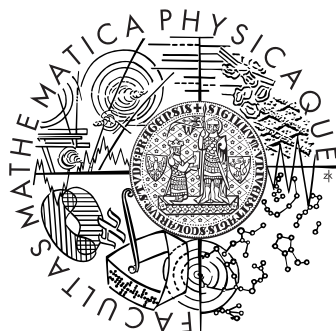


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Mgr. Bc. Jakub Michálek

## Numerické modelování kmitání hlasivek

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2016



## **Poděkování**

Děkuji za inspiraci, trpělivost a podporu vedoucímu své diplomové práce RNDr. Jakubu Velímskému, Ph. D., a školiteli Ing. Jaromíru Horáčkovi, DrSc., a kolegům z pracovní skupiny, která se u něho příležitostně scházela k diskusím o simulaci hlasivek. Dále děkuji RNDr. Petře Maierové, Ph.D., a zaměstnancům vývojářského střediska CSC v Espoo ve Finsku za pomoc s porozuměním počítačovému programu Elmer. Dále děkuji kolektivu katedry geofyziky za zajištění serverů a přátelského zázemí. Svému otci, doc. MUDr. Pavlu Michálkovi, Ph.D., D.E.S.A., MSc., děkuji za poskytnuté fotografie z vokálního traktu a rady v oblasti lékařství a anatomie. Dále děkuji své milé, rodině a spolupracovníkům, že mi umožnili věnovat se studiu a vydatně mě při něm podporovali.



Toto dílo lze užít za podmínek následující licence:



Creative Commons – Uveďte autora – Zachovejte licenci 4.0

<<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>>

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 11. května 2016

Mgr. Bc. Jakub Michálek



# Numerické modelování kmitání hlasivek

Jakub Michálek

11. května 2016

# Obsah

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod</b>                                     | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Kontext problému</b>                         | <b>5</b>  |
| 2.1      | Anatomie a fyziologie . . . . .                 | 6         |
| 2.2      | Modely v dosavadním zkoumání . . . . .          | 10        |
| <b>3</b> | <b>Fyzikální model</b>                          | <b>13</b> |
| 3.1      | Označení veličin . . . . .                      | 13        |
| 3.2      | ALE formulace . . . . .                         | 13        |
| 3.3      | Transformace veličin . . . . .                  | 18        |
| 3.4      | Zákony zachování . . . . .                      | 21        |
| 3.5      | Proudící tekutina . . . . .                     | 22        |
| 3.6      | Elastická struktura . . . . .                   | 27        |
| 3.7      | FSI interakce . . . . .                         | 30        |
| 3.8      | Shrnutí fyzikálních vztahů . . . . .            | 31        |
| <b>4</b> | <b>Matematická formulace</b>                    | <b>33</b> |
| 4.1      | Schéma úlohy . . . . .                          | 33        |
| 4.2      | Navierovy-Stokesovy rovnice . . . . .           | 34        |
| 4.3      | Deformace struktury . . . . .                   | 40        |
| 4.4      | Deformace výpočetní oblasti . . . . .           | 42        |
| <b>5</b> | <b>Počítačová simulace</b>                      | <b>45</b> |
| 5.1      | Geometrie a fyzikální parametry . . . . .       | 45        |
| 5.2      | Použité programy . . . . .                      | 47        |
| 5.3      | Proudění a jeho testování . . . . .             | 49        |
| 5.4      | Struktura a její modální analýza . . . . .      | 53        |
| 5.5      | Interakce a testy konzistence . . . . .         | 56        |
| 5.6      | Rozbor simulace s výchozím nastavením . . . . . | 63        |
| <b>6</b> | <b>Parametrická studie</b>                      | <b>69</b> |
| 6.1      | Závislost na vstupní rychlosti . . . . .        | 69        |
| 6.2      | Závislost na šířce štěrbin . . . . .            | 73        |
| 6.3      | Závislost na pružnosti hlasivky . . . . .       | 73        |
| 6.4      | Diskuse výsledků . . . . .                      | 78        |
| <b>7</b> | <b>Závěr</b>                                    | <b>81</b> |



|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| Seznam použitých veličin a symbolů | 82 |
| Seznam obrázků                     | 85 |
| Seznam tabulek                     | 86 |
| Seznam použité literatury          | 86 |

# 1 Úvod

---

V bakalářské práci [48] jsem zpracoval model hlasivky jako elastické struktury. Na počítači jsem modeloval, jak se elastická struktura hlasivky chová při různém zatížení vnější silou. Předpokládal jsem velké výchylky materiálů od výchozích poloh, neboť výchylky jsou srovnatelné s rozměrem hlasivky.

V této diplomové práci navazuji na svou bakalářskou práci a rozšiřuji model hlasivky jako elastické struktury o interakci se vzduchem modelovaným Navierovými-Stokesovými rovnicemi (NS rovnice). Samotný mechanismus fonace a samobuzené oscilace není ještě zcela důkladně objasněn [18, s. 322] [66, s. 601-602]. Základním cílem této práce je formulovat předpoklady a rovnice pro komplexní odpověď na otázku, jak hlasivky kmitají v režimu před dosažením kontaktu, simulovat takové kmitání na počítačovém modelu a zjistit závislost frekvencí kmitání na parametrech modelu.

Kromě toho, že kmitání hlasivek je samo o sobě zajímavým problémem FSI, pochopení principů tvorby primárního tónu z biofyzikálního hlediska je podstatné např. kvůli tomu, že umožňuje projektovat a vyrábět lepší umělé hlasové náhrady, pomáhá chirurgům zvolit takové operační metody, které usnadňují návrat ke zdravému hlasu [85], a lze ho zohlednit v dalších vědeckých a uměleckých disciplínách.

Práce je rozčleněna do následujících kapitol:

1. v kapitole **úvod** popisují motivaci práce a její členění do kapitol,
2. v kapitole **kontext problému** rekapituluji základní poznatky o anatomii a fyziologii hlasivek a v návaznosti na to rekapituluji různé přístupy ke zkoumání hlasivek pomocí numerických metod, až dospívám k přesnému vymezení vytyčené úlohy,
3. v kapitole **fyzikální model** připomínám teoretické fyzikální poznatky z mechaniky kontinua, formuluji fyzikální předpoklady FSI modelu a aplikuji teoretické poznatky na řešenou úlohu; výsledkem této kapitoly jsou rovnice popisující FSI v obvyklé formulaci parciálních diferenciálních rovnic v ALE metodě,
4. v kapitole **matematický model** dávám dohromady vše, co je z matematického hlediska potřebné pro přímé numerické řešení vytyčené úlohy, zejména převádím fyzikální rovnice do slabé formulace,
5. v kapitole **počítačová simulace** popisují schéma počítačových programů simulace, jednotlivé použité programy a jejich moduly, které testuji, definuji výchozí parametry simulace, jakož i sledované veličiny, a ve funkčním programu simuluji vybraný úsek na počátku fonace a diskutuji výsledky,

6. v kapitole **parametrická studie** definuji podstatné proměnné parametry 2D simulace, provádím parametrickou studii časových závislostí a spekter na vstupní rychlosti, počáteční vzdálenosti hlasivek a pružnosti hlasivek a diskutuji zjištěné výsledky,

7. v kapitole **závěr** shrnuji získané poznatky.

Vzhledem k použitému modulárnímu přístupu jsou kapitoly 3 až 5 členěny následovně: začínám úvodem a rekapitulací poznatků společných oběma částem problému (struktura a proudění), pak pojednávám zvlášť o proudění a zvlášť o struktuře hlasivky a teprve následovně zkoumám jejich interakci a případně na ni navazující témata.

Na konci práce je uveden seznam použitých veličin a symbolů (viz str. 82), seznam obrázků, seznam tabulek a seznam použité literatury.

## 2 Kontext problému

---

Simulace kmitání hlasivek je problémem z oblasti biofyziky a numerického modelování mechaniky kontinua, který spadá do oblasti zkoumání nazývané interakce tekutiny a struktury (**FSI** = *fluid-structure interaction*). FSI patří do třídy multifyzikálních spřažených problémů (*coupling*). [42, s. 4] V konkrétním provedení navíc tato simulace vyžaduje relativně rozsáhlé teoretické zázemí z celé řady oborů (mechanika kontinua, biofyzika, lékařství, tvorba hlasu, numerika). Předkládaná práce je tedy interdisciplinární.

Funkcí hrtanu při tvorbě hlasu je přeměnit práci vykonanou svaly na stlačování vzduchu v plicích na akustickou energii primárního tónu. Tento mechanismus se nazývá **fonace**. Mechanismus tvorby a zvuk **primárního tónu** lze v jednoduché představě přirovnat k citoslovcí „brrrm“, když dítě při hře na autíčko kmitá rty anebo k dlouhému českému „rrrr“. Primární tón se stane lidským hlasem až po průchodu rezonančními prostory hlavy.

Vedle klasického primárního tónu lze uvažovat také z pěveckého hlediska méně plnou produkci, při které se hlasivky nedotýkají, přestože kmitají (někdy bývá tento jev spojován s vysokým dyšným hlasem [37] nazývaným *fistule*). Modelování plného primárního tónu je složitější právě kvůli tomu, že narozdíl od *fistule* vyžaduje také model kontaktu obou hlasivek, při kterém dochází k přerušení transglotálního proudu (viz dále na straně 12). Kvůli jednoduchosti se v této práci soustředím na modelování **kmitání hlasivek bez kontaktu**, na které může po vyřešení problému kontaktu navázat modelování plného primárního tónu.

Tato diplomová práce nemá ambici zkoumat modifikaci již vytvořeného primárního tónu v rezonančních prostorech horní části vokálního traktu [75, s. 93 a násl.], přestože tato oblast je rovněž důležitá pro praktické modelování lidského hlasu (neboť vysvětluje vznik formantů a barvu hlasu). Mluví se tak někdy o teorii zdroje (primárního tónu) a filtru (rezonančních dutin) [67]. Z matematického hlediska jde typicky o odlišnou úlohu, neboť zatímco vznik primárního tónu se zkoumá FSI modelem, šíření hlasu v dutinách využívá lineární teorii pro perturbace stlačitelných NS rovnic. [18, s. 325] Poslední práce však doplňují, že tyto dvě oblasti nejsou tak vzájemně oddělené, jak by se mohlo zdát, a že za určitých podmínek lze mluvit i o vzájemném ovlivňování hlasivek a dalších částí vokálního traktu jako jsou subglotální oblast a dutiny v hlavě [69, s. 290].

Ohledně dosavadního zkoumání v oblasti FSI simulace hlasivek a historie oboru lze odkázat na práci Horáčka a kol. [18, s. 321]. Autoři zde podávají shrnutí experimentálních prací, které pomocí laseru a trasování částic PIV zkoumají modely jednak s vnějším buzením a jednak samooscilující. Dále pokračují, že pro historii numerických modelů je podstatnou a stále důležitou metodou simulace

na 2D modelu, který je propojen s 1D prouděním dle Bernoulliho rovnice (model K. Ishizaky, [32]). Až na počátku tohoto tisíciletí se objevily nové simulace vycházející z 2D modelu hlasivky spřaženého s plným řešením NS rovnic pomocí metody konečných objemů (FVM) [11]. Prvními autory modelu založeného na interakci dvou složek z konečných prvků (FE) jsou de Oliviera [51] a Thomsson [73]. Nejnověji se cesta zkoumání ubírá k plné simulaci interakce 3D proudění a hlasivky, ve které anatomie vychází z měření neinvazivními lékařskými metodami (Zheng a kol. [86]). Podrobnější historický přehled nalezne čtenář např. v článku F. Alipoura a kol. [1]. Předkládaná diplomová práce sice uvažuje pouze 2D simulaci (která je pořád velmi častá, ale pomalu ustupuje do pozadí), nicméně jinak odpovídá aktuálnímu stavu zkoumání.

