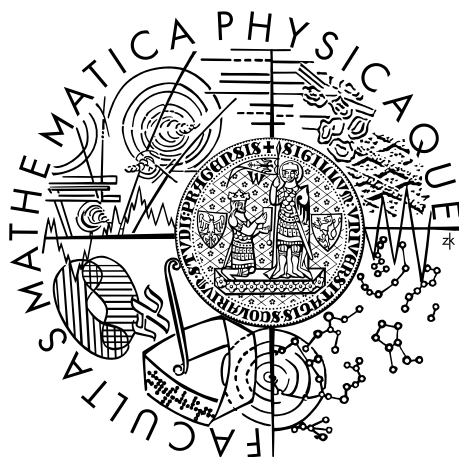


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jakub Šafin

Proudění podpovrchového oceánu v přiblížení mělké vody

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Proudění podpovrchového oceánu v přiblížení mělké vody

Autor: Jakub Šafin

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Katedra geofyziky

Abstrakt: V práci sa zaoberáme prúdením podpovrchového oceánu v tzv. priblížení plytkej vody. Z rovníc popisujúcich všeobecné prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny získame jednoduchšie rovnice, ktoré sú aplikovateľné na plytký globálny oceán na rotujúcej sfére. Na základe týchto rovníc vyvineme program, pomocou ktorého je možné modelovať dvojrozmerné prúdenie oceánu. Pre dva ľadové mesiace, Europu a Enceladus, vyrobíme krátke simulácie prúdenia oceánu poháňaného excentricitou obežnej dráhy a sklonom osi rotácie voči nej. Existencia podpovrchových oceánov bola preukázaná na ľadových mesiacoch vonkajších planét; doteraz nie je jasný mechanizmus, ktorý bráni ich zamrznutiu. Na základe simulácií prúdenia sa tu pokúsime odhadnúť disipáciu energie spôsobenú trením o dno oceána.

Klíčová slova: ľadové mesiace, podpovrchový oceán, rovnice plytkej vody, disipácia

Title: Flow of a subsurface ocean in shallow water approximation

Author: Jakub Šafin

Department: Department of Geophysics

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Department of Geophysics

Abstract: In this thesis, we deal with the flow of a subsurface ocean in the so-called shallow water approximation. From the equations describing general flow of an incompressible fluid, we obtain simplified equations, applicable to a shallow global ocean on a rotating sphere. Based on these equations, we develop a program that can be used to model the flow of an ocean in 2D. We create short simulations of the flow on two icy moons, Europa and Enceladus, forced by the eccentricity and obliquity tidal potentials. The existence of subsurface oceans has been demonstrated on icy moons of outer planets; the mechanism which keeps them from freezing has remained unclear until now. Based on the flow simulations, we attempt to estimate the energy dissipation due to bottom friction.

Keywords: icy moons, subsurface ocean, shallow water equations, dissipation

Rád by som sa tu poďakoval svojmu vedúcemu prof. Ondřejovi Čadkovi za cenné pripomienky k bakalárskej práci a téme ľadových oceánov, ako aj Davidovi Einšpigelovi za ďalšie informácie o modelovaní prúdenia v oceánoch.

Tiež ďakujem mojim rodičom za ich podporu počas štúdia a písania bakalárskej práce.

Obsah

Úvod	2
1 Priblíženie plytkej vody	3
1.1 Pohybové rovnice kvapaliny	3
1.2 Rotujúca vzťažná sústava	4
1.3 Objemové sily	5
1.4 Disipačné vplyvy	6
1.5 Odvodenie v kartézskych súradniciach	7
1.6 Sférické súradnice	10
1.7 Rovnice plytkej vody v sférických súradniciach	11
2 Numerické spracovanie	13
2.1 Veličiny na sieti	13
2.2 Integrovaná metóda	15
2.3 Tvar potenciálu	16
2.4 Test: gaussovská jama	17
2.5 Test: príliv	17
3 Aplikácia na ľadové mesiace	20
3.1 Tvar potenciálu	20
3.2 Ľadové mesiace	20
3.3 Odhad disipácie	23
Záver	24
Zoznam použitej literatúry	25
Zoznam obrázkov	26
Zoznam tabuliek	27
Prílohy	28

Úvod

Veľa mesiacov vonkajších planét (hlavne Jupiter, Saturn) ako Europa, Enceladus alebo Titan je už dlho predmetom skúmania. Sonda Cassini, ktorá skúmala mesiace Saturnu, roku 2006 objavila na Titane povrchové jazerá z metánu a neskôr na Encelade vodné erupcie, ktoré naznačujú existenciu podpovrchového oceánu pokrytého ľadom. Na základe magnetických dát získaných sondou Galileo sa existencia podobného podpovrchového oceánu predpokladá aj na Europe.

Prúdenie globálneho oceánu s voľnou hladinou sa dá dobre modelovať v tzv. priblížení plytkej vody. V prípade oceánu uzavretého pod ľadom sa ale musí deformovať aj ľad a nie je jasné, akým spôsobom sa ovplyvňujú deformácia ľadu a prúdenie v oceáne.

Na to, aby mohol na spomenutých mesiacoch existovať podpovrchový vodný oceán, musia existovať zdroje tepla, ktoré ho zohrievajú. Jednou z otázok, ktoré sa naskytujú, je vplyv energie disipovanej v dôsledku prúdenia vody v týchto oceánoch, či už trením alebo turbulentnou viskozitou, na ich zohrievanie. V priblížení plytkej vody je ale problém popisovať viskozitu, ktorá súvisí s malými turbulenciami. V podpovrchových oceánoch tiež existuje okrem trenia o dno aj trenie o ľadovú pokrývku.

V súčasnosti vieme o týchto oceánoch príliš málo. Existuje veľa článkov, ktoré sa zaoberajú tematikou ľadových oceánov a amplitúdou rôznych disipačných efektov – napr. Tyler (2014) porovnáva amplitúdy disipácie pre prúdenie spôsobené excentricitou obežnej dráhy a výchylkou osi rotácie v závislosti na hĺbke oceána a ďalších parametroch – ale nie je jasné, ktorý model správne popisuje prúdenie v podpovrchových oceánoch a ich zohrievanie.

V tejto práci sa zaoberáme jedným zo spomenutých modelov, pre ktorý vytvoríme vlastný program na základe rovníc plytkej vody. Tento program je možné použiť na modelovanie prúdenia oceánov a štúdium vplyvu disipačných efektov v oceáne na termálnu bilanciu ľadových mesiacov.

Podpovrchové oceány budeme modelovať ako globálne oceány s plochým dnom a voľnou hladinou – predpokladáme, že ľadová pokrývka nebráni deformácii hladiny a neuvažujeme trenie o ňu (resp. ho zahŕňame do celkového trecieho koeficientu) ani viskozitu.

V prvej kapitole práce popíšeme priblíženie plytkej vody a odvodíme ho v kartézskych súradniciach. Podobnou témou sa zaoberala práca (Einšpigel a Martinec, 2015), z ktorej preberieme potrebné rovnice v sférických súradniciach. V kapitole 2 popíšeme simuláciu prúdenia a porovnáme výstup programu s príkladom zo spomenutej práce (Einšpigel a Martinec, 2015, kap. 5.1).

Ďalej vytvoríme simulácie prúdenia na dvoch ľadových mesiacoch – Europe a Encelade – ako príklad a odhadneme disipáciu energie spôsobenú trením o dno pri tomto prúdení.

1. Priblíženie plytkej vody

Cieľom tejto kapitoly je získať rovnice popisujúce pohyb nestlačiteľnej kvapaliny v tenkej vrstve – tzv. priblížení plytkej vody. Vyjdeme zo všeobecného popisu prúdenia v Eulerovej reprezentácii, kde kvapalinu popisujeme vektorovým poľom rýchlostí v priestore $\vec{v}(\vec{r}, t)$ a jej hranicou – výškou hladiny. Postupne sa dopracujeme k rovniciam, ktoré popisujú 2D prúdenie pomocou výšky hladiny a dvoch zložiek rýchlosti.

Rovnice plytkej vody najprv odvodíme v kartézskej sústave pre tok kvapaliny na rovnom dne. Ďalej ale budeme pracovať s tokom na povrchu rotujúcej gule; tieto rovnice v sférických súradniciach potom preberieme z práce Einšpigel a Martinec (2015).

1.1 Pohybové rovnice kvapaliny

Spomeňme najprv rovnice popisujúce všeobecné 3D prúdenie. Nestlačiteľná kvapalina o hustote ρ splňuje rovnicu kontinuity v tvare

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.1)$$

a pohybové rovnice, zapísané vektorovo ako

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{t} + \vec{f}. \quad (1.2)$$

Materiálovú časovú deriváciu rýchlosti rozpíšeme v Eulerovej reprezentácii ako

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (1.3)$$

a tenzor napätia \mathbf{t} rozložíme na izotropnú tlakovú časť a bezstopovú deviatorickú časť $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.4)$$

kde p je tlak kvapaliny. Tenzor napätia musí byť symetrický, preto aj tenzor $\boldsymbol{\sigma}$ bude symetrický. Pohyb kvapaliny teda popisujú rovnice

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f}. \quad (1.6)$$

Pre nestlačiteľnú newtonovskú kvapalinu s konštantnou viskozitou μ platí

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T); \quad (1.7)$$

dosadením tohto výrazu do (1.6) dostaneme Navier-Stokesovu rovnicu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} + \vec{f}. \quad (1.8)$$

Poznámka: Tenzory (a vektory ako tenzory 1. rádu) v rovniciach (1.3), (1.6) a (1.8) sme zapisovali bez indexov, na ktorých poradí záleží. Gradient vektoru \vec{v} s kartézskymi zložkami v_i ($i = 1,2,3$) je tenzor 2. rádu so zložkami

$$(\nabla\vec{v})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}v_j; \quad (1.9)$$

jeho násobením vektorom \vec{v} zľava dostaneme vektor (používame Einsteinovu sumáčnú konvenciu)

$$(\vec{v} \cdot \nabla\vec{v})_j = v_i (\nabla\vec{v})_{ij} = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}v_j. \quad (1.10)$$

