $\mathcal{A}_\gamma$  pomocí prvků  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{N_m}$  jak jsme popsali v sekci 4.3.2. Uvažujeme-li individuální kódování (4.13) frekvenčně závislé admitivity, můžeme navrhnout penalizační funkcionál

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{i=1}^{N_t} |K_i| \text{Re} \{ \gamma_0(\omega_k) \} \Big|_{K_i} \exp_{10} \left( m_{l(i)} \right) \cdot \ln \left( \frac{\text{Re} \{ \gamma_0(\omega_k) \} \Big|_{K_i} \exp_{10} \left( m_{l(i)} \right)}{\text{Re} \{ \gamma_0(\omega_k) \} \Big|_{K_i}} \right) \quad (4.26)$$

kde jsme záměrně nezjednodušili zlomek uvnitř argumentu přirozeného logaritmu, abychom zachovali strukturu výrazu pro Shannonovu informační entropii. Tato konstrukce se neomezuje pouze na individuální kódování admitivity a pokud bychom kódovali parametry disperze (4.16), bylo by možné obdobně vyčíslit informační entropii diskretního rozložení  $\varepsilon_\infty$ ,  $\Delta\varepsilon$  či  $\sigma_i$ .

Zbývá samotný předmět této sekce, kterým je konstrukce Tichonovova regularizačního schématu pro obrácenou úlohu EIT. Volíme-li individuální kódování spektrální závislosti admitivity (4.13), vytvoříme Tichonovův funkcionál, jehož význam jsme probírali v sekci 4.2.2, přidáním penalizačního funkcionálu (4.26) k misfit funkcionálu (4.12), neboli

$$S_\lambda(\mathbf{m}) = \chi^2(\mathbf{m}) + \lambda J(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_f} \left\| \mathcal{G}(\gamma(\omega_k, \mathbf{m}), \mathbf{I}_s) - \mathbf{U}(\omega_k)_s^{obs} \right\|_2^2 \quad (4.27)$$

$$+ \frac{\lambda}{|\Omega|} \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{i=1}^{N_t} |K_i| \text{Re} \{ \gamma_0(\omega_k) \} \Big|_{K_i} \exp_{10} \left( m_{l(i)} \right) \cdot m_{l(i)} \ln 10$$

$$R_\lambda = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} S_\lambda(\mathbf{m}) \quad \lambda > 0 \quad (4.28)$$

Vztah (4.28) nazýváme regularizovanou obrácenou úlohou EIT při individuálním kódování. Ověření skutečnosti, že existuje  $R_*$  pro které  $R_\lambda$  představuje regularizační schéma ve smyslu definice 4.1 je mimo rozsah této práce.

## Poznámky

Je důležité všimnout si, že takto zkonstruovaný Tichonovův funkcionál nepřináší při individuálním kódování možnost extrahovat spektrální informaci, kterou jsme definovali v odstavci 4.3.1. Za prvé to plyne ze skutečnosti, že operátor přímé úlohy dává při individuálním kódování predikci napětí na každé frekvenci nezávisle, a tudíž se plně separují také jeho derivace podle modelových parametrů, které kódují admitivitu na různých frekvencích. Za druhé to plyne z toho, že penalizační funkcionál (4.26) je rovněž možné separovat dle frekvence. Efektivně tedy řešením problému (4.28) řešíme  $N_f$  nezávislých kopií úlohy (4.11) regularizované individuálně pomocí maximální entropie.

Hledání konstrukce, která by nám pomohla extrahovat spektrální informaci, se nakonec ukázalo být složitějším, než se na první pohled zdá. Jedním ze způsobů, jak toho docílit při individuálním kódování, by bylo vztahovat rozložení admitivity na dané frekvenci k experimentálně získaným spektrální závislostem této veličiny pro zvolenou sadu materiálů -  $\{\gamma_j(\omega_k)\}_{j=1}^{N_{\text{mat}}}$ . Toho bychom mohli dosáhnout například přidáním penalizačního funkcionálu

$$J_{\text{mat}}(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{N_t} \min_{j=1, \dots, N_{\text{mat}}} \sum_{k=1}^{N_f} \left| \gamma(\mathbf{m}, \omega_k) \Big|_{K_i} - \gamma_j(\omega_k) \right|^2 \quad (4.29)$$

do regularizačního schématu výše. Úkolem tohoto „materiálového“ penalizačního funkcionálu je postihnout situaci, kdy se admitivita čtyřstěnné sítě nevyvíjí s frekvencí podle jedné z předepsaných disperzí  $\gamma_j(\omega_k)$ . Vynucujeme tedy konformitu spektrálního průběhu admitivity v částech domény vůči sadě předepsaných disperzí.

Snadno nahlédneme, že tento přístup k dodatečnému podmínění úlohy je velmi podobný volbě kódování admitivity pomocí parametrů disperze (viz sekce 4.3.2), ale efektu je dosaženo na jiné úrovni. Přesněji, kódujeme-li parametry disperze, vede změna prvku modelového vektoru, který kóduje permitivitu  $i$ -tého čtyřstěnu dle vztahu (4.15) k změně naměřených napětí na každé frekvenci. Spektrální informace je tedy tímto přístupem zachycena, neboť nedojde k diskutované separaci derivací misfit funkcionálu podle modelových parametrů v případě individuálního kódování.

V neposlední řadě, obdobně jako jsme požadovali znalost analytické derivace kódování  $\gamma(\mathbf{m}, \omega_k)$  pro výpočet gradientu misfit funkcionálu, je z implementačního hlediska pro efektivní výpočet gradientu Tichonovova funkcionálu (4.27) zapotřebí, abychom penalizační funkcionál uměli analyticky derivovat. Zatímco výpočet derivace penalizačního funkcionálu maximalizujícího entropii (4.26) nepůsobí potíže, u materiálového funkcionálu (4.29) narazíme na problém s volbou minima přes materiály.

## 4.4 Volba regularizačního parametru

Zkonstruujeme-li Tichonovův funkcionál (4.3) pro regularizaci obecné obrácené úlohy, zbývá odpovědět na otázku, pro kterou hodnotu regularizačního parametru  $\lambda$  bychom měli považovat

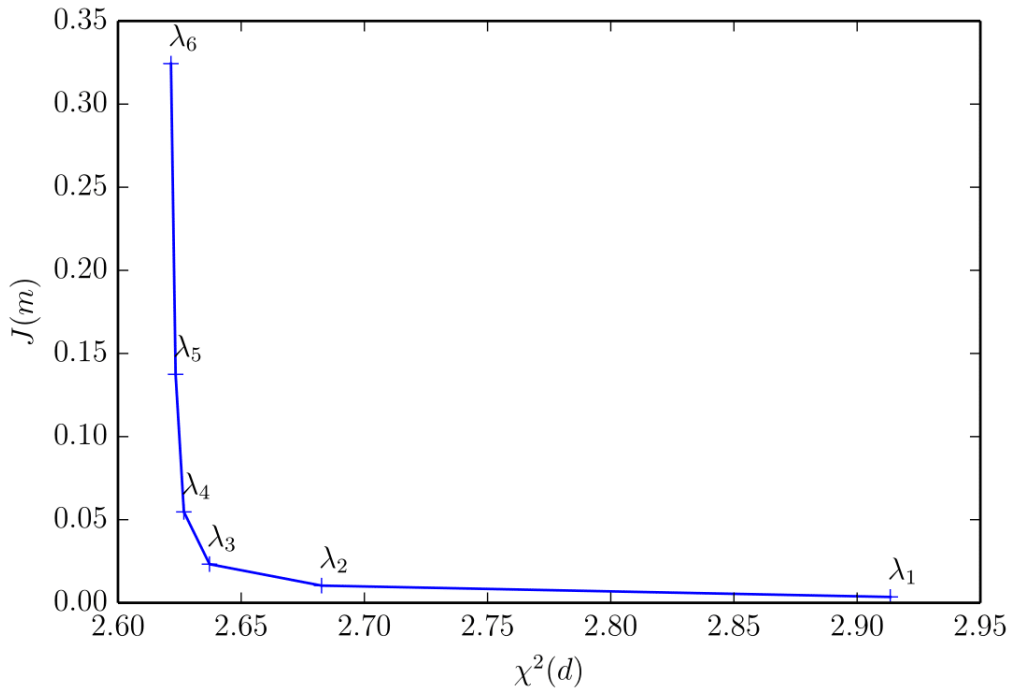
$$R_\lambda = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} S_\lambda(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{\text{obs}}) = \arg \min_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}} \chi^2(\mathbf{m}, \mathbf{d}^{\text{obs}}) + \lambda J(\mathbf{m}) \quad , \quad (4.30)$$



za nejlepší odhad skutečného  $\mathbf{m}^{\text{true}}$ , které chceme odhalit. Heuristických principů, na základě kterých lze tuto volbu uskutečnit, je celá řada [55, kap. 7], přičemž v této práci byla zvolena metoda *L-křivky* [24]. L-křivkou rozumíme křivku

$$L = \left\{ \left( \chi^2(R_\lambda, \mathbf{d}^{\text{obs}}), J(R_\lambda) \right) \mid \lambda > 0 \right\} \quad , \quad (4.31)$$

která poskytuje možnost vizuálně, či algoritmicky vyhodnotit kompromis mezi mírou datové shody, vyjádřené hodnotou misfit funkcionálu  $\chi^2$ , a penalizací vymeřenou zvoleným misfit funkcionálem  $J$ . Příkladem je L-křivka na obrázku 4.3 získaná analýzou konvergenčních dat pocházejících z numerického experimentu provedeného implementací popsanou v následující kapitole.



Obrázek 4.3: Příklad L-křivky získané numerickým řešením regularizované obrácené úlohy EIT (4.27)

L-křivka nese své jméno podle charakteristického zlomu, který odděluje její svislou a vodorovnou část. Vodorovná část odpovídá vysokým hodnotám regularizačního parametru, které v případě Tichonovova schématu (4.3) znamenají vyšší vliv penalizačního funkcionálu, a v důsledku roste konformita odpovídajícího  $R_\lambda$  vůči apriorní informaci na úkor kvality vysvětlení pozorovaných dat. Ve svislé části křivky je popsána situace přesně opačná.

Jinými slovy, ve vodorovné části L-křivky je dominantní vahou perturbací modelového vektoru  $R_\lambda$  penalizační funkcionál a zvolit takové  $R_\lambda$  za aproximaci skutečného  $\mathbf{m}^{\text{true}}$  by znamenalo přisoudit tomuto funkcionálu „zbytečně“ velký význam. Naopak ve svislé části křivky je dominantní vahou perturbací misfit funkcionál  $\chi^2$  a volit  $R_\lambda$  z tohoto oboru by znamenalo příliš oslabit vliv penalizace, důsledkem čehož bychom umožnili šumu v pozorovaných datech  $d^{\text{obs}}$  získat rozhodující slovo.

Úvahy předchozího odstavce nás vedou k závěru, že optimální aproximací  $\mathbf{m}^{\text{true}}$  je  $R_{\bar{\lambda}}$ , kde  $\bar{\lambda}$  je regularizační parametr, který odpovídá zlomu L-křivky. Zlom L-křivky je do jisté míry možné identifikovat vizuálně, nicméně pro zcela rigorózní přístup k této technice existují metody k jeho určení na základě nalezení bodu maximální křivosti [24, §6.4]

## 5. Implementace

Následující sekce popisují softwarová řešení, se kterými autor pracoval, přičemž pouze některé aspekty jejich implementace budou rozebrány podrobněji.

Ústředním nástrojem pro výpočty se stal program *prs4D*, jehož první verze nazvaná *prs3D* byla navržena a implementována vedoucím práce, dr. Velímským, v jazyce Fortran 90, vzhledem k potřebě minimalizovat výpočetní čas užitím vysoce optimalizovaných knihoven a rychlosti kompilovaného jazyka. Původní motivací pro vývoj tohoto řešení byla spolupráce se společností RSDynamics, která však spolupráci ukončila z důvodu neuspokojivých výsledků, dosažených v časovém rozmezí vyhrazeném pro vývoj prototypu.

S cílem prozkoumat možnosti generického řešení problému elektroimpedanční tomografie pomocí jazyka s vyšší úrovní abstrakce byl autorem navržen modul *eitsolver* v jazyce Python, který extenzivně využívá služeb knihovny FEniCS [3] pro řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice metodou konečných prvků, jež poskytuje možnost zapsat úlohu do zdrojového kódu ve formalismu velmi podobném tomu matematickému.

Použitá softwarová řešení probereme v následujících sekcích, přičemž nejprve začneme popisem zmíněného experimentálního uspořádání, které našimi softwarovými nástroji simulujeme.

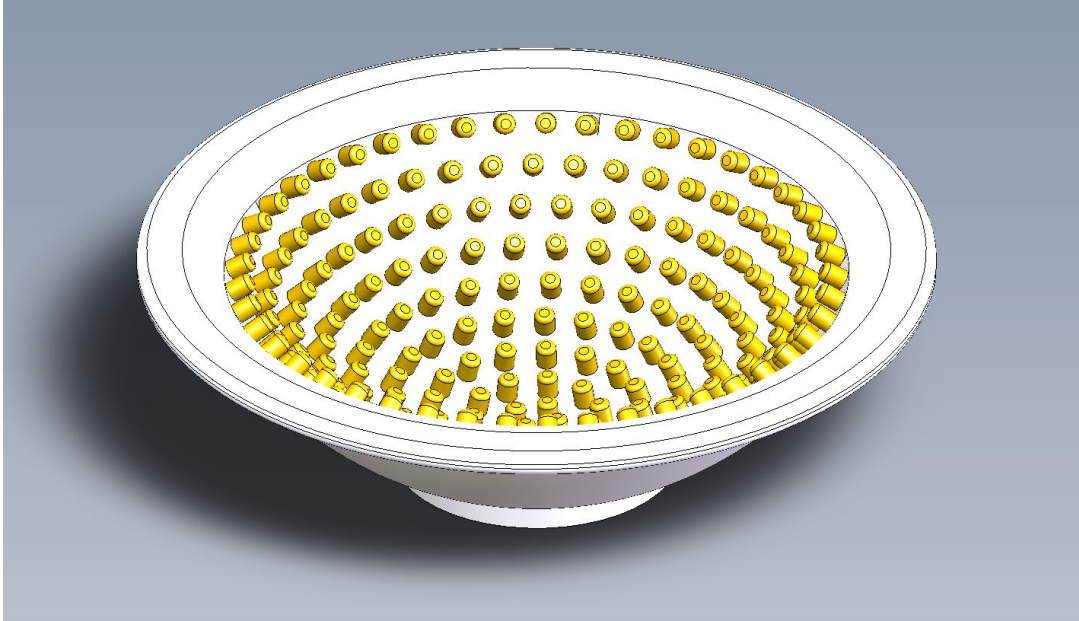
### Experimentální uspořádání

Jelikož zpočátku byla výhradní motivací pro vývoj softwarových řešení spolupráce se společností RSDynamics, program *prs3D* byl vyvíjen striktně pro práci v experimentálním uspořádání, jehož geometrie a schémata byly průmyslovým partnerem dodány, viz obr. 5.1. Z důvodu nesnadné generalizace programu *prs3D* pro práci s obecnou geometrií domény a elektrod, se autor v práci dále drží tohoto modelu, který vznikl snahou inženýrů zmíněné společnosti zvolit rozmístění elektrod přístroje uzpůsobené tvaru ženského prsu. Vzhledem k její triviální geometrii a snadnému parametrickému popisu byla jako tvar tzv. *aplikátoru* zvolena polokoule o poloměru 65 mm, oříznutá rovinou kolmou na její osu ve výšce odpovídající polárnímu úhlu  $60^\circ$ , na jejímž povrchu bylo rovnoměrně rozmístěno 234 elektrod o průměru 5 mm ve smyslu délek kruhových oblouků mezi nimi. Zvolené číslování elektrod je možné si prohlédnout na obrázku 5.2. Společnost RSDynamics navrhla také sadu stimulačních vzorů (viz sekce 4.3.1), kterou byl jejich přístroj schopen realizovat v klinicky přijatelném čase. Stimulační vzory této sady jsou vždy realizovány pouze jedním párem elektrod, přičemž napětí jsou snímána na několika dalších elektrodách.

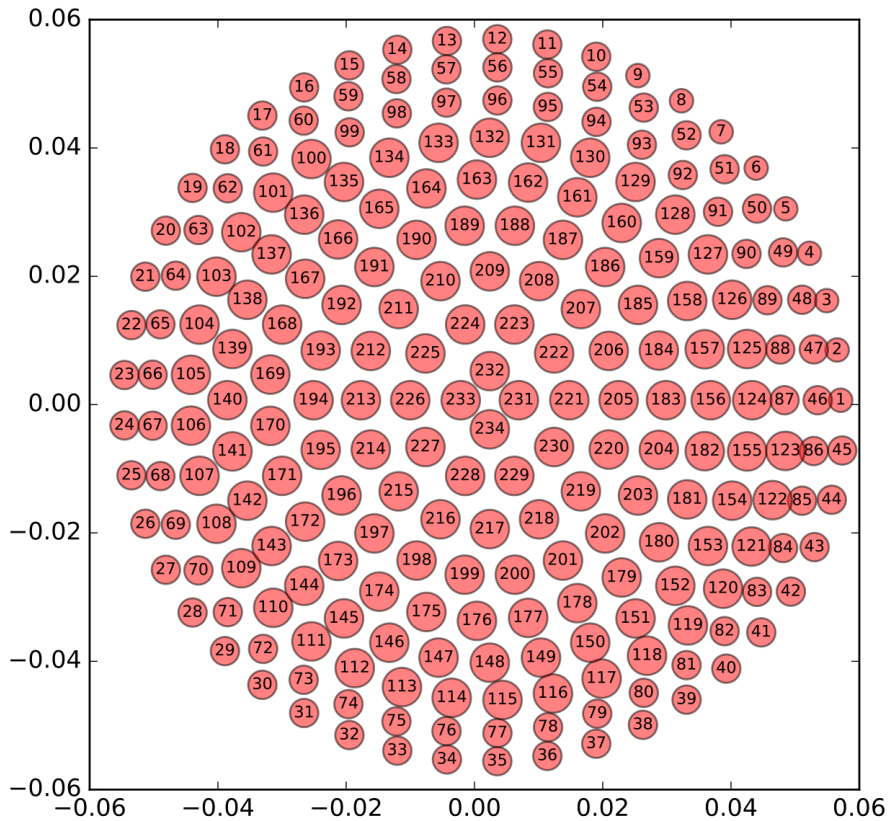
### 5.1 Modul *eitsolver*

Následující odstavce popisují implementaci modulu *eitsolver* v jazyce Python, přičemž tento modul zcela závisí na použití knihovny FEniCS.

Ačkoliv byl modul navržen tak, aby byl schopen pracovat s libovolnou geometrií a rozmístěním elektrod, bylo pro něj implementováno pouze řešení přímé úlohy z důvodu neuspokojivého výkonu omezeného nikoliv numerickým back-endem, ale



Obrázek 5.1: Rendering modelu aplikátoru vyvinutého společností RSDynamics



Obrázek 5.2: Číslování elektrod modelu společnosti RSDynamics, 2D projekce

implementací knihovny FEniCS samotné. Nástroj eitsolver byl nakonec využit k verifikaci numerického řešení okrajové úlohy pro CEM EIT

### 5.1.1 Přímá úloha

Zásadní předností modulu eitsolver je jednoduchá reprezentace řešeného eliptického problému zprostředkovaná systémem FEniCS, přesněji Python rozhraním objektově orientované knihovny *dolfin*, které exportuje jednak třídy reprezentující abstraktní pojmy jako je FEM síť, prostor funkcí, funkce a variační problém, za druhé pak generické funkce pro samotné sestavování odpovídajících soustav lineárních rovnic a jejich řešení za pomoci externích knihoven (např. PETSc [5]).

Jako hlavní prostředník ve specifikaci variačních problémů slouží Unified Form Language (UFL), tedy jednotný jazyk pro specifikaci *variačních forem*, který je během interpretace Python skriptu Just-In-Time (JIT) překládán některým z kompilátorů forem (form compilers) do C++ kódu ve standardizovaném UFC formátu. Příklad pohodlí poskytovaného jazykem UFL je uveden v úryvku kódu 5.1. Hluboká provázanost Pythonovského rozhraní s jazykem C++ je nasnadě, neboť samotná Python verze modulu dolfin je generována z bazového C++ kódu generátorem rozhraní SWIG.

Ukázka 5.1: Implementace výrazu (2.14) pomocí UFL

```
1 u, U, c = df.TrialFunctions(self.solution_space)
2 v, V, d = df.TestFunctions(self.solution_space)
3 el_summands = [
4     df.Constant(1.0/self.model.electrodes[i].impedance) *
5     (U[i] - u) * (V[i] - v) * ds(i)
6     for i in range(self.model.el_no())
7 ]
8 A = self.sigma * df.inner(df.grad(u), df.grad(v)) * df.dx + \
9     sum(el_summands) + d*u*df.dx + c*v*df.dx
```

Je dobře známo, že kamenem úrazu vysokoúrovňových implementací ve výpočetně náročných aplikacích je tzv. postih za abstrakci, kdy vrstvy abstrakce výrazně prodlouží délku vedení dat skrze použité struktury. Nízkoúrovňové programy pro základní výpočty numerické matematiky (např. BLAS) jsou v současnosti Python moduly (Numpy apod.) linkovány v podobě objektového kódu optimálního pro danou architekturu.