## 2.1 Anatomie a fyziologie

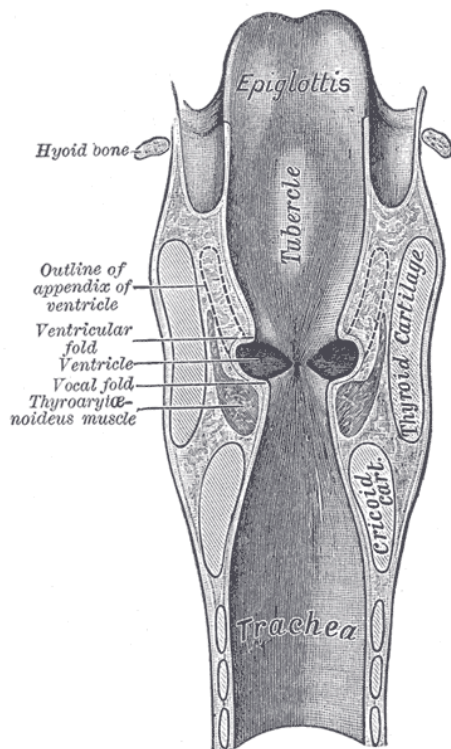
---

Na obrázku 1 vidíme schematický náčrt základní **anatomie** spodní části vokálního traktu, neboli oblasti, kde dochází ke vzniku hlasu. Obrázek 2 zachycuje živé hlasivky pomocí ultrazvuku a videolaryngoskopu zavedeného do horní části hrtanu.

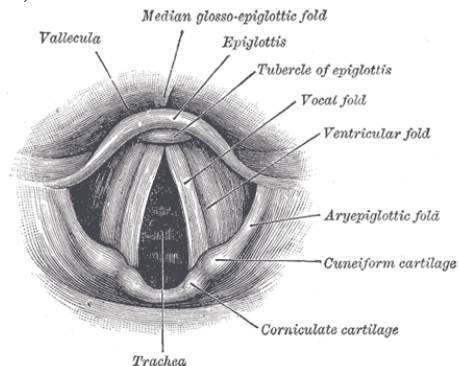
Hrtan (*larynx*) je orgán dýchacího ústrojí, v němž se nacházejí hlasivky. **Hlasivky** čili hlasové vazy (*ligamenta vocalia*, angl. *vocal folds*) vidíme na snímcích uprostřed. Dále vidíme průdušnici (*trachea*) pod nimi, která do hlasivkové štěrbiny přivádí z plic vzduch, a rovněž prostor nad nimi, který odvádí vzduch do rezonančních prostor v hlavě. Ve frontálním řezu hlasivkou rozlišujeme následující vrstvy: epitel (*epithelium*, povrchová vrstva tvořená vrstevnatým dlaždicovým epitelem), *lamina propria* a nejhluběji položený thyroarytenoidní sval (viz obr. 1c). *Lamina propria* se dále člení na tři vrstvy, a to povrchovou (tzv. Reinkeho prostor), střední a hlubokou (poslední 2 se označují jako ligament). [71, s. 802] [52] [50]. V této práci uvažuji tzv. trojvrstvý model struktury hlasivky, který reprezentuje hlasivku ve frontálním řezu třemi oblastmi s různými fyzikálními parametry, které nazýváme epitel, ligament a sval. [18, s. 369]

Hlasové vazy jsou obklopeny štítnou chrupavkou (*cartilago thyroidea*), která je největší hrtanovou chrupavkou. Uvnitř a okolo hlasivky je několik svalů, které zajišťují napětí hlasivky při fonaci a změnu jejího postavení. Intenzivnější kontrakce svalu *m. thyro-arytaenoideus* vede k tomu, že kmitá větší část hlasivky (a tedy typicky vede k hlasu, který pěvci charakterizují jako hrudní rejstřík). Naopak sval *m. crico-thyroideus* hlasivku natahuje [66, s. 602], zvyšuje v ní napětí a typicky i zvyšuje i výšku tónu, který hlasivky vydávají. Tento sval působí v transverzální rovině, a proto logicky nemůže být modelován ve dvourozměrném modelu ve frontálním řezu (srovnej dále diskusi k dvourozměrnosti modelu na straně 11). Pod hlasovými vazami je průdušnice obepnuta prstencovou chrupavkou

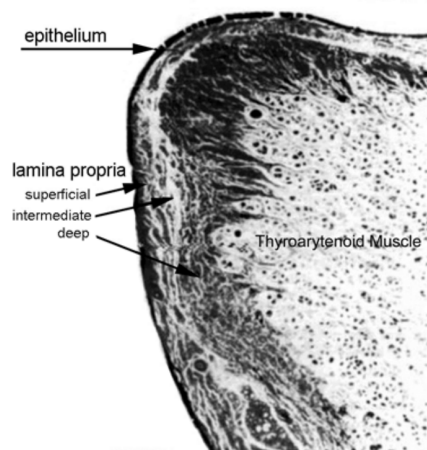
a)



b)



c)



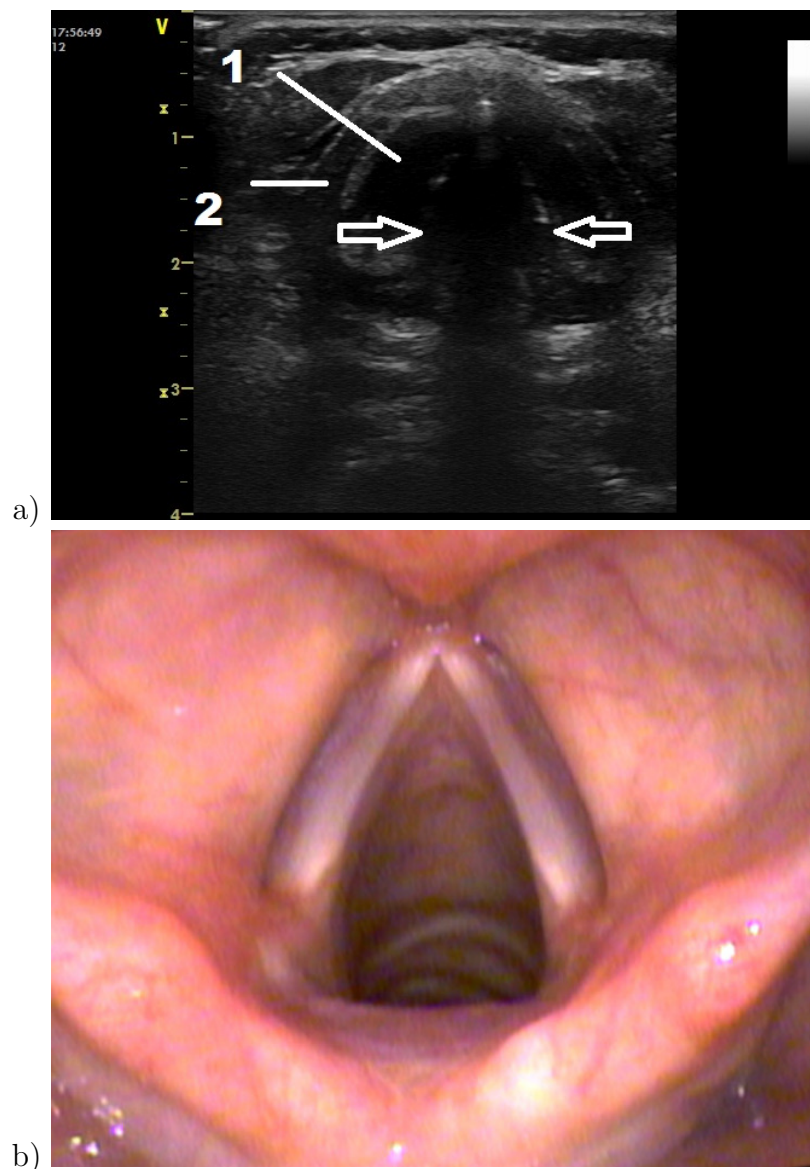
**Obrázek 1:** Anatomie hlasivek.

a) Obrázek zobrazuje průřez hrtanem, zejména průdušnici, hlasové vazy a hrtanovou příklopku (*epiglottis*). Na obrázku je patrné, že část hlasivek je tvořena příčným svalem, který má jiné fyzikální vlastnosti než povrch hlasivky. Geometrii průřezu hlasivkou (ve frontální rovině) naznačenou na obr. a) využívá i tato práce.

b) Pohled shora ukazuje, že hlasivky jsou natahovány svaly (zde v uvolněném respiračním postavení) a jsou nataženy kolmo k frontální rovině.

c) Histologický snímek trojvrstvé struktury hlasivky na *epithelium*, tři vrstvy *lamina propria* a thyroarytenoidní sval podle klasické Hiranovy práce z roku 1981.

Obrázky a), b) jsou kopie litografických destiček, který byly vydány v Grayově Anatomii [23], a nepodléhají proto copyrightu. Tyto obrázky a jejich popisky jsou převzaty z mé bakalářské práce [48] a doplněny. Obrázek c) je citován podle zdroje [46].



**Obrázek 2:** Pohled na živé hlasivky. Oba obrázky zachycují pohled z horní části hrtanu směrem dolů skrz hlasivkovou štěrbinu do průdušnice.

a) Ultrazvukový snímek zachycuje polohu hlasivek v systému kostí a chrupavek hrtanu. Popisky obrázku: 1/ *Musculus vocalis*, 2/ štítná chrupavka. Fotografie pochází od MUDr. Davida Doležala, fakultní nemocnice Hradec Králové.

b) Pohled na zdravé hlasivky v respirační poloze. V přední části fotografie jsou vidět arythenoidní hrbolky. Fotografie pochází od mého otce, anesteziologa doc. MUDr. Pavla Michálka, Ph.D., D.E.S.A., MSc.

| Parametr                      | Hodnota ve studiích                |
|-------------------------------|------------------------------------|
| modul pružnosti $E$           | 30 kPa [49, 2]                     |
| transglotální tlak $\Delta p$ | 500 Pa [57]                        |
| Reynoldsovo číslo             | 100-10 000 (viz text na straně 22) |
| hustota $\rho$                | 1030 kg · m <sup>-3</sup> [2]      |
| Poissonovo číslo (poměr)      | 0,57 [2]                           |
| Maximální rychlost            | 30 m · s <sup>-1</sup> [1, s. 331] |

**Tabulka 1:** Parametry hlasivek uváděné ve studiích

(*cartilago cricoidea*).

Hlasivky jsou v klidové poloze široce rozevřeny v tzv. respiračním postavení (viz obr. 1 b), které umožňuje člověku pohodlně dýchat. Při fonaci se hlasivky k sobě přimknou do tzv. **fonačního postavení**, vytvoří se mezi nimi úzká mezera, nazývaná hlasivková štěrbina (*glottis*), kterou proudí vzduch, který hlasivky rozkmitá.

Základní fyziologický model vzniku primárního tónu se nazývá **myoelasticko-aerodynamická teorie** tvorby hlasu a pochází z článku van den Berga z roku 1958. [82, 66, s. 601] Tato teorie byla následně ověřena a drobně korigována do podoby, kterou dále zjednodušeným a kvalitativním způsobem popisují. [60, s. 46] Název myoelasticko-aerodynamická teorie odpovídá tomu, že model kombinuje efekt svalů (*myo*), elastické tkáně a proudění vzduchu. Kmitání hlasivky je čistě fyzikálně-biologický jev, který není vázán na žádné nervové vzruchy, jak se kdysi někteří vědci domnívali. [76] Základní fyzikální charakteristiky kmitání hlasivky jsou v tab. 1.

Kmitání si lze přiblížit na obvykle přijímaném kvalitativním popisu fáze jednoho kmitu hlasivek při fonaci normálního znělého hlasu dospělého člověka (tzv. hrudního rejstříku). Hlasivky jsou z počátku u sebe, díky čemuž je mezi nimi pouze malá štěrbina anebo se dotýkají. Hlasivky u sebe drží přimknuté svaly hrtanu (viz výše).