Divergencia newtonovského tenzoru σ (1.7) je

$$\nabla \cdot \sigma = \mu \nabla \cdot \nabla\vec{v} + \mu \nabla \cdot (\nabla\vec{v})^\top; \quad (1.11)$$

prvý člen je laplacián a druhý je nulový ako dôsledok rovnice kontinuity:

$$(\nabla \cdot \nabla\vec{v})_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \Delta v_j, \quad (1.12)$$

$$(\nabla \cdot (\nabla\vec{v})^\top)_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = (\nabla(\nabla \cdot \vec{v}))_j = \nabla 0 = 0. \quad (1.13)$$

1.2 Rotujúca vzťažná sústava

Uvažujme rotáciu uhlovou rýchlosťou ω popísanú vektorom $\vec{\omega}$ – okolo osi prechádzajúcej počiatkom vzťažnej sústavy a rovnobežnej s $\vec{\omega}$. Medzi materiálovou deriváciou v rotujúcej a inerciálnej sústave platí vzťah

$$\left. \frac{D}{Dt} \right|_{rot} = \left. \frac{D}{Dt} \right|_{inerc} - \vec{\omega} \times . \quad (1.14)$$

Ak využijeme, že rýchlosť častíc kvapaliny je materiálová derivácia ich polohy, danej vektorom \vec{r} , dostaneme zo definície rýchlosti v oboch sústavách

$$\left. \frac{D\vec{r}}{Dt} \right|_{inerc} = \vec{v}_{inerc}, \quad (1.15)$$

$$\left. \frac{D\vec{r}}{Dt} \right|_{rot} = \vec{v}_{rot}, \quad (1.16)$$

vzťah

$$\vec{v}_{rot} = \vec{v}_{inerc} - \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.17)$$

Materiálová derivácia rýchlosti (zrýchlenie častíc) je

$$\begin{aligned} \left. \frac{D\vec{v}_{rot}}{Dt} \right|_{rot} &= \left. \frac{D\vec{v}_{rot}}{Dt} \right|_{inerc} - \vec{\omega} \times (\vec{v}_{inerc} - \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \left. \frac{D\vec{v}_{inerc}}{Dt} \right|_{inerc} - \vec{\omega} \times \left. \frac{D\vec{r}}{Dt} \right|_{inerc} - \vec{\omega} \times (\vec{v}_{inerc} - \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \left. \frac{D\vec{v}_{inerc}}{Dt} \right|_{inerc} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{inerc} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pravá strana vektorovej rovnice (1.6) sa transformáciou do rotujúcej sústavy nemení, pohybové rovnice majú teda v nej tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (1.19)$$

Pribudlo Coriolisovo zrýchlenie

$$\vec{a}_{cor} = -2\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (1.20)$$

a odstredivé zrýchlenie

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (1.21)$$

Rovnica kontinuity má rovnaký tvar v rotujúcej sústave,

$$\nabla \cdot \vec{v}_{rot} = \nabla \cdot \vec{v}_{inerc} + \nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0, \quad (1.22)$$

platí totiž (ε_{ijk} je Levi-Civito symbol)

$$\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k = \varepsilon_{ijk} \omega_j \delta_{ik} = \varepsilon_{iji} \omega_j = 0. \quad (1.23)$$

1.3 Objemové sily

Objemové sily \vec{f} budeme ďalej považovať za konzervatívne a dané potenciálom V ako

$$\vec{f} = -\frac{1}{\rho} \nabla V. \quad (1.24)$$

Tento potenciál rozložíme na dve časti,

$$V = V_1 + V_2, \quad (1.25)$$

kde potenciál V_1 popisuje gravitačné zrýchlenie

$$\vec{g} = -\frac{1}{\rho} \nabla V_1 \quad (1.26)$$

a V_2 je malá korekcia k nemu. Tá môže zahŕňať napríklad gravitačný vplyv ďalších telies a iné objemové sily. Tu do neho môžeme zahrnúť odstredivé zrýchlenie

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}, \quad (1.27)$$

ktoré nahradíme gradientom odstredivého potenciálu

$$V_c = -\frac{1}{2} \rho |\vec{\omega} \cdot \vec{r}|^2 + \frac{1}{2} \rho (\omega r)^2. \quad (1.28)$$

Ďalej budeme predpokladať, že odstredivé zrýchlenie je malé v porovnaní s gravitačným a môžeme ho zanedbať.

V rovniciach plynkej vody budeme uvažovať plytkú vrstvu vody na dne tak, že gravitačné zrýchlenie pôsobí v „zvislom“ smere kolmo na dno. Vplyv potenciálu V_2 na zvislú zložku zrýchlenia, teda závislosť V_2 na z , ale aj závislosť ∇V_2 na z tiež zanedbáme. Samotné „vodorovné“ zložky ∇V_2 sú zanedbateľné a hrajú dôležitú úlohu vo výsledných rovniciach – poháňajú kvapalinu vo vodorovnom smere!

Pohybové rovnice teraz majú tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla V_2 - 2\vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (1.29)$$

1.4 Disipačné vplyvy

Dost dôležitou otázkou je spôsob, ktorým budeme popisovať disipačné vplyvy – viskozitu a trenie. Tie určite nemôžeme zanedbať, a to z viacerých dôvodov:

- výsledný model má slúžiť aj na odhad disipovaného tepla
- v niektorých prípadoch môže dodať stabilitu numerickému výpočtu
- hodnota Reynoldsovho čísla hovorí, že prúdenie bude silno turbulentné, mala by sa teda prejavovať viskózna disipácia

Pre vlny v oceáne, ktorého hĺbka je rádovo metre až desiatky kilometrov, $H \doteq 10^4$ m, a rýchlosť porovnateľná s obvodovou rýchlosťou Zeme na rovníku, $v = \omega R \doteq 10^2$ m s⁻¹, je Reynoldsovo číslo ($\nu \doteq 10^{-6}$ m²s⁻¹ je kinematická viskozita vody)

$$Re = \frac{Hv}{\nu} \doteq 10^{12}. \quad (1.30)$$

To zodpovedá silne turbulentnému prúdeniu, ktoré zdanlivo odporuje existencii takýchto vln.

Fyzikálne vysvetlenie je také, že turbulencie existujú na škálach oveľa menších ako rozmery vln popísaných v priblížení plytkej vody a odchýlky rýchlosti kvapaliny, s ktorými sú spojené, sú oveľa menšie ako vodorovné zložky rýchlosti týchto vln. To má za následok, že ich nemôžeme popisovať priamo newtonovským tenzorom σ . Gent (1993) ukazuje, že rovnice plytkej vody používajúce tento tenzor sú energeticky nekonzistentné – kinetická energia môže vplyvom viskozity rásť.

Einšpigel a Martinec (2015) používa tzv. Reynoldsov tenzor (Wajsowicz, 1993) v energeticky konzistentnom tvare

$$\sigma = \frac{\rho}{2} \mathbf{A} : \left(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^\top \right), \quad (1.31)$$

kde \mathbf{A} je vhodný tenzor 4. rádu. Presný tvar výsledného tenzoru σ tu nebudeme uvádzať, ukazuje sa totiž, že viskozita vody má na disipáciu energie zanedbateľne menší vplyv ako trenie na dne (a tiež nerovnomernosť dna, ktoré ale v tomto modeli neuvažujeme). Nakoniec teda zanedbáme turbulencie a ako jediný disipačný efekt budeme uvažovať trenie.

Trenie na hraniciach určuje okrajové podmienky na tenzor σ . Okrajová podmienka na dne s koeficientom trenia k_{fr} je

$$\sigma \cdot \vec{n} = -\rho k_{fr} \vec{v} |v|, \quad (1.32)$$

kde \vec{n} je normálový vektor ku dnu. Okrajová podmienka na voľnom povrchu (s iným normálovým vektorom \vec{n}) je

$$\sigma \cdot \vec{n} = 0. \quad (1.33)$$

1.5 Odvodenie v kartézskych súradniciach

V tejto časti odvodíme rovnice plynkej vody v nerotujúcej kartézskej sústave. Pracujeme v súradniciach $x, y, z \equiv x_1, x_2, x_3$. Uvažujeme kvapalinu na vodorovnom dne – rovine $z = 0$; tiažové zrýchlenie pôsobí proti smeru osi z .

Charakteristickú výšku hladiny označme H (v prípade, kedy je počiatočnou podmienkou rovná hladina, je H zároveň stredná výška; objem kvapaliny sa zachováva, preto je stredná výška konštantná), okamžitú výšku hladiny $h = h(x, y)$, vodorovné rozmery dna L_x, L_y ; môžeme uvažovať, že L_x a L_y sú rádovo porovnateľné. Tiež označme T charakteristický čas, za ktorý vlny prejdú vzdialenosti porovnateľné s L_x, L_y . V priblížení plynkej vody predpokladáme, že (Plumb):

- zvislý rozmer je oveľa menší ako vodorovné rozmery – v tomto prípade $H \ll L_x, L_y$
- vodorovné zložky rýchlosti v_x, v_y len zanedbateľne závisia na súradnici z

Pre vlny, ktorých charakteristické rozmery v horizontálnom, resp. vertikálnom smere sú porovnateľné s L_x, L_y resp. H , môžeme zaviesť charakteristické hodnoty rýchlostí v_x, v_y

$$V_x = \frac{L_x}{T}, \quad (1.34)$$

$$V_y = \frac{L_y}{T}, \quad (1.35)$$

a charakteristickú hodnotu V_z rýchlosti v_z . Tú odhadneme nasledujúcou úvahou: členy $\partial v_i / \partial x_i$ v rovnici kontinuity musia byť navzájom porovnateľné. Rýchlosti v_x, v_y resp. v_z sa tiež menia na škálach L_x, L_y resp. H , preto môžeme odhadnúť

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \approx \frac{V_x}{L_x} = \frac{1}{T}, \quad (1.36)$$

$$\left| \frac{\partial v_y}{\partial y} \right| \approx \frac{V_y}{L_y} = \frac{1}{T}, \quad (1.37)$$

$$\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right| \approx \frac{V_z}{H}, \quad (1.38)$$

$$V_z \approx \frac{H}{T} \approx \frac{H}{L_x} V_x \ll V_x \approx V_y. \quad (1.39)$$

Zvislá zložka rýchlosti je teda typicky oveľa menšia ako vodorovné.