Při měření rychlosti výpočtu řešení přímé úlohy byla objeven značný overhead čítající až 2 hodiny při běhu na jednom vlákne při sestavování matice variačního problému. Bylo zjištěno, že tento overhead souvisí s extenzivním využitím prostorů tzv. „reálných prvků“ (viz Ukázka 5.2, řádka 5) sloužících jako reprezentace jednotlivých reálných čísel na celé síti. Skutečnost, že model společnosti RSDynamics obsahuje 234 elektrod, jejichž diskretní napětí jsou reprezentována právě těmito prostory, zodpovídá za inflaci UFL struktur definovaných na celé síti, což způsobí drastický vzrůst paměťových nároků a výpočetního času. Oproti tomu, samotné řešení lineární soustavy standardním přímým řešičem PETSc back-endu, trvá řádově několik sekund.

Z výše popsaných důvodů byl vývoj modulu eitsolver zastaven, neboť se autorovi v přijatelném čase nejevila žádná cesta k nápravě těchto implementačních omezení ležících hluboko ve FEniCS.

### Ukázka 5.2: Specifikace prostorů konečných prvků v eitsolver

```
1 P1 = df.FiniteElement(self.model.elem_family(),
2                       self.model.mesh.ufl_cell(),
3                       self.model.elem_degree()
4                       )
5 R_el = df.VectorElement("R", self.model.mesh.ufl_cell(), 0,
6                        dim=self.model.el_no()
7                        )
8 R = df.FiniteElement("R", self.model.mesh.ufl_cell(), 0)
9 mixed_element = df.MixedElement([P1, R_el, R])
10 self.solution_space = df.FunctionSpace(self.model.mesh,
    mixed_element)
```

## 5.2 Program prs4D

Následující odstavce popisují program *prs4D*, který vzešel ze softwarového řešení *prs3D* navrženého dr. Velímským. Narozdíl od modulu *eitsolver* představuje tento systém kompletní nástroj pro řešení regularizované obrácené úlohy EIT.

### 5.2.1 Vývoj

První verze *Prs3D* představovala kompletní nástroj pro řešení reálné obrácené úlohy EIT v tomto speciálním uspořádání. Reálnou obrácenou úlohou EIT rozumíme rekonstrukci reálného vodivostního pole na základě naměřené sady reálných napětí (při stimulaci stejnosměrným proudem — limita  $\omega \rightarrow 0$ ). Autor práce v tomto bodě převzal vývoj software a využil jej ke zpracování numerických experimentů, jejichž poměrně nepříznivé výsledky byly komunikovány společností RSDynamics, která následně spolupráci ukončila.

V rámci hledání způsobů, jakými dosáhnout kvalitnější rekonstrukce, bylo těžiště práce přesunuto k teoretickým úvahám o možnostech dodatečného podmínění úlohy využitím spektrální informace, kterou jsme probírali v sekci 4.3.1. Pro tyto účely bylo nutné nejprve konvertovat většinu funkcionalit programu pro práci s komplexní admitivitou a komplexní přímou úlohou — výsledkem byla druhá verze programu *prs3Dv2*. Následně byly možnosti programu rozšířeny o kódování spektrální závislosti admitivity a možnost výpočtu přímé úlohy na několika frekvencích, čemuž odpovídá přechod od vztahů (4.11) resp. (3.5) ke vztahům (4.12), resp. (4.13).

Jakmile byl program rozšířen o možnost řešit obrácenou úlohu na několika frekvencích zároveň, bylo nutné se opět ponořit do teoretických úvah a odvodit vhodný vztah pro materiálovou regularizaci. Toto úsilí je popsáno v poznámkách k sekci 4.3.3 a bohužel se ve vymezeném časovém úseku nesetkalo s úspěchem. Potenciální alternativou se jevila možnost kódovat parametry modelů popsaných v sekci 1.3.3 a diskusi tohoto přístupu je možné nalézt ve zmíněných poznámkách.

Zásah do programu *prs3D*, který by umožnil změnit kódování spektrální závislosti admitivity byl vyhodnocen jako příliš velký na to, aby bylo možné ponechat stávající funkcionalitu programu, a přitom jej nerozštěpit do dvou odlišně se vyvíjejících kopií. Aby mohl nástroj pracovat jak s individuálním kódováním, tak kódováním disperzí, bylo nutné generalizovat části programu, jejichž implementace závisela na volbě kódování, a schovat je za obecné rozhraní reprezentující

modelový prostor. Tyto úpravy se povedlo realizovat a výsledkem byla nová verze programu, která nese název prs4D. Celkový vývoj softwarového řešení, za který zodpovídá autor práce, je pro přehlednost ilustrován diagramem 5.3



Obrázek 5.3: Diagram ilustrující vývoj softwarového řešení prs3D

## 5.2.2 Popis komponent

Jelikož přímo zdrojový kód programu prs4D obsahuje důkladné komentáře, formátované pro účely autodokumentace pomocí systému *Doxygen*, uvedeme pouze stručný popis funkcionalit programu prs4D, které jsou přehledně členěny do jednotlivých modulů, jakožto konstruktů jazyka Fortran. Kompletní dokumentaci a schémata programu je možné snadno vygenerovat pomocí zmíněného softwarového nástroje.

### Komponenty

- `Module_Mesh` — Příprava ingrediencí pro řešení diskrétní úlohy EIT metodou konečných prvků
  - Načtení FEM sítě sestavené nástrojem gmsh, vyznačení čtyřstěnnů jejichž stěny jsou součástí elektrod
  - Reprezentace Galerkinovy aproximace prostoru řešení přímé úlohy Lagrangeovými prvky prvního řádu
  - Výpočet objemových a povrchových integrálů součinů prvků uzlové báze
- `Module_Fwd` - Řešení přímé úlohy
  - Inicializace řešiče Pardiso, Sestavení struktury matice úlohy v CSR3 formátu a její symbolická faktorizace
  - Sestavení matice úlohy na základě admitivity  $\gamma(\mathbf{m}, \omega_k)$  a její numerická faktorizace pro sadu bazových řešení
  - Sestavení přímého, či adjungovaného řešení přímé úlohy pro zvolený stimulační vzor z bazových řešení (viz. sekce 5.2.3)
  - Výpočet rozdílů elektrodových napětí pro vyčíslení funkcionálu datového misfitu
- `Module_Noise` — Simulace šumu v umělých pozorovaných napětích
- `Module_md1_Generic` — Generické rozhraní pro funkcionality, jejichž implementace závisí na realizaci modelového prostoru (kódování). Mezi tyto metody patří

- Realizace zobrazení  $\gamma(\mathbf{m}, \omega_k)$ , výpočet jeho derivace
  - Sestavení gradientu funkcionálu datového misfitu vyčíslením výrazu (3.18)
  - Výpočet regularizace a jejího gradientu
  - Vstup a výstup rozložení kódovaných veličin uvnitř domény (admitivita, parametry Cole-Cole modelu apod.)
  - Volba počátečního bodu v modelovém prostoru
  - Generujeme-li umělá data, patří sem také volba modelového vektoru pro kterou tato data odečteme a také volba tzv. homogenního modelového vektoru, jemuž dáme význam při popisu generátoru šumu
- `Module_md1_Legacy` — Realizace modelového prostoru odpovídajícího individuálnímu kódování  $\gamma(\mathbf{m}, \omega_k)$  (4.13)
  - `Module_Mlbfgs` — Implementace optimalizačního algoritmu LM-BFGS autorů Liu, Nocedal [37]
  - `Module_VTKIO` — Výstup do trojrozměrných datových souborů dle standardu Legacy VTK pro vizualizaci rozložení kódovaných veličin (admitivita, parametry Cole-Cole modelu) ve 3D pomocí aplikace Paraview
  - `Module_Generic_Write` — Výstup programu nezávislý na realizaci modelového prostoru
    - Zápis rozložení potenciálu uvnitř domény pomocí do formátu Legacy VTK
    - Výstup elektrodových napětí přímého, či adjungovaného řešení

### 5.2.3 Složitost přímé úlohy

Oproti vysokoúrovňovému řešení typu *eitsolver* se `prs3D` vyznačuje možností vyladit z hlediska výpočetního času jednotlivé komponenty výpočtu. Implementace řešení přímé úlohy byla navržena tak, aby byly předem vypočteny nezávislé z nich. Výměnou za obecnost knihovny FEniCS, dovolující zvolit v konstruktorech tříd, reprezentujících prostory konečných prvků, jejich řád a typ, využívá `prs3D` možnosti s předstihem připravit nezávislé ingredience pro sestavení matricové podoby Galerkinových rovnic (integrály bázových funkcí, jejich gradienty, ...), neboť pracuje pouze se simplicíálními Lagrangeovými prvky prvního řádu. Pádňým argumentem pro zavedení této optimalizace je skutečnost, že složky matice admitivity je zapotřebí přepočítat v každé iteraci inverzního řešiče, kdy se změní odhad vodivosti (admitivity) domény.

Ve zcela obecné situaci bychom museli řešit diskrétní přímou úlohu EIT dle formulace v sekci 2.3 pro každý stimulační vzor ze sady  $\{\mathbf{I}_s\}_{s=1}^{N_s}$ , vybrané pro formulaci problému (4.11). Velikost původní sady stimulačních vzorů přístroje společnosti RSDynamics je řádově  $10^4$ , a řešit tuto úlohu pro každý její prvek by znamenalo vysokou složitost. Proto další z optimalizací, kterou `prs3D` využívá, je omezení výpočtu diskrétní úlohy EIT na sadu „bázových“ stimulačních vzorů (pravých stran)  $\{\mathbf{I}^{(n)}\}_{n=1}^{N-1}$  odpovídajících stimulaci  $I_1^{(n)} = +I_0$ ,  $I_n^{(n)} = -I_0$



přičemž ostatní složky jsou nulové. Vzhledem k linearitě úlohy je pak možné sestavit řešení diskrétního problému EIT pro libovolný stimulační vzor jako lineární kombinaci řešení odpovídajících vzorům této báze sady.

Takto optimalizovat jsme zřejmě oprávněni pouze na úrovni modelování a numerické matematiky — velkou otázkou je oprávněnost použití této optimalizace v experimentální situaci za účelem urychlení doby snímání. V praktickém uspořádání jsou jak měřené veličiny, včetně údaje o proudovém výstupu zdroje, tak modelování domény samotné (geometrie, elektrodový kontakt), zatíženy nejistotou. Pokud by část této nejistoty byla systematického charakteru, dochází skládáním bázevých řešení k jejímu zesilování.

K řešení výsledné soustavy rovnic je použita implementace přímého paralelního řešiče obecných řídkých soustav Pardiso [46] knihovny Intel MKL [1]. Při volání je možné přímo specifikovat, že matice, se kterou pracujeme, je symetrická a indefinitní, což umožňuje interně volit optimální algoritmus pro faktorizaci. Poznamenejme také, že Pardiso dovoluje předem vypočít symbolickou faktorizaci matice (výpočet struktury LU rozkladu minimalizující zaplnění) a v každé iteraci inverzního řešiče hledat řešení přímé úlohy její numerickou faktorizací.

#### 5.2.4 Složitost obrácené úlohy

Nejcennější optimalizací, kterou můžeme při implementaci obrácené úlohy využít, je vyjádření adjungovaného řešení problému (3.17) lineární kombinací bázevých řešení, probíraných v předchozí sekci. Vzhledem k patrné symetrii formulací okrajové úlohy pro CEM EIT (viz. definice 2.3) a úlohy k ní adjungované, můžeme hledání adjungovaného řešení převést na řešení přímé úlohy s pravou stranou odpovídající adjungovaným proudům, a tudíž jsme schopni jej také vyjádřit lineární kombinací bázevých řešení.

Výše zmíněné zkratky redukovují četnost numerických faktorizací matice admitivity pro jednu iteraci na počet bázevých stimulačních vzorů, čímž je v důsledku umožněno řešení přímé i adjungované úlohy pro libovolný stimulační vzor ve značně menší časové složitosti. Díky této optimalizaci je sice výpočet závratně urychlen, nicméně sestavení gradientu misfit funkcionálu stále platí za velmi složitou operaci. To je dáno řádově menší celkovou složitostí numerické faktorizace a sestavení řešení přímé a adjungované úlohy na straně jedné, oproti mnohem větší složitosti sestavení gradientu misfit funkcionálu na základě vztahu (3.18) na straně druhé.

Situaci si vysvětlíme rozborem úryvku kódu 5.3, který ukazuje část subroutiny `legacy_matrix_dproduct`, která je zodpovědná za vyčíslení výrazu na pravé straně (3.18) při individuálním kódování admitivity. Figurují zde následující proměnné

$$\begin{aligned} \text{yDAx}(j) &\longleftrightarrow \frac{\partial \chi_k^2(\mathbf{m})}{\partial m_{l(j,k)}} & \text{thd}(j)\%adgg(\mathbf{p},\mathbf{q}) &\longleftrightarrow \int_{K_j} \nabla \psi_p \cdot \nabla \psi_q \, dx \\ \text{dgm}(j) &\longleftrightarrow \frac{\partial \gamma(\mathbf{m}, \omega_k)}{\partial m_{l(j,k)}} & \text{xf} &\longleftrightarrow \mathbf{u}_h, \quad \text{xa} &\longleftrightarrow \mathbf{u}_h^\dagger, \end{aligned}$$

přičemž  $\chi_k^2(\mathbf{m})$  je část  $\chi^2(\mathbf{m})$  odpovídající  $k$ -té frekvenci spektra,  $\gamma(\mathbf{m}, \omega_k)$  představuje frekvenční závislost admitivity,  $\psi_p$ ,  $p = 1, \dots, 4$  jsou prvky uzlové báze  $j$ -tého čtyřstěnu  $K_j$ . Tato subrutina je volána na každé frekvenci poté, co byla

sestavena přímá a adjungovaná řešení  $\mathbf{u}_h$ , resp.  $\mathbf{u}_h^\dagger$  odpovídající stimulačním vzorům zvolené sady. Jakmile je proměnná `yDAx` nasčítána přes všechny prvky této sady, je přiřazena do části jisté proměnné reprezentující celý gradient datového misfitu  $\chi^2(\mathbf{m})$  a resetována.

Ukázka 5.3: Výpočet gradientu misfit funkcionálu v programu `prs4D`

```

1 SUBROUTINE legacy_matrix_dproduct
2   implicit none
3   integer(I4B) :: p, j, q
4
5   !$OMP PARALLEL DO DEFAULT(SHARED) PRIVATE(p, q) SCHEDULE(STATIC)
6   do j= 1, nt
7     do p= 1, 4
8       do q= 1, 4
9         yDAx(j) = yDAx(j) + thd(j)%adgg(p, q)*dgm(j)* &
10                xa(thd(j)%n(p))*xf(thd(j)%n(q))
11         yDAx(nt+j) = yDAx(nt+j) + thd(j)%adgg(p, q)*dgm(nt+j)* &
12                xa(thd(j)%n(p))*xf(thd(j)%n(q))
13       enddo
14     enddo
15   enddo
16 !$OMP END PARALLEL DO
17
18   (...)
19 END SUBROUTINE legacy_matrix_dproduct

```

Na základě ukázky snadno nahlédneme, že celková složitost výpočtu gradientu misfit funkcionálu při individuálním kódování je úměrná faktoru  $2 \cdot 16 \cdot N_f \cdot N_t \cdot N_s$ , přičemž je typicky  $N_f \approx 10^1$ ,  $N_t \approx 10^5$ ,  $N_s \approx 10^4$ . Z tohoto důvodu představuje běh uvedené subroutiny nejsložitější část jedné iterace optimalizačního algoritmu, vůči níž je náročnost ostatních funkcionalit `prs4D` zanedbatelná.

Abychom výpočet urychlili, využíváme v této subroutině implicitní paralelizaci `for`-cyklů dle standardu `OpenMP`. V těle subroutiny tomu odpovídají direktivy uvozené znaky `!$OMP`. Přestože je tato metoda paralelizace velmi jednoduchá, poskytuje téměř dokonalý `speedup` výpočtu.

Numerické experimenty popsané v následující sekci byly připraveny na stroji s 6-core procesorem Intel i7 o taktu 3.2 GHz, přičemž kód běžel na 12 logických vláknech (`hyperthreading`). Zvolené parametry výpočtu pro tyto experimenty odpovídají odhadu v předchozím odstavci s výjimkou počtu frekvencí, jelikož byl výpočet proveden pouze na jedné frekvenci. Tomuto uspořádání odpovídá téměř dvouminutová časová náročnost jednoho průběhu hlavní smyčky programu, jež koresponduje — až na výjimky — s výpočtem gradientů a jedné iteraci optimalizačního algoritmu, přičemž na výpočet gradientu funkcionálu datového misfitu pomocí výše zmíněné subroutiny připadá 1,5 minuty, zatímco na zbytek smyčky necelých 10 vteřin.

Celková časová náročnost řešení obrácené úlohy závisí na počtu iterací, který můžeme zvolit pevný, nebo závislý na zastavovacích kritériích optimalizačního algoritmu. V numerických experimentech následující sekce bylo pro každou hodnotu regularizačního parametru vypočteno 500 iterací a pro konkrétní praktické

aplikace by bylo zapotřebí nalézt vhodná zastavovací kritéria optimalizačního algoritmu.

Abychom pro volbu optimálního regularizačního parametru mohli využít kritérium L-křivky, je nutné proměřit několik jejích bodů. To může být dále výhodné, počítáme-li pro vícero regularizačních parametrů sestupně (ve smyslu jejich velikosti), neboť můžeme výsledek optimalizace pro jednu hodnotu parametru využít jako startovací bod prohledávání pro tu následující, a tímto realizovat jistou formu žíhání — relaxace penalizačního funkcionálu. V numerických experimentech, prezentovaných v následující kapitole jsme řešili obrácenou úlohu pro nejméně šest hodnot tohoto parametru. Výsledná časová náročnost jednoho numerického experimentu tedy činila minimálně 72 hodin.

Nezávisle na volbě kódování, bude pro dosažení přijatelné časové náročnosti výpočtu na několika frekvencích nutné, implementovat pokročilejší metody paralelizace. Jednou z možností by byla dodatečná MPI paralelizace výpočtu přes jednotlivé frekvence, důsledkem čehož by byl téměř dokonalý speedup daný nezávislostí výpočtů gradientu misfit funkcionálu pro různé frekvence. Druhou cestou by byl přesun výpočtu na SIMD procesor typu GPU (např. pomocí CUDA), či MIC.



## 6. Numerické experimenty

Pomocí softwarových nástrojů popsaných v předchozí kapitole bylo provedeno několik numerických experimentů. Nejprve bude představeno vzájemné srovnání přímých řešení vypočtených jednotlivými systémy. Následně bude popsán kompletní numerický experiment, zahrnující řešení obrácené úlohy, uskutečněný pomocí nástroje prs4D.

### 6.1 Srovnání přímých řešení

Pro kontrolu implementace programu prs3D bylo zpracováno srovnání řešení přímé úlohy s výsledkem získaným modulem eitsolver, tzn. pomocí systému FEniCS, který je možné v této situaci považovat za referenční implementaci. Předmětem srovnání, znázorněném v grafické podobě na obrázku 6.1, je první bázové řešení o amplitudě  $I_0 = 10$  mA, zmíněné v sekci 5.2.3, je-li vodivost domény  $\sigma = 1$  S/m homogenní. Obrázek znázorňuje párové rozdíly elektrodoových napětí ve formě matice, přičemž její horní trojuhelník byl vypočten programem prs3D, zatímco dolní modulem eitsolver. O shodě řešení vypovídá symetrie předkládané matice podle diagonály. Škála napětí byla oříznuta na interval  $[-40.0, 90.0]$ , neboť matice ve skutečnosti obsahuje několik málo hodnot v absolutní hodnotě řádově větších než  $10^1$ .

### 6.2 Experiment s vnořenou koulí

Abychom otestovali kvalitu rekonstrukce získatelné pomocí softwarového nástroje prs4D, byl navržen vůbec nejjednodušší myslitelný experiment, kterým je rekonstrukce rozložení admitivity ze sady syntetických pozorovaných napětí, je-li skutečné rozložení vodivosti uvnitř domény velmi kontrastní. Konkrétní popis zvoleného apriorního rozložení je předmětem první části této sekce.

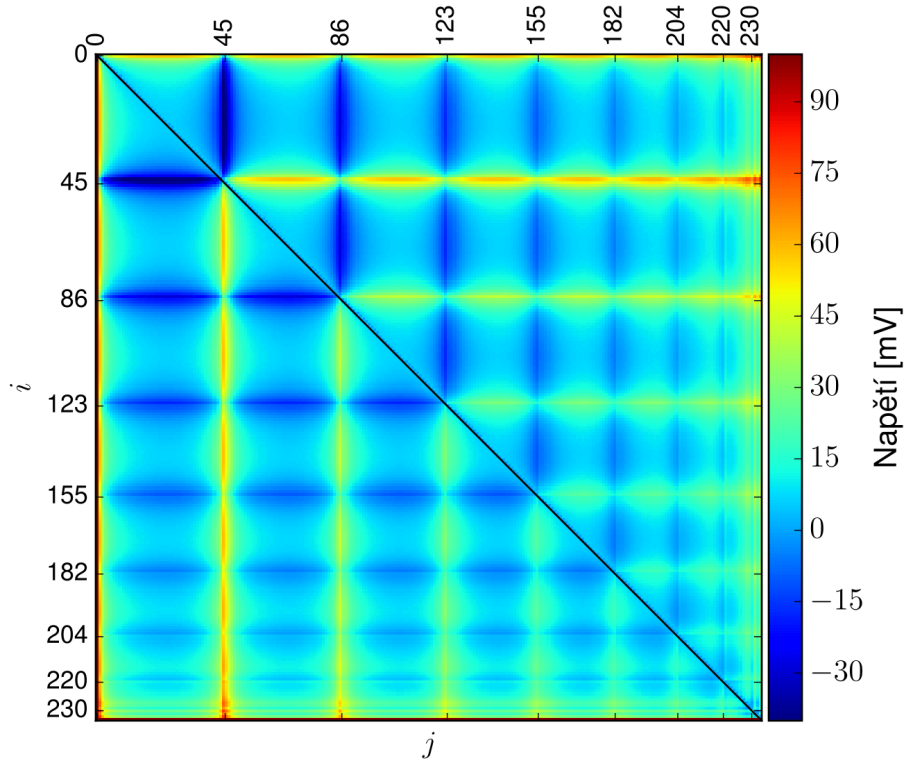
Navíc bylo nutné otestovat robustnost rekonstrukce při kontaminaci dat šumem různé úrovně. Způsobů, jakými lze simulovat šum, je celá řada a pro naše účely je důležité volit takový, který bude nejlépe napodobovat skutečnou nejistotu v pozorovaných datech, která má v praxi původ například ve způsobu měření pozorovaných napětí. Návrhu simulátoru šumu je věnována druhá část této sekce.