1. **Otvírání hlasivkové štěrbin.** Svaly regulující objem vzduchu v plicích se kontrahují, čímž se snižuje objem vzduchu v plicích a zvyšuje se tlak v plicích včetně části pod hlasivkami. Díky zvýšení tlaku se hlasivky dostanou od sebe a zvětší štěrbinu, kterou uniká vzduch dále hrtanem a do rezonančních prostor.
2. **Uzavírání hlasivkové štěrbin.** Hlasivky jsou elastickou strukturou a elasticita je vrací do původní polohy, čemuž napomáhá i napětí vytvářené příčným svalem. Čím více se k sobě hlasivky přibližují, tím se štěrbina zužuje a zrychluje se průtok vzduchu štěrbinou. Pomocnou úlohu zde má Bernoulliho princip (byť exaktně se formuluje pro ustálené proudění), podle



něhož zvýšení rychlosti vede k poklesu tlaku v tomto místě. Podtlak napomáhá tomu, aby se hlasivky k sobě opět přimkly.

Tento cyklus se opakuje; u dospělého muže činí základní frekvence tohoto cyklu (a tím i primárního tónu hlasu) přibližně 100 Hz. [66, s. 602]

## 2.2 Modely v dosavadním zkoumání

---

Nejprve stojí za to připomenout si některé základní dosavadní biofyzikální **modely fonace**. Mým prvním dílčím úkolem je identifikovat různé přístupy k modelování fonace, vybrat ze široké škály vhodný model a vysvětlit teoretická východiska vybraného modelu.

Přehled a porovnání různých přístupů je obsažen ve shrnujícím článku Alipoura a kol. [1], který srovnává 19 různých modelů fonace. Velmi podrobné srovnání zahrnující jak historické práce, tak aktuální poznatky, obsahuje již citovaná kapitola ve sborníku českých autorů [18, s. 325]. Na tyto prameny proto v plném rozsahu odkazuji a zaměřím se jen na schematické srovnání používaných přístupů.

Původní a nejjednodušší modely vycházely z toho, že hlasivka je tuhým tělesem, které je napojeno na pružinku a obklopeno vzduchem. Model vzduchu byl velmi jednoduchý, vycházející z Bernoulliho rovnice. Tyto modely měly pouze malý počet stupňů volnosti, počítaly s několika tuhými tělesy s pružinkami, případně byly následně doplněny o jednoduchý model proudění. [27, 18, s. 335]

Rozvoj výpočetní techniky umožnil důmyslnější modely založené na řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic. Tyto modely vycházejí z klasické teorie pružnosti pro hlasivku a NS rovnic pro vzduch. Před numerickou simulací je třeba nejprve vyjasnit její zjednodušující předpoklady:

1. **Lineární geometrie.** Při modelování struktury buď jsou [48, 36] nebo nejsou [18, s. 351] [80] uvažovány velké výchylky materiálu od výchozí polohy (vychází se z teorie nekonečně malých deformací). Jak jsem ukázal ve své bakalářské práci [48], při kmitání hlasivky typicky dochází k takovým rozdílům mezi modely založenými na lineární a nelineární geometrii, že odchylka je zřetelná jak v poloze, tak v časovém charakteru kmitání. Vzhledem k uvedenému a k návaznosti na bakalářskou práci počítám obecně s velkými výchylkami materiálu od výchozí polohy, to jest s tzv. nelineární geometrií.
2. **Nestlačitelnost vzduchu.** Uvažuje se buď nestlačitelná [35, 68], nebo stlačitelná tekutina [25, 53, 36]. Z obecných fyzikálních důvodů je zjevné, že realistický model fonace musí uvažovat stlačitelný vzduch. Zejména jde o požadavek realistického modelu úplného uzavěru hlasivkové štěrbině, neboť v uzavřeném subglotálním prostoru se vzduch stlačuje. Vzhledem k nízké

rychlosti, jakož i vzhledem k rozdílné škále FSI a akustických jevů, není stlačitelnost v FSI modelu samotné produkce primárního tónu často uvažována [18, s. 326] (předpoklady nestlačitelného modelu podrobně rozebírám na straně 23). Okolo nestlačitelných NS rovnic je vybudována robustní matematická teorie, neboť jde o rovnice jednodušší. Je k dispozici i relativně širší paleta řešičů.

3. **Laminární proudění.** Předpokládá se buď laminární proudění (vzhledem k jednoduchosti převažující přístup) [18, s. 327], nebo se modeluje turbulence, viz také poznámka na straně 22. Není přitom postaveno na jisto, který model lépe vystihuje proudění při zdravé fonaci (viz diskuse v článku [69, s. 291]). V této práci uvažuji laminární proudění, což je rozšířenější přístup, ač software je připraven i na model turbulentního proudění. [56, s. 28]. Mám za to, že minimálně v oblasti kolem koncentrovaného proudu vytékajícího ze štěrbiny může docházet k turbulencím. Tento proud, tzv. *jet*, dle [10] „paprsek“, v této práci dále nazývám jen „proud“.
4. **Dvourozměrnost.** Podrobné rozbory ukazují, že proudění je třírozměrné. V transversálním rozměru se charakter proudění podstatně mění, i kdybychom uvažovali strukturu, jejíž velikost na transversálním rozměru nezávisí. [72, 86, 45] Jak ukazují Šidlov a kol. [69, s. 299], 2D model je rozumně přesný blízko hlasivkové štěrbiny a nepřesným se stává až pokud jde o proudění dále po proudu. V tomto modelu řeším 2D úlohu (viz dále poznámka na straně 29). Činím tak nicméně bez újmy na obecnosti, protože rovnice i numerika jsou formulovány obecně i pro 3D případ a lze je tak v použitém software i řešit.
5. **Homogenita.** Vnitřní materiálová struktura hlasivky [66, s. 593] se buď zanedbává [25], či nikoliv [35]. V této práci uvažuji klasickou třídílnou strukturu, kde je kmitající masa hlasivky tvořená svalem doplněna o povrchovou vrstvu (epitel) a ligament. Parametry různých částí struktury jsou stále otázkou, která není uzavřena [26]. V rámci těchto oblastí uvažuji lineární reologii, což je dáno zejména tím, že lepší měření parametrů není k dispozici.
6. **Umělé buzení.** Interakce spočívá v jednodušším případě v tom, že hlasivka má předepsaný pohyb, na který reaguje proudění [53, 68], anebo ve složitějším případě obě oblasti interagují a až tato interakce vybudí samooscilaci hlasivky. Klíčovým cílem této práce je právě modelovat samobuzení, tedy neuvažuji žádné umělé budící síly či pevně předepsaný pohyb hlasivek.
7. **Typ vazby.** Používá se buď silná, nebo slabá vazba ve výpočtu interakce oblastí tekutiny a struktury při numerickém řešení problému (viz dále kap. 4.1

na straně 33). Nicméně ukazuje se [25, s. 127], že rozdíl mezi nimi není nijak zásadní. Na druhou stranu je třeba přijmout nějaký model vazby, jinak má vzniklý model jen omezenou použitelnost. [18, s. 355]

8. **Kontakt a rázy.** Poslední zajímavou otázkou je, zda model řeší tzv. kontaktní problém, neboli zda se hlasivky během fonace mohou i dotknout, přičemž vznikají normálové a třecí síly. Jak jsem vyložil výše, jde o důležitou, ale také relativně složitou otázku, které se věnuje např. práce [21] anebo jsou řešeny pomocí numerických triků [34]. V této práci nebudu dotyk hlasivek předpokládat, protože používaný počítačový program Elmer dosud neobsahuje jeho implementaci na potřebné úrovni.

Z výše uvedeného srovnání vyplývá, že zadání diplomové práce lze precizovat do následujícího úkolu:

**Sestavte dvourozměrný model interakce hlasivek s laminárním prouděním vzduchu v závislosti na čase, a to bez kontaktu mezi hlasivkami navzájem. Strukturu hlasivky předpokládejte ze tří oblastí ze spojitého, homogenního, izotropního a elastického materiálu.**

## 3 Fyzikální model

---

Naším cílem je zkoumat interakci struktury a tekutiny. Fyzikální model těchto spojitých látek poskytuje mechanika kontinua. Cílem této kapitoly je **připomenout teoretické fyzikální poznatky z mechaniky kontinua**, které jsou nezbytné pro porozumění řešené úloze a formulaci fyzikálního modelu. Matematickou formulací se zabývá následující kapitola.

### 3.1 Označení veličin

---

Výpočetní oblast má dvě části:

1. vzduch jako **tekutinu**, která je označována veličinami s horním indexem  $F$  (od slova *fluid*), takže tekutina zaujímá objem  $\Omega^F$ , který je ohraničen hranicí  $\partial\Omega^F = \Gamma^F = \Gamma^{\text{in}} \cup \Gamma^{\text{out}} \cup \Gamma_0^F \cup \Gamma^{\text{int}}$ ,
2. tkáň jako **strukturu**, která je označována veličinami s horním indexem  $S$  (od slova *structure*), takže struktura zaujímá objem  $\Omega^S$ , který je ohraničen hranicí  $\partial\Omega^S = \Gamma^S = \Gamma_0^S \cup \Gamma^{\text{int}}$  a případně obsahuje vnitřní hranici  ${}^{\text{int}}\Gamma^S$ , na které se mohou měnit parametry materiálu, kde značím  $\Gamma^{\text{in}}$  vstupní profil,  $\Gamma^{\text{out}}$  výstupní profil,  $\Gamma_0^F$  nepohyblivou stěnu trubice, k níž tekutina lne,  $\Gamma^{\text{int}}$  interakční hranici,  $\Gamma_0^S$  pevné ukotvení hla-sivky v tkáni a  ${}^{\text{int}}\Gamma^S$  vnitřní hranici ve struktuře mezi různými druhy materiálů.

Tyto dvě části spolu interagují a tvoří tak FSI, zejména prostřednictvím hranice  $\Gamma^{\text{int}}$  [12, s. 187]. V obou případech připadají v úvahu jak okrajové podmínky Neumannovy na hranici  $\Gamma^N$ , tak Dirichletovy na hranici  $\Gamma^D$ . Kdykoliv není pochybnosti o tom, kterou veličinu uvažuji, uvádím veličiny po výslovném upozornění následně kvůli přehlednosti již bez indexu. Základní značení hranic v případě hla-sivky interagující s tekutinou (vzduchem) shrnuje obr. 3. Konkrétní geometrické rozměry a hodnoty parametrů budou uvedeny až v praktické části u jednotlivých simulací.

Pro přehlednost shrnuji základní definice a značení kinematických a dynamic-kých veličin v mechanice kontinua, které budou podstatné v následující teoretické části, do tab. 2 a 3. Úplné značení veličin použitých v této práci obsahuje seznam značení použitých veličin v kapitole 7 na straně 82.