Ďalší krok, ktorým získame rovnicu popisujúcu časovú zmenu výšky hladiny h , je integrovanie rovnice kontinuity (1.5) v smere osi z . Platí

$$\int_0^h \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = - \int_0^h \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz. \quad (1.40)$$

Okrajová podmienka na rýchlosť na dne je

$$v_z(x, y, 0) = 0; \quad (1.41)$$

rýchlosť častíc na hornom, voľnom povrchu je materiálová derivácia ich zvislej súradnice – výšky hladiny, preto je integrál na ľavej strane rovný

$$\int_0^h \frac{\partial v_z}{\partial z} dz = v_z(x,y,h) - v_z(x,y,0) = v_z(x,y,h) = \frac{Dh}{Dt}. \quad (1.42)$$

Na pravej strane použijeme pravidlo pre derivovanie integrálu s premennou hornou medzou:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f(x,t) dt = \int_0^{g(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t) dt + f(x,g(x)) \frac{dg}{dx}(x), \quad (1.43)$$

podľa ktorého

$$\int_0^h \frac{\partial v_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_x dz - v_x(x,y,h) \frac{dh}{dx} \approx \frac{\partial}{\partial x} (h v_x) - v_x \frac{dh}{dx} = h \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (1.44)$$

$$\frac{Dh}{Dt} = -h \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right). \quad (1.45)$$

Materiálovú deriváciu rozpíšeme ako

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla h = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.46)$$

(tretia zložka ∇h je nulová), rovnicu (1.45) teda môžeme upraviť pomocou Leibnitzovho pravidla pre deriváciu súčinu do tvaru

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(hv_x)}{\partial x} - \frac{\partial(hv_y)}{\partial y}. \quad (1.47)$$

Pozrime sa teraz na z -ovú zložku pohybovej rovnice (1.6). Výraz na ľavej strane je materiálové zrýchlenie v smere osi z , ktoré odhadneme ako $V_z/T = H/T^2$. Môžeme očakávať, že tento výraz bude oveľa menší ako tiažové zrýchlenie na pravej strane – kvapalina sa nepohybuje voľným pádom; to dobre platí pre H v ráde metrov až kilometrov a T v ráde dní. Tiež zanedbáme disipačné členy; dostaneme rovnicu

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{\partial V_1}{\partial z} = -\rho g. \quad (1.48)$$

Kvapalina je teda približne v hydrostatickej rovnováhe a tlak môžeme vyjadriť ako

$$p(x,y,z) = p(x,y,h) + \rho g(h-z) = p_0 + \rho g(h-z). \quad (1.49)$$

Tlak p_0 na voľnom povrchu kvapaliny je konštantný. Keďže v rovniciach (1.6) vystupujú len derivácie potenciálu, môžeme ho považovať za nulový.

Zvyšné dve zložky rovnice (1.6) prepíšme do ekvivalentného tvaru pripočítaním rovnice (1.5) vynásobenej v_i k i -tej zložke (nasledujúci postup platí pre $i = 1,2$). Za tlak pri tom dosadíme z (1.49):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_i v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_i v_z}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_2}{\partial x_i} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_i. \quad (1.50)$$

Tieto rovnice tiež integrujme od $z = 0$ po $z = h$. Na ľavej strane opäť použijeme (1.43) a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h v_i dz - \frac{\partial h}{\partial t} v_i + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_i v_x dz - \frac{\partial h}{\partial x} v_i v_x + \\ \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v_i v_y dz - \frac{\partial h}{\partial y} v_i v_y + v_i v_z \Big|_0^h. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Členy, v ktorých vystupujú derivácie h , môžeme nahradiť pomocou rovnice (1.46):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h v_i dz - v_i \frac{Dh}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v_i v_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v_i v_y dz + v_i v_z \Big|_0^h. \quad (1.52)$$

Ak zanedbáme závislosť v_i, v_x, v_y na súradnici z a aplikujeme okrajovú podmienku (1.41), dostaneme

$$\frac{\partial h v_i}{\partial t} + \frac{\partial h v_i v_x}{\partial x} + \frac{\partial h v_i v_y}{\partial y}. \quad (1.53)$$

Integrovaním pravej strany rovnice (1.50) dostaneme

$$-hg \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \int_0^h \frac{\partial V_2}{\partial x_i} dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^h \sigma_{ji} dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x_j} \sigma_{ji} \Big|_0^h + \frac{1}{\rho} \sigma_{zi} \Big|_0^h. \quad (1.54)$$

V integráloch zanedbáme závislosť V_2 aj ním vyvolaného zrýchlenia na z a tenzor σ (integrály zložiek σ by mali zodpovedať viskózne disipácii, ktorú zanedbávame voči treniu).

Normály ku dnu \vec{n}_b a k hladine \vec{n}_t sú

$$\vec{n}_b = -\vec{e}_z, \quad (1.55)$$

$$\vec{n}_t = \frac{\vec{e}_z + \nabla h}{1 + |\nabla h|}, \quad (1.56)$$

okrajové podmienky (1.32) a (1.33) teda majú tvar (pre $k = 1, 2, 3$)

$$\sigma_{kz}(x, y, 0) = \rho k_{fr} v_k(x, y, 0) v, \quad (1.57)$$

$$\sigma_{kz}(x, y, h) + \sigma_{kj}(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial x_j} = 0. \quad (1.58)$$

Rovnica (1.54) sa pomocou (1.58) zjednoduší do tvaru

$$-hg \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial V_2}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x_j} \sigma_{ji}(x, y, 0) - \frac{1}{\rho} \sigma_{zi}(x, y, 0). \quad (1.59)$$

Okrajové podmienky nám nič nehovoria o hodnotách σ_{ji} ($j = 1, 2$) na dne, preto ale môžeme čakať, že ide o členy súvisiace s viskóznou disipáciou a oproti treniu na dne ich zanedbať. Pomocou (1.57) potom dostaneme integrál pravej strany (1.50) pre $i = 1, 2$ v tvare

$$-hg \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial V_2}{\partial x_i} - k_{fr} v_i v. \quad (1.60)$$

Rovnosť (1.53) a (1.60) nám dá pre $i = 1,2$ resp. $x_i = x,y$ rovnice

$$\frac{\partial h v_x}{\partial t} + \frac{\partial h v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial h v_x v_y}{\partial y} = -h g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial V_2}{\partial x} - k_{fr} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial h v_y}{\partial t} + \frac{\partial h v_y v_x}{\partial x} + \frac{\partial h v_y^2}{\partial y} = -h g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial V_2}{\partial y} - k_{fr} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.62)$$

Ak rozpíšeme derivácie súčinov a dosadíme za $\partial h / \partial t$ zo zintegrovanej rovnice kontinuity, môžeme vydeliť h a dostaneme rovnice v jednoduchšej podobe:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(h v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(h v_y)}{\partial y}, \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{k_{fr}}{h} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{k_{fr}}{h} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.65)$$

Dostali sme 3 rovnice popisujúce časový vývoj veličín h, v_x, v_y v 2D – všetky veličiny závisia len na x, y .

1.6 Sféricke súradnice

Pri modelovaní pohybu kvapaliny na sférickom telese polomeru R budeme pracovať v sférických súradniciach. Tie zavedieme ako vzdialenosť od stredu telesa r , zemepisnú šírku – uhol $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$ a zemepisnú dĺžku – uhol φ . Transformácia medzi kartézskymi a sférickými súradnicami je

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad (1.66)$$

$$y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad (1.67)$$

$$z = r \sin \theta. \quad (1.68)$$

Zložky gradientu v sférických súradniciach označíme

$$\partial_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2, \quad (1.69)$$

$$\partial_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = l_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (1.70)$$

$$\partial_\varphi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = l_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (1.71)$$

kde l_θ, l_φ sú Lamého koeficienty.

Gravitačný potenciál telesa o hmotnosti M podľa vzťahu (1.26) je

$$V_1 = -\rho \frac{GM}{r}, \quad (1.72)$$

v sférických súradniciach popisuje gravitačné zrýchlenie

$$-\frac{1}{\rho} \nabla V = \vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.73)$$

Rotáciu môžeme popísať Coriolisovým parametrom

$$f_{cor} = 2\omega \sin \theta. \quad (1.74)$$

Rovnice (1.5), (1.29) prejdú do tvaru (Einšpigel a Martinec, 2015, kap. 2.1)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \theta} \left(\frac{\partial \cos \theta v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} v_\varphi (v_r - \tan \theta v_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_\varphi v_r}{\partial r} \\ + \frac{1}{r \cos \theta} \left(\frac{\partial \cos \theta v_\varphi v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta^2}{\partial \varphi} \right) = f_{cor} v_\theta - \frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} (v_r v_\theta + \tan \theta v_\varphi^2) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_\theta v_r}{\partial r} \\ + \frac{1}{r \cos \theta} \left(\frac{\partial \cos \theta v_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\varphi v_\theta}{\partial \varphi} \right) = -f_{cor} v_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} - \frac{1}{r} (v_\varphi^2 + v_\theta^2) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r^2}{\partial r} \\ + \frac{1}{r \cos \theta} \left(\frac{\partial \cos \theta v_\theta v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\varphi v_r}{\partial \varphi} \right) = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

1.7 Rovnice plytkej vody v sférických súradniciach

Skúmame prúdenie vo vrstve kvapaliny charakteristickej hrúbky H a lokálnej hrúbky $h(\theta, \varphi)$ na povrchu gule polomeru R ; v priblížení plytkej vody predpokladáme, že „kolmý“ – radiálny rozmer je oveľa menší ako „vodorovné“ – tangenciálne, teda $H, h \ll R$. Potom môžeme v radiálnej zložke gradientu zanedbať člen, ktorý je približne rovný $2/R$:

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \approx \frac{\partial}{\partial r}. \quad (1.79)$$

Tiež môžeme zanedbať závislosť gravitačného zrýchlenia na súradnici r .