Je důležité poznamenat, že nebude-li náš rekonstrukční software schopen vyřadit se s rekonstrukcí admitivity na základě syntetických dat, nebude mít zřejmě ani smysl, abychom se pokoušeli rekonstruovat data reálná, neboť ta budou obsahovat nejen šum v pozorovaných napětích, ale také systematickou chybu mající původ např. v geometrii elektrod, jejich poloze či impedanci — veličinách, které nikdy nebudeme modelovat zcela přesně.

Celou kapitolu uzavřou výsledky rekonstrukcí na základě formulace obrácené úlohy dle (4.28) pro různé úrovně šumu spolu s jejich diskusí a interpretací.

#### 6.2.1 Syntetická data

Pozorovaná data nazýváme syntetickými, byla-li sestavena z přímého řešení vypočteného „uměle“ při zvoleném apriorním rozložení admitivity  $\gamma(\mathbf{m}_p)$ , odpo-



Obrázek 6.1: Matice sloužící jako srovnání přímých řešičů prs3D a eitsolver. V případě, kdy  $j > i$ ,  $ij$ -tá složka obsahuje hodnotu  $U_i - U_j$  pro diskrétní napětí vypočtená prs3D, zatímco pro  $j < i$  hodnotu  $U_j - U_i$  pro diskrétní napětí vypočtená modulem eitsolver.

vídající apriornímu modelovému vektoru  $\mathbf{m}_p$ , neboli

$$\mathbf{U}^{\text{obs}} = \mathcal{G} \left( \gamma(\mathbf{m}_p), \{I_s\}_{s=1}^{N_s} \right) . \quad (6.1)$$

V numerickém experimentu jsme, jak název napovídá, volili kontrastní rozložení homogenní admitivity s vnořenou koulí ilustrovaném obrázky 6.2 a 6.3.

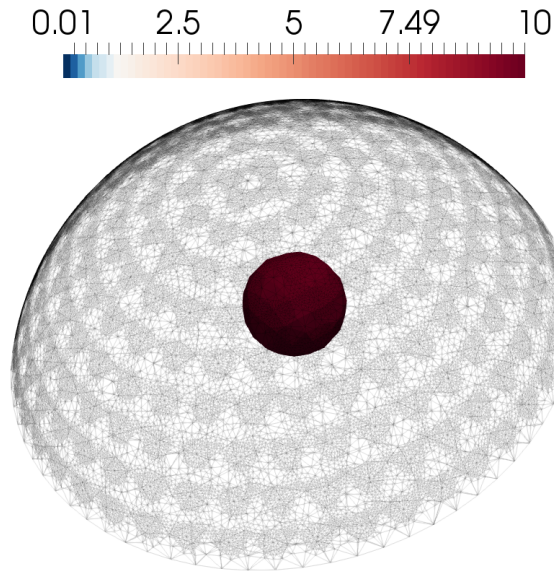
Přesněji se jedná o kouli poloměru 10 mm, umístěnou na pozici  $\vec{x} = (10, 10, 45)$  mm, jejíž admitivita činí desetinásobek admitivity domény  $\gamma_0 = 1 + 1i$  S/m.

### 6.2.2 Simulace šumu

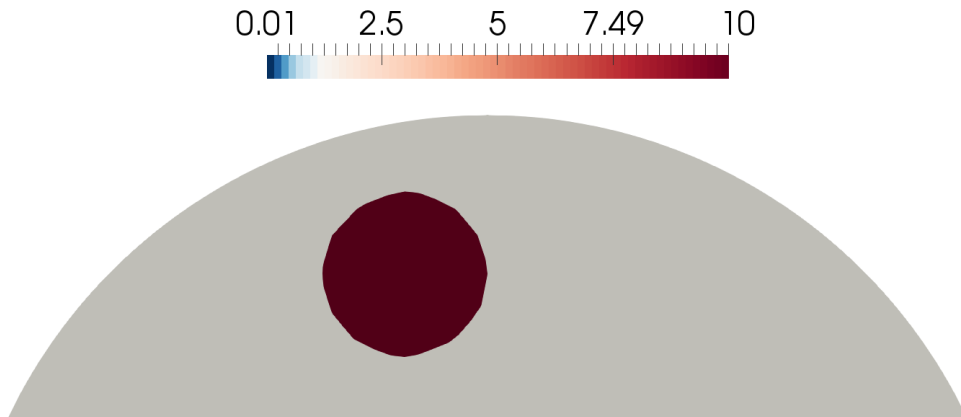
Nejjednodušším způsobem jakým zavést šum do dat by bylo generovat náhodný vektor o dané amplitudě a studovat vliv přičtení tohoto vektoru k syntetickým datům na kvalitu rekonstrukce v závislosti na této amplitudě. Složitější přístup spočívá v zavedení jisté relativní míry amplitudy šumu oproti „signálu“ jakožto informace přenášené pozorovanými daty. K tomu je zapotřebí přesně vyjádřit co rozumíme pojmem signál v kontextu naší úlohy.

V experimentu s vnořenou koulí můžeme intuitivně za signál považovat rozdíl napětí vypočtených v případě, že bude admitivita celé domény homogenní oproti těm, která jsme získali po vnoření koule. Formálně tedy pro  $\gamma(\mathbf{m}_p^{\text{hom}}) = \gamma_0$  je odpovídající „homogenní“ apriorní modelový vektor  $\mathbf{m}_p^{\text{hom}}$  a řešením přímé úlohy

Obrázek 6.2: Rozložení  $\text{Re}\{\gamma(\mathbf{m}_p)\}$  odpovídající apriornímu modelu  $\mathbf{m}_p$  vnořené koule



Obrázek 6.3: Řez rozložením  $\text{Re}\{\gamma(\mathbf{m}_p)\}$  odpovídající apriornímu modelu  $\mathbf{m}_p$  vnořené koule



získáme

$$\mathbf{U}_{\text{obs}}^{\text{hom}} = \mathcal{G}\left(\gamma(\mathbf{m}_p^{\text{hom}}), \{I_s\}_{s=1}^{N_s}\right), \quad (6.2)$$

kde  $U_{\text{obs}}^{\text{hom}}$  jsou tzv. homogenní pozorovaná data .

K tomu, abychom mohli pro vyjádření relativní míry šumu veličinu nazývanou SNR (angl. Signal-to-Noise Ratio) definovanou vztahem

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left( \frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right), \quad (6.3)$$

zbývá vysvětlit, co rozumíme amplitudou signálu  $A_{\text{signal}}$ . V našem experimentu

můžeme za hrubou aproximaci považovat veličinu

$$A_{\text{signal}} = \sqrt{\text{Var} [ |\mathbf{U}^{\text{obs}} - \mathbf{U}_{\text{hom}}^{\text{obs}}| ]} \quad . \quad (6.4)$$

Ke každé složce vektoru pozorovaných napětí pak přičteme komplexní číslo jehož reálná i imaginární složka budou vzorky normálního rozdělení  $\mathcal{N}(0, A_{\text{signal}})$  škálované faktorem

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \exp_{10} \left( -\frac{\text{SNR}_{\text{dB}}}{20} \right) \quad (6.5)$$

### 6.2.3 Výsledky

Na základě syntetických dat popsanych v sekci 6.2.1, kontaminovaných simulovaným šumem různé úrovně metodami popsány v předchozí sekci, byla provedena rekonstrukce rozložení admitivity řešením diskretní obrácené úlohy EIT při individuálním kódování (4.28), přičemž výpočet byl omezen pouze na jednu frekvenci. V definici individuálního kódování byla za referenční admitivitu přirozeně zvolena admitivita pozadí  $\gamma_0$ , zavedená při popisu modelu vnořené koule.

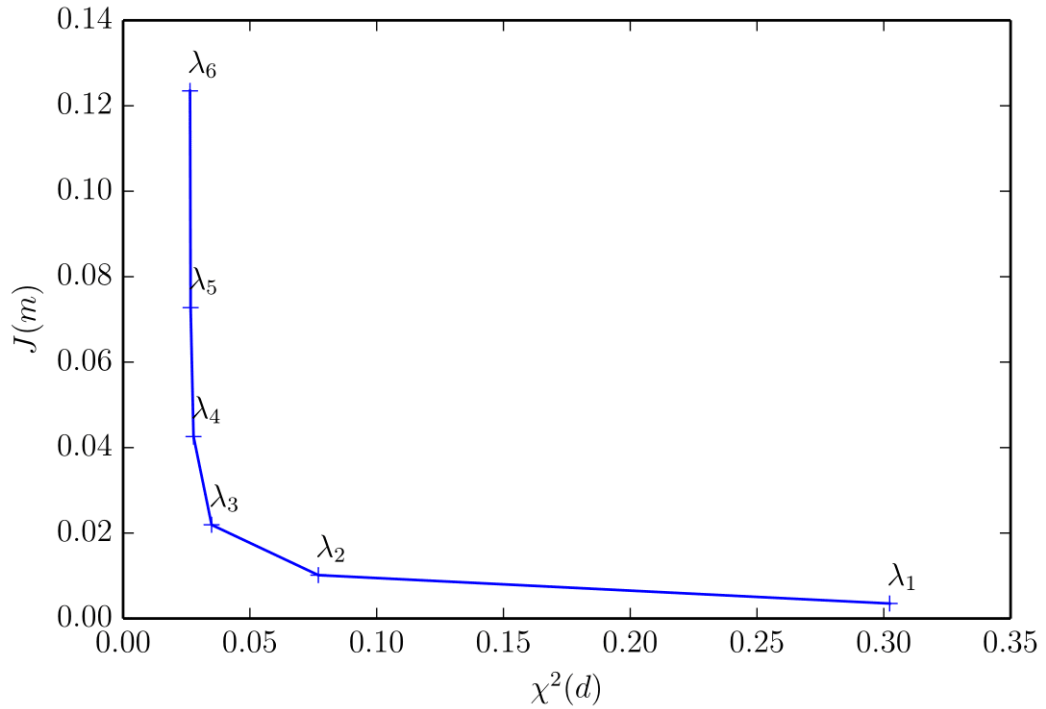
Výpočet byl uskutečněn pro několik hodnot regularizačního parametru  $\lambda$ , přičemž dojde-li v programu prs4D k zastavení iterací pro daný regularizační parametr s jistým výsledným modelovým vektorem, optimalizační algoritmus startuje v první iteraci pro další hodnotu parametru z tohoto bodu modelového prostoru. Tuto metodu je možné považovat za formu žihání — relaxace penalizačního funkcionálu. Iterace pro první hodnotu regularizačního parametru v programu prs4D startují s homogenním rozložení referenční admitivity  $\gamma_0$ .

Abychom pro volbu vhodného regularizačního parametru mohli použít kritérium L-křivky vyneseme ji do grafu a uvedeme její body v tabulce. Rozložení admitivity odpovídající výsledné aproximaci řešení  $R_\lambda$  regularizované obrácené úlohy (4.28) prezentujeme graficky ve třech formátech. Prvními dvěma jsou totožné řezy rozložením reálné části admitivity v simulovaném tělese rovinou  $\vec{o} = (10, 0, 0)$  mm,  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ , z nichž jeden bude vybarven fixní divergentní škálou na které jsme problém formulovali (neutrální bílá barva pro hodnotu pozadí  $\text{Re} \{ \gamma_0 \} = 1.0$ , horní hranice škály pro  $\text{Re} \{ \gamma \} = 10.0$  — hodnota, kterou jsme přisoudili vnořené kouli), druhý pak kvalitativní škálou přizpůsobenou rozsahu dat. V neposlední řadě prezentujeme také trojrozměrný pohled skrz kouli, ve které vykreslíme admitivitu na základě predikátu  $\text{Re} \{ \gamma \} > C$ , kde  $C$  je zvolený „threshold“. Jednotka admitivity ve všech následujících grafických znázorněních je S/m.



### Výpočet pro $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$

V případě  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$  charakterizuje L-křivku obrázek 6.4 spolu s tabulkou 6.1. Rekonstruované rozložení  $\text{Re}\{\gamma(R_\lambda)\}$  je možné si prohlédnout na obrázcích 6.7 až 6.24.



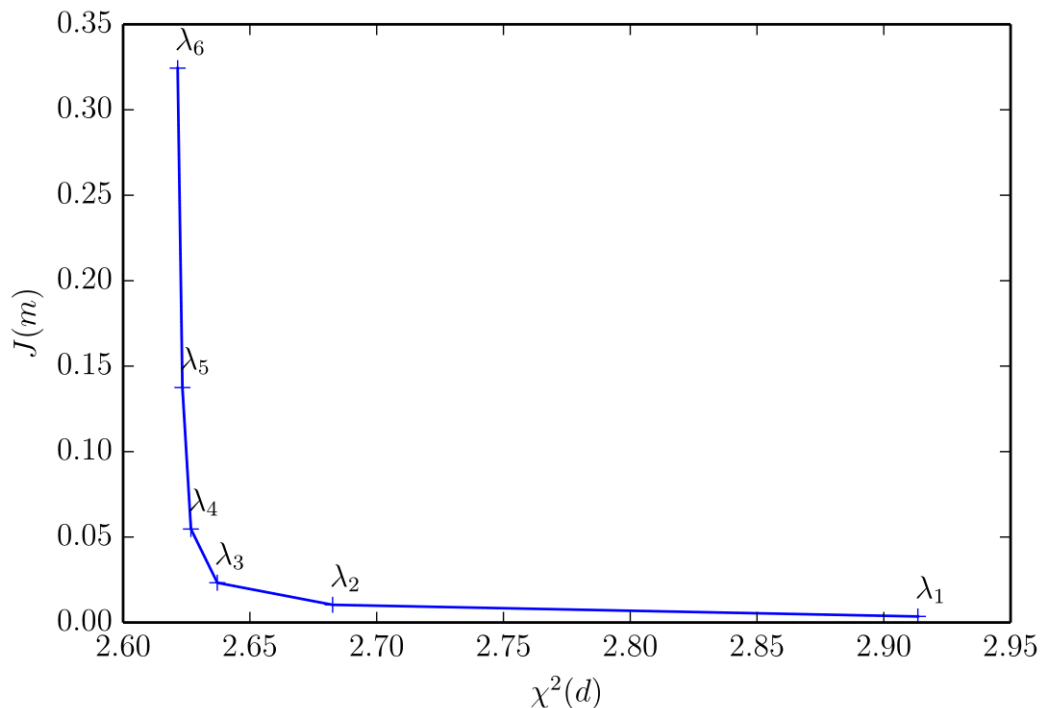
Obrázek 6.4: L-křivka vzniklá analýzou řešení obrácené úlohy na základě dat kontaminovaných šumem o úrovni  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$

	$\lambda$	$\chi^2(R_\lambda)$	$J(R_\lambda)$
1	100	0.3023	0.003517
2	10	0.077	0.01015
3	1	0.03489	0.02194
4	0.1	0.02777	0.04257
5	0.01	0.02661	0.07276
6	0.001	0.02638	0.1235

Tabulka 6.1: Body L-křivky vzniklé analýzou řešení obrácené úlohy na základě dat kontaminovaných šumem o úrovni  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$

### Výpočet pro $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$

V případě  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$  charakterizuje L-křivku obrázek 6.5 spolu s tabulkou 6.2. Rekonstruované rozložení  $\text{Re} \{ \gamma(R_\lambda) \}$  je možné si prohlédnout na obrázcích 6.25 až 6.42.



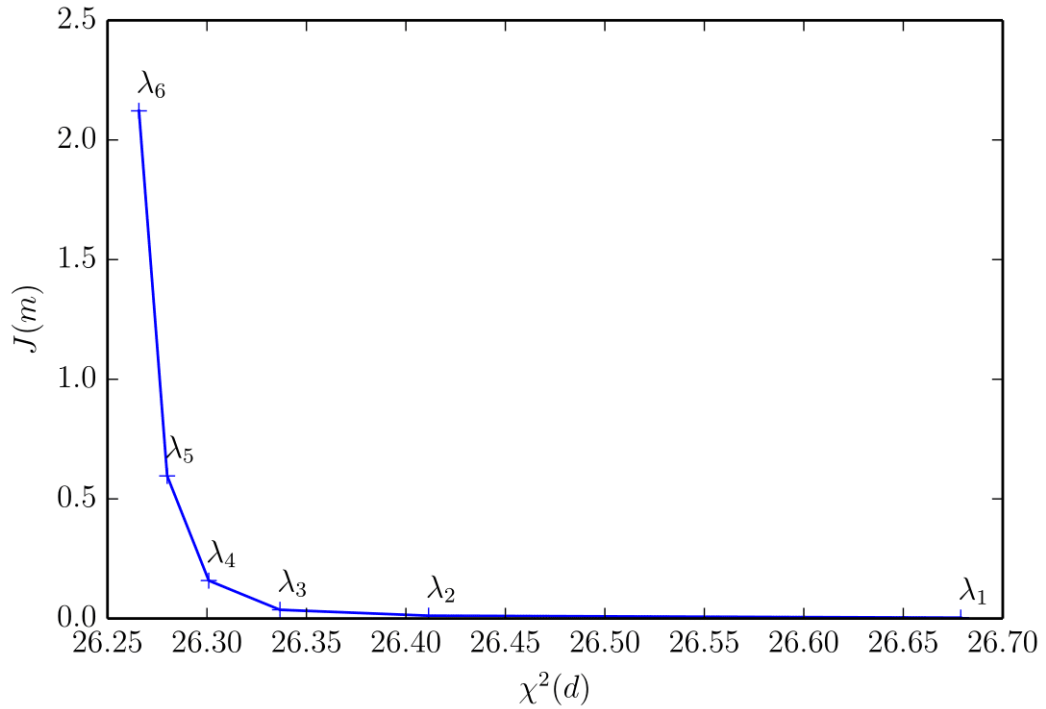
Obrázek 6.5: L-křivka vzniklá analýzou řešení obrácené úlohy na základě dat kontaminovaných šumem o úrovni  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$

	$\lambda$	$\chi^2(R_\lambda)$	$J(R_\lambda)$
1	100	2.913	0.003549
2	10	2.683	0.01037
3	1	2.637	0.02329
4	0.1	2.627	0.05469
5	0.01	2.623	0.1375
6	0.001	2.622	0.3244

Tabulka 6.2: Body L-křivky vzniklé analýzou řešení obrácené úlohy na základě dat kontaminovaných šumem o úrovni  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$

### Výpočet pro $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$

V případě  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$  charakterizuje L-křivku obrázek 6.6 spolu s tabulkou 6.1. Rekonstruované rozložení  $\text{Re} \{ \gamma(R_\lambda) \}$  je možné si prohlédnout na obrázcích 6.43 až 6.60.



Obrázek 6.6: L-křivka vzniklá analýzou řešení obrácené úlohy na základě dat kontaminovaných šumem o úrovni  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$

	$\lambda$	$\chi^2(R_\lambda)$	$J(R_\lambda)$
1	100	26.68	0.003702
2	10	26.41	0.01195
3	1	26.34	0.03649
4	0.1	26.3	0.1584
5	0.01	26.28	0.5958
6	0.001	26.27	2.122

Tabulka 6.3: Body L-křivky vzniklé analýzou řešení obrácené úlohy na základě dat kontaminovaných šumem o úrovni  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$

## 6.2.4 Diskuse

Rozbor rekonstruovaných rozložení admitivity potvrzuje zcela zásadní vliv šumu na kvalitu výsledku. Je zapotřebí zdůraznit relativní charakter pojmu kvalita v tomto kontextu. Bez toho, aniž bychom navrhli kvantitativní metody vyhodnocení kvality rekonstrukce, nám nezbývá než se spolehnout na subjektivní hodnocení lidským okem. V případě numerického experimentu s vnořenou koulí bychom mohli za účelem kvantitativního hodnocení studovat například míru fyzické expanze rekonstruované nehomogenity oproti apriornímu modelu, či zda se zachovává střední hodnota admitivity rekonstruovaného profilu.

Jak již bylo popsáno v sekci 6.2.3, obrácenou úlohu řešíme nejprve pro největší hodnotu regularizačního parametru a ten postupně oslabujeme. Pro každou úroveň šumu mají L-křivky (6.4) - (6.6) typický charakter popsáný v sekci 4.4. Konkrétně v případě  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$  je možné výsledek rekonstrukce patrně rozdělit podle hodnoty regularizačního parametru na obory nedostatečně ( $\lambda_5, \lambda_6$ ) a příliš ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) regularizovaného řešení zcela v souladu s myšlenkami sekce 4.4, včetně důsledků volby parametru pro kvalitu rekonstrukce. Výsledky pro  $\lambda_3, \lambda_4$  jsou hraniční, nicméně zlomu L-křivky lépe odpovídá  $\lambda_4$ , který bychom tedy dle odpovídajícího kritéria volili jako optimální.

V oboru příliš regularizovaného řešení je výsledek rekonstrukce pro každou z úrovní šumu přibližně stejný. Porovnáme-li řezy, prezentované v původní škále problému, s těmi v kvalitativní škále, je patrné, že ačkoliv se v kvalitativní škále rýsuje nehomogenita, velikost její admitivity je řádově menší, než admitivita vnořené koule. To je dáno vysokým vlivem penalizace na optimalizovaný funkcionál, neboť ta je dle vztahu (4.26) vztažena k homogennímu rozdělení  $\gamma_0$ , jehož absolutní velikost představuje desetinu admitivity nehomogenity.