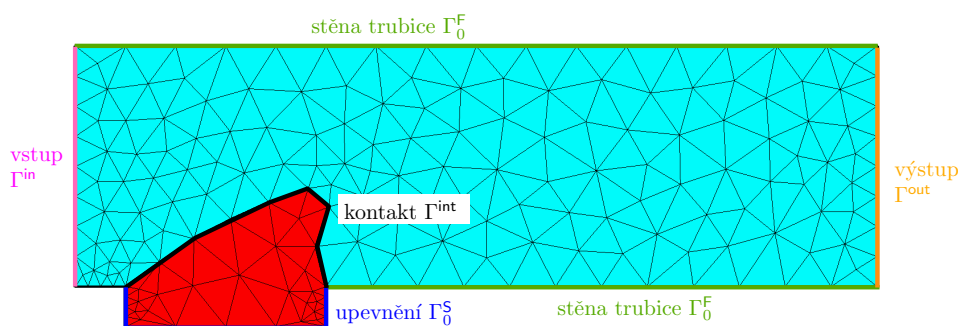
### 3.2 ALE formulace

---

Základem modelu pro numerickou simulaci je zobecněná Lagrangeova-Eulerova metoda (**ALE metoda**). Jak název napovídá, hraničními případy této metody

| Veličina               | Definice  | Geometrický význam   |
|------------------------|---|--|
| posunutí               | $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$  | vektor posunutí vyznačuje polohu relativně vůči původní poloze   |
| deformační gradient    | $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}$ | lineární zobrazení, které transformuje bázové vektory v materiálových souřadnicích na bázové vektory v laboratorních souřadnicích                                    |
| Jakobián               | $J = \det \mathbf{F}$   | škálovací faktor, kterým se násobí orientovaný „objem“ rovnoběžnostěnu bázových vektorů při zobrazení $\mathbf{F}$ ; vystupuje při transformaci objemových integrálů |
| hustota                | $\rho = \frac{dm}{dv}$  | hustota vyjadřuje hmotnost na objem v laboratorních souřadnicích, přičemž u nestlačitelného proudění je konstantní (10) a v Lagrangeově popisu splňuje (23)          |
| tenzor deformace       | $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  | kvadratická forma, která bázovému vektoru v materiálových souřadnicích přiřadí čtverec jeho délky v laboratorních souřadnicích                                       |
| tenzor velké deformace | $\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I})$  | charakterizuje, o kolik se aktuální bázové vektory liší od původní konfigurace   |

**Tabulka 2:** Označení fyzikálních veličin mechaniky kontinua souvisejících s deformací, jejich definice a geometrický význam



**Obrázek 3:** Označení hranic oblastí. (Zobrazení jen jedné hlasivky na obrázku má jen schematický význam, v pozdější simulaci uvažují obě hlasivky.)

| Veličina                                     | Definice  | Geometrický význam  |
|--|---|---|
| Cauchyho tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ | $d\mathbf{g} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{a}$   | lineární zobrazení, které elementu plochy $d\mathbf{a}$ (v laboratorní konfiguraci) přiřazuje sílu $d\mathbf{g}$ (v laboratorní konfiguraci) na něj působící  |
| Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 1. druhu     | $\mathbf{S} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\top}$<br>lze ověřit dosazením do vztahu (6) | lineární zobrazení (dvoubodový tenzor), které elementu plochy $d\mathbf{A}$ (v materiálové konfiguraci) přiřazuje element síly $d\mathbf{g}$ v laboratorní konfiguraci, tj. $d\mathbf{g} = \mathbf{S}d\mathbf{A}$   |
| Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu     | $\bar{\mathbf{S}} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\top}$                  | lineární zobrazení, které danému elementu plochy $d\mathbf{A}$ (v materiálové konfiguraci) přiřazuje element formální síly $d\mathbf{G}$ (v materiálové konfiguraci), tj. $d\mathbf{G} = \bar{\mathbf{S}}d\mathbf{A}$ , kde formální element síly $d\mathbf{G}$ vznikl prostou souřadnicovou lineární transformací z laboratorní konfigurace $d\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{g}$ |

**Tabulka 3:** Označení fyzikálních veličin mechaniky kontinua souvisejících s napětím, jejich definice a geometrický význam

jsou Lagrangeova metoda (veličiny pozorujeme z pohledu pohybující se částice), resp. Eulerova metoda (veličiny pozorujeme v pevném bodě). [10, s. 382]

Pro modelování struktury se obvykle používá Lagrangeova metoda, protože můžeme snadněji sledovat jednotlivé částice. V tekutině, kde může docházet k vírům, to ale často možné není. Proto se pro modelování proudění klasicky používá Eulerova metoda. Tu však nelze v případě interakce jednoduše použít, protože se mění hranice výpočetní oblasti.

ALE metoda je navržena tak, že původně pevné Eulerovy souřadnice se pohybují v návaznosti na umělou deformaci výpočetní oblasti, jejíž konkrétní tvar se postuluje s ohledem na kvalitu numerické simulace. ALE metoda je tedy významná zejména pro tekutinu, pro oblast struktury splývá s Lagrangeovou metodou. Výhoda následujících úvah je, že dávají jednotný formalismus pro obě oblasti (strukturu i tekutinu).

Nyní si ALE metodu z matematického hlediska upřesníme. Navazují na obecné výklady [13, 63]. Rovněž přihlížím k pracím používající ALE metodu pro věcně odlišné, ale matematicky blízké účely, např. modelování magmatu [15], proudění v tepnách [40] nebo geofyzikálních procesů [41] (rovněž používá počítačový program Elmer).

## Souřadné systémy v ALE metodě

V následujícím textu používám následující značení v ALE metodě vycházející z citovaných textů:

- **Materiálové souřadnice  $\mathbf{X}$**  (také označovány jako původní nebo Lagrangeovy) popisují jednotlivé částice materiálu pomocí jejich výchozí polohy v prostoru v čase  $t = 0$ . Pokud konečný počet hmotných bodů označujeme přirozenými čísly  $1, 2, \dots, N$ , ve spojitém materiálu se popisují částice indexem  $\mathbf{X}$ , který je vektorem reálných čísel. Pokud zůstává  $\mathbf{X}$  konstantní, jde o jednu a tu samou částici materiálu. Velkými písmeny se typicky označují i ostatní veličiny po transformaci do materiálových souřadnic.
- **Aktuální souřadnice  $\mathbf{x}$**  (také označovány jako laboratorní, prostorové nebo Eulerovy) popisují skutečnou polohu bodu v prostoru, vůči kterému měříme veličiny problému jako tlak či rychlost. Pokud zůstává  $\mathbf{x}$  konstantní, pozorovaný bod se nehýbe vůči laboratoři, ve které je souřadný systém umístěn. Malými písmeny se typicky označují i ostatní veličiny v prostorových souřadnicích, například rychlost materiálu  $\mathbf{v}$ .
- **Referenční souřadnice  $\chi$**  popisují polohu vůči výpočetní oblasti a jde tedy o uměle zavedené souřadnice, které nemají fyzikální význam, ale po

diskretizaci problému vystupují jako výpočetní síť. Pokud zůstává  $\chi$  konstantní, pozorovaný bod se nehýbe vůči výpočetní oblasti, tedy při zavedení výpočetní sítě leží pevně na ní během jejího pohybu.

Pro účely ALE metody postulujeme existenci referenčního zobrazení  $\chi = \chi(\mathbf{X}, t)$ , které přiřazuje v každém čase každému bodu (částici) původní oblasti  $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}_{\mathbf{X}}$  nový bod deformované výpočetní oblasti  $\chi \in \bar{\Omega}_{\mathbf{x}}$  (který v případě proudění nemá bezprostřední vztah k aktuální poloze  $\mathbf{x}$  částice  $\mathbf{X}$ ). Jedinou podmínkou na zobrazení  $\chi$  je jeho vzájemná jednoznačnost a skutečnost, že body původní hranice  $\Gamma_{\mathbf{X}}$  přenáší na aktuální hranici  $\Gamma_{\mathbf{x}}(t)$ . (Publikace [18] označuje ALE zobrazení symbolem  $\mathcal{A}_t$ .)

### Materiálová časová derivace

Struktura zákonů zachování je v mechanice kontinua velmi podobná jako v klasické mechanice hmotného bodu. To, že se skutečně jedná o hmotný bod čili konkrétní částici kontinua (nikoliv nějaký myšlený útvar), se do zákonů zachování v mechanice kontinua promítá tak, že na jejich levé straně vystupuje materiální časová derivace.

Materiálová časová derivace je dobře známá z mechaniky kontinua, značíme ji  $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\mathbf{X}}$ . Značení vystihuje, že při derivaci zůstává konstantní veličina „index částice  $\mathbf{X}$ “. Stále sledujeme jednu a tutéž část materiálu (odtud materiálová časová derivace).

Materiálová časová derivace se obvykle rozepisuje v Eulerově formulaci pomocí řetízkového pravidla

$$\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f, \quad (1)$$

kde  $f$  je skalární funkce,  $t$  je čas,  $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\mathbf{X}}$  je materiálová časová derivace,  $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\mathbf{x}}$  je derivace funkce měřená vzhledem k pevnému bodu laboratorních souřadnic a  $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\Big|_{\mathbf{X}}$  je rychlost pohybu částice.

Materiálovou časovou derivaci lze takto vyjádřit pomocí veličin v laboratorních souřadnicích. Výše uvedený vztah nám pro částici materiálu označenou indexem  $\mathbf{X}$ , která se pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}$ , říká: Změna skalární veličiny  $f$  za časový okamžik  $\Delta t$  měřená vzhledem k částici  $\mathbf{X}$  se rovná součtu časové změny  $f$  na výchozím místě částice  $\mathbf{x}$  a přírůstku  $f$  způsobeného pohybem částice; přírůstek  $f$  je daný projekcí gradientu  $f$  na rychlost částice.

### ALE derivace

Jak jsem uvedl výše, vyjádření v laboratorních souřadnicích je ovšem u měnící se výpočetní oblasti nepraktické. Proto se zcela analogicky vztahu (1) vyjadřuje



materiálová časová derivace v termínech referenčních souřadnic. Materiálovou časovou derivaci lze také rozepsat následovně [12, s. 8]

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f, \quad (2)$$

kde  $\left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$  je časová derivace funkce vůči bodu pevně spojenému s pohybující se výpočetní oblastí (tzv. ALE derivace),  $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$  je relativní rychlost částice vůči bodu výpočetní oblasti (konvektivní rychlost) a  $\hat{\mathbf{v}} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$  je rychlost pohybu výpočetní oblasti v daném bodě.

Vztah pro referenční souřadnice (2) lze interpretovat obdobně jako jako vzorec pro laboratorní souřadnice (1).

### Aplikace na modelování hlasivek

V uvažovaném případě vnitřní oblast vyplněná tekutinou pokrývá část průdušnice mezi hlasivkami a lze ji modelovat pomocí výše uvedené ALE formulace. Pro získání konkrétního tvaru ALE zobrazení  $\chi(\mathbf{X}, t)$  uvažujeme lineární deformaci (viz podrobně podkapitola 4.4 na straně 42). [40, s. 27]

Naproti tomu strukturu modelujeme klasickou Lagrangeovou metodou, která je speciálním případem ALE formulace s  $\chi \equiv \mathbf{X}$ , konvektivní rychlost  $\mathbf{c} = 0$  a materiálová derivace  $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}}$  je jednoduše časovou derivací vzhledem k pohybující se částici.

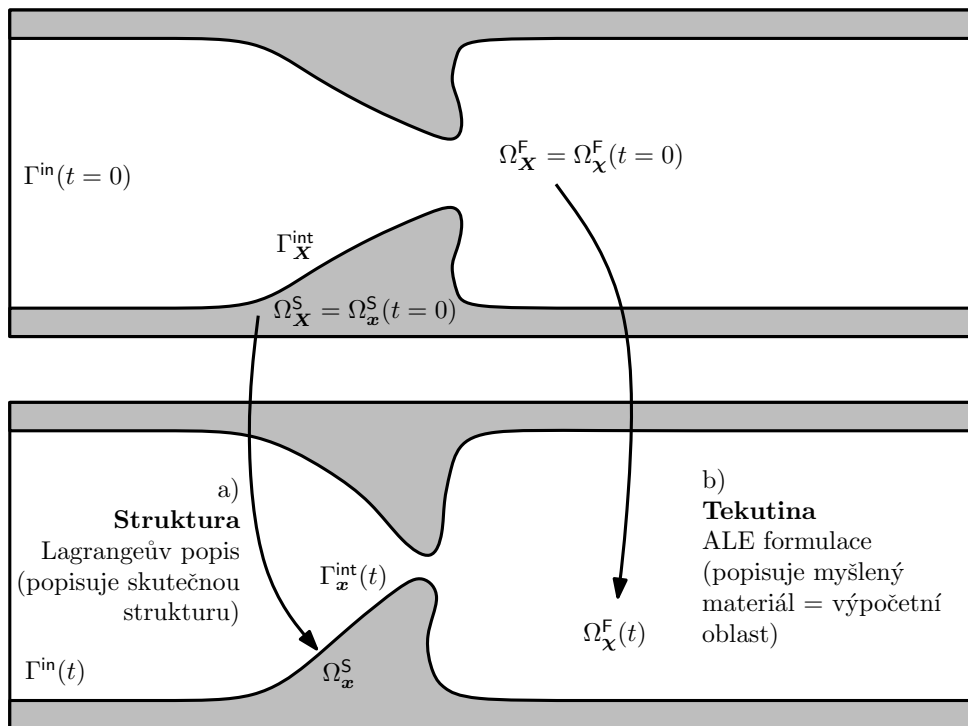
Názorný příklad, jak se mění během proudění vzduchu hranice výpočetní oblasti, poskytuje obrázek 4 na následující straně. V tomto obrázku je také uvedeno odpovídající značení veličin spojených s transformací.