Odvedenie rovníc plytkej vody v sférických súradniciach je rovnaké ako v kartézskych – radiálnym integrovaním rovnice kontinuity získame rovnicu popisujúcu zmeny výšky hladiny, zanedbaním vhodných členov v radiálnej Eulerovej rovnici dospejeme k rovnici hydrostatickej rovnováhy

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g, \quad (1.80)$$

ktorej riešením pre konštantné tiažové zrýchlenie g je

$$p = \rho g(h - r), \quad (1.81)$$

a ten dosadíme do Eulerových rovníc pre v_θ, v_φ . V tých tiež zanedbáme vhodné členy a radiálnym integrovaním dospejeme k rovniciam popisujúcim časový vývoj výrazov $h v_\theta, h v_\varphi$. Detailné odvedenie zahŕňajúce aj viskozitu je popísané v

(Einspigel a Martinec, 2015, kap. 2). Výsledné rovnice môžeme napísať v tvare

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\tan \theta}{R} h v_\theta - \partial_\theta(h v_\theta) - \partial_\varphi(h v_\varphi), \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h v_\theta)}{\partial t} + \partial_\theta(h v_\theta^2) + \partial_\varphi(h v_\theta v_\varphi) &= 2 \frac{\tan \theta}{R} h(v_\theta^2 - v_\varphi^2) - f_{cor} h v_\varphi - g h \partial_\theta h \\ &\quad - \frac{h}{\rho} \partial_\theta V_2 - k_{fr} v_\theta \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h v_\varphi)}{\partial t} + \partial_\theta(h v_\theta v_\varphi) + \partial_\varphi(h v_\varphi^2) &= 2 \frac{\tan \theta}{R} h v_\theta v_\varphi + f_{cor} h v_\theta - g h \partial_\varphi h \\ &\quad - \frac{h}{\rho} \partial_\varphi V_2 - k_{fr} v_\varphi \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Rovnice (1.83) a (1.84) môžeme upraviť podobne ako v časti 1.5 rozpísaním súčinov a dosadením $\partial h / \partial t$ z rovnice (1.82). Dostávame sadu rovníc

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\tan \theta}{R} h v_\theta - \partial_\theta(h v_\theta) - \partial_\varphi(h v_\varphi), \quad (1.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_\theta \partial_\theta v_\theta + v_\varphi \partial_\varphi v_\theta &= - \frac{\tan \theta}{R} v_\varphi^2 - f_{cor} v_\varphi - g \partial_\theta h \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \partial_\theta V_2 - \frac{k_{fr}}{h} v_\theta \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2}, \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_\theta \partial_\theta v_\varphi + v_\varphi \partial_\varphi v_\varphi &= \frac{\tan \theta}{R} v_\theta v_\varphi + f_{cor} v_\theta - g \partial_\varphi h \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \partial_\varphi V_2 - \frac{k_{fr}}{h} v_\varphi \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Tieto rovnice sú veľmi podobné dvojrozmerným rovniciam (1.5) a (1.29); už v rovniciach (1.75)–(1.78) prechodom do sférických súradníc pribudli členy s $\tan \theta$ a radiálnym integrovaním sa objavil člen zodpovedajúci treniu na dne.

2. Numerické spracovanie

Rovnice (1.85)–(1.87) popisujú časový vývoj výšky hladiny h a tangenciálnych zložiek rýchlosti v_θ, v_φ (ďalej ich budeme označovať v, u). Tieto rovnice reformulujeme pomocou konečných rozdielov na sieti $N + 1 \times M$ bodov na povrchu sférického telesa, čo nám pre vhodné počiatkové podmienky umožní simulovať tok v priblížení plytkej vody.

V tejto kapitole popíšeme diskretizovaný tvar rovníc (1.85)–(1.87) a integračnú metódu. Ďalej vyvinieme vlastný program, ktorý otestujeme pre rotujúce sférické teleso s parametrami Zeme a globálnym oceánom, jednoduchý potenciál V_2 zodpovedajúci obehu Mesiaca okolo rovníku a dva druhy počiatkových podmienok:

- gaussovská priehlbina s maximálnou hĺbkou 100 m,
- rovná hladina (rovnovážny stav pre $V_2 = 0$).

2.1 Veličiny na sieti

Na modelovanie použijeme Arakawovu C-sieť (Collins a kol., 2013). Uhlová vzdialenosť susedných bodov je v každom smere konštantná, uzlový bod (i, j) sa nachádza na súradniciach

$$\theta_{i,j} = i \frac{180^\circ}{N} - 90^\circ = i\Delta\theta - 90^\circ, \quad (2.1)$$

$$\varphi_{i,j} = j \frac{360^\circ}{M} = j\Delta\varphi. \quad (2.2)$$

Uzlové body indexujeme od nuly, teda $0 \leq i \leq N, 0 \leq j < M$. Rotačná symetria okolo osi z nám dáva okrajovú podmienku

$$(i, j) \equiv (i, j + M). \quad (2.3)$$

V uzlovom bode (i, j) a čase t udávame výšku hladiny $h_{i,j}^t$. Rýchlosť u udávame v strede medzi uzlovými bodmi (i, j) a $(i, j + 1)$ – jej hodnotu budeme označovať $u_{i,j+1/2}^t$ – a rýchlosť v v strede medzi uzlovými bodmi (i, j) a $(i + 1, j)$; jej hodnotu budeme označovať $v_{i+1/2,j}^t$.

Keďže derivácie ∂_φ okolo pólov ($\theta = \pm 90^\circ$) divergujú, predpíšeme v oblastiach $|\theta| > 85^\circ$ kontinenty – miesta s $u = v = 0$ a pevnou výškou hladiny $h = H$.

Rovnica (1.85) popisuje časový vývoj h , rovnice (1.86) a (1.87) časový vývoj u a v v tvare

$$\frac{\partial h}{\partial t} = F_h(t), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_v(t), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_u(t), \quad (2.6)$$

kde pravé strany rovníc (2.4)–(2.6) závisia okrem t, θ, φ len na h, u, v a ich prvých deriváciách podľa θ, φ . Tieto funkcie potrebujeme vyjadriť pomocou konečných rozdielov.

Keď rozpíšeme derivácie súčinov v rovnici (1.85), dostaneme

$$F_h = \frac{\tan \theta}{R} h v - u \partial_\varphi h - v \partial_\theta h - (\partial_\varphi u + \partial_\theta v) h. \quad (2.7)$$

Túto funkciu vyhodnocujeme v uzlovom bode (i, j) , kde poznáme $h \equiv h_{i,j}^t$, uhly θ, φ a všetky veličiny s nimi spojené, teda aj Lamého koeficienty l_θ, l_φ . Potrebné priestorové derivácie u, v vypočítame pomocou ich susedných hodnôt:

$$\partial_\varphi u = l_\varphi \frac{u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2}}{\Delta\varphi}, \quad (2.8)$$

$$\partial_\theta v = l_\theta \frac{v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j}}{\Delta\theta}. \quad (2.9)$$

Z tých istých hodnôt interpolujeme u, v v uzlovom bode (i, j) :

$$u = \frac{u_{i,j+1/2} + u_{i,j-1/2}}{2}, \quad (2.10)$$

$$v = \frac{v_{i+1/2,j} + v_{i-1/2,j}}{2}. \quad (2.11)$$

Derivácie h vypočítame pomocou hodnôt h v susedných uzlových bodoch:

$$\partial_\varphi h = l_\varphi \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}, \quad (2.12)$$

$$\partial_\theta h = l_\theta \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta\theta}. \quad (2.13)$$

Dostávame rovnicu (2.7) v tvare

$$F_{h,i,j}^t = \frac{\tan \theta_{i,j}}{R} h_{i,j}^t \frac{v_{i,j}^t + v_{i-1,j}^t}{2} - \frac{u_{i,j}^t + u_{i,j-1}^t}{2} \frac{h_{i,j+1}^t - h_{i,j-1}^t}{2\Delta\varphi} - \frac{v_{i,j}^t + v_{i-1,j}^t}{2} \frac{h_{i+1,j}^t - h_{i-1,j}^t}{2\Delta\theta} - \left(\frac{u_{i,j}^t - u_{i,j-1}^t}{\Delta\varphi} + \frac{v_{i,j}^t - v_{i-1,j}^t}{\Delta\theta} \right) h_{i,j}^t. \quad (2.14)$$

V bodoch $(i + 1/2, j)$ vyhodnocujeme funkciu F_v , ktorá je daná rovnicou (1.86) ako

$$F_v = -\frac{\tan \theta}{R} u^2 - (v \partial_\theta v + u \partial_\varphi v) - 2\omega \sin \theta u - g \partial_\theta h - \frac{1}{\rho} \partial_\theta V_2 - \frac{k_{fr}}{h} v \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (2.15)$$

Hodnotu $v = v_{i+1/2,j}$ poznáme, $u_{i+1/2,j}$ interpolujeme ako priemer zo štyroch susedných hodnôt:

$$u_{i+1/2,j} = \frac{1}{4} (u_{i,j+1/2} + u_{i+1,j+1/2} + u_{i,j-1/2} + u_{i+1,j-1/2}). \quad (2.16)$$

Derivácie rýchlosti v interpolujeme tiež ako priemery zo susedných hodnôt:

$$\partial_\theta v = l_\theta \frac{v_{i+3/2,j} - v_{i-1/2,j}}{\Delta\theta}, \quad (2.17)$$

$$\partial_\varphi v = l_\varphi \frac{v_{i+1/2,j+1} - v_{i+1/2,j-1}}{\Delta\varphi}. \quad (2.18)$$

Z hodnôt h v susedných uzlových bodoch vypočítame h a $\partial_\theta h$:

$$\partial_\theta h = l_\theta \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta\theta}, \quad (2.19)$$

$$h = \frac{h_{i+1,j} + h_{i,j}}{2}. \quad (2.20)$$

Uhol θ vypočítame z rovnice (2.1). Výrazy z rovníc (2.16)–(2.20) potom použijeme v rovnici (2.15).