Zcela zásadní pro další úvahy je dělení v nedostatečně regularizovaném oboru. Tam se v rekonstruovaném profilu zřetelně objevují útvary, které nejsou součástí apriorního modelu, přičemž jejich admitivita je výrazně odlišná od admitivity odpovídající části domény v rámci apriorního rozložení — jde o tzv. *artefakty*. Oproti tomu, v případě  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , kdy je úroveň šumu nízká, k tvorbě artefaktů v oboru nedostatečně regularizovaného řešení nedochází a výsledek bychom okem v porovnání s apriorním modelem hodnotili jako dobrý. Kritérium L-křivky nás však vede k tomu, abychom jako řešení prezentovali výsledek rekonstrukce pro  $\lambda_3$ , kde však zcela neodpovídá velikost admitivity vnořené koule. Můžeme usoudit, že v tomto případě je vliv penalizace zbytečně vysoký a neumožňuje dobrý odhad absolutní velikosti admitivity vnořené koule z důvodů popsaných v předchozím odstavci.

Výsledky rekonstrukcí pro  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$  leží přirozeně kvalitativně mezi výše diskutovanými, z hlediska šumu extrémními, případy. Kritérium L-křivky nás i v tomto případě vede k volbě  $\lambda_3$  za optimální, nicméně z odpovídajícího řezu v původní škále problému je patrné, že absolutní velikost admitivity nehomogenity nerekonstruujeme přesně. Subjektivně lepší výsledek představuje řešení pro  $\lambda_4$ , či dokonce pro  $\lambda_5$ , kde je admitivita vnořené koule lépe odhadnuta, přičemž se zde nevyskytují nikterak výrazné artefakty.

Shrnutí diskuse několika předchozích odstavců, tedy srovnání kategorizace do oborů příliš a nedostatečně regularizovaného řešení, daného kritériem L-křivky oproti subjektivnímu hodnocení okem autora, obsahuje tabulka 6.4.

Chceme-li zodpovědět náročné otázky, motivující tuto práci, týkající se pou-

žitelnosti metody pro praktické účely, zejména pro odhalení maligní formace ve tkáni ženských prsou, musíme vyhodnotit zejména robustnost metody. Výsledky numerických experimentů s vnořenou koulí při různé úrovni šumu charakterizují v prvním přiblížení citlivost metody vůči šumu, který může, na základě diskuse v předchozích odstavcích, být počínaje jistou úrovní značně destruktivní. Kritickou ingrediencí pro vynesení soudu nad užitečností EIT ve studovaném uspořádání a při zvolené formulaci obrácené úlohy je proto rozbor nejistoty experimentálních měření a odhad systematických chyb, kterých se dopouštíme při modelování a diskretizaci problému.

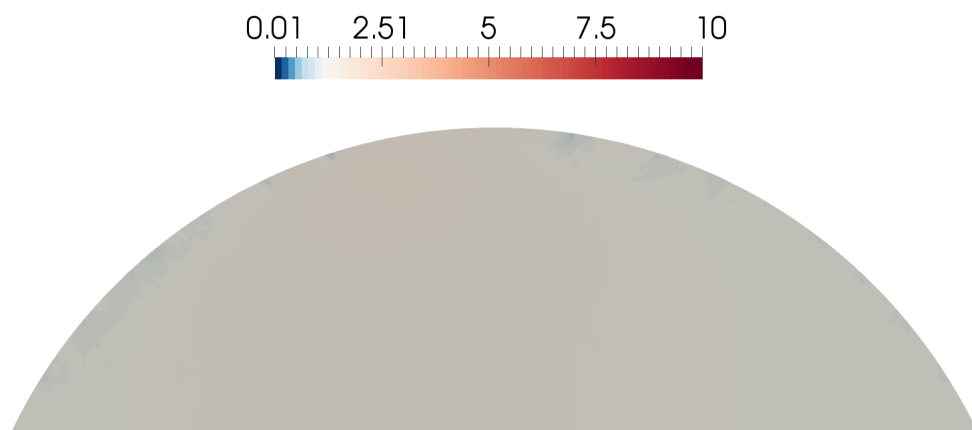
Potenciální systematická chyba našeho přístupu k řešení obrácené úlohy může být značná a je nutné poznamenat, že v numerických experimentech s vnořenou koulí navíc využíváme mnoho apriorních informací, které v praxi nejsou k dispozici. Jedná se například o následující skutečnosti.

1. Apriorní model, pro který generujeme syntetická data — model s vnořenou koulí — je velmi jednoduchý a značně kontrastní. Oproti tomu je z hlediska anatomie struktura ženského prsu značně heterogenní a je velkou otázkou, zda bychom mohli v nějaké heterogenní struktuře odhalit kontrast admitivity, který v reálné situaci nemusí být řádový.
2. Vnořená nehomogenita je jako geometrický útvar součástí FEM sítě. Apriorní rozložení admitivity je tedy reprezentovatelné pomocí voleného kódování a jako takové je optimalizačnímu algoritmu přístupné. V praxi bude zřejmě nutné volit diskretizaci, jejíž nejmenší element bude například řádově menší než nejmenší maligní struktura, kterou chceme odhalit.
3. V definujícím vztahu pro individuální kódování (4.13) můžeme v případě vnořené koule příhodně zvolit admitivitu pozadí za onu referenční, ke které logaritmicky vztahujeme admitivitu čtyřtětů sítě, a jež také vstupuje do penalizačního funkcionálu maximální entropie. V praxi však tato volba není tolik přímočará. Bylo by možné volit například vhodně definovanou, experimentálně určitelnou, střední hodnotu.
4. Mnoho aspektů problému modelujeme v numerických experimentech přesně. V reálné situaci se však jistě budeme dopouštět systematické chyby týkající se například geometrie domény, umístění elektrod a jejich kontaktní impedance.

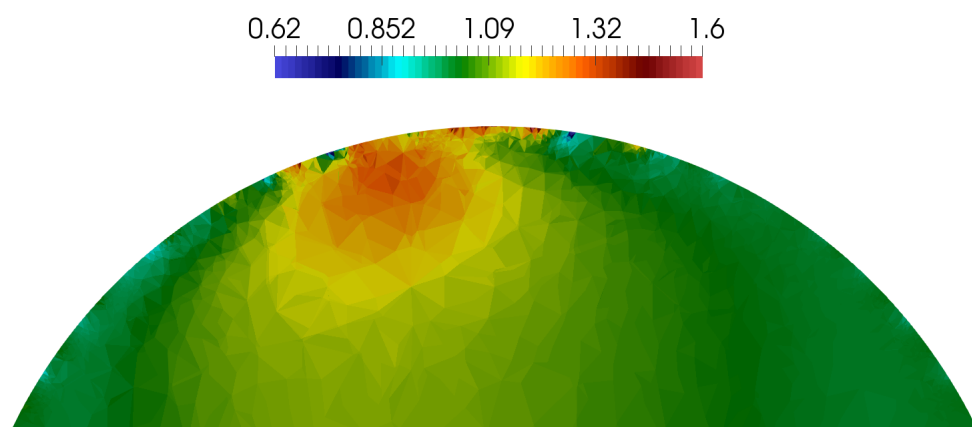
$\text{SNR}_{\text{dB}} \backslash \lambda$	(1) $10^2$	(2) $10^1$	(3) $10^0$	(4) $10^{-1}$	(5) $10^{-2}$	(6) $10^{-3}$
20	+	+	o	-	-	-
0	+	+	o	o	-	-
-10	+	+	+	o	-	-

Tabulka 6.4: Kategorizace hodnot regularizačního parametru v numerickém experimentu s vnořenou koulí pro různé úrovně šumu. Rozdělení dle kritéria L-křivky je vyznačeno symboly +, o, - pro příliš, optimálně, resp. nedostatečně regularizované řešení. Subjektivní rozdělení do stejných kategorií okem autora je znázorněno modrou, zelenou, resp. červenou barvou

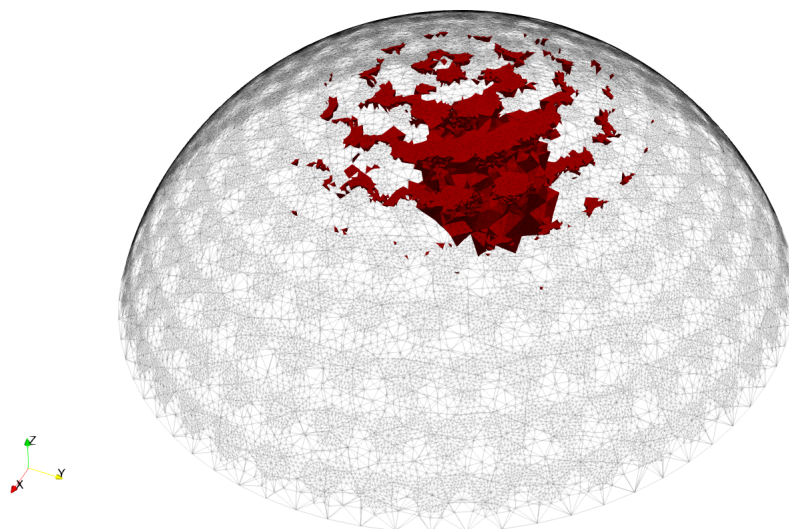
Obrázek 6.7: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



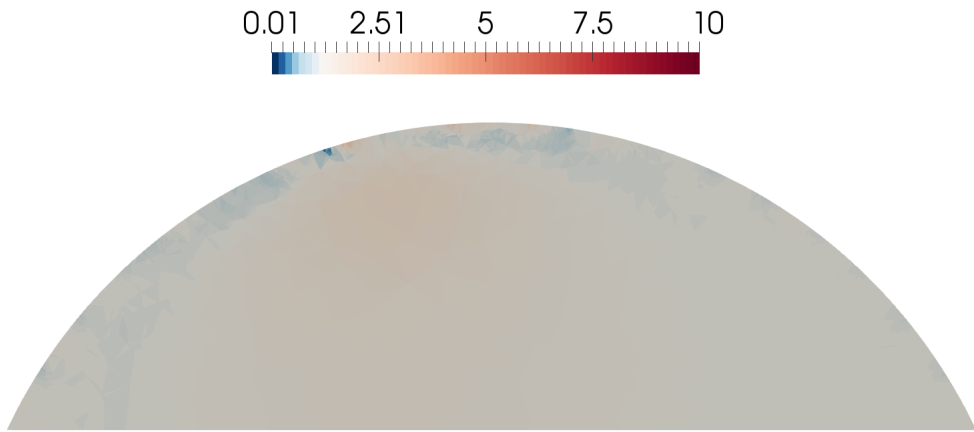
Obrázek 6.8: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



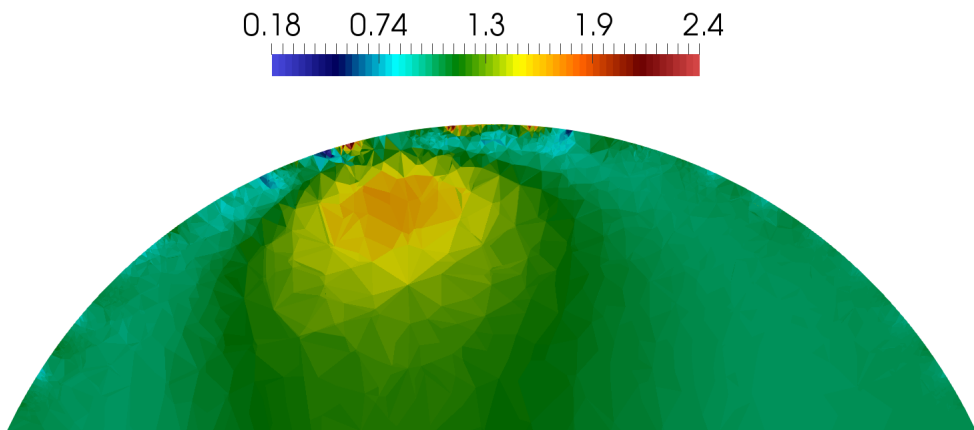
Obrázek 6.9: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\} > 1.2$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



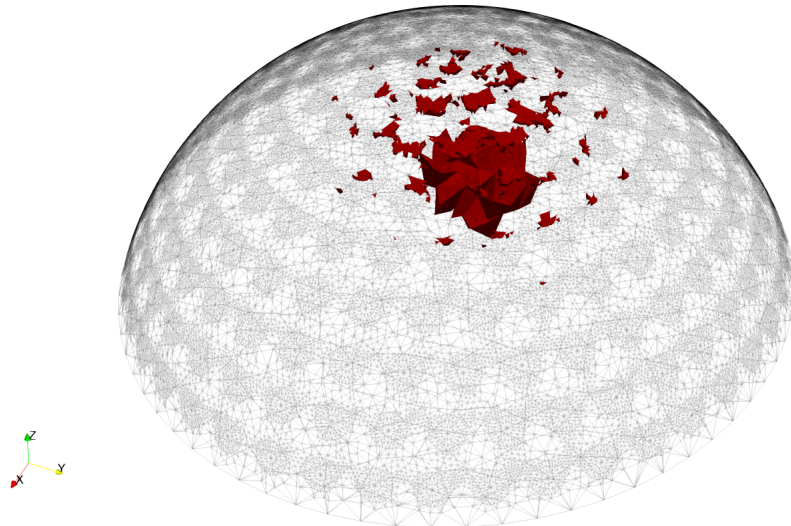
Obrázek 6.10: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_2 = 10^1$



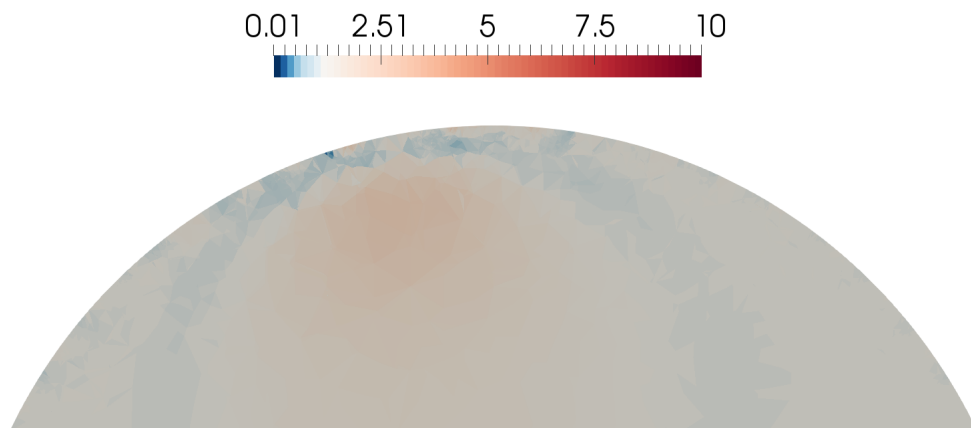
Obrázek 6.11: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_2 = 10^1$



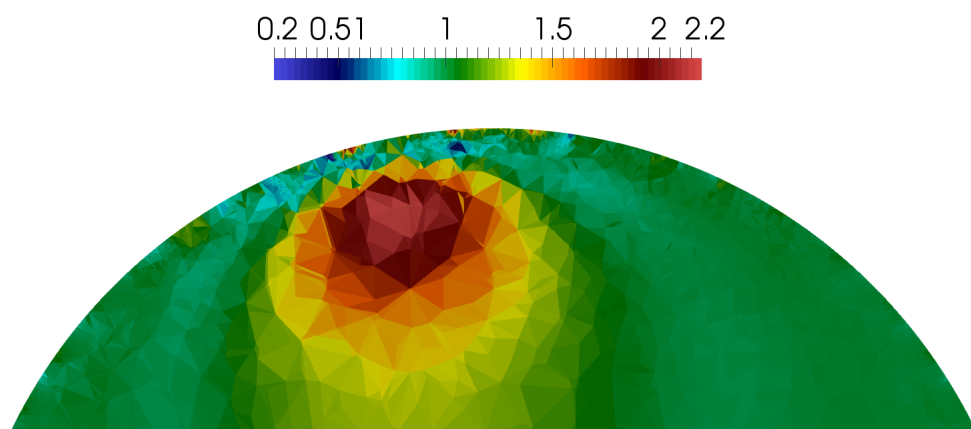
Obrázek 6.12: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_2 = 10^1$



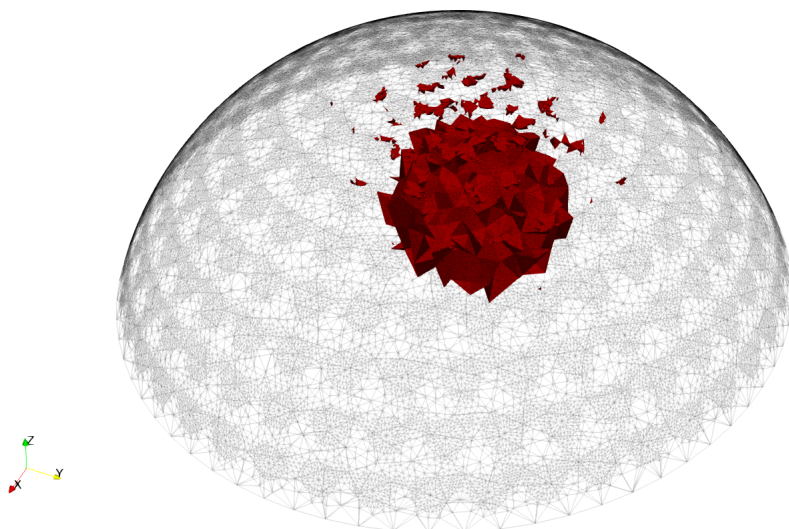
Obrázek 6.13: Řez  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_3}) \}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_3 = 10^0$



Obrázek 6.14: Řez  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_3}) \}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_3 = 10^0$

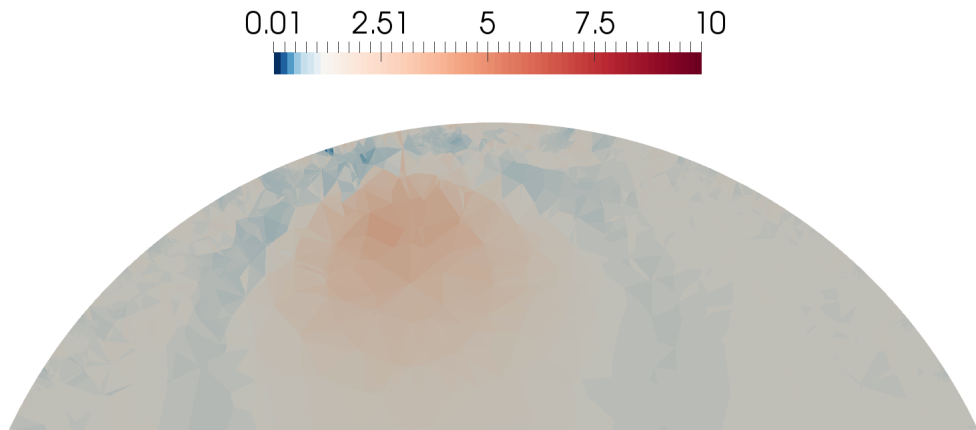


Obrázek 6.15: Predikátový filtr  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_3}) \} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_3 = 10^0$

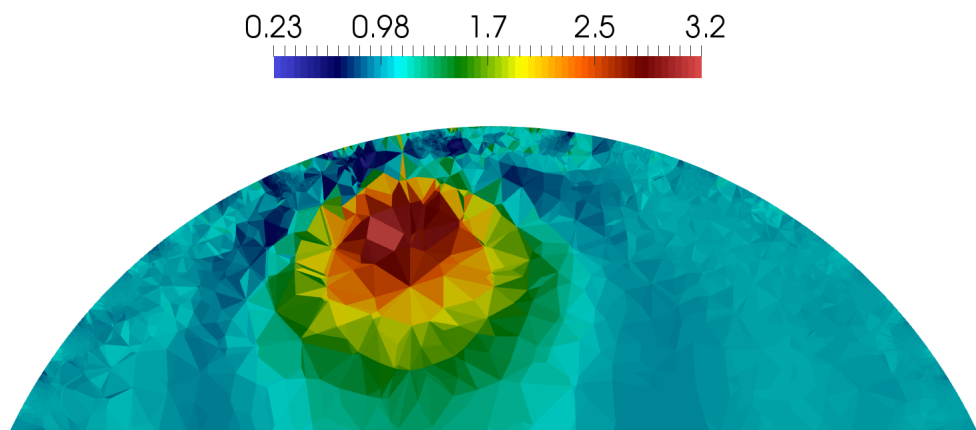




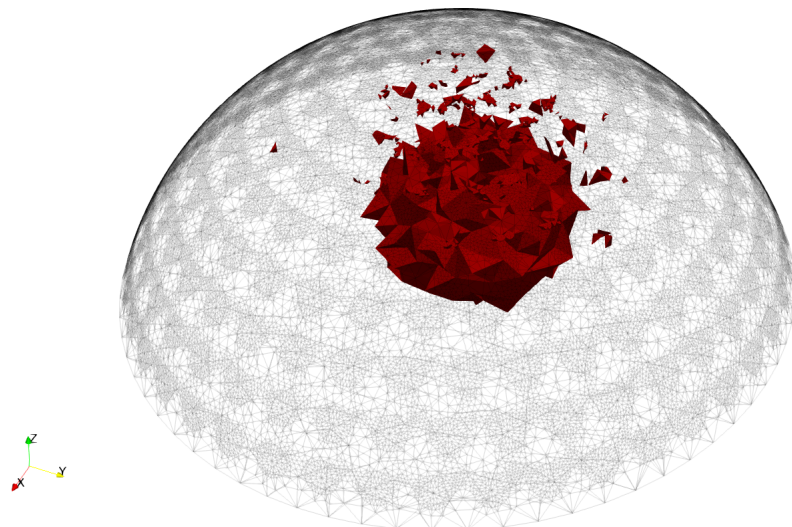
Obrázek 6.16: Řez  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$