### 3.3 Transformace veličin

V této podkapitole uvedu odvození vztahů pro transformaci objemového a plošného elementu mezi materiálovými a laboratorními souřadnicemi. V mechanice kontinua zavádíme deformační gradient vztahem  $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}$ . Jde o lineární zobrazení, které transformuje bázové vektory v původní poloze na bázové vektory v aktuální poloze, tedy

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}. \quad (3)$$

Logicky vzniká otázka, jakým způsobem se transformuje objemový element  $dv = d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3$  a povrchový element  $d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3$ . Jde o třírozměrný rovnoběžnostěn, resp. dvourozměrný rovnoběžník (který dále podle našeho zvláštního výběru tvoří dolní podstavu trojrozměrného rovnoběžnostěnu). Tyto veličiny vystupují v integrálech a rovněž jsou třeba při formulaci okrajových podmínek, proto je budeme potřebovat.



**Obrázek 4:** Znázornění ALE použité formulace a souvisejícího značení.

a) Strukturu modelujeme kvůli velkým výchylkám v klasické Lagrangeově formulaci, která mapuje materiálové body na jejich polohu. Lagrangeova formulace je speciálním případem ALE metody.

b) Tekutinu modelujeme kvůli měnící se hranici pomocí ALE formulace, při které se pomocí Lagrangeovy metody aplikované na umělou deformaci myšleného materiálu (výpočetní oblasti) nejprve dostaneme do správných hranic a v nich se díváme na proudění podobně jako v Eulerově formulaci.

## Transformace objemu

Původní objemový element  $dV$  se mění na aktuální objemový element  $dv$  podle vztahu

$$dv = JdV, \quad (4)$$

kde  $J$  označujeme Jakobián zobrazení. Toto tvrzení tedy v podstatě říká jen to, že  $\mathbf{F}$  je Jakobiho matice přechodu souřadnic  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ . Objem se mění pomocí Jakobiánu  $J$ , neboli determinantu Jakobiho matice, jak je známo integrálního počtu funkce více proměnných. Objem  $dv$  má však také geometrickou definici pomocí determinantu, z čehož lze dokázat výše uvedené tvrzení (viz např. [63, s. 7]):

$$\begin{aligned} dv &= d\mathbf{x}_1 \cdot (d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3) = \det(d\mathbf{x}_1 \ d\mathbf{x}_2 \ d\mathbf{x}_3) = \det(\mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F}d\mathbf{X}_3) \\ &= \det(\mathbf{F}(d\mathbf{X}_1 \ d\mathbf{X}_2 \ d\mathbf{X}_3)) = \det(\mathbf{F}) \cdot \det(d\mathbf{X}_1 \ d\mathbf{X}_2 \ d\mathbf{X}_3) \equiv JdV. \end{aligned} \quad (5)$$

Jakobián má také velkou praktickou využitelnost, neboť je vázán podmínkou, že nesmí klesnout na nulu, jinak by zobrazení nebylo vzájemně jednoznačné. Pokud se tak během simulace stane, značí to zpravidla její konec způsobený kolapsem výpočetní sítě. Uvedenou transformaci také s výhodou použijeme, pokud jde o transformaci hustoty v Lagrangeově popisu (23).

## Transformace povrchu

Z transformace objemu (4) rovněž vyplývá transformační vztah pro plošku

$$d\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-\top}d\mathbf{A}, \quad (6)$$

neboť

$$\begin{aligned} dv &\equiv d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{a} \stackrel{(8)}{=} d\mathbf{x}_1^\top d\mathbf{a} \\ &\stackrel{(4)}{=} JdV = Jd\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{A} = J(\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}_1) \cdot d\mathbf{A} = d\mathbf{x}_1^\top (J\mathbf{F}^{-\top}d\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (7)$$

Rovnají-li se však řádky uvedených výrazů pro libovolně zvolený element  $d\mathbf{x}_1^\top$ , musí platit vztah (6) (v zahraniční literatuře [63, s. 8] nazývaný Nansonův teorém).

Vztah pro transformaci povrchu se promítá např. do definic Piola-Kirchhoffových tenzorů (tab. 3) a související formulace okrajových podmínek v materiálové konfiguraci (33).

## Matematická poznámka k transpozicím

Skalární součin vystupující ve vztahu (7) vychází z toho, že transpozicí děláme z prvního vektoru řádkový vektor, tj.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}. \quad (8)$$

Na operátor skalárního násobení vektorem ( $\mathbf{a} \cdot$ ) (což je lineární funkcionál z vektorového prostoru na reálnou osu) lze tudíž také nahlížet jako dosazení do lineárního funkcionálu  $\mathbf{a}^T$ , který lze přirozeně ztotožnit s prvkem duálního vektorového prostoru.

Na konečně rozměrném prostoru se skalárním součinem obdobně funguje transpozice jako způsob, jak najít k lineárnímu zobrazení  $\mathbf{O}$  jeho adjungované zobrazení  $\mathbf{O}^T$  tak, aby platilo

$$(\mathbf{O}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{O}^T \mathbf{b}). \quad (9)$$

Konečně také transponované matice vystupují v definici kofaktoru, kterým rozumíme výraz  $J\mathbf{F}^{-T}$  ve vztahu (6) pocházející z Piolovy transformace.<sup>1</sup>

Je vhodné si takto uvědomit, odkud transpozice ve vztazích (např. v tab. 3) pocházejí. Čtenáře, který hledá elegantní popis těchto východisek, odkazují na moderní oblast lineární algebry zvanou vnější kalkulus.

## 3.4 Zákony zachování

Rozpisem materiálové časové derivace do referenčních souřadnic podle vztahu (2) dostaneme dobře známé zákony zachování v mechanice kontinua [12, s. 19] v podobě následujících rovnic:

### Zákon zachování hmotnosti

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho = -\rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \quad (10)$$

kde značím  $\rho$  hustotu v daném bodě,  $\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}$  ALE derivaci a  $\mathbf{c}$  konvektivní rychlost zavedené vzorcem (2),  $\mathbf{v}$  rychlost v daném bodě (tj. hodnota rychlostního pole). Omezíme-li se na nestlačitelnou tekutinu  $\rho = \text{konst.}$ , zůstane ve výše uvedené rovnici pouze poslední člen a rovnice má tvar

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (11)$$

---

<sup>1</sup>Kofaktor je lineární zobrazení, které přenáší bilineární formu (axiální vektor) laboratorní konfigurace.

### Zákon zachování hybnosti

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + [\mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{v} \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}, \quad (12)$$

kde značím  $\boldsymbol{\sigma}$  Cauchyho tenzor napětí a  $\mathbf{b}$  vektor objemové síly.

### Zákon zachování celkové energie

$$\rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \epsilon \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b}, \quad (13)$$

kde značím  $\epsilon$  celkovou energii na jednotku objemu. Zákon zachování energie je nadbytečný, pokud uvažujeme nestlačitelné kontinuum.

Zákony zachování nyní použijeme pro obě výpočetní oblasti, tj. elastickou strukturu a proudící tekutinu. V obou případech také doplníme vhodné okrajové podmínky, jakož i potřebné konstitutivní rovnice, aby úloha dávala dobrý smysl. Všechny zákony zachování lze také zobecnit do jedné vektorové rovnice, což je zvláště užitečné při studiu stlačitelného proudění. [18, s. 271]

## 3.5 Proudící tekutina

---

Proudící tekutinu modelují pomocí Navierových-Stokesových rovnic v ALE formulaci (dále jen „NS rovnice“), jejichž předpoklady ověřuji v této podkapitole a odvozují zde jejich fyzikální formulaci.

### K otázce laminárního či turbulentního proudění

Model NS rovnic [17, s. 34] značně závisí na konkrétních podmínkách. Zejména je známo, že podle Reynoldsova čísla se rozlišuje laminární proudění a turbulentní proudění. Při mluvě a zpěvu se mohou uplatňovat oba typy proudění, nicméně většina zpěváků se snaží při produkci udržovat laminární proudění. [6, s. 45]

Mittal a kol. [50] uvádí, že v hlasívkách při zdravé fonaci vzduch proudí s Reynoldsovým číslem v řádu několik stovek až 10 000, čemuž odpovídají fáze laminárního proudění, přechodová fáze i fáze turbulentního proudění. Např. Horáček uvádí Reynoldsovo číslo 5 000-10 000 [8, s. 325]. Charakter proudění v různých částech vokálního traktu (zejména v okolí proudu) je ovšem předmětem diskuse. [18, s. 325]. Přímá numerická simulace turbulentního proudění je však velmi náročná, a proto se v praxi vychází ze zjednodušujících modelů. [7, s. 29 a násl.] Jak jsem diskutoval v komparativní části 2.2, v tomto modelu vycházím z laminárního proudění.

## K otázce stlačitelnosti či nestlačitelnosti

V úvahu obecně připadá jak nestlačitelný, tak stlačitelný model. V této práci předpokládám fonaci, u které nedochází ke kontaktu hlasivek (viz na straně 12). Proto není možné, aby se vzduch v subglotálním prostoru podstatně stlačil, a lze si vystačit s nestlačitelným prouděním. Rozhodujícím kritériem je v tomto případě Machovo číslo

$$Ma = \frac{u(x)}{c}, x \in \Gamma^{\text{in}},$$

kde značím  $\Gamma^{\text{in}}$  vstupní hranici a  $c$  rychlost zvuku. Pro Machovo číslo  $< 0,3$  platí, že změny hustoty jsou menší než 5 %. Vzhledem k tomu, že v uvažovaném případě  $Ma \approx \frac{2}{340} \approx 0,006 < 0,3$ , nacházíme se bezpečně v režimu nestlačitelného proudění (pokud zanedbáme nepříliš velký a relativně pomalý pohyb hlasivky samotné). Pro daný problém je tedy předpoklad nestlačitelného proudění oprávněný.

## Konstituční vztah a pohybová rovnice

Jak bylo vyloženo výše (stať 3.2), tekutina se obvykle modeluje pomocí Eulerova popisu a, mění-li se výpočetní oblast, pomocí ALE formulace. Vycházíme přímo z formulovaných rovnic (10) až (13), kde vzhledem k předpokladům úlohy klademe  $\mathbf{b} = 0$ . Všechny rovnice v této podkapitole jsou formulovány pro  $\Omega^F$  s hranicí  $\Gamma^F$ .

Nyní k těmto rovnicím doplníme konstitutivní rovnice. Vzduch je viskózní newtonovská tekutina, a podle manuálu [56, s. 19] proto platí pro tenzor napětí

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \left\{ -\frac{2}{3}\mu(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \right\}^{\text{stlač.}}, \quad (14)$$

kde značím  $\boldsymbol{\varepsilon}$  tenzor rychlosti deformace,  $\mu$  dynamickou viskozitu proudící tekutiny a  $p$  tlak. Tenzor rychlosti deformace se spočítá podle vztahu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^{\text{T}} \right).$$

Nestlačitelnost rovnic dává možnost formulovat problém vícero způsoby, ale při numerické simulaci nemusí být ekvivalentní [24]. Všimněme si, že kvůli nestlačitelnosti tekutiny

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (-p\mathbf{I} + \mu\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}) \equiv \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \quad (15)$$

(veličina  $\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \mu\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$  sama o sobě nemá fyzikální význam).