Rovnaký postup použijeme pre vyjadrenie F_u v bodoch $(i, j + 1/2)$, čo je podľa rovnice (1.87)

$$F_u = \frac{\tan \theta}{R} uv - (v\partial_\theta u + u\partial_\varphi u) + 2\omega \sin \theta v - g\partial_\varphi h - \frac{1}{\rho} \partial_\varphi V_2 - \frac{k_{fr}}{h} u \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (2.21)$$

Tu poznáme hodnotu $u = u_{i,j+1/2}$, uhol θ (opäť podľa (2.1)) a ako priemer zo štyroch susedných hodnôt interpolujeme $v_{i,j+1/2}$:

$$v_{i,j+1/2} = \frac{1}{4} (v_{i+1/2,j} + v_{i+1/2,j+1} + v_{i-1/2,j} + v_{i-1/2,j+1}). \quad (2.22)$$

Ďalej dopočítame

$$\partial_\theta u = l_\theta \frac{v_{i+3/2,j} - v_{i-1/2,j}}{\Delta\theta}, \quad (2.23)$$

$$\partial_\varphi u = l_\varphi \frac{v_{i+1/2,j+1} - v_{i+1/2,j-1}}{\Delta\varphi}. \quad (2.24)$$

Z hodnôt h v susedných uzlových bodoch vypočítame h a $\partial_\theta h$:

$$\partial_\varphi h = l_\theta \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta\theta}, \quad (2.25)$$

$$h = \frac{h_{i,j+1} + h_{i,j}}{2}. \quad (2.26)$$

2.2 Integračná metóda

Pri výpočte používame konštantný časový krok Δt . Najjednoduchšou metódou na výpočet h, u, v z rovníc (2.1)–(2.3) je explicitná Eulerova metóda, kde

$$\frac{h_{i,j}^{t+\Delta t} - h_{i,j}^t}{\Delta t} = F_{h,i,j}^t \quad (2.27)$$

a podobne pre u, v . Hodnoty h, u, v v každom kroku závisia len od hodnôt v predošlom kroku, metóda je ale presná len do prvého rádu v Δt a pri väčších časových krokoch simulácia začne rýchlo dávať nesprávne výsledky. Na výpočet $h^{t+\Delta t}, u^{t+\Delta t}, v^{t+\Delta t}$ preto používame prediktor-korektor prístup, kde prediktor je metóda leapfrog a korektor trapezoidálny (Shchepetkin a McWilliams, 2005).

V metóde leapfrog vypočítame odhad $h^{* t+\Delta t}$ pomocou hodnôt $h^{t-\Delta t}$ – hodnôt v predošlom časovom kroku – podľa vzťahu

$$\frac{h_{i,j}^{* t+\Delta t} - h_{i,j}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = F_{h,i,j}^t, \quad (2.28)$$

Tabuľka 2.1: Parametre sústavy Mesiac-Zem.

polomer	R	$6,38 \cdot 10^3$ km
normálna výška hladiny	H	3,5 km
koeficient trenia	k_{fr}	0,01
uhlová rýchlosť rotácie	ω	$7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
uhlová rýchlosť obehu Mesiaca	ω_m	$2,6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
tiažové zrýchlenie	g	$9,81 \text{ m s}^{-2}$
parameter potenciálu V_2	g_2	$4,11 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$

kde F_h^t využíva hodnoty h^t, u^t, v^t ; podobné vzťahy platia pre u a v . V tejto metóde môžu vzniknúť odchýlky medzi párnymi a nepárnymi krokmi, preto vypočítame konečné hodnoty $h^{t+\Delta t}, u^{t+\Delta t}, v^{t+\Delta t}$ pomocou trapezoidálnej korekcie:

$$\frac{h_{i,j}^{t+\Delta t} - h_{i,j}^t}{\Delta t} = \frac{F_{h,i,j}^{* t+\Delta t} + F_{h,i,j}^t}{2}, \quad (2.29)$$

kde $F_h^{* t+\Delta t}$ využíva hodnoty $h^{* t+\Delta t}, u^{* t+\Delta t}, v^{* t+\Delta t}$. Táto metóda je už stabilná a presná do druhého rádu v Δt .

Na základe uvedených rovníc sme implementovali simuláciu v C/C++. Rozmery siete sú $N = 180$ a $M = 360$, rozlíšenie je teda $1^\circ \times 1^\circ$. Časový krok volíme pri každej simulácii osobitne – tak veľký, aby simulácia trvala čo najkratšie, ale zároveň tak malý, aby bola dostatočne presná.

2.3 Tvar potenciálu

Uvažujeme mesiac, ktorý sa pohybuje okolo rovníka v smere rotácie uhlovou rýchlosťou ω_m . Jeho uhlová rýchlosť v rotujúcej sústave je $\omega_m - \omega$ a jeho potenciál je (Melchior, 1983)

$$V_2 = -g_2 \cos^2 \theta \cos^2 (\varphi + (\omega_m - \omega)t), \quad (2.30)$$

popísaný konštantou g_2 . Pre satelit hmotnosti M vo vzdialenosti $d \gg R$ od stredu sústavy je táto konštanta rovná

$$\frac{3}{4} \rho \frac{GMR^2}{d^3}. \quad (2.31)$$

Tangenciálne zložky ∇V_2 sú

$$\partial_\theta V_2 = \frac{g_2}{R} \sin 2\theta \cos^2 (\varphi + (\omega_m - \omega)t), \quad (2.32)$$

$$\partial_\varphi V_2 = \frac{g_2}{R} \cos \theta \sin (2\varphi + 2(\omega_m - \omega)t). \quad (2.33)$$

V skutočnosti gravitačný vplyv mesiaca deformuje aj samotnú sféru a tým mení jej gravitačné pole. Tento efekt sme tu neuvažovali. Podrobnejšie je tento potenciál popísaný v (Eiņšpigel, 2012, kap. 3).

Tabuľka 2.2: Parametre testu – gaussovskej jamy.

hlbka jamy	h_1	100 m
θ -šírka jamy	θ_w	7°
φ -šírka jamy	φ_w	8°
zemepisná dĺžka stredu jamy	φ_c	240°
časový krok	Δt	20 s

2.4 Test: gaussovská jama

Na kontrolu, či je program správny, kvalitatívne porovnáme jeho výstup s testom podobného programu v práci (Einšpigel a Martinec, 2015, kap. 5.1).

Predpisujeme nulovú počiatočnú rýchlosť u aj v a gaussovskú výchylku hladiny v tvare

$$h = H - h_1 e^{-((\theta/\theta_w)^2 - ((\varphi - \varphi_c)/\varphi_w)^2)}. \quad (2.34)$$

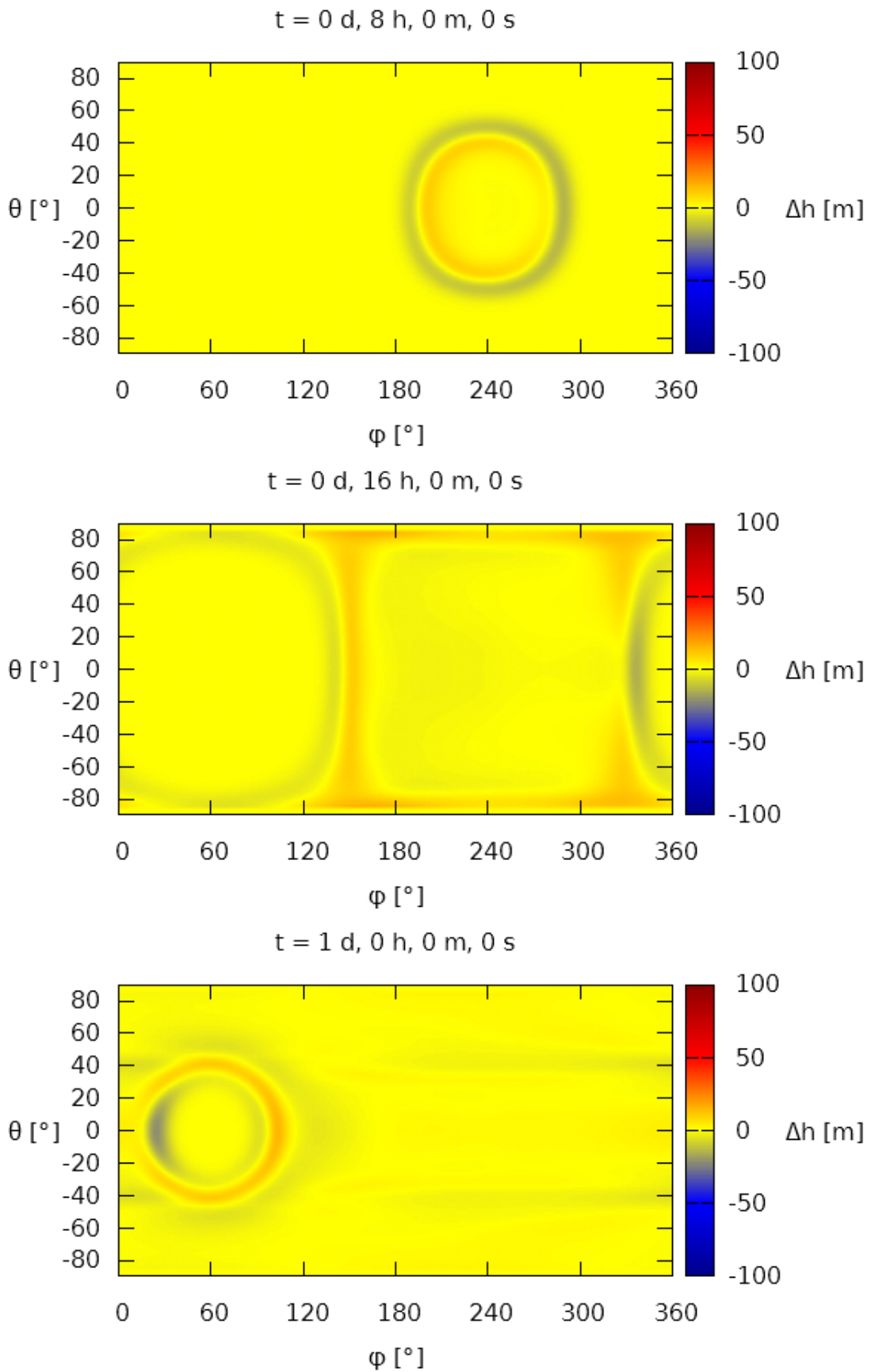
Stred jamy je na zemepisnej dĺžke φ_c na rovníku. Parametre θ_w resp. φ_w určujú uhlovú vzdialenosť od stredu jamy v smere θ resp. φ , v ktorej jej hĺbka klesne na h_1/e . Všetky parametre sú zhrnuté v tabuľkách 2.1 a 2.2.