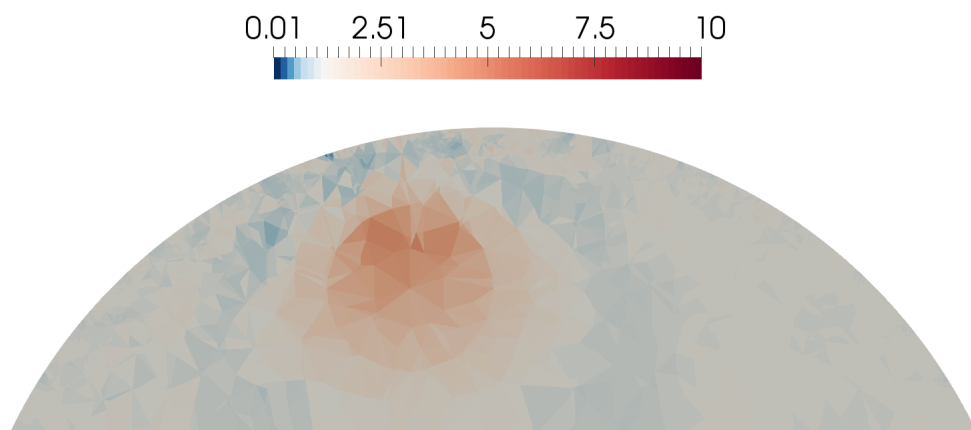
Obrázek 6.17: Řez  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$



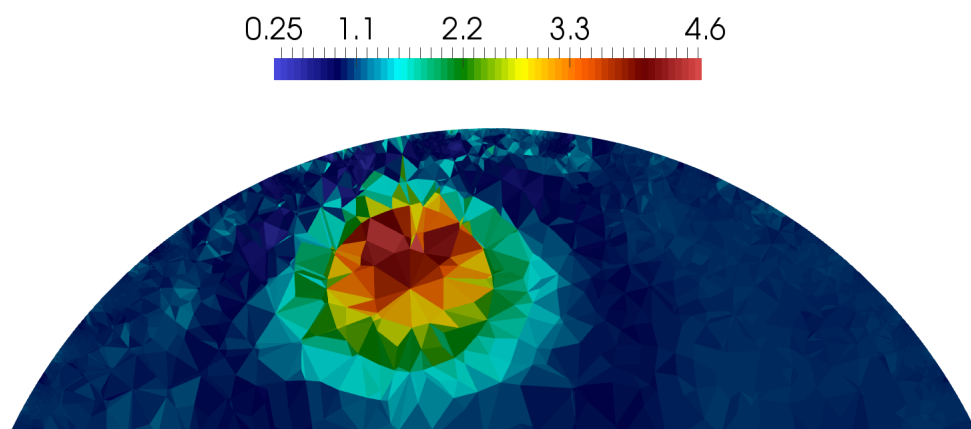
Obrázek 6.18: Predikátový filtr  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$



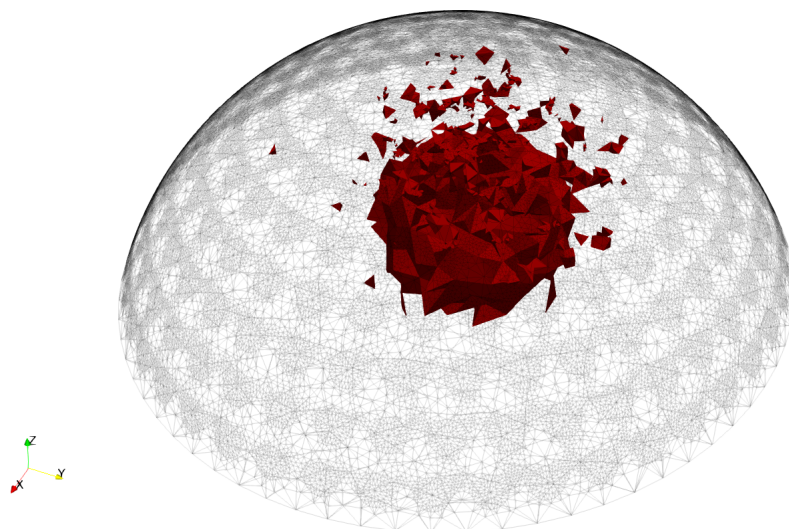
Obrázek 6.19: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$



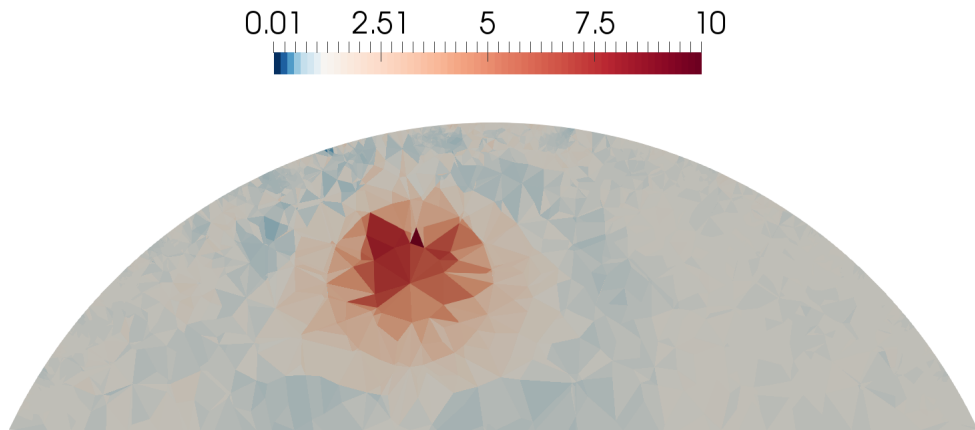
Obrázek 6.20: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$



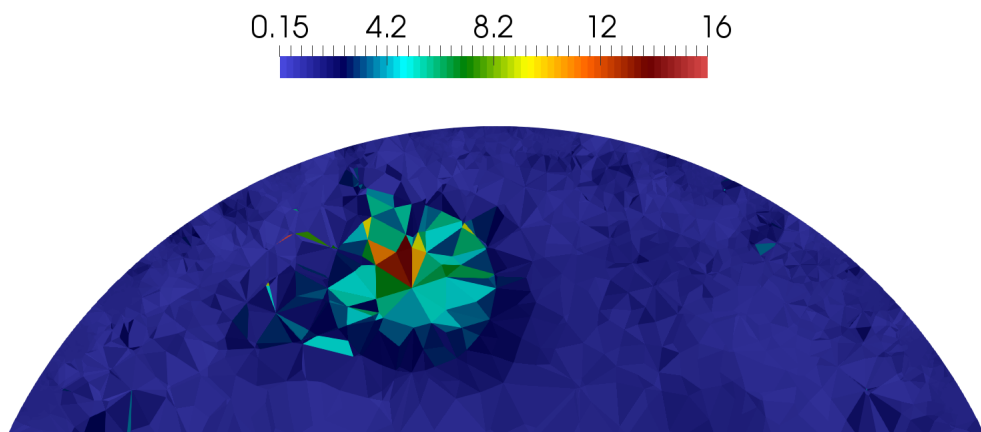
Obrázek 6.21: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$



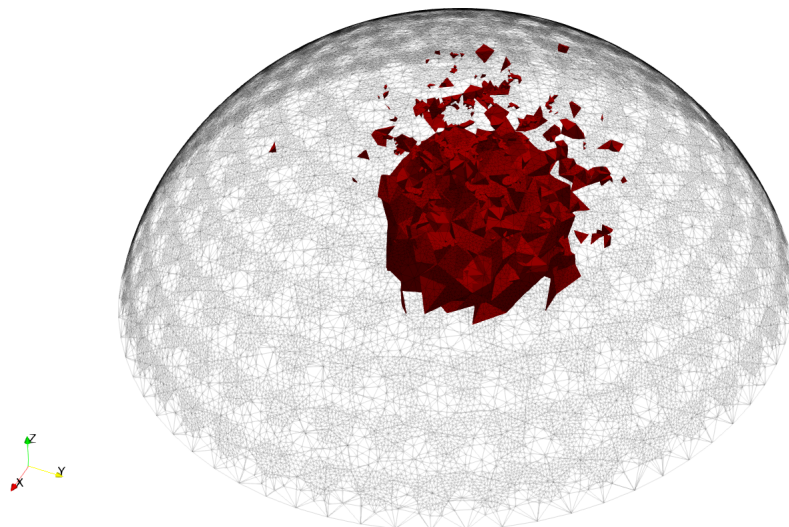
Obrázek 6.22: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$



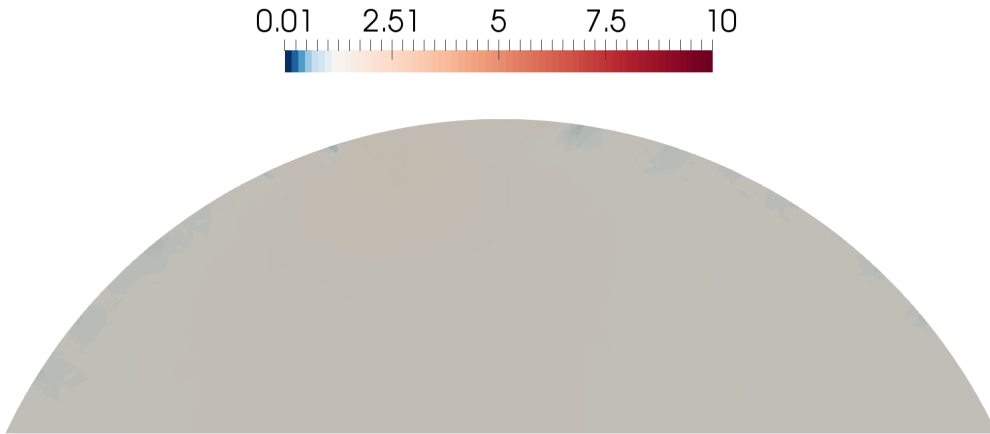
Obrázek 6.23: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$



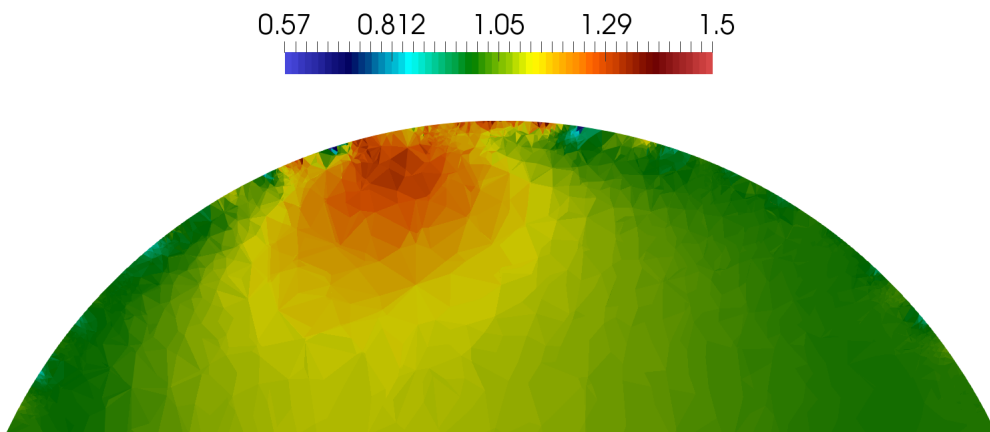
Obrázek 6.24: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\} > 3.0$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$



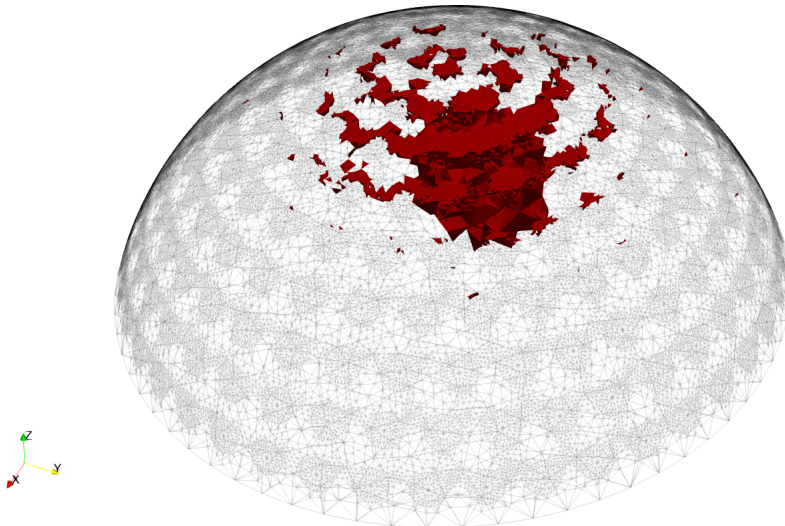
Obrázek 6.25: Řez  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_1}) \}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



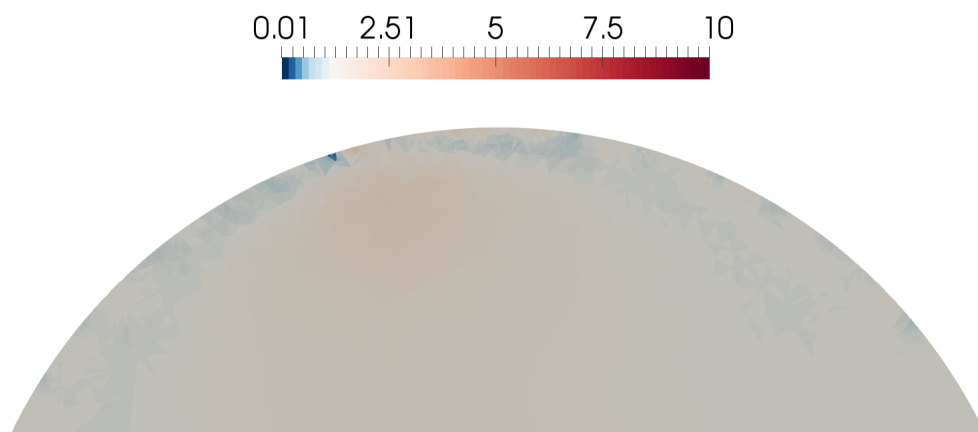
Obrázek 6.26: Řez  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_1}) \}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



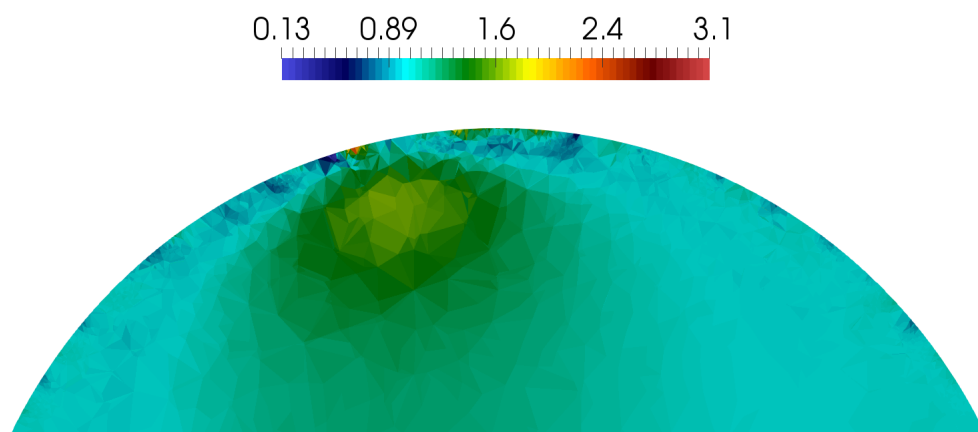
Obrázek 6.27: Predikátový filtr  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_1}) \} > 1.2$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



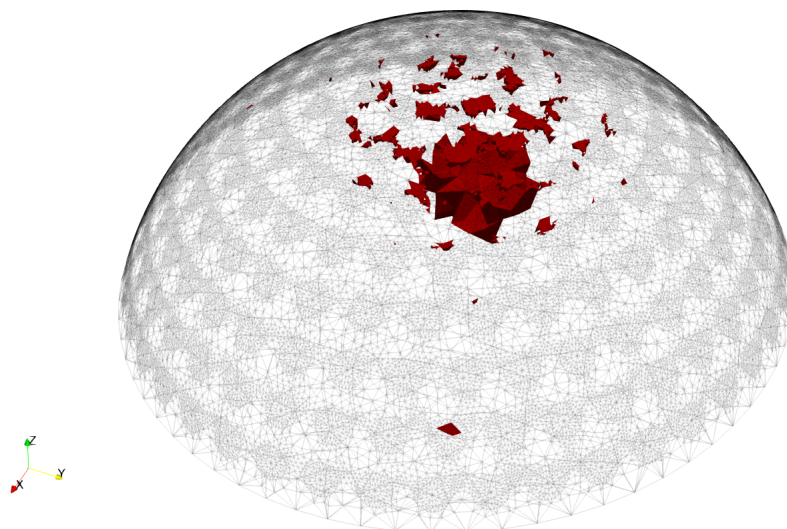
Obrázek 6.28: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_2 = 10^1$



Obrázek 6.29: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_2 = 10^1$

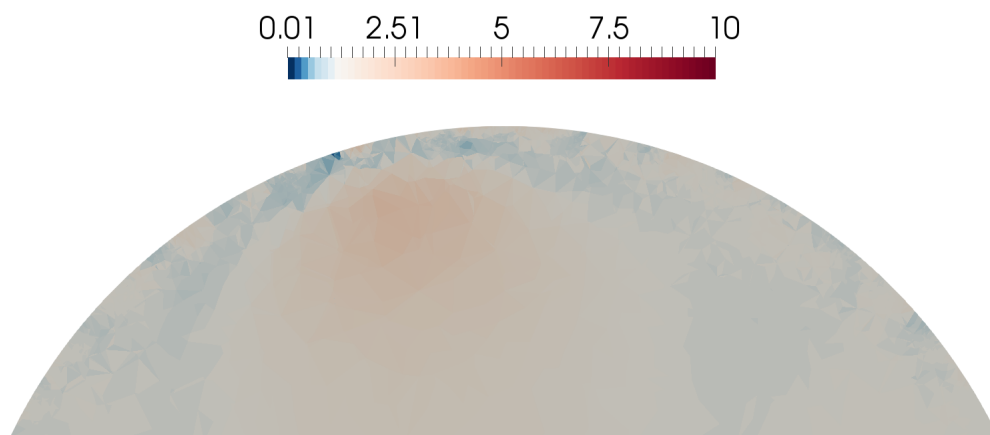


Obrázek 6.30: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_2 = 10^1$

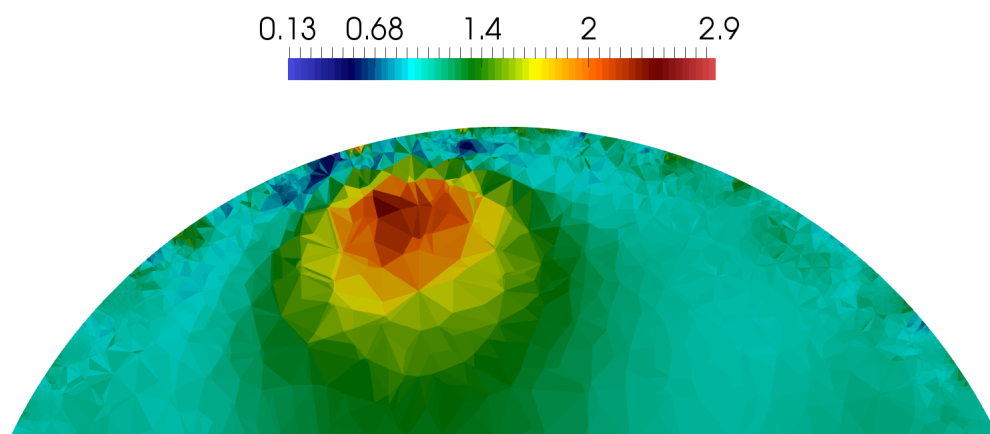




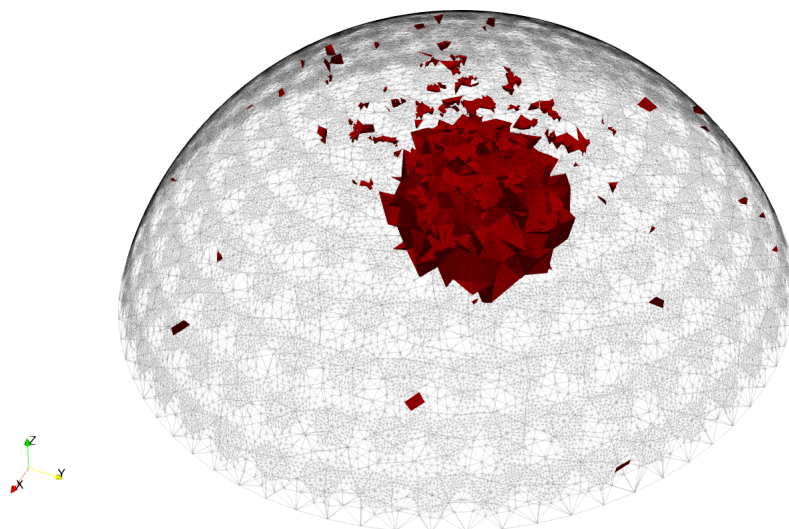
Obrázek 6.31: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_3 = 10^0$