Dosadíme-li constituční vztah (14) do zákona zachování hybnosti (12), dostáváme Navierovu-Stokesovu rovnici v tzv. konvenční podobě [24] pro nestlačitelné

proudění v ALE formulaci

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + (\mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} \right) = -\nabla_{\mathbf{x}} p + \mu \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'. \quad (16)$$

### Doplňující rovnice pro stlačitelné proudění

Pokud bychom uvažovali stlačitelné proudění, je třeba model doplnit následujícím způsobem: Pro závislost hustoty na tlaku a teplotě lze uvažovat model ideálního plynu

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

kde  $T$  je teplota, o které lze buď předpokládat, že je konstantní anebo řešit v daném systému rovnici vedení tepla včetně konvektivního členu. U stlačitelného proudění je třeba dále uvažovat stavovou rovnici

$$p = (\gamma - 1) \rho e,$$

kde jsem označil  $\gamma$  adiabatický koeficient a  $e = \epsilon - \frac{1}{2} |v|^2$  vnitřní energii na jednotku hmoty.

Poznámka: Pochopitelně u šíření zvukových vln ve vzduchu nemůže platit, že by teplota byla konstantní. Teplo se šíří příliš pomalu ve srovnání s šířením vzruchů, a tak spíše dochází k adiabatickému stlačování. [10, s. 442] [25, s. 54]. Nicméně zejména z důvodu jednoduchosti se věnuji převážně nestlačitelným rovnicím (viz rovnice (2)). Výhoda počítačového balíku Elmer však spočívá v tom, že jednoduchou změnou kódu lze změnit simulaci na stlačitelné proudění a navržený postup je proto perspektivní i v případě simulace za zjednodušujících předpokladů.

### Proudění mezi deskami

V nejjednodušším případě bez elastické struktury jde o model podobný proudění mezi deskami. Toto proudění se řídí Hagenovým-Poiseuillovým zákonem. Tento model použijeme k testování výpočetního modulu na proudění. Podle Hagenova-Poiseuillova zákona pro laminární proudění mezi dvěma pevně ukotvenými deskami vzdálenými  $2h$  (což odpovídá našemu 2D případu) totiž platí vztah [10, s. 573]

$$v_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (h^2 - y^2). \quad (17)$$

Tento vztah bude východiskem pro všechny formulace zahrnující rychlostní profil na vstupu. Lze totiž očekávat, že proudění v průdušnici před vstupem do subglotálního prostoru bylo ustálené a mělo profil odpovídající proudění mezi

deskami. Označíme-li nejvyšší rychlost  $v_{\max}$  a posuneme-li vhodně souřadnou soustavu, lze výraz pro proudění mezi deskami zapsat ve tvaru

$$v_x = v_{\max} \cdot 2 \frac{y}{h} \left[ 1 - \left( \frac{y}{2h} \right) \right]. \quad (18)$$

### Okrajové podmínky

Nyní se věnujme okrajovým podmínkám (s výjimkou interakční hranice, o které pojednám samostatně ve stati 3.7). Tekutina je vymezena oblastí  $\Omega_{\mathbf{x}}^F$  a je ohraničena stěnami trubice  $\Gamma_0^F$ , vstupní hranicí  $\Gamma^{\text{in}}$ , kde jsou předepsány parametry vstupního proudění (např. rychlostní profil), výstupní hranicí  $\Gamma^{\text{out}}$ , která je považována za volnou, a interakční hranicí  $\Gamma^{\text{int}}$ , kde se stýká se strukturou.

Na stěnách trubice  $\Gamma_0^F$  platí jednoduchá podmínka přilnavosti tekutiny k povrchu [10, s. 557]

$$\mathbf{v} = 0, \mathbf{x} \in \Gamma_0^F. \quad (19)$$

Dále jde zejména o okrajové podmínky na vstupu a výstupu vzduchové trubice. Zejména na výstupu jsou podmínky do jisté míry umělé, neboť mají vystihovat spíše charakter proudění ve velké vzdálenosti (tzv. *far field condition*) než přesný průběh veličin v konkrétním bodě [18, s. 387]. Práce [40] uvádí okrajové podmínky ve tvaru

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = p_{\text{in}} \mathbf{n} & \text{v } \Gamma^{\text{in}}(t) \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = p_{\text{out}} \mathbf{n} & \text{v } \Gamma^{\text{out}}(t) \end{cases} \quad (20)$$

Jde o tzv. podmínku nulové trakce (*free stream or „do-nothing“ or traction-free condition*). Alipour a kol. [1, s. 337] rekapituluji různé okrajové podmínky a dospívají k závěru, že podmínku vstupního a výstupního tlaku (20) používá velká část zkoumaných studií.

Podmínku bezsilového proudění lze ovšem vystihnout i předepsáním rychlosti (rychlostního profilu) ve velké vzdálenosti, což nakonec využijí u vstupního profilu v této práci [5, s. 8] [58] [59, s. 15]. V této práci je cílem modelovat systém pomocí metody konečných prvků, konkrétně pomocí počítačového programu Elmer a jeho výpočetních modulů. Podle doporučení jeho tvůrců program lépe reaguje na přímé zadání rychlostního profilu na vstupu spíš než na okrajovou podmínku s tlakem, a proto budu toto doporučení respektovat. Vyjdu tedy z výše uvedeného vztahu (17) pro rychlostní profil a empirických dat.

Při simulaci nestlačitelných NS rovnic se v poslední době stále více vychází ze stabilizované okrajové podmínky na výtoku. [9] [19, s. 34] Ve stabilizované podmínce vystupují pouze rychlosti ve směru výtoku. Šidlof používá pro vstup parabolický rychlostní profil a „do-nothing“ podmínku pro výstup, resp. *downstream condition* [68, s. 25, 33]. Konkrétní tvar *downstream* podmínky Šidlof odvozuje



ze slabé formulace problému. Takovou podmínku používá Šidlof [69, s. 292] spolu s Neumannovou podmínkou na rychlost u vstupu a výstupu. Obdobnou podmínkou ve tvaru

$$(p - p_{\text{ref}}) \mathbf{n} - \nu \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^- \mathbf{v} = 0, \quad (21)$$

uvádí článek Valáška a kol. [79, rov. 10]. V této podmínce  $\nu$  je kinematická viskozita,  $(A)^- = \min\{A, 0\}$  a  $p_{\text{ref}} = 0$  bez újmy na obecnosti.

Obdobnou podmínku na výtok používají i Feistauer a kol. [18, s. 328]. Je však třeba doplnit, že tyto stabilizační podmínky jsou vytvořeny speciálně pro nestlačitelné proudění (viz tam citované zdroje). Fouchet [19, s. 34] uvádí, že důvodem je zabránit vtoku kinetické energie (která zbortí simulaci, viz příklad na obr. 9). Podle posledního citovaného článku je také možné stabilizační člen přenásobit numerickým parametrem  $\varkappa$ , který vystihuje míru umělého tlumení zpětného vtoku. Je třeba volit spíše menší hodnoty, protože se tím zároveň řešení modifikuje. Celkem lze tedy podmínku na výtok podle Feistauera a kol. [18, s. 328] doplněnou o koeficient útlumu zpětného proudění psát ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \varkappa \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^- \mathbf{v} = 0. \quad (22)$$

Pro stlačitelné proudění na výstupu uvádí Feistauer a kol. [18, s. 372] jednoduchou okrajovou podmínku  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ , doplněnou o Neumannovu podmínku na teplotu (jde o speciální případ, kdy je výstupní tlak nulový).

Ohledně výstupu tedy vycházím z uvedené literatury a doporučení autorů programu Elmer a použiju zde *do-nothing* podmínku nulové trakce se stabilizací (22). Paralelně jsem také zkoušel *do-nothing* podmínku bez stabilizace, resp. Neumannovu okrajovou podmínku v Rannacherově učebnici [59, s. 16] (doporučovanou autory Elmeru pro stacionární proudění)

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{v} &= 0 \\ \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{v} &= 0, \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{out}}, \end{aligned}$$

nicméně docházelo ke zpětnému proudění (viz dále obr. 9), resp. proudění nebylo vůbec věrné, a proto jsem od těchto okrajových podmínek ustoupil.

### 3.6 Elastická struktura

---

Elastickou strukturou jsem se podobně zabýval v bakalářské práci [48] a není důvodu se od uvedených pasáží odchytil. Proto je pro účely této práce pouze stručně připomenuto.

## Značení

Struktura je modelována v Lagrangeově popisu, ve kterém vystupují mimo jiné derivace  $\nabla_{\mathbf{X}}$  podle materiálového indexu  $\mathbf{X}$ , jak je obvyklé v teorii pružnosti. Výslovně upozorňuji na tento rozdíl, aby nedocházelo k záměně s derivacemi  $\nabla_{\mathbf{x}}$  podle laboratorní souřadnice  $\mathbf{x}$ , které jsou typické pro Eulerův popis a konvektivní člen. Rovnice v této podkapitole platí pro oblast  $\Omega^S$  s hranicí  $\partial\Omega^S = \Gamma^S$ , typicky vyjádřenou v materiálových souřadnicích  $\Omega^S = \Omega_{\mathbf{X}}^S$ .

## Transformace hustoty

Uvažujeme-li element hmotnosti  $dm$ , lze ho vyjádřit pomocí laboratorních  $dm = \rho dv$  i materiálových souřadnic  $dm = \rho_0 dV$ , kde  $\rho_0$  označuje hustotu v materiálových souřadnicích, zpravidla hustotu na počátku děje. Hmotnost se ale pouhou transformací systému změnit nemůže! Dosazením  $JdV = dv$  z (5) dostáváme kýžené vyjádření aktuální hustoty v Lagrangeově popisu

$$\rho_0 = J\rho. \quad (23)$$

## Pohybová rovnice

Vzhledem k tomu, že jde o základ prováděné simulace, považuji za vhodné rekapitulovat fyzikální východiska modulu *Finite Elasticity* v počítačovém programu Elmer podle manuálu [56, s. 46]. Modul je nazván podle teorie konečné deformace – v protikladu k teorii pružnosti pro nekonečně malé výchylky. V bakalářské práci [48, s. 27] jsem totiž dospěl k závěru, že uvažování velkých deformací (a tím pádem i složitějších nelineárních rovnic) je třeba.

Nelinearita modelu spočívá v geometrii. Jak je obecně známo [10, s. 130], tenzor konečné deformace  $\mathbf{E}$  je kvadratickou formou na prostoru vektorů v materiálové konfiguraci, která udává druhou mocninu změny vzdálenosti dvou infinitezimálně blízkých bodů v laboratorní konfiguraci

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u})^\top + (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u})^\top \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}), \quad (24)$$

kde značím  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$  posunutí bodu materiálu vůči jeho výchozí poloze. Nelinearitu zakládá poslední uvedený člen, kterým se tenzor konečné deformace odlišuje od tenzoru malých deformací.

V modulu *Finite Elasticity* [56, s. 46] uvažují **pohybovou rovnici** ve tvaru

$$\rho_0 \left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right|_{\mathbf{X}} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (25)$$

kde dále značím  $\rho_0$  počáteční hustotu materiálu,  $\mathbf{S} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C})$  Piola-Kirchhoffův

tenzor napětí prvního druhu,  $\bar{\mathbf{S}}$  Piola-Kirchhoffův tenzor napětí druhého druhu,  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}$  deformační gradient a  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$  Greenův tenzor deformace.

Pro úplnost naznačím, proč tato rovnice vyplývá z výše uvedeného zákona zachování hybnosti (12). V Lagrangeově popisu totiž referenční souřadnice  $\boldsymbol{\chi}$  splývají s materiálovými  $\mathbf{X}$  a konvektivní rychlost  $\mathbf{c} = 0$  (viz str. 18). Proto lze zákon zachování hybnosti přepsat do tvaru

$$\rho \left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0.$$

Poslední rovnici vynásobíme elementem objemu  $dv$  a rovnici (25) elementem objemu v původní konfiguraci  $dV$ , zohledníme transformační vztahy uvedené v kapitole 3.3 a definiční vlastnosti uvedené v tab. 2 a následně dospějeme k tomu, že obě rovnice vyjadřují zákon zachování hybnosti  $dm \frac{d\mathbf{v}}{dt} = d\mathbf{f}$  pro částici materiálu.