Na obrázku 2.1 je farebne vykreslená výchylka hladiny $\Delta h = h - H$ v danom čase t . Môžeme vidieť vlnu, ktorá sa z bodu $\theta = 0$, $\varphi = \varphi_c$ šíri a odráža od kontinentov na póloch. Výstup programu sa dobre zhoduje s očakávaným (Einšpigel a Martinec, 2015, obr. 4). Rozdiely vznikajú až v čase okolo 20 h, kedy by mala vlna naraziť na ostrov, ktorý sme tu nezahrnuli. Rovnice a program by teda mali byť správne. Samozrejme, potenciál V_2 je slabý a pozorovateľný vplyv má až v ďalšom teste.

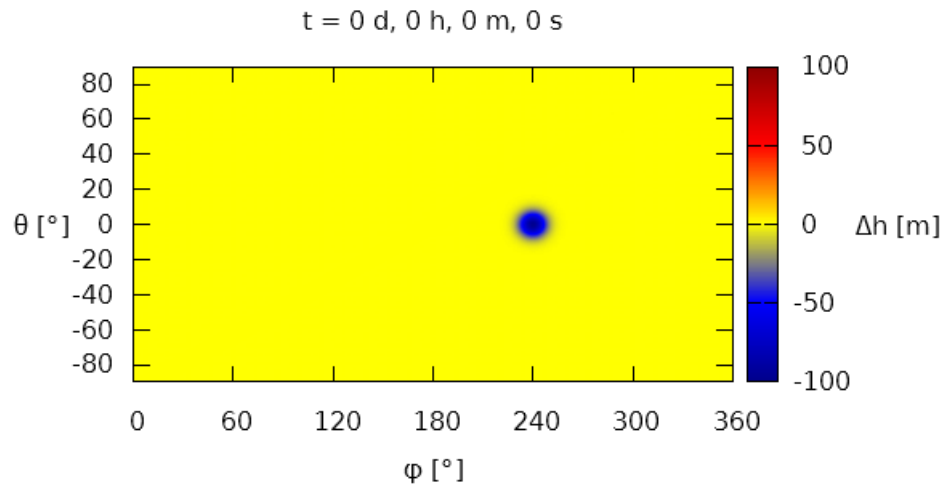
2.5 Test: príliv

Tu predpisujeme nulovú počiatočnú rýchlosť a konštantnú počiatočnú výšku hladiny H ; ostatné parametre sú rovnaké ako v tabuľke 2.1 a časový krok je opäť 20 s. Výstup – výchylka hladiny Δh v čase t – je na obr. 2.3.

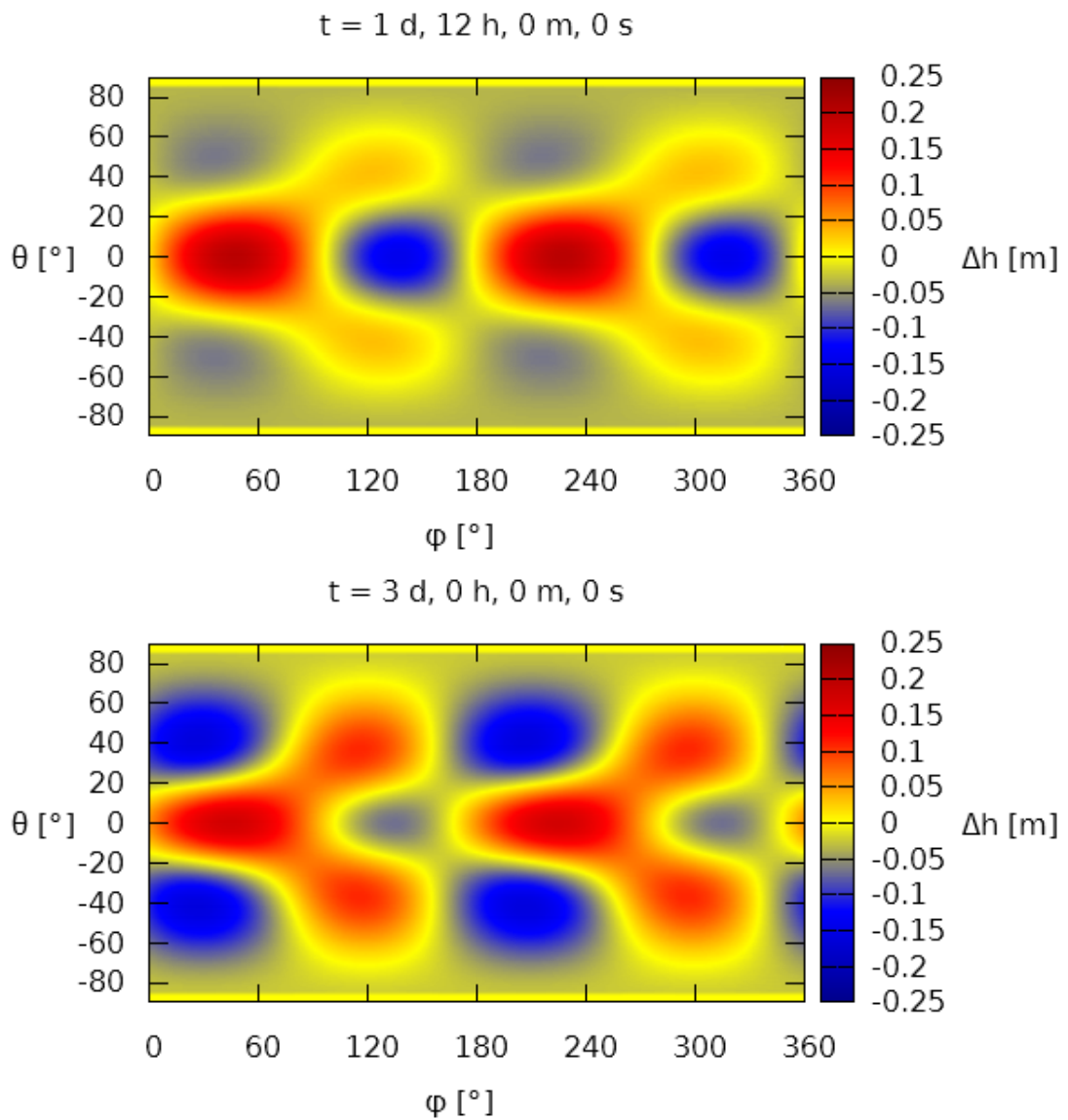
Nejde o dobrú simuláciu skutočného prílivu na Zemi, lebo chýba súš a tvar dna oceána, ktorý sa výrazne mení. To koniec koncov vidno už z toho, že maximálna výchylka Δh je o rád menšia ako v skutočnosti. Vidíme ale, že program úspešne modeluje prúdenie poháňané malým potenciálom V_2 bez pozorovateľných numerických chýb.



Obr. 2.1: Test: gaussovská jama, výchylka hladiny v rôznych časoch.



Obr. 2.2: Test: gaussovská jama, počiatočná výchylka hladiny.



Obr. 2.3: Test: príliv na Zemi, výchylka hladiny v rôznych časoch.

3. Aplikácia na ľadové mesiace

3.1 Tvar potenciálu

Uvažujeme dva príspevky k potenciálu V_2 : potenciál V_e (eccentricity tides) spôsobený rotáciou a excentricitou dráhy a V_o (obliquity tides) spôsobený sklonom osi rotácie (Chen a kol., 2014, kap. 2.1). Gravitačné vplyvy ostatných telies sú malé, preto ich zanedbávame.