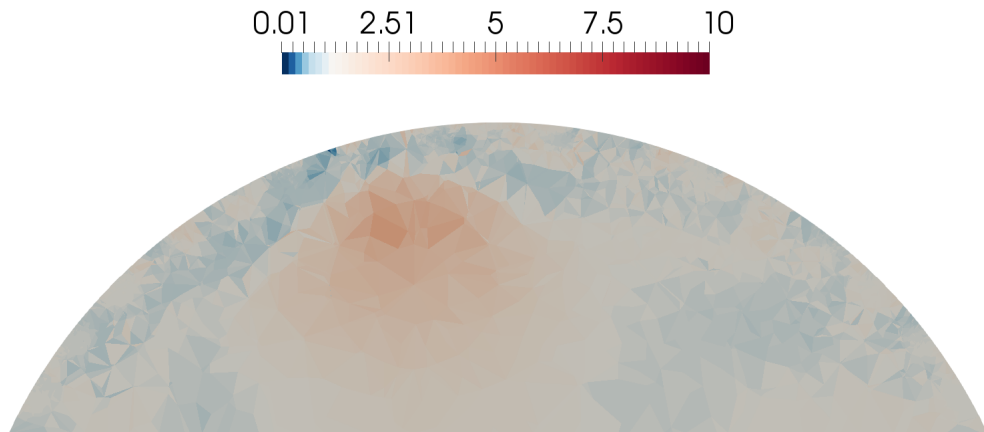
Obrázek 6.32: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_3 = 10^0$



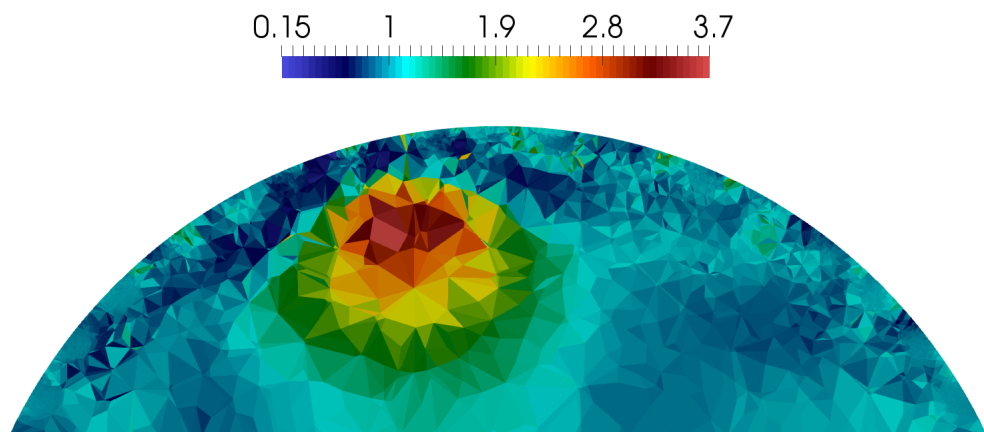
Obrázek 6.33: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_3 = 10^0$



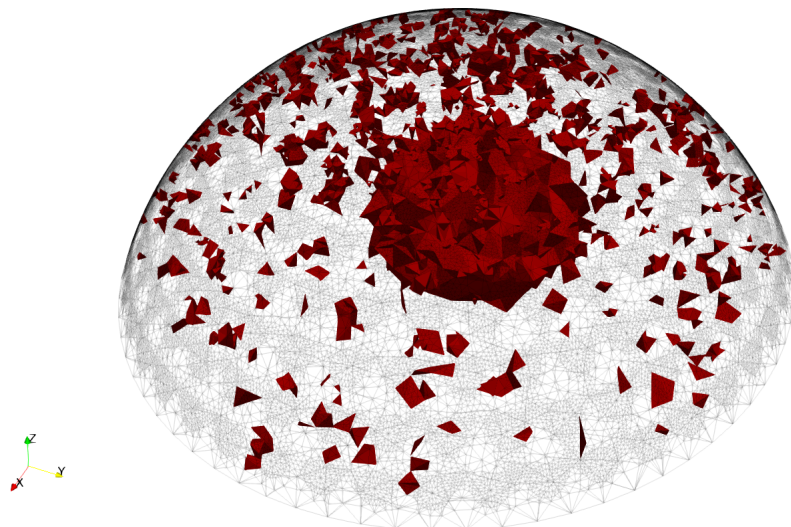
Obrázek 6.34: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$



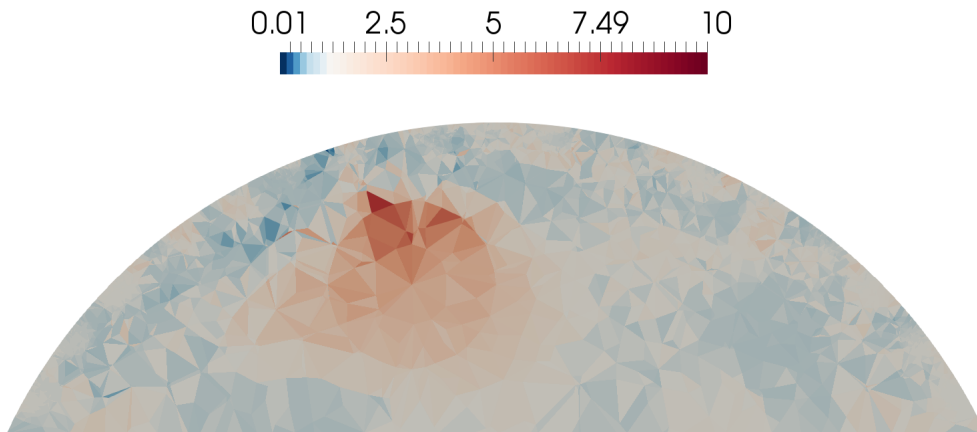
Obrázek 6.35: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$



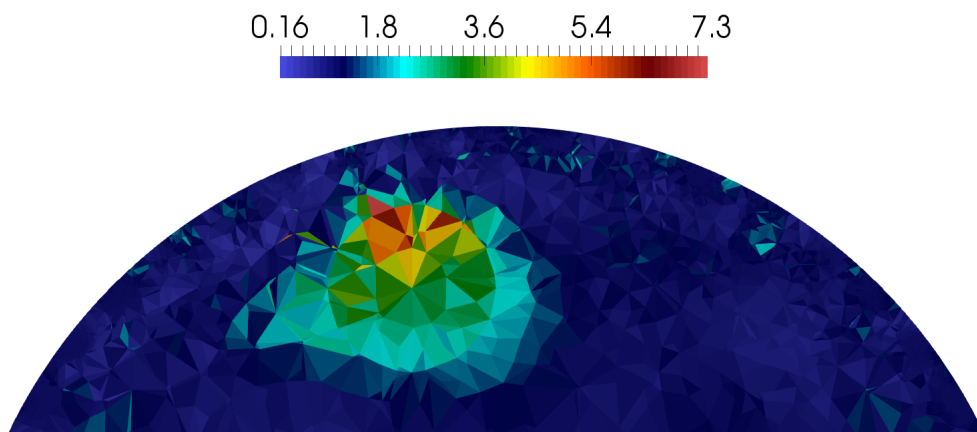
Obrázek 6.36: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$



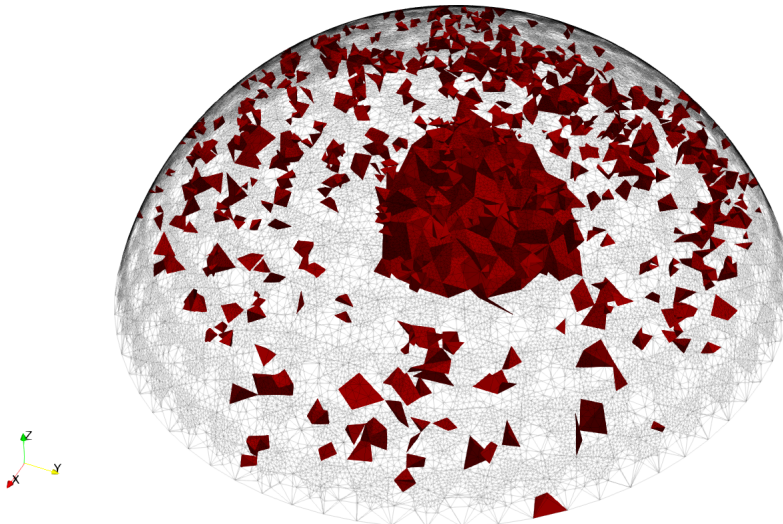
Obrázek 6.37: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$



Obrázek 6.38: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$

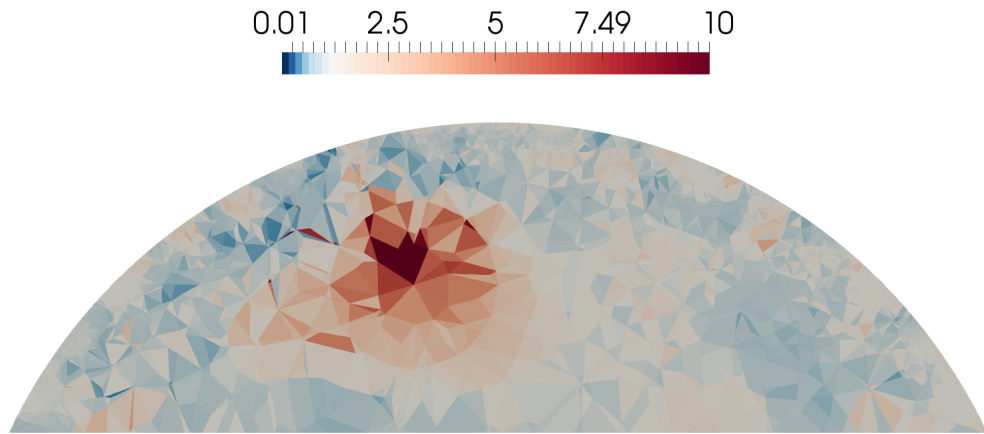


Obrázek 6.39: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\} > 2.0$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$

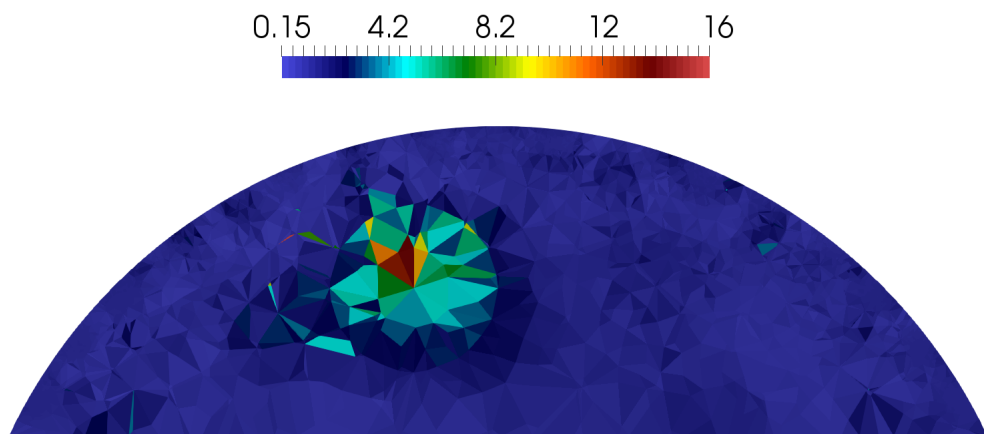




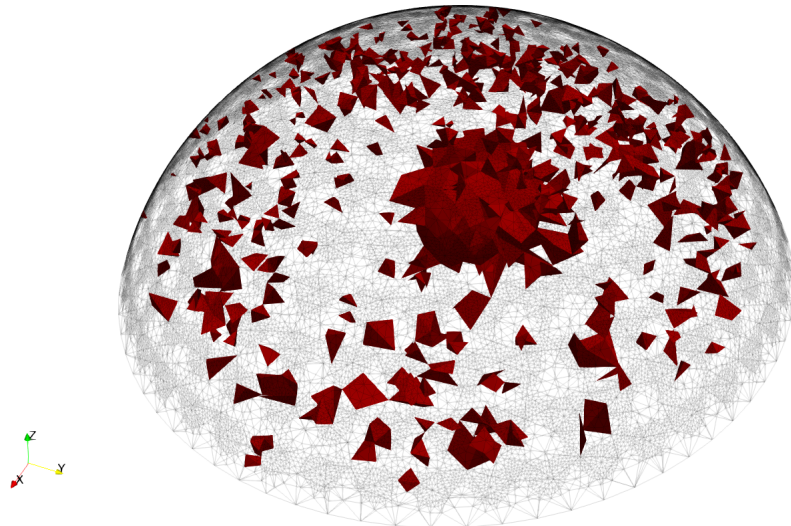
Obrázek 6.40: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$



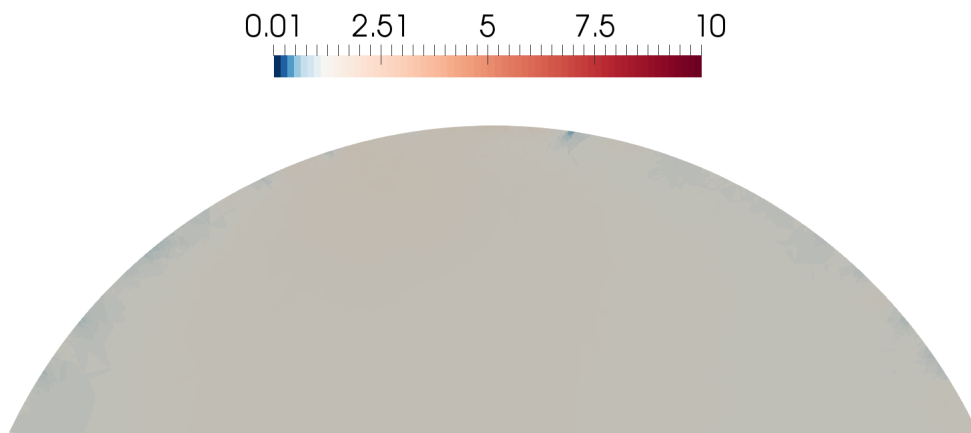
Obrázek 6.41: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$



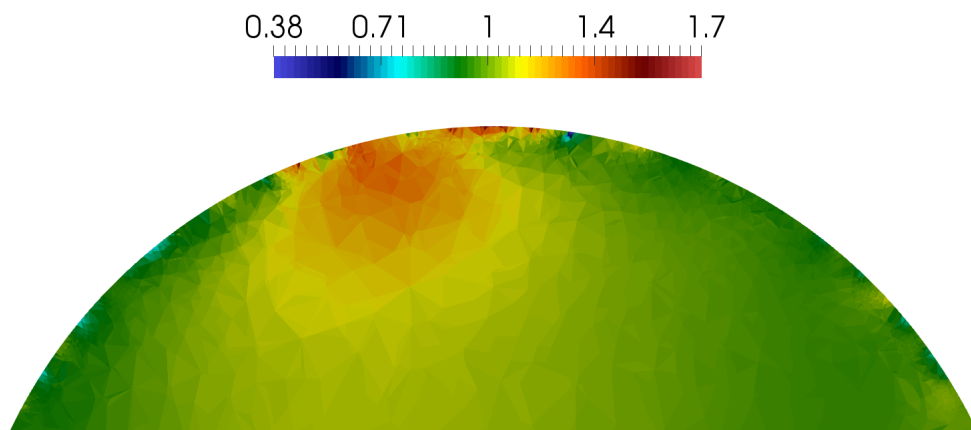
Obrázek 6.42: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\} > 3.0$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$



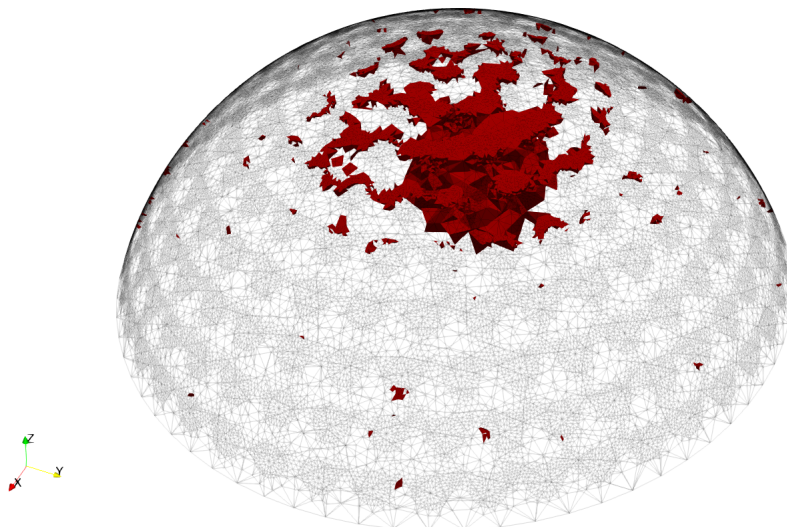
Obrázek 6.43: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



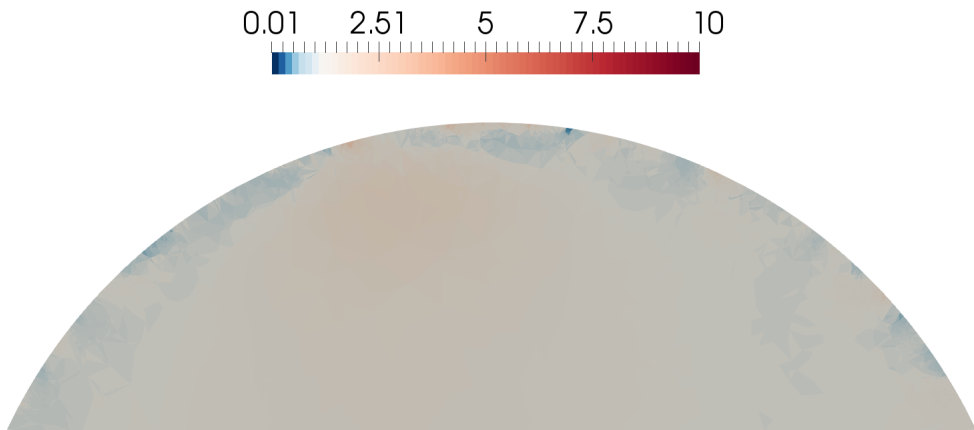
Obrázek 6.44: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



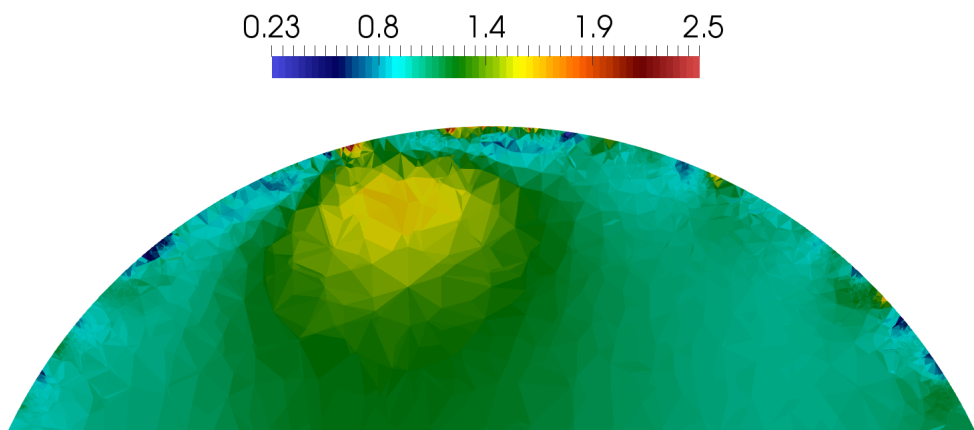
Obrázek 6.45: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\} > 1.2$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_1 = 10^2$



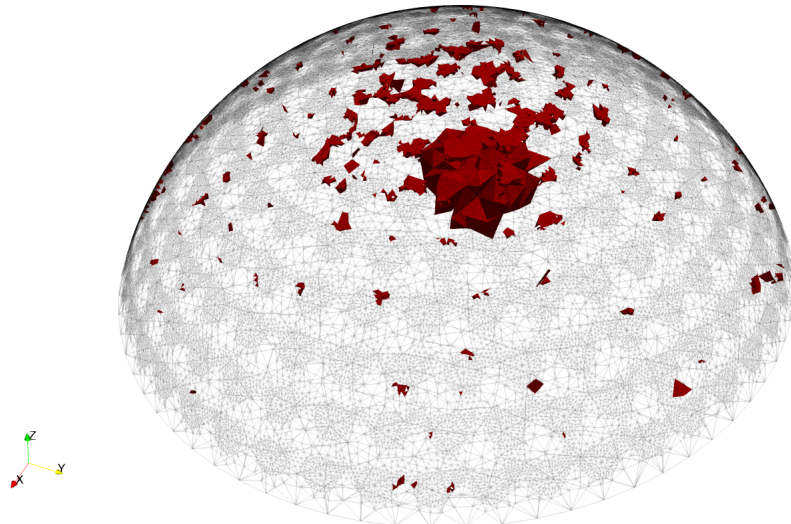
Obrázek 6.46: Řez  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_2}) \}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_2 = 10^1$



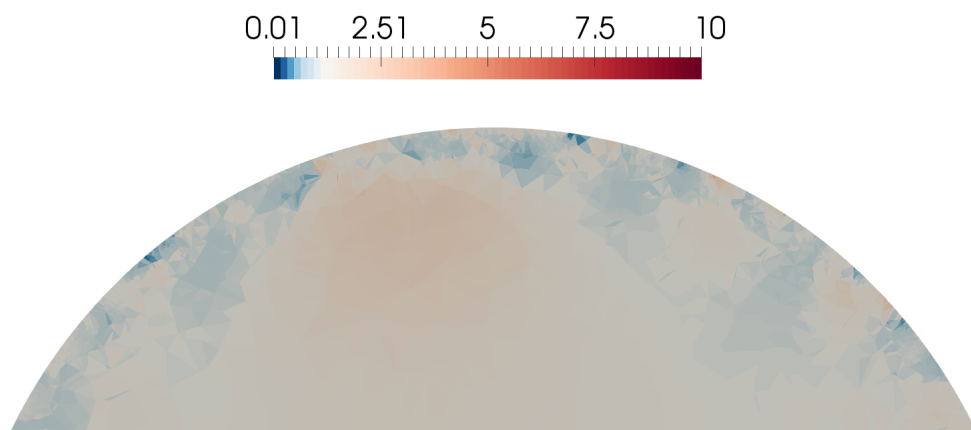
Obrázek 6.47: Řez  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_2}) \}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_2 = 10^1$