## Homogenní reologie

Rovnice (25) je formulována pro Piola-Kirchhoffův tenzor prvního druhu. Teorie pružnosti přitom obvykle vychází z konstitutivního vztahu pro Piola-Kirchhoffův tenzor druhého druhu

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{E}) = \lambda_1 \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\lambda_2 \mathbf{E}, \quad (26)$$

kde  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$  je (Lagrangeův) tenzor konečných deformací a  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou Lamého koeficienty (změřené vlastnosti materiálu). Piola-Kirchhoffovy tenzory jsou mezi sebou propojeny (viz definiční vztahy v tabulce 2) vztahem

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}. \quad (27)$$

Spokojíme se tedy modelem, který má lineární závislost reologie na deformaci. Tato lineární reologie se obvykle nazývá Saint Venantův–Kirchhoffův model. U deformace hlasivek je tento předpoklad často používán, případně je modifikován vrstevnatou strukturou, která odpovídá jednotlivým druhům tkáně (povrchová vrstva až svalová vrstva). Lamého koeficienty v (26) lze vypočítat

$$\lambda_1 = \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)}, \quad \lambda_2 = \frac{E}{2(1+\eta)}, \quad (28)$$

kde  $E$  je Youngův modul a  $\eta$  je Poissonovo číslo daného materiálu. [56, s. 49]

Ve své bakalářské práci [48] jsem podrobně rekapituloval možnosti složitější reologie, kterou je možné do programu Elmer implementovat – zásadním limitem je zde ovšem chybějící věrohodné měření příslušných konstant. Věrohodné mě-

ření konstant v nelineárním vztahu např. pro relativně tenkou vrstvu epitelu se ukazuje jako náročné.

### Předpoklady rovinného problému

Vzhledem k tomu, že modelujeme hlasivku ve 2D, je třeba ještě zvolit vhodné zjednodušující předpoklady rovinného problému [38, s. 329]. Obvykle se rozlišují rovinné napětí (*plane stress*) a natažení (*plane strain*). Na náš případ je aplikovatelné rovinné natažení, ve kterém je rovina, ve které dochází k natažení, mnohem menší než kolmá délka předmětu. Jak jsem uvedl v bakalářské práci [48, s. 10], „pro řešení je podstatné, že hlasivky se během fonace prodlužují řádově srovnatelně se svojí velikostí. Vzhledem k tomu, že tento problém řešíme pouze dvourozměrně, nemůžeme uvažovat napětí, které v hlasivkách vzniká ve směru kolmém na rovinu řešení. Na velikosti příčného napětí také závisí masa hlasivky, která kmitá, takže se od příčného napětí odvíjí také výška tónu.“

Za podmínek rovinného natažení  $\varepsilon_{33} = 0$  lze třetí diagonální složku Cauchyho tenzoru napětí přepsat

$$\sigma_{33} = \eta (\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Jedním z relevantních [81] měřítek vnitřního napětí je skalár nazvaný von Misesovo napětí  $\sigma$ . V rovinném natažení ho lze vyjádřit vztahem

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \eta(\sigma_{11} + \sigma_{22}))^2 + (\sigma_{11} - \eta(\sigma_{11} + \sigma_{22}))^2 + 6\sigma_{12}^2}{2}}. \quad (29)$$

Poznámka: Z uvedeného vyplývá, že 2D model hlasivky nemůže správně předpovědět výšku tónu produkovanou při zadaném příčném napětí, nicméně má smysl ho zkoumat pro objasnění obecných principů při fonaci, srovnej diskusi v rámci kapitoly 2.2. Model popsany v této práci lze bez větších potíží rozšířit v programu Elmer i na 3D případ, rozhodně tedy nejde o neperspektivní přístup.

### Okrajové podmínky

Objem struktury je za prvé ohraničen pevnou hranicí  $\Gamma_0^S$  s ukotvením, kde se struktura nehýbe, tj. vektor posunutí

$$\mathbf{u} = 0 \text{ na } \Gamma_0^S. \quad (30)$$

Dále je ohraničen interakční hranicí  $\Gamma^{\text{int}}$ , kde se struktura stýká s tekutinou (viz dále kapitola 3.7).

Oproti modelu v bakalářské práci zahrnuji také vnitřní strukturaci hlasivky (epitel, ligament a sval) [71, s. 802]. To znamená, že se hlasivka skládá z několika

druhů materiálu  $S_1, S_2, \dots$ , z nichž každý má různé vlastnosti (Youngův modul, Poissonovo číslo, hustotu). V takovém případě je logické<sup>2</sup> se v okrajových podmínkách na rozhraní  $\text{int}\Gamma^S$  omezit na spojitost posunutí a zákon akce a reakce v silovém působení trakcí, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{S_1} &= \mathbf{u}^{S_2} \\ \boldsymbol{\sigma}^{S_1} \mathbf{n}^{S_1} &= -\boldsymbol{\sigma}^{S_2} \mathbf{n}^{S_2} \\ \Rightarrow \mathbf{S}^{S_1} \mathbf{N}^{S_1} &= -\mathbf{S}^{S_2} \mathbf{N}^{S_2}, \end{aligned} \quad (31)$$

kde  $\mathbf{S}^{S_1}$  je Piola-Kirchhoffův tenzor prvního druhu v materiálu  $S_1$  a dále  $\mathbf{N}^{S_1} = -\mathbf{N}^{S_2}$  je vnější normála vůči tělesu  $S_1$ .

### 3.7 FSI interakce

---

Poslední částí pro popis je interakční hranice  $\Gamma^{\text{int}}$ . Právě díky interakci mechanické struktury s tekutinou je kmitání hlasivek zajímavým biofyzikálním problémem. [5, 8] Interakci struktury a tekutiny nalezneme v řadě dalších různých problémů. Např. podobnou úlohou se pro nestlačitelnou tekutinu zabývá práce [40], která zkoumala proudění v tepně, přičemž proudící tekutina interagovala se stěnou tepny. Obecně je úloha řešena jako tutoriál v [56, s. 41]

Stejně jako v případě vnitřních hranic struktury musíme v okrajové podmínce požadovat spojitost rychlostí a trakcí. Okrajové podmínky pro interakci [40] na  $\Gamma^{\text{int}}$  uvažuje ve tvaru

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^F \mathbf{n}^F = -\boldsymbol{\sigma}^S \mathbf{n}^S \\ \mathbf{v}^F = \mathbf{v}^S, \end{cases} \quad (32)$$

kde  $\mathbf{n}^F$  je jednotkový vektor ve směru vnější normály  $\Omega^F$ . Tyto podmínky znamenají, že na styčné ploše dochází k rovnosti rychlostí (podmínka přilnavosti k povrchu pohybující se hlasivky) a rovnosti vzájemně opačně orientovaných trakcí. Tyto podmínky také použiju.

Při praktické implementaci metody konečných prvků v počítačovém programu Elmer se postupuje tak, že se rovnice integrují ve slabé formulaci v materiálových souřadnicích. Označme  $\mathbf{N}^S$  normálový vektor vnější normály v  $\Omega_{\mathbf{X}}^S$  v materiálových souřadnicích, potom již v (6) jsem odvodil Nansonův teorém, podle něhož je normálový vektor v aktuálních souřadnicích  $\mathbf{n}^S = J\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}^S$  (stačí si uvědomit, že normálový vektor lze ztotožnit s jednotkovou plochou). Výsledná trakce, kterou

---

<sup>2</sup>Podrobnější pojednání o podmínkách na rozhraních včetně vyjádření v referenční konfiguraci je např. v učebnici Zdeňka Martince [43, s. 49].

působí tekutina na strukturu, se vypočítá

$$\mathbf{t}^F = -\boldsymbol{\sigma}^F \mathbf{n}^S. \quad (33)$$

### 3.8 Shrnutí fyzikálních vztahů

---

Kompilací výsledků z předchozí části dostáváme následující:

#### Seznam základních proměnných

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$  rychlost proudění, kde  $\mathbf{x} \in \Omega_x^F$ ,

$p(\mathbf{x})$  tlak, kde  $\mathbf{x} \in \Omega_x^F$ ,

$\mathbf{u}(\mathbf{X})$  posunutí, kde  $\mathbf{X} \in \Omega_X^S$ .

Všechny další veličiny jsou odvoditelné pomocí již uvedených převodních vztahů (viz zejména tab. 2 a 3).

#### Seznam základních rovnic

nestlačitelnost tekutiny  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_x^F(t) \quad (11)$

Navierova-Stokesova rce  $\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + [\mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{v} \right) = \mathbf{x} \in \Omega_x^F(t) \quad (16)$   
 $-\nabla_{\mathbf{x}} p + \mu \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{v}$

pohybová rce struktury  $\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{X}} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{S} = 0 \quad \mathbf{X} \in \Omega_X^S \quad (25)$

#### Seznam okrajových podmínek

vstupní profil  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\text{in}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{\text{in}} \quad (17)$

přilnavost ke stěnám  $\mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0^F \quad (19)$

výtok  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} \varkappa \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^- \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{\text{out}} \quad (22)$

stabilní ukotvení  $\mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{X} \in \Gamma_0^S \quad (30)$

interakce  $\boldsymbol{\sigma}^F \mathbf{n}^F = -\boldsymbol{\sigma}^S \mathbf{n}^S \quad \mathbf{x} \in \Gamma^{\text{int}}(t) \quad (32)$

$$\mathbf{v}^F = \mathbf{v}^S$$

vnitřní rozhraní  $\mathbf{u}^{S_1} = \mathbf{u}^{S_2} \quad \mathbf{X} \in^{\text{int}} \Gamma^S \quad (31)$

$$\mathbf{S}^{S_1} \mathbf{N}^{S_1} = -\mathbf{S}^{S_2} \mathbf{N}^{S_2}$$

Konkrétní podoba rovnice pro umělou deformaci výpočetní oblasti v ALE metodě se může měnit (podrobně viz podkapitola 4.4 na straně 42).

## 4 Matematická formulace

---

Cílem této kapitoly je využít teoretické fyzikální poznatky z předchozí kapitoly a **převést rovnice do matematické podoby**, která je přímo numericky řešitelná. To znamená zejména přepsat rovnice do slabé formulace. Zatímco ve fyzice žádná doprovodná úloha na výpočet elasticity výpočetní sítě není, v matematické formulaci se bez ní neobejdeme, abychom mohli zavést konkrétní tvar pomocného zobrazení výpočetní oblasti  $\chi(\mathbf{X}, t)$  v ALE metodě. Na konci této kapitoly tedy budu mít kompletní matematickou formulaci problému, které numericky vyřeším na počítači, o čemž pojednává následující kapitola.

### 4.1 Schéma úlohy

---

Elmer je počítačový program postavený na simulaci jevů z různých fyzikálních oborů na principu tzv. slabé vazby. Zjednodušeně to znamená, že počítáme určitý fyzikální jev (proudění tekutiny, pohyb struktury, proudění tepla) samostatně. Vzájemné působení vyjádříme např. pomocí povrchových sil, spočítané veličiny dosadíme do ostatních modelů a tento postup iterujeme, dokud nedosáhneme konvergence. Takový přístup je výhodný pro modulární systém jako Elmer, na některé úlohy ale nemusí stačit (viz dále).