Pre potenciál V_e a zložky jeho sférického gradientu platí

$$V_e = -\frac{3}{2}\rho\omega^2 R^2 e \cos^2 \theta (3 \cos^2 \varphi \cos \omega t + 2 \sin 2\varphi \sin \omega t) , \quad (3.1)$$

$$\partial_\theta V_e = \frac{3}{2}\rho\omega^2 R e \sin 2\theta (3 \cos^2 \varphi \cos \omega t + 2 \sin 2\varphi \sin \omega t) , \quad (3.2)$$

$$\partial_\varphi V_e = -\frac{3}{2}\rho\omega^2 R e \cos \theta (-3 \sin 2\varphi \cos \omega t + 4 \cos 2\varphi \sin \omega t) ; \quad (3.3)$$

pre potenciál V_o zasa

$$V_o = -\frac{3}{2}\rho\omega^2 R^2 \theta_0 \sin 2\theta \cos \varphi \cos \omega t , \quad (3.4)$$

$$\partial_\theta V_o = -3\rho\omega^2 R \theta_0 \cos 2\theta \cos \varphi \cos \omega t , \quad (3.5)$$

$$\partial_\varphi V_o = 3\rho\omega^2 R \theta_0 \sin \theta \sin \varphi \cos \omega t . \quad (3.6)$$

Tiež sme nezahrnuli deformáciu samotnej sféry a tým vyvolanú zmenu potenciálu. Pre výsledný potenciál V_2 platí

$$V_2 = V_o + V_e . \quad (3.7)$$

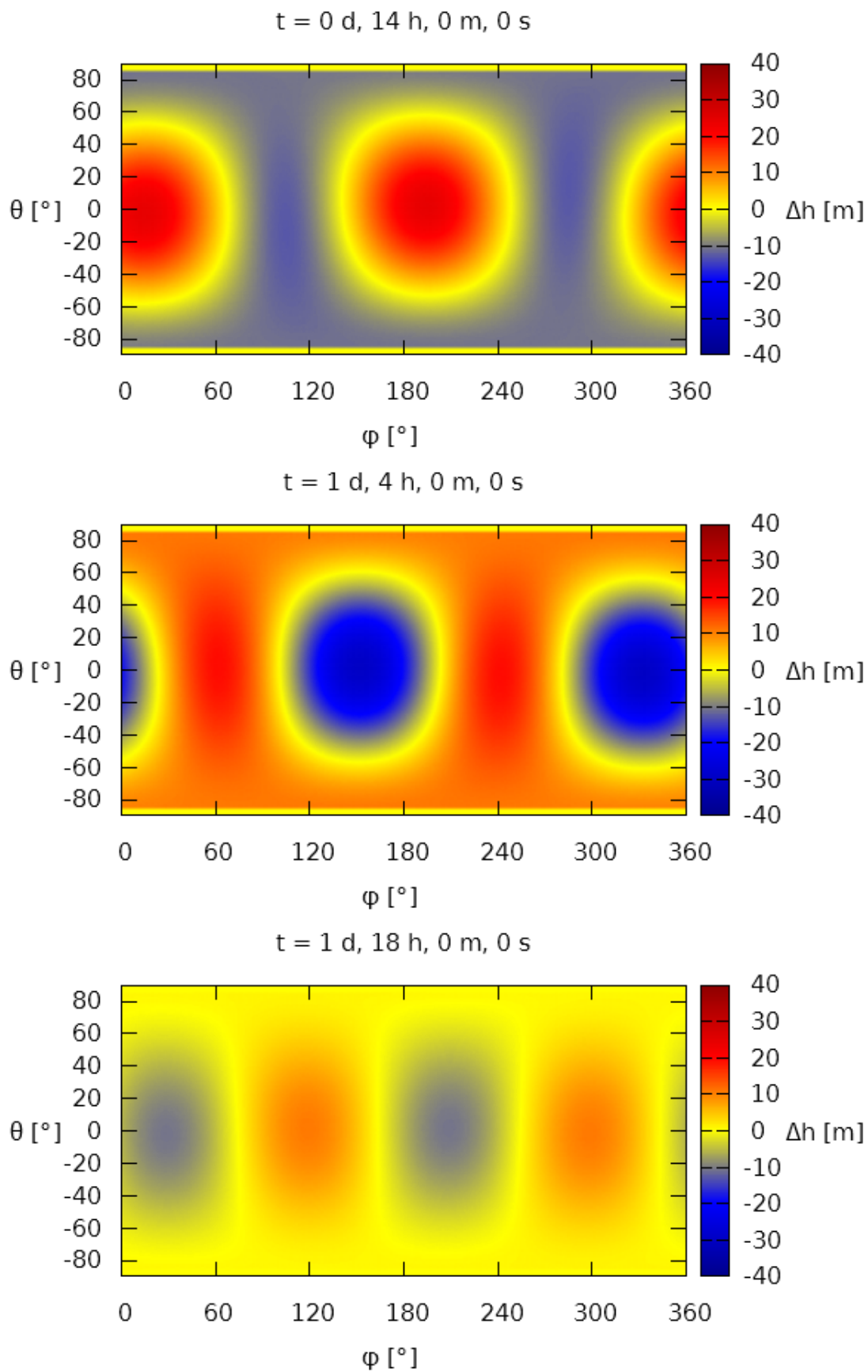
Potenciál V_2 z predošlej kapitoly sme tu neuvažovali. Pre sústavu Zem-Mesiak vychádza konštanta $g_2/(R\rho) \doteq 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$, čo je rádovo oveľa menej ako $\omega^2 R$.

3.2 Ľadové mesiace

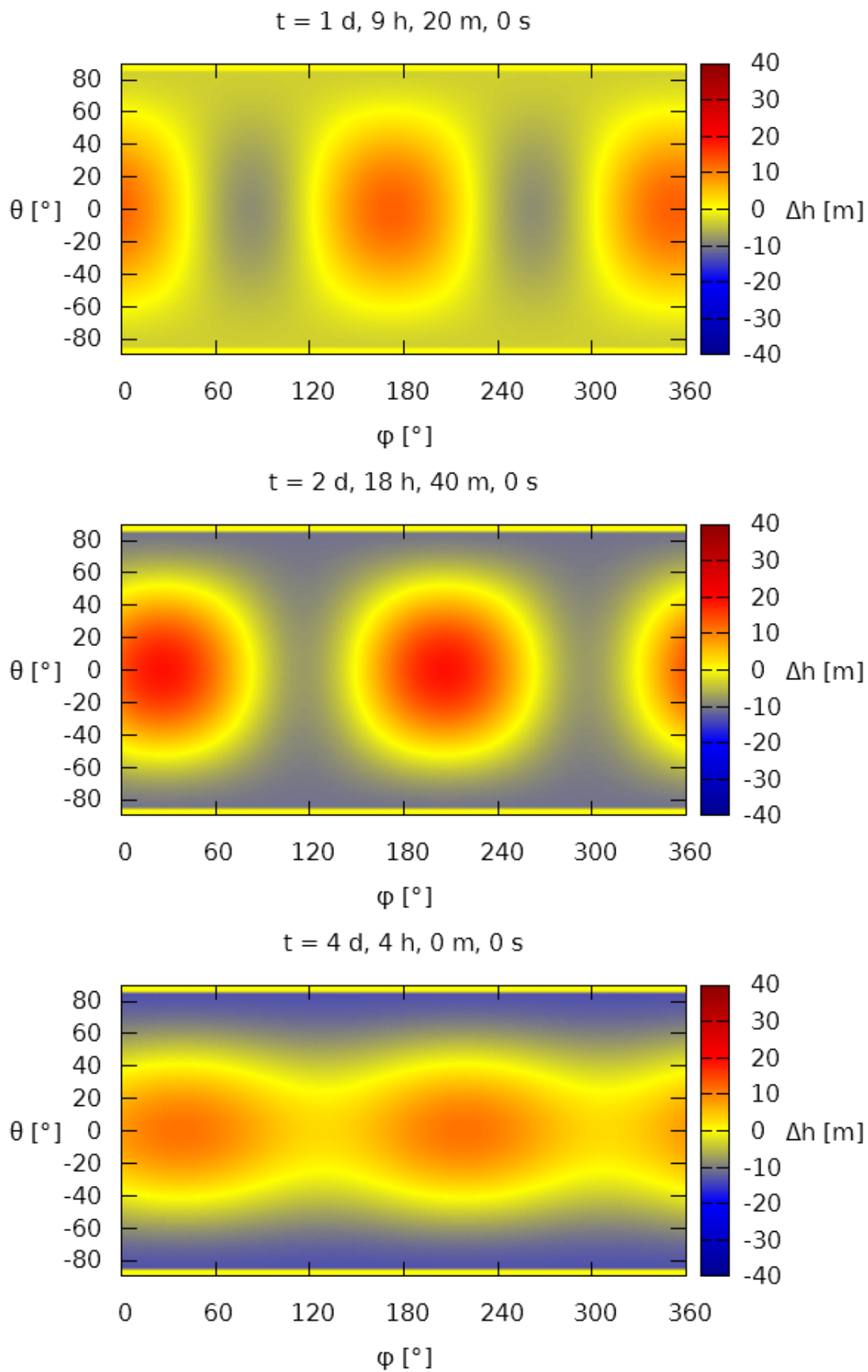
Dostávame sa k hlavnému výstupu práce: simulácii prúdenia na ľadových mesiacoch. Ako dva príklady sme si vybrali Europu a Enceladus.

V súčasnosti je dosť veľký problém popisovať oceán pokrytý ľadom. Dôvodom je to, že ten istý potenciál, ktorý vyvoláva prúdenie oceánu, spôsobuje aj deformáciu ľadovej pokrývky; zároveň ale oceán a ľad pôsobia na seba navzájom, museli by sme teda zároveň popisovať dve sústavy so spoločnou hranicou a ich vplyv – v prípade oceána napr. pridaním nenulového tlaku na jeho hladinu.

Prúdenie v podpovrchových oceánoch tu preto modelujeme len ako prúdenie voľného oceána vyvolané potenciálom uvedenom v predošlej časti. Sklon osi je u Europy o rád menší ako excentricita a pri Encelade je až o 3 rády menší, preto môžeme čakať, že prúdenie poháňa u oboch mesiacov hlavne potenciál vyvolaný excentricitou. Chen a kol. (2014, tab. 3) ale uvádza na Europe o 2 rády menší disipačný efekt spôsobený excentricitou ako sklonom osi, pri modelovaní teda použijeme úplný potenciál podľa (3.7).



Obr. 3.1: Europa – výchylka hladiny v rôznych časoch.



Obr. 3.2: Enceladus – výchylka hladiny v rôznych časoch.