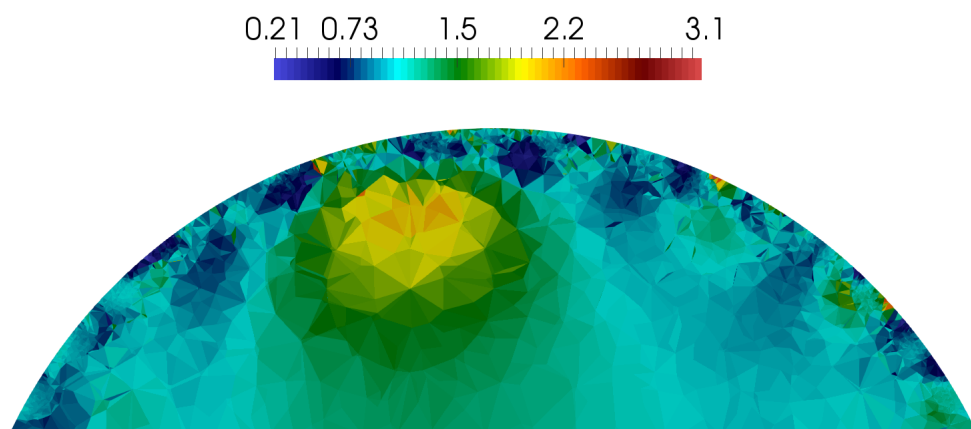
Obrázek 6.48: Predikátový filtr  $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_2}) \} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_2 = 10^1$



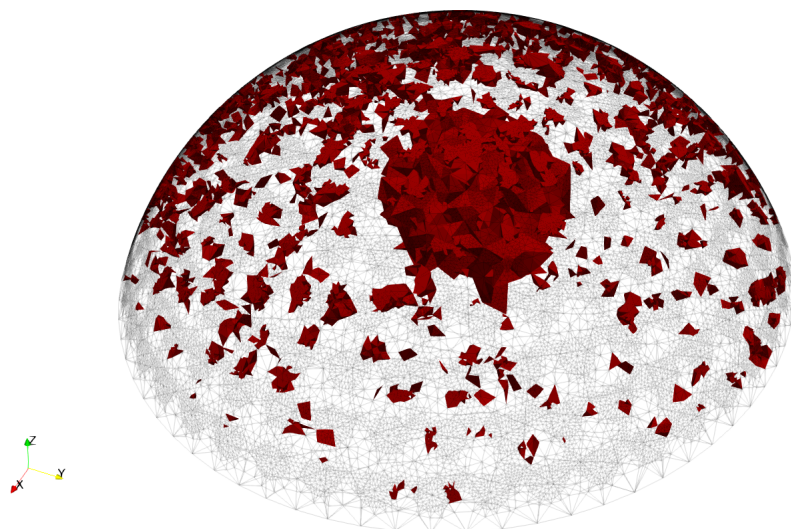
Obrázek 6.49: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_3 = 10^0$



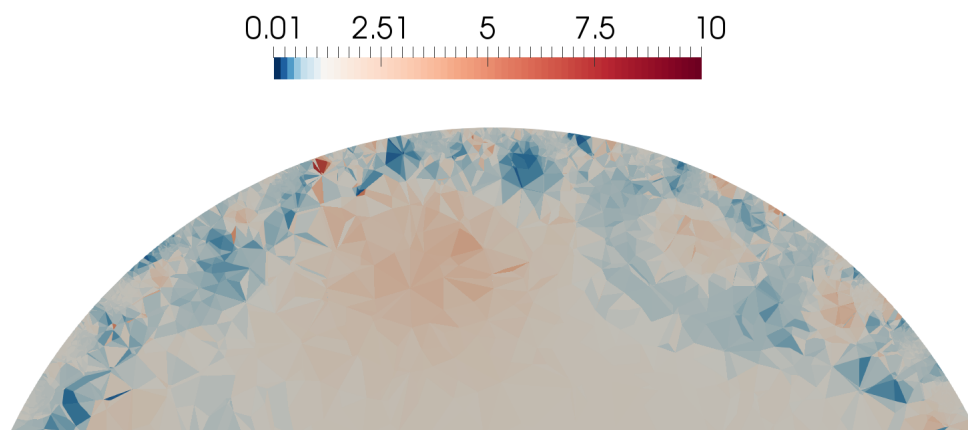
Obrázek 6.50: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_3 = 10^0$



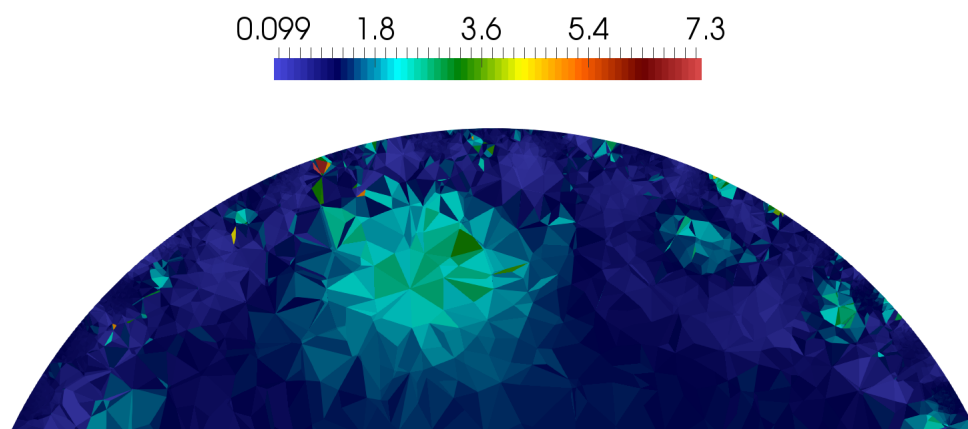
Obrázek 6.51: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_3 = 10^0$



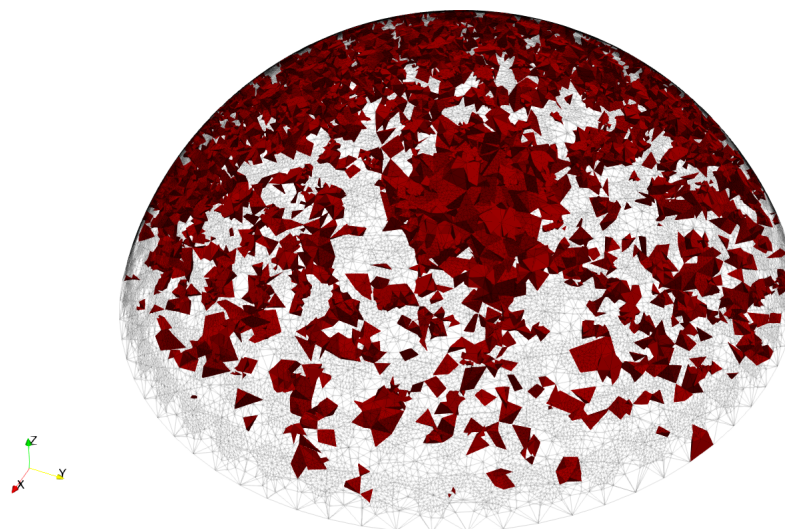
Obrázek 6.52: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$



Obrázek 6.53: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$

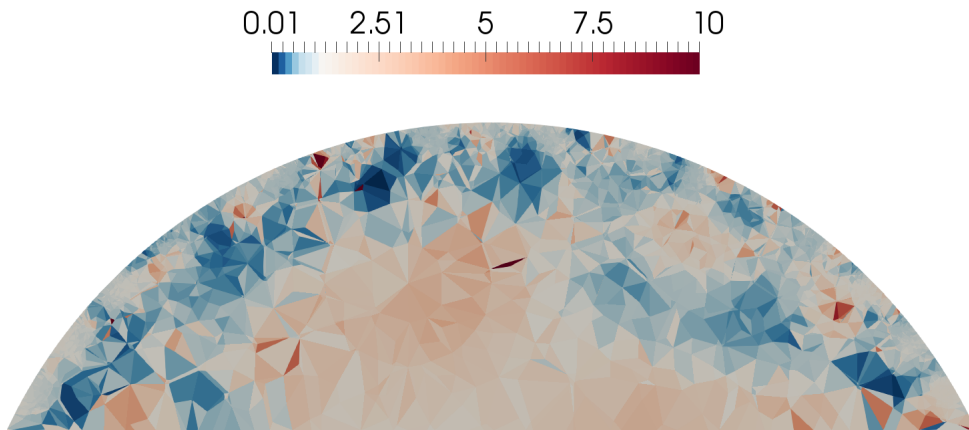


Obrázek 6.54: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\} > 1.5$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_4 = 10^{-1}$

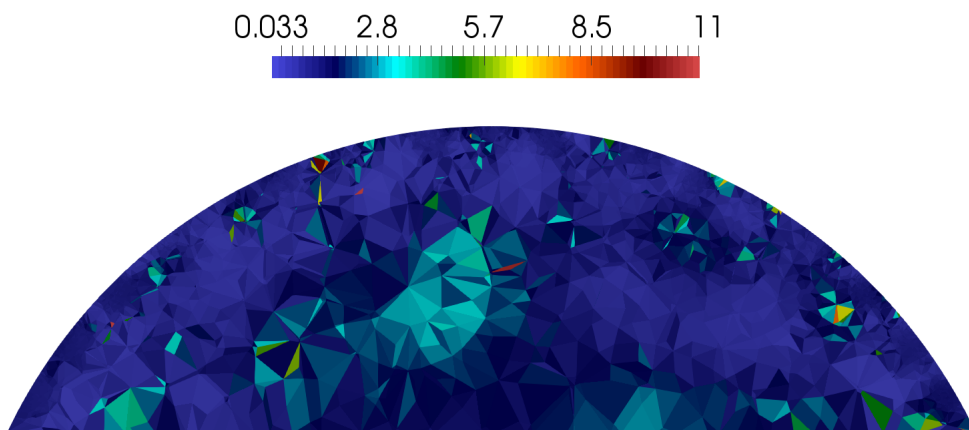




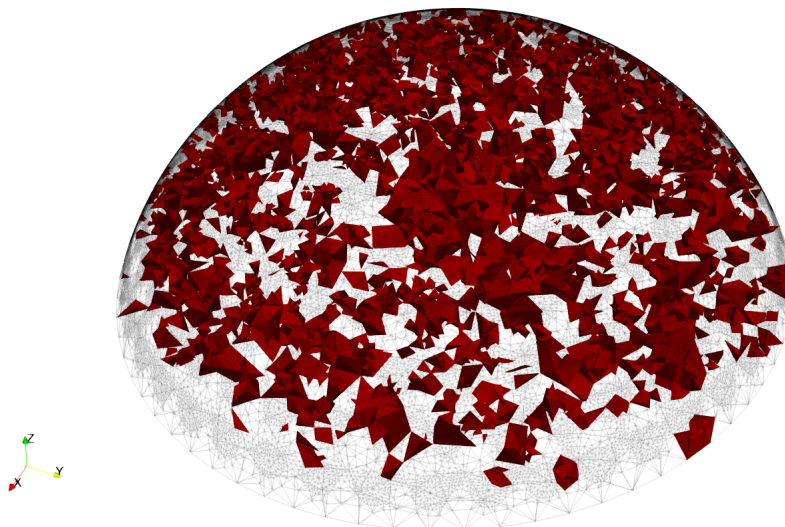
Obrázek 6.55: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$



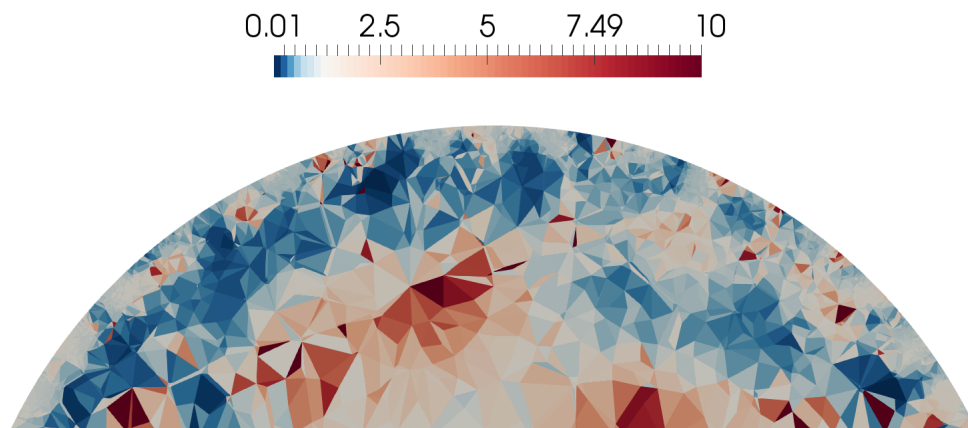
Obrázek 6.56: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$



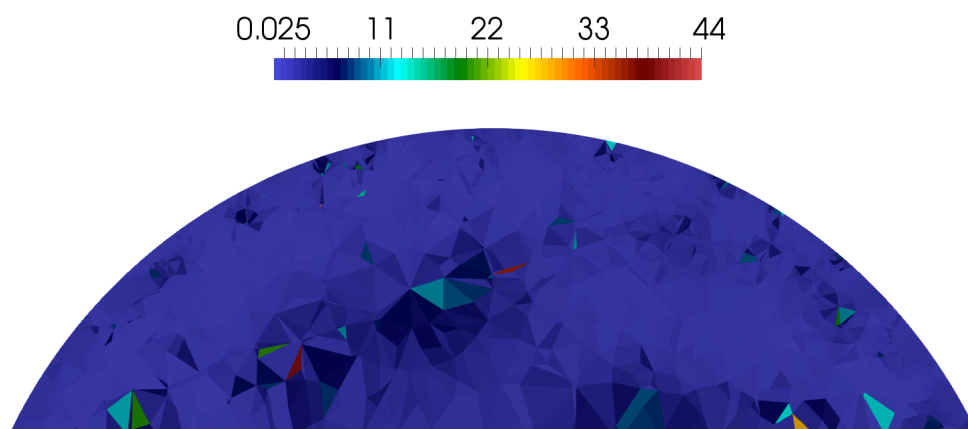
Obrázek 6.57: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\} > 2.0$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_5 = 10^{-2}$



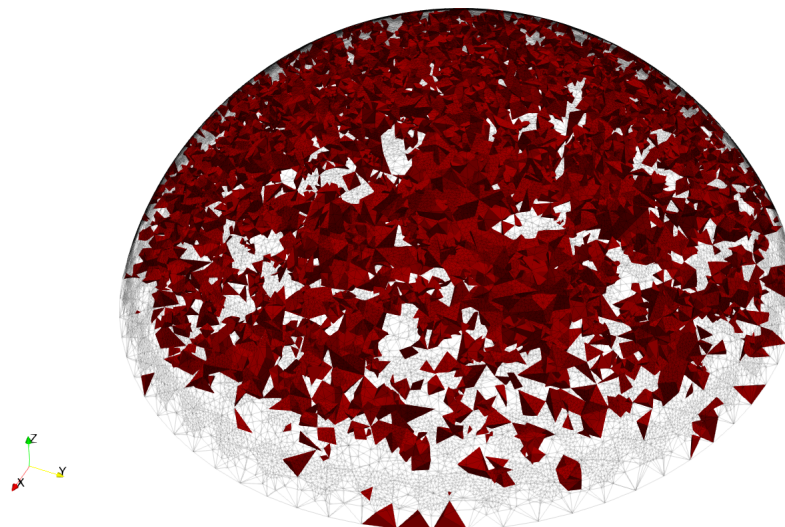
Obrázek 6.58: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\}$  v původní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$



Obrázek 6.59: Řez  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\}$  v kvalitativní škále,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$



Obrázek 6.60: Predikátový filtr  $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\} > 3.0$ ,  $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ ,  $\lambda_6 = 10^{-3}$







# Závěr

Primárním cílem této práce bylo posoudit, zda je možné metodou Elektroimpedanční tomografie odhalit strukturu tělesa na základě proudových stimulací, přičemž původní motivací byla spolupráce se společností RSDynamics při vývoji prototypu zařízení, pomocí kterého by bylo možné odhalit maligní formace v ženském prsu. Byť je obrácená úloha EIT koncepčně poměrně jednoduchá, praktická realizace kompletního EIT řešení se ukázala být časově náročným úkolem.

Součástí této práce jsou numerické experimenty v uspořádání prototypu společnosti RSDynamics. Od průmyslového partnera byla přejata geometrie zařízení a také sada stimulačních vzorů, kterou byl měřicí přístroj schopný proměřit v klinicky přijatelném čase. Než se vůbec budeme pokoušet zpracovat skutečná experimentální data, musí výchozím bodem zkoumání užitečnosti takového přístroje zřejmě být numerické experimenty s rekonstrukcí na základě syntetických dat, ve kterých schémata přístroje modelujeme přesně, a tudíž se nedopouštíme systematické chyby.

Takovým experimentem je například experiment s vnořenou koulí popsáný v sekci 6.2, jehož výsledky jsou prezentovány v závěru poslední kapitoly. Sekce 6.2.4 obsahuje diskusi výsledků rekonstrukce pro různé úrovně uměle vnášeného šumu, ze které plyne jeho rozhodující vliv na kvalitu výsledku. Tudíž, aby bylo možné skutečně posoudit robustnost metody, je zapotřebí znát charakteristiku nejistoty měření elektrodoových napětí a také odhadnout systematickou chybu, které se budeme dopouštět modelováním například geometrie přístroje, nebo umístění, či impedance jeho elektrod.

Jakmile budeme mít k dispozici odhad chyby, musíme vyhodnotit, zda její vliv budeme schopni potlačit některou ze strategií dodatečného podmínění obrácené úlohy EIT, které jsme popsali ve čtvrté kapitole. Numerický experiment s vnořenou koulí byl proveden programem prs4D, který v současnosti obsahuje jen implementaci individuálního kódování admitivity 4.13, pro které autor nenašel vhodnou strategii extrakce spektrální informace — viz. poznámky k sekci 4.3.3. Atraktivní bude tedy vyhodnotit přínos kódování parametrických modelů (sekce 4.3.2), s cílem tuto informaci zachytit a s její pomocí dodatečně podmínit obrácenou úlohu EIT. Jinými slovy, tato strategie je v práci rozvedena pouze teoreticky a její implementace ležela mimo časové možnosti autora, přičemž další kroky tímto směrem by měly být v budoucnosti snadné díky implementaci generického rozhraní pro modelový prostor v programu prs4D, která z něj učinila skutečně modulární softwarový nástroj (viz. sekce 5.2.1).

Extrakce spektrální informace není jedinou cestou k dodatečnému podmínění úlohy. Volba optimální sady stimulačních vzorů a konstrukce sofistikovaných regularizačních schémat představují stejně významné směry. V této práci nebyla problematika stimulačních vzorů blíže rozebrána, neboť je předmětem množství publikací. Obdobně je tomu v případě regularizačních schémat, kdy pracujeme pouze s penalizačním funkcíonálem negativní entropie 4.8. V budoucnu bude jistě užitečné prozkoumat jiné konstrukce, popřípadě možnosti jejich kombinace, či adaptivního chování.



# Dodatky



## A Potřebné pojmy z matematické analýzy

**Definice A.1** (Oblast třídy  $C^{k,\lambda}$ , [34]). Řekneme, že omezená oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  je třídy  $C^{k,\lambda}$  pro  $k \in \mathbb{N}_0, \lambda \in (0; 1]$ , pokud existuje  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0, m$  ortogonálních systémů  $(x'_r, x_r^d)$ , ve kterých definujeme

$$\Delta_r = \left\{ (x'^1, \dots, x'^{d-1}), -\alpha < x'^i < \alpha, i = 1, \dots, d-1 \right\} \quad ,$$

dále necht existuje  $m$  příslušných ortogonálních transformací  $T_r, r = 1, 2, \dots, m$  realizujících přechod z globálního systému  $(x', x^d)$  do těchto systémů ke  $a$   $m$ -tice funkcí  $a_r, r = 1, 2, \dots, m$  třídy  $C^{k,\lambda}(\Delta_r)$  takových, že

1.  $\forall x \in \partial\Omega$  existuje  $r = 1, 2, \dots, m$ , že  $x = T_r^{-1}(x'_r, a_r(x'_r))$  pro nějaké  $x'_r \in \Delta_r$
2. Definujeme-li

$$\begin{aligned} V_r^+ &= T_r^{-1} \left( \left\{ (x'_r, x_r^d) \in \mathbb{R}^d : a_r(x'_r) < x_r^d < a_r(x'_r) + \beta \right\} \right) \\ V_r^- &= T_r^{-1} \left( \left\{ (x'_r, x_r^d) \in \mathbb{R}^d : a_r(x'_r) - \beta < x_r^d < a_r(x'_r) \right\} \right) \\ \Lambda_r &= T_r^{-1} \left( \left\{ (x'_r, x_r^d) \in \mathbb{R}^d : a_r(x'_r) = x_r^d \right\} \right) \end{aligned}$$

pak  $V_r^+ \subset \Omega, V_r^- \subset \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$  a  $\Lambda_r \subset \partial\Omega$

z požadavku 1. navíc plyne, že  $\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^m \Lambda_r$ . Navíc, značíme-li  $V_r = V_r^+ \cup V_r^- \cup \Lambda_r$ , pak  $\{V_r\}_{r=1}^m$  představuje otevřené pokrytí  $\partial\Omega$  a můžeme nalézt  $V_0 \subset \mathbb{R}^d$  otevřenou, aby systém  $\{V_r\}_{r=0}^m$  tvořil otevřené pokrytí  $\Omega$ .

**Definice A.2** (Prostory  $L^p(\partial\Omega)$ , [34]). Uvažujme, že  $\Omega$  je alespoň třídy  $C^{0,1}$ . Zavedme nejprve pro  $r = 1, \dots, m$  zobrazení  $Q_r : \bar{\Delta}_r \times [-\beta, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$Q_r(x'_r, \xi) = (x'_r, a_r(x'_r) + \xi) \quad .$$

Pro funkci  $u$  definovanou na  $M \subset V_r$  zavedme funkci  ${}_r u$  definovanou na  $Q_r^{-1} \circ T_r(M)$ , následovně

$${}_r u = u \circ T_r^{-1} \circ Q_r \quad .$$

Řekneme, že funkce  $u$ , definovaná skoro všude na  $\partial\Omega$ , náleží prostoru  $L^p(\partial\Omega)$  pro  $p \in [1, \infty)$ , pokud každá z funkcí  ${}_r u(x'_r, 0)$  náleží prostoru  $L^p(\Delta_r)$ ,  $r = 1, \dots, m$ , neboli

$$\int_{\Delta_r} |{}_r u(x'_r, 0)|^p dx'_r < \infty \quad r = 1, \dots, m \quad .$$

Opatříme-li tento prostor normou

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left( \sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} |{}_r u(x'_r, 0)|^p dx'_r \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Definice A.3** (Povrchový integrál, [34]). Necht  $\Omega$  je alespoň třídy  $C^{0,1}$ . Pro funkci  $u \in L^1(\partial\Omega)$  definujeme povrchový integrál pomocí vztahu

$$\int_{\partial\Omega} u(x) dS := \sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} {}_r(u_r)(x'_r, 0) \psi_r(x'_r) dx'_r \quad ,$$

kde, označíme-li  $\{\varphi_r(x)\}_{r=1}^m$  rozklad jednotky podřízený pokrytí  $\{V_r\}_{r=1}^m$ ,

$$u_r(x) = \varphi_r(x)u(x) \quad \psi_r(x'_r) = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\frac{\partial a_r(x'_r)}{\partial x'_r{}^i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Je možné ukázat, že pro  $p \in [1, \infty)$  funkcionál

$$I_p(u) := \left(\int_{\partial\Omega} |u(x)|^p dS\right)^{\frac{1}{p}}$$

definuje normu na  $L^p(\partial\Omega)$ , která je ekvivalentní normě  $\|\cdot\|_p$ .

**Věta A.1** (Integrace per partes ve více dimenzích, [15]). *Bud'  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  oblast třídy  $C^1$ , k níž  $i$ -tá složka jednotkové vnější normály je  $n_i$ . Necht'  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$  pak*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i dS \quad (i = 1, \dots, n)$$

**Věta A.2** (První Greenova věta, [15]). *Bud'te  $\Omega, u, v, \mathbf{n}$  jako v předchozí větě. Navíc, necht'  $v \in C^2(\bar{\Omega})$ . Pak*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \mathbf{n} dS$$

**Věta A.3** (Lax-Milgram, [57]). *Necht'  $V$  je komplexní Hilbertův prostor,  $\|\cdot\|_V = \sqrt{(\cdot, \cdot)_V}$  a  $B(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  bud' seskvilineární forma na něm, splňující, pro  $C_1 > 0, C_2 > 0$ , následující podmínky*

1.  $\forall v, w \in V : |B(v, w)| \leq C_1 \|v\|_V \|w\|_V$
2.  $\forall v \in V : B(v, v) \geq C_2 \|v\|_V^2$  .

Pak  $\forall F \in V^*$  existuje právě jeden prvek  $u \in V$  takový, že

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad .$$

**Definice A.4** (Gateauxův diferenciál a Gateauxova Derivace, [56]). *Necht'  $X$  a  $Y$  jsou Banachovy prostory a  $A : X \rightarrow Y$  je obecně nelineární operátor, o kterém předpokládáme, že je definován na celém prostoru  $X$  s hodnotami v  $Y$ . Jestliže pro zvolené  $x \in X$  existuje*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [A(x + th) - Ax] =: VA(x, h) \quad \forall h \in X,$$

řekneme, že  $A$  je Gateauxovsky diferencovatelný a operátor  $VA(x, h)$  se nazývá variací  $A$  v bodě  $x$  ve směru  $h$ . Pokud je navíc  $VA(x, h)$  aditivní a spojitý v proměnné  $h$ , pak se nazývá Gateauxovou derivací  $A$  v bodě  $x$  ve směru  $h$  a značí se  $DA(x, h)$ . Potom

$$DA(x, h) : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

**Definice A.5** (Fréchetův diferenciál a Fréchetova derivace, [56]). *Nechť  $X, Y, A$  jsou jako v předchozí definici. Jestliže existuje operátor  $u(x, h)$ , který je lineární v  $h \in X$  takový, že platí*

$$A(x + h) = A(x) + u(x, h) + \omega(x, h) \quad \text{a} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(x, h)}{\|h\|} = 0 \quad ,$$

*pak se tento operátor nazývá Fréchetovým diferenciálem operátoru  $A$  v bodě  $x$  a označuje se symbolem  $\nabla A(x)(h)$ . Je-li navíc tento operátor spojitý v  $h$ , pak se nazývá Fréchetovou derivací operátoru  $A$  v bodě  $x$ .*

**Definice A.6** (Slabá konvergence a slabá zdola-polospojitosť, [56]). *Nechť  $X$  je Banachův prostor. Řekneme, že posloupnost  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  konverguje slabě k  $x \in X$  pokud*

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in X^* \quad ,$$

*kde  $X^*$  značí prostor duální k  $X$ . Slabou konvergenci značíme symbolem  $x_n \rightharpoonup x$ .*

*Je-li  $\mathcal{H}$  Hilbertův prostor, díky Rieszově větě o reprezentaci platí, že posloupnost  $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$  konverguje slabě k  $x \in \mathcal{H}$  právě když*

$$(x_n, y) \rightarrow (x, y) \quad \forall y \in \mathcal{H}$$

*Funkcionál  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme slabě polospojitým zdola, pokud*

$$J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n) \quad \text{kdykoliv} \quad x_n \rightharpoonup x$$

**Věta A.4** (Přímá metoda variačního počtu, [56]). *Nechť  $\mathcal{H}$  je Hilbertův prostor,  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  buď slabě zdola-polospojitý funkcionál, který je koercivní -*

$$\|x_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty \implies J(x_n) \rightarrow \infty \quad .$$

*Pak existuje minimum  $J$  na každé  $C \subset \mathcal{H}$  uzavřené a konvexní.*





# Seznam použité literatury

- [1] Intel MKL Pardiso - Parallel Direct Sparse Solver Interface | Intel Software. <https://software.intel.com/en-us/node/470282>, zpřístupněno 4.1.2016.
- [2] Andy Adler, John H Arnold, Richard Bayford, Andrea Borsic, Brian Brown, Paul Dixon, Theo JC Faes, Inéz Frerichs, Hervé Gagnon, Yvo Gärber, et al. GREIT: a unified approach to 2D linear EIT reconstruction of lung images. *Physiological measurement*, 30(6):S35, 2009.
- [3] Martin Alnæs, Jan Blechta, Johan Hake, August Johansson, Benjamin Kehlet, Anders Logg, Chris Richardson, Johannes Ring, Marie E Rognes, and Garth N Wells. The fenics project version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100):9–23, 2015.
- [4] Michel Assenheimer, Orah Laver-Moskovitz, Dov Malonek, David Manor, Udi Nahaliel, Ron Nitzan, and Abraham Saad. The T-SCAN™ technology: electrical impedance as a diagnostic tool for breast cancer detection. *Physiological Measurement*, 22(1):1, 2001.
- [5] Satish Balay, William D. Gropp, Lois Curfman McInnes, and Barry F. Smith. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. In E. Arge, A. M. Bruaset, and H. P. Langtangen, editors, *Modern Software Tools in Scientific Computing*, pages 163–202. Birkhäuser Press, 1997.
- [6] DC Barber, BH Brown, and IL Freeston. Imaging spatial distributions of resistivity using applied potential tomography. In *Information Processing in Medical Imaging*, pages 446–462. Springer, 1984.
- [7] Börje Blad and Bo Baldetorp. Impedance spectra of tumour tissue in comparison with normal tissue; a possible clinical application for electrical impedance tomography. *Physiological Measurement*, 17(4A):A105, 1996.
- [8] Andrea Borsic, Brad M Graham, Andy Adler, and William RB Lionheart. In vivo impedance imaging with total variation regularization. *IEEE transactions on medical imaging*, 29(1):44–54, 2010.
- [9] Alberto P Calderón. On an inverse boundary value problem. *Computational & Applied Mathematics*, 25(2-3):133–138, 2006.
- [10] AM Campbell and DV Land. Dielectric properties of female human breast tissue measured in vitro at 3.2 ghz. *Physics in medicine and biology*, 37(1):193, 1992.
- [11] Lin-Feng Chen, CK Ong, CP Neo, VV Varadan, and Vijay K Varadan. *Microwave electronics: measurement and materials characterization*. John Wiley & Sons, 2004.
- [12] Margaret Cheney, David Isaacson, and Jonathan C Newell. Electrical impedance tomography. *SIAM review*, 41(1):85–101, 1999.

- [13] Kuo-Sheng Cheng, David Isaacson, JC Newell, and David G Gisser. Electrode models for electric current computed tomography. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 36(9):918–924, 1989.
- [14] M DeAngelo and JL Mueller. 2D D-bar reconstructions of human chest and tank data using an improved approximation to the scattering transform. *Physiological measurement*, 31(2):221, 2010.
- [15] Lawrence C Evans. Partial differential equations. *Graduate Studies in Mathematics*, 19, 1998.
- [16] Stephen A Feig and R Edward Hendrick. Radiation risk from screening mammography of women aged 40-49 years. *JNCI Monographs*, 1997(22):119–124, 1997.
- [17] Camelia Gabriel. Compilation of the dielectric properties of body tissues at rf and microwave frequencies. Technical report, DTIC Document, 1996.
- [18] S Gabriel, RW Lau, and Camelia Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: Ii. measurements in the frequency range 10 hz to 20 ghz. *Physics in medicine and biology*, 41(11):2251, 1996.
- [19] Sami Gabriel, RW Lau, and Camelia Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: Iii. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in medicine and biology*, 41(11):2271, 1996.
- [20] Corthout S. Gabriel C., Gabriel S. “the dielectric properties of biological tissues: I. literature survey”. *Physics in Medicine and Biology*, 41:2231–2249, 1996.
- [21] Peter C Gøtzsche and Margrethe Nielsen. Screening for breast cancer with mammography. *The cochrane library*, 2009.
- [22] Charles W Groetsch and CW Groetsch. *Inverse problems in the mathematical sciences*, volume 52. Springer, 1993.
- [23] Ryan J Halter, Tian Zhou, Paul M Meaney, Alex Hartov, Richard J Barth Jr, Kari M Rosenkranz, Wendy A Wells, Christine A Kogel, Andrea Borsic, Elizabeth J Rizzo, et al. The correlation of in vivo and ex vivo tissue dielectric properties to validate electromagnetic breast imaging: initial clinical experience. *Physiological Measurement*, 30(6):S121, 2009.
- [24] Per Christian Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve. *SIAM review*, 34(4):561–580, 1992.
- [25] David S Holder. *Electrical impedance tomography: methods, history and applications*. CRC Press, 2004.
- [26] William D Hurt. Multiterm debye dispersion relations for permittivity of muscle. *IEEE transactions on biomedical engineering*, 1(BME-32):60–64, 1985.

- [27] Sylvester John. A convergent layer stripping algorithm for the radially symmetric impedance tomography problem. *Communications in partial differential equations*, 17(11-12):1955–1994, 1992.
- [28] Jacques Jossinet. The impedivity of freshly excised human breast tissue. *Physiological measurement*, 19(1):61, 1998.
- [29] Jacques Jossinet and Michel Schmitt. A review of parameters for the bio-electrical characterization of breast tissue. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 873(1):30–41, 1999.
- [30] Carlos E Kenig, Johannes Sjöstrand, and Gunther Uhlmann. The calderón problem with partial data. *Annals of mathematics*, pages 567–591, 2007.
- [31] Kim Knudsen, Matti Lassas, Jennifer L Mueller, and Samuli Siltanen. D-bar method for electrical impedance tomography with discontinuous conductivities. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67(3):893–913, 2007.
- [32] Kim Knudsen, Matti Lassas, Jennifer L Mueller, and Samuli Siltanen. Regularized D-bar method for the inverse conductivity problem. *Inverse Problems and Imaging*, 35(4):599, 2009.
- [33] Kim Knudsen and Alexandru Tamasan. Reconstruction of less regular conductivities in the plane. *Communications in Partial Differential Equations*, 1:28, 2003.
- [34] Alois Kufner, Oldrich John, and Svatopluk Fucik. *Function spaces*, volume 3. Springer Science & Business Media, 1977.
- [35] Mariya Lazebnik, Dijana Popovic, Leah McCartney, Cynthia B Watkins, Mary J Lindstrom, Josephine Harter, Sarah Sewall, Travis Ogilvie, Anthony Magliocco, Tara M Breslin, et al. A large-scale study of the ultrawide-band microwave dielectric properties of normal, benign and malignant breast tissues obtained from cancer surgeries. *Physics in Medicine and Biology*, 52(20):6093, 2007.
- [36] William RB Lionheart. EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments. *Physiological measurement*, 25(1):125, 2004.
- [37] Dong C Liu and Jorge Nocedal. On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Mathematical programming*, 45(1):503–528, 1989.
- [38] PK Manwaring, RJ Halter, A Borsic, and A Hartov. A modified electrode configuration for brain EIT. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 224, page 012062. IOP Publishing, 2010.
- [39] Kenneth Mauritz and Beau Lambert. Ilustrace disperze elektrické permitivity dielektrického materiálu. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dielectric\\_responses.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dielectric_responses.svg), staženo 5.11.2016.
- [40] Ronald Pethig. Dielectric properties of biological materials: biophysical and medical applications. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, (5):453–474, 1984.

- [41] G Piperno, EH Frei, and M Moshitzky. Breast cancer screening by impedance measurements. *Frontiers of medical and biological engineering: the international journal of the Japan Society of Medical Electronics and Biological Engineering*, 2(2):111–117, 1989.
- [42] R-E Plessix. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 167(2):495–503, 2006.
- [43] Nicholas Polydorides. *Image reconstruction algorithms for soft-field tomography*. PhD thesis, University of Manchester: UMIST, 2002.
- [44] Marek Pšenka. *Electrical Impedance Tomography of Soft Tissue*. Bakalářská práce, Matematický Ústav Univerzity Karlovy, 2015.
- [45] A Romsauerova, A McEwan, Lior Horesh, R Yerworth, RH Bayford, and David S Holder. Multi-frequency electrical impedance tomography (EIT) of the adult human head: initial findings in brain tumours, arteriovenous malformations and chronic stroke, development of an analysis method and calibration. *Physiological measurement*, 27(5):S147, 2006.
- [46] Olaf Schenk and Klaus Gärtner. Sparse factorization with two level scheduling in PARDISO. In *PPSC*, 2001.
- [47] Herman P Schwan. Electrical properties of tissue and cell suspensions. *Advances in biological and medical physics*, 5:147–209, 1956.
- [48] HP Schwan. Electrical properties of tissues and cell suspensions: mechanisms and models. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 1994. Engineering Advances: New Opportunities for Biomedical Engineers. Proceedings of the 16th Annual International Conference of the IEEE*, pages A70–A71. IEEE, 1994.
- [49] Erkki Somersalo, Margaret Cheney, and David Isaacson. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 52(4):1023–1040, 1992.
- [50] Endre Süli. Lecture notes on finite element methods for partial differential equations. *Mathematical Institute, University of Oxford*, 2012.
- [51] Andrzej J Surowiec, Stanislaw S Stuchly, J Robin Barr, and AASA Swarup. Dielectric properties of breast carcinoma and the surrounding tissues. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 35(4):257–263, 1988.
- [52] John Sylvester and Gunther Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Annals of mathematics*, pages 153–169, 1987.
- [53] Albert Tarantola. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. siam, 2005.
- [54] Gunther Uhlmann. Electrical impedance tomography and calderón’s problem. *Inverse Problems*, 25(12):123011, 2009.

- [55] Curtis R Vogel. *Computational methods for inverse problems*. SIAM, 2002.
- [56] Karel Najzar Vít Dolejší. *Nelineární Funkcionální Analýza*. matfyzpress, 2010.
- [57] Kôsaku Yosida. *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 3. vydání, 1971.



# Seznam obrázků

1.1	Ilustrace spektrální závislosti permitivity . . . . .	7
1.2	Frekvenční závislost admitivity pro svalovinu . . . . .	11
1.3	Frekvenční závislost $\text{Re}\{\hat{\varepsilon}_r\}$ , $\text{Re}\{\gamma\}$ pro svalovinu . . . . .	11
4.1	Ilustrace individuálního kódování reálné části admitivity. V případě imaginární části bude schéma stejné. . . . .	31
4.2	Ilustrace kódování parametrů disperzí admitivity . . . . .	32
4.3	Příklad L-křivky . . . . .	37
5.1	Rendering modelu aplikátoru vyvinutého společností RSDynamics	40
5.2	Číslování elektrod modelu společnosti RSDynamics, 2D projekce .	40
5.3	Diagram ilustrující vývoj softwarového řešení prs3D . . . . .	43
6.1	Matice sloužící jako srovnání přímých řešičů prs3D a eitsolver. . .	50
6.2	Rozložení $\text{Re}\{\gamma(\mathbf{m}_p)\}$ — apriorní model vnořené koule . . . . .	51
6.3	Řez rozložením $\text{Re}\{\gamma(\mathbf{m}_p)\}$ — apriorní model vnořené koule . . .	51
6.4	L-křivka — $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ . . . . .	53
6.5	L-křivka — $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ . . . . .	54
6.6	L-křivka — $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ . . . . .	55
6.7	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	58
6.8	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	58
6.9	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\} > 1.2$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	58
6.10	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	59
6.11	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	59
6.12	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	59
6.13	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	60
6.14	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	60
6.15	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	60
6.16	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	61
6.17	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	61
6.18	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_4})\} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	61
6.19	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	62
6.20	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	62
6.21	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_5})\} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	62
6.22	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	63
6.23	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	63
6.24	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_6})\} > 3.0$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 20$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	63
6.25	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	64
6.26	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	64
6.27	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_1})\} > 1.2$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	64
6.28	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	65
6.29	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	65
6.30	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_2})\} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	65
6.31	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	66
6.32	Řez $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	66
6.33	Predikátový filtr $\text{Re}\{\gamma(R_{\lambda_3})\} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	66

6.34	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	67
6.35	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	67
6.36	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	67
6.37	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_5}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	68
6.38	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_5}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	68
6.39	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_5}) \} > 2.0$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	68
6.40	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_6}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	69
6.41	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_6}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	69
6.42	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_6}) \} > 3.0$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = 0$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	69
6.43	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_1}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	70
6.44	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_1}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	70
6.45	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_1}) \} > 1.2$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_1 = 10^2$ . . . . .	70
6.46	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_2}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	71
6.47	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_2}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	71
6.48	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_2}) \} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_2 = 10^1$ . . . . .	71
6.49	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_3}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	72
6.50	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_3}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	72
6.51	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_3}) \} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_3 = 10^0$ . . . . .	72
6.52	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	73
6.53	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	73
6.54	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_4}) \} > 1.5$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_4 = 10^{-1}$ . . . . .	73
6.55	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_5}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	74
6.56	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_5}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	74
6.57	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_5}) \} > 2.0$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_5 = 10^{-2}$ . . . . .	74
6.58	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_6}) \}$ v původní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	75
6.59	Řez $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_6}) \}$ v kvalitativní škále, $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	75
6.60	Predikátový filtr $\text{Re} \{ \gamma(R_{\lambda_6}) \} > 3.0$ , $\text{SNR}_{\text{dB}} = -10$ , $\lambda_6 = 10^{-3}$ . . . . .	75



# Rejstřík

## úloha

- adjungovaná, 22, 24
- obrácená, 4, 19
  - diskrétní*, 21, 29
- přímá, 4, 13
  - diskrétní*, 17

## adjungovaný proud, 24

- admitivita, 5
  - referenční, 30
- architektura, 30

## data

- homogenní, 51
- syntetická, 49
- dielektrická relaxace, 6
- dielektrické charakteristiky, 4
- disperze, 6

## eitsolver, 39

## funkcionál

- misfit, 19, 21, 29
- penalizační, 26
  - Tichonovův*, 27
  - materiálový*, 36
  - negativní entropie*, 27, 34
  - totální variace*, 27
  - zhlazovací*, 27
- Tichonovův, 26, 35

## kódování, 21, 30

- individuální, 30
- logaritmické, 30
- parametrů disperzí, 30, 31
- kontaktní impedance, 14

## L-křivka, 37

## model

- kompletní elektrodový, 15
- parametrický, 8
- svodový, 14
- vnořené koule, 50

## permitivita, 5

## prostor

- datový, 19, 20
- modelový, 19, 20
- prs4D, 39, 42

## regularizační parametr, 26, 36

- regularizační schéma
  - obecné, 26
  - Tichonovovo, 27
- regularizace, 19
  - Tichonovova, 25
- relaxační doba, 6, 8

## SNR, 51

- spektrální informace, 28, 29
- stimulační vzor, 4, 14