Tabuľka 3.1: Parametre modelu – prúdenie na Europe.

polomer	R	$1,57 \cdot 10^3$ km
normálna výška hladiny	H	30,0 km
koeficient trenia	k_{fr}	0,01
uhlová rýchlosť rotácie	ω	$2,05 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
tiažové zrýchlenie	g	$1,31 \text{ m s}^{-2}$
excentricita	e	0,0094
výchylka osi otáčania	θ_0	$-0,053^\circ$
časový krok	Δt	4,0 s

Tabuľka 3.2: Parametre modelu – prúdenie na Encelade.

polomer	R	$2,52 \cdot 10^2$ km
normálna výška hladiny	H	30,0 km
koeficient trenia	k_{fr}	0,01
uhlová rýchlosť rotácie	ω	$5,31 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
tiažové zrýchlenie	g	$0,11 \text{ m s}^{-2}$
excentricita	e	0,0044
výchylka osi otáčania	θ_0	$-0,00014^\circ$
časový krok	Δt	4,0 s

Všetky podstatné parametre sú uvedené v tabuľkách 3.1 a 3.2. Na obr. 3.1 je výsledok tejto simulácie (farebne výchylka hladiny Δh) pre Europu a na obr. 3.2 pre Enceladus. Tiež sme vytvorili videá k obom simuláciám (viď prílohy).

Parametre mesiacov sme čerpali z Chen a kol. (2014, tab. 2). Používame rovnaký koeficient trenia $k_{fr} = 0,01$, ale menší časový krok, lebo potenciál V_2 má väčšiu amplitúdu a pri kroku $\Delta t = 20$ s rýchlo spôsobil veľké numerické chyby.

3.3 Odhad disipácie

Jediným disipačným efektom je trenie na dne. Keďže trecia sila pôsobí proti smeru pohybu, je plošný disipačný výkon pôsobiaci na stĺpec vody výšky h

$$p = \frac{dP}{dS} = h \left(\rho \frac{k_{fr}}{h} |v| \vec{v} \right) \cdot \vec{v} = \rho k_{fr} |v|^3. \quad (3.8)$$

Sférický element plochy je

$$dS = \cos \theta d\varphi d\theta, \quad (3.9)$$

celkový disipačný výkon získame integrovaním resp. diskrétnym súčtom

$$P = \sum p_{i,j} \cos \theta_{i,j} \Delta\varphi \Delta\theta = \sum \rho k_{fr} (v_{i,j}^2 + u_{i,j}^2)^{3/2} \cos \theta_{i,j} \Delta\varphi \Delta\theta \quad (3.10)$$

cez všetky uzlové body siete. Ide nám len o približný odhad, nemusíme teda interpolovať rýchlosti $v_{i,j}$, $u_{i,j}$ a stačí len použiť ľubovoľné hodnoty v susedných bodoch. Hustota vody je $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.

Disipačný výkon P s časom osciluje. Pre Europu je jeho stredná hodnota približne $1,5 \cdot 10^{10} \text{ W}$ a v maxime dosahuje $3 \cdot 10^{10} \text{ W}$. Pre Enceladus je zasa maximálna hodnota približne $2 \cdot 10^7 \text{ W}$ a stredná hodnota $7 \cdot 10^6 \text{ W}$.

Záver

Výstupom tejto práce je vlastný program umožňujúci modelovanie prúdenia podpovrchového oceánu na sférickom rotujúcom telese s rovným dnom. Program je použiteľný pre ľubovoľný tvar slapového potenciálu a počiatočných podmienok; je ho tiež možné upraviť pre modely, ktoré sa zaoberajú iným zdrojom disipačných efektov.

Na modelovanie sme použili rovnice plytkej vody, ktoré sme v kapitole 1 odvodili v kartézskych súradniciach. Samotný program využíva metódu konečných rozdielov na sieti; na integrovanie rovníc popisujúcich časový vývoj výšky hladiny a vodorovných zložiek rýchlosti kvapaliny sme využili metódu leapfrog s trapezoidálnou korekciou, ktorá je popísaná v kapitole 2.

Program sme otestovali na dvoch príkladoch pre oceán na Zemi. V prvom je počiatočným tvarom hladiny úzka gaussovská jama, v druhom má na začiatku hladina konštantnú výšku a pohyb vody poháňa gravitačný potenciál Mesiaca rotujúceho okolo rovníka.

Ďalej sme program využili na simuláciu prúdenia oceánu na ľadových mesiacoch – Europe a Encelade, vyvolané hlavne excentricitou obežnej dráhy mesiacov. Na základe tejto simulácie sme odhadli disipáciu energie na oboch mesiacoch spôsobenú trením o dno.

Na rozdiel od prúdenia oceánu na Zemi nám chýba veľa informácií o ľadových mesiacoch. Nepoznáme profil dna oceánov, veľmi presne ani ich hĺbku. V rovniciach plytkej vody nie je možné priamo modelovať viskozitu prevzatím tenzoru napätia z 3D rovníc; dôležitejší efekt by ale malo byť trenie na dne, preto sme viskozitu vynechali.

Ďalším zlepšením modelu môže byť práve započítanie viskóznej disipácie vo vhodnom tvare alebo trenia o ľadovú pokrývku, ale hlavne vzájomného vplyvu ľadovej pokrývky a oceánu.

Zoznam použitej literatúry

- CHEN, N. M. A., NIMMO, F. a GLATZMAIER, G. A. (2014). Tidal heating in icy satellite oceans. *Icarus*, **229**, 11–30.
- COLLINS, S. N., JAMES, R. S., RAY, P., CHEN, K., LASSMAN, A. a BROWNLEE, J. (2013). Grids in Numerical Weather and Climate Models. In ZHANG, Y. a RAY, P., editors, *Climate change and regional/local responses*, pages 111–128. InTech. ISBN 978-953-51-1132-0.
- EINŠPIGEL, D. (2012). Barotropní oceánický slapový model. Master's thesis, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha.
- EINŠPIGEL, D. a MARTINEC, Z. (2015). A new derivation of the shallow water equations in geographical coordinates and their application to the global barotropic ocean model (the DEBOT model). *Ocean Modelling*, **92**, 85–100.
- GENT, P. (1993). The energetically consistent shallow water equations. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1323–1325.
- MELCHIOR, P. J. (1983). *The Tides of the Planet Earth*. 2nd Pergamon Press, Oxford. ISBN 0080262481.
- PLUMB, A. Dynamics of the Atmosphere. Lecture notes, http://www-eaps.mit.edu/~rap/courses/12333_notes/A2%20SWeqs.pdf.
- SHCHEPETKIN, A. F. a MCWILLIAMS, J. C. (2005). The regional oceanic modeling system (ROMS): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model. *Ocean Modelling*, **9**, 347–404.
- TYLER, R. (2014). Comparative estimates of the heat generated by ocean tides on icy satellites in the outer Solar System. *Icarus*, **243**, 358–385.
- WAJSOWICZ, R. C. (1993). A consistent formulation of the anisotropic stress tensor for use in models of the large scale ocean circulation. *J. Comput. Phys.*, **105**, 333–338.

Zoznam obrázkov

2.1	Test: gaussovská jama, výchylka hladiny v rôznych časoch.	18
2.2	Test: gaussovská jama, počiatočná výchylka hladiny.	19
2.3	Test: príliv na Zemi, výchylka hladiny v rôznych časoch.	19
3.1	Europa – výchylka hladiny v rôznych časoch.	21
3.2	Enceladus – výchylka hladiny v rôznych časoch.	22

Zoznam tabuliek

2.1	Parametre sústavy Mesiac-Zem.	16
2.2	Parametre testu – gaussovskej jamy.	17
3.1	Parametre modelu – prúdenie na Europe.	23
3.2	Parametre modelu – prúdenie na Encelade.	23

Prílohy

Na priloženom CD sa nachádza program v jazyku C++ použitý na modelovanie prúdenia globálneho oceána, a to v nasledujúcich verziách:

- `shallowwatflow.cpp` – obsahuje len funkcie vzťahujúce sa k samotnej simulácii, neobsahuje konkrétne parametre ani počiatočné podmienky,
- `swf-test-gauss.cpp` – simulácia testu 1 (gaussovska jama),
- `swf-test-earthmoon.cpp` – simulácia testu 2 (prílív),
- `swf-europa.cpp` – simulácia prúdenia na Europe,
- `swf-enceladus.cpp` – simulácia prúdenia na Enceladu.

Súbor `shallowwatflow.cpp` obsahuje definície globálnych premenných a tieto funkcie:

- `init()` – použitá na inicializáciu parametrov a počiatočných podmienok,
- `evol()` – vykoná krok o Δt ,
- `pred_h()`, `pred_u()`, `pred_v()` – prediktor, výpočet h^* , u^* resp. v^* ,
- `corr_h()`, `corr_u()`, `corr_v()` – korektor, výpočet h , u resp. v ,
- `dy_V(T,x,y)`, `dx_V(T,x,y)` – výpočet $\partial_\theta V(x,y)/\rho$ resp. $\partial_\varphi V(x,y)/\rho$ v ľubovoľnom čase T ,
- `diss()` – počíta disipačný výkon P (3.10) v danom čase.

Samotná simulácia sa skladá z jedného volania `init()` a opakovaného volania `evol()`. V tomto súbore sa nachádzajú aj podrobnejšie komentáre k používaniu programu.

V ostatných súboroch sú vo funkcii `init()` zadané všetky parametre aj počiatočné podmienky a vo funkciách `dx_V`, `dy_V` sú dané vzorce pre výpočet derivácií potenciálu. Navyše sa tam nachádza funkcia `print(oup)`, ktorá vypíše do súboru `oup` hodnoty φ, θ, h, v, u , a hlavná funkcia `main()`, ktorá spúšťa simuláciu, vypisuje tento výstup s krokom 200 s do číslovaných súborov a hodnoty t, P na štandardný výstup.

Ďalej sa na CD nachádzajú videá pre oba testy a obe simulácie prúdenia na ľadových mesiacoch. Výstup programu `swf-X.cpp` je vždy vo videu `X.avi`.