Počítače jsou nejlépe uzpůsobeny k numerickému řešení diskretizovaných úloh, které počítají s určitou přesností. Je několik způsobů, jak k diskretizaci přistupovat, ale výše popsaná slabá vazba vede k tomu, že diskretizujeme zvlášť čas a zvlášť prostor, zatímco obecně bychom mohli diskretizovat prostor a čas souběžně. Proto v této části uvádím slabou formulaci problému pro jeho jednotlivé části, nikoliv pro celý problém, jak se děje u tzv. monolitické formulace, která vhodně vystihuje silnou vazbu, ale je výpočetně náročnější [5, s. 111 a násl.] a především její rutiny nejsou implementovány v balíku Elmer. Obecně je známo, že některé problémy v oblasti FSI vyžadují monolitickou formulaci a pomocí slabé vazby není možné je nasimulovat. [77, 29]

Naším úkolem je formulovat fyzikální rovnice problému kmitání hlasivky pro slabé řešení. Je věcí přístupu programátora, aby zvolil takovou slabou formulaci problému, která mu umožní využít zamýšlené numerické metody. Programátoři Elmeru popisují svůj semidiskrétní přístup [5, s. 33] v programátorském tutoriálu [39, s. 12]. Stručně řečeno upraví rovnice do tvaru slabé formulace včetně případné stabilizace, zavedou přiblížení pomocí konečných prvků a linearizují rovnice pomocí iterací. Následně zařadí do rovnic první nebo druhou časovou derivaci pomocí standardizovaných metod.

Nyní shrnu schéma úlohy do úrovně nutné pro pochopení významu slabých formulací jednotlivých dílčích úloh multifyzikálního problému [62, s. 8]:

## 1) Časová smyčka

Zadaný interval  $t \in (0, T)$  se rozdělí na shodné intervaly šířky  $\Delta t$ . Úkolem v rámci časové smyčky je vypočítat vždy následující řešení  $\mathcal{S}(t_k + \Delta t)$  při znalosti všech předchozích časových kroků. Pro tento účel se využívá algoritmů semidiskretizace: pro první časovou derivaci Eulerova implicitní metoda, pro druhou časovou derivaci Bossakova metoda, viz dále).

## 2) Spřažená iterace

Iteraci uvnitř časového kroku nazýváme **spřaženou iterací** (od angl. *coupling* = vazba). Cílem spřažené iterace je dosáhnout řešení celého problému pomocí více řešičů. Každý řešič řeší dílčí úlohu multifyzikálního problému. Spřažená iterace končí, jakmile je dosažena požadovaná tolerance relativní chyby  $\varepsilon_{\text{cpl}}$ . Výstupem dané iterace je lineární kombinace starého a nového řešení, přičemž koeficient u nového řešení je tzv. relaxační faktor spřažené iterace, který může být v případech náročné konvergence i tak nízký jako 0,1. Výstup jedné iterace vstupuje jako výchozí řešení do dalšího opakování. U spřažených multifyzikálních problémů, jako je simulace hlasivek, je vhodné provést pouze jednu nelineární iteraci a naopak iterovat vícekrát na úrovni spřažených řešičů.

## 3) Nelineární iterace

Část řešiče, který řeší nelineární rovnici  $F(u) = 0$  pomocí iterací linearizované rovnice, nazýváme **nelineární iterací** (příčinou nelinearity může být např. konvektivní člen v NS rovnici nebo geometrická nelinearita u velkých deformací). Nelineární iterace využívá např. Newtonovu nebo Pircardovu metodu, kterou se problém převede na iterace lineárního problému.

## 4) Lineární iterace

V rámci linearizovaného systému může ještě v úvahu připadat tzv. **lineární iterace**, která se používá pro řešení velkých soustav rovnic, ale v této implementaci není lineární iterace třeba, protože k řešení soustav se používá přímý řešič.

## 4.2 Navierovy-Stokesovy rovnice

---

Níže popsany postup pro slabou formulaci a diskretizaci používaný v programu Elmer vychází z manuálu [44, s. 77] a stabilizace uvedená v článku od autorů Franca a kol. [20, s. 211], dále z obecných pojednání [16] [18, s. 331 a násl.] [59, s. 43]. Při přípravě této podkapitoly jsem také vyšel ze svých poznámek z přednášek prof. Feistauera (přičemž případné chyby zůstávají na mé straně).



## Slabá formulace

Konvence pro stručnost platná po zbytek podkapitoly: Pišme stručně  $\Omega := \Omega_{\mathbf{x}}^F$ , kdykoliv není pochybností. Definujme dále následující značení

$$a, b \in L^2(\omega \subset \Omega) \Rightarrow (a, b)_\omega = \int_\omega ab \, d\omega.$$

Není-li uvedeno jinak, pokládám dále  $\mathbf{v} := \mathbf{v}^{n+1}$  a skalární součin  $(a, b) := (a, b)_\Omega$ , uvažuji kinematický tlak  $p := p/\rho$  (totéž pro napětí) a kinematickou viskozitu  $\nu = \mu/\rho$ , neuvádím index u gradientu  $\nabla := \nabla_{\mathbf{x}}$ . Pokud ve skalárním součinu vystupují vektory, resp. matice, rozumíme tím pod integrálem obvyklý skalární součin „ $\cdot$ “, resp. dvojný skalární součin „ $\cdot\cdot$ “ (tak, aby výsledkem byl vždy skalar). Dále počítejme s formou  $c(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = ([\mathbf{c} \cdot \nabla] \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , což je trilineární spojitá forma na  $\mathbf{V}^3$  antisymetrická v posledních dvou argumentech, která vystihuje konvekci. Necht  $H^1(\Omega)$  je Sobolevův prostor  $L_2$  funkcí s  $L_2$  derivací na  $\Omega$  a  $H_0^1$  je jeho podprostor funkcí s nulovou stopou na  $\partial\Omega$ . Forma na  $H^1$  definovaná  $((\mathbf{v}, \mathbf{w})) = (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w})$  je potom skalárním součinem na  $H_0^1$ . [16, s. 16 a násl.]

Označíme-li rychlost výpočetní oblasti  $\hat{\mathbf{v}}$ , pak program podle dokumentace [56, s. 22] používá v konvektivním členu aproximaci

$$[(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla] \mathbf{v} \approx [(\mathbf{v}_n - \hat{\mathbf{v}}) \cdot \nabla] \mathbf{v}_{n+1},$$

kde  $\mathbf{v}_n$  je rychlostní pole v předchozí iteraci. Jde o tzv. Picardovu iteraci [59, s. 48], která je pouze prvního řádu a konverguje spíše pomaleji. Na této úrovni tedy probíhá tzv. nelineární iterace, neboť touto iterací se z rovnice odstraňují nelinearity (u NS rovnice se nazývá Oseenova iterace [68, s. 31]). V rámci této iterace ovšem můžeme rychlost  $\mathbf{c} = \mathbf{v}_n - \hat{\mathbf{v}}$  považovat za konstantu.

Připomeňme, že okrajové podmínky se rozpadají na hranici s Dirichletovou a Neumannovou podmínkou  $\Gamma^F = \Gamma^D \cup \Gamma^N$ , přičemž tyto hranice mají společné jen krajní body, a lze je v rámci  $\Gamma^F$  rozepsat  $\Gamma^D = \Gamma_0^F \cup \Gamma^{\text{in}}$  a  $\Gamma^N = \Gamma^{\text{int}} \cup \Gamma^{\text{out}}$ . Definujme v návaznosti na to následující vektorové prostory: [20, s. 211] [18, s. 331 a násl.]

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= H^1(\Omega_{\mathbf{x}}^F) \times H^1(\Omega_{\mathbf{x}}^F) \\ \mathbf{V}_0 &= \{\mathbf{w} \in \mathbf{V} : \mathbf{x} \in \Gamma^D \Rightarrow \mathbf{w} = 0\} \\ Q &= L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), (q, 1) = 0\} \end{aligned}$$

V úloze (16) vystačíme se semidiskretizací času (implicitní Eulerovou meto-

dou<sup>3</sup>)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t}, \Delta t = t_{n+1} - t_n, \mathbf{v}^n \approx \mathbf{v}(t_n), \quad t_1, \dots, t_N \in (0, T),$$

kde  $T$  je čas simulace. V rámci uvedené konvence dojde k následujícímu zjednodušení notace:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + \rho [\mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}] \mathbf{v}^{n+1} &= -\nabla_{\mathbf{x}} p^{n+1} + \mu \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{v}^{n+1} \\ \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + [\mathbf{c} \cdot \nabla] \mathbf{v} &= -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}', \quad (\text{nová konvence}) \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}, p \in Q$  a  $\boldsymbol{\sigma}'$  je dáno vztahem (15). Spolu s tím musí být splněna podmínka  $\mathbf{v} - \mathbf{v}^* \in \mathbf{V}_0, \mathbf{v}^* \in \mathbf{V}$ , kde funkce  $\mathbf{v}^*|_{\Gamma^D}$  vystihuje Dirichletovu podmínku na  $\Gamma^D$ . Hledáme  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  takové, aby pro libovolné  $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_0, q \in Q$  platila [39, s. 12] rovnice pro hybnost ve slabé formulaci

$$\left( \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}^n}{\Delta t}, \mathbf{w} \right) + c(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}', \mathbf{w}),$$

resp. rovnice zachování hmotnosti ve slabé formulaci

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow -(q, \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Na hranici  $\Gamma^N = \Gamma^{\text{int}} \cup \Gamma^{\text{out}}$  známe působící sílu  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}$ . Ve výše uvedené rovnici je druhá derivace  $\mathbf{v}$  v napětovém členu, kterou potřebujeme odstranit. Proto použijeme Greenovu větu

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}', \mathbf{w}) &= (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}', \mathbf{w})_{\Gamma_N} - (\nabla \mathbf{w}, \boldsymbol{\sigma}') \\ &= (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})_{\Gamma_N} - \left( \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v})^{\top}, \mathbf{w} \right)_{\Gamma_N} - (\nabla \mathbf{w}, -p \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{g}, \mathbf{w})_{\Gamma_N} - \left( \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v})^{\top}, \mathbf{w} \right)_{\Gamma_N} + (p, \nabla \cdot \mathbf{w}) - \nu ((\mathbf{v}, \mathbf{w})) \end{aligned} \quad (34)$$

Celkem tedy máme pro neznámou  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  soustavu  $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}_0, \forall q \in Q$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathbf{v}}{\Delta t}, \mathbf{w} \right) + c(\mathbf{c}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \nu ((\mathbf{v}, \mathbf{w})) - (p, \nabla \cdot \mathbf{w}) + \left( \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v})^{\top}, \mathbf{w} \right)_{\Gamma_N} &= F(\mathbf{w}) \\ - (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) &= 0, \quad (35) \end{aligned}$$

kde  $F(\mathbf{w}) = \left( \frac{\mathbf{v}^n}{\Delta t}, \mathbf{w} \right) + (\mathbf{g}, \mathbf{w})_{\Gamma_N}$ . Prostřednictvím tohoto vyjádření se do slabé

---

<sup>3</sup>Z vyjádření autorů [54] i kontroly zdrojového kódu vyplývá, že lze volit pouze časovou diskretizaci s přesností do prvního řádu, neboť v přesnějších metodách nejsou zahrnuty efekty vyplývající z ALE zobrazení.

formulace dostane i *downstream* podmínka (22). První člen na levé straně slabé formulace (35) pochází ze zrychlení, druhý člen je konvektivní (oba v ALE formulaci), třetí člen difuzní, čtvrtý člen tlakový a poslední člen vznikl kvůli vhodné formulaci okrajové podmínky; pravá strana odpovídá semidiskretovanému času a okrajové podmínce. Ze slabé formulace (35) je zřejmý význam dříve zmíněné okrajové podmínky  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ , neboť tato podmínka nuluje prostřední člen pravé strany. (Tento člen můžeme také vhodně rozepsat do normálové a tečné složky [59, s. 44].)

## Diskretizace

Pro diskretizaci se používá standardní Galerkinova metoda. Diskretizace spočívá v tom, že prostory funkcí jsou nahrazeny jen konečně rozměrnými prostory funkcí,  $\mathbf{V} \approx \mathbf{V}_h, \mathbf{V}_0 \approx \mathbf{V}_{0h}, Q \approx Q_h$ , přičemž tučné označení má připomínat vektorovou povahu  $\mathbf{V}_h = V_h \times V_h$ . Obdobně jsou aproximována vstupní data. Označme báze těchto prostorů následovně:

$$\begin{aligned} Q_h &= \text{span} \{q_1^*, \dots, q_n^*\} \\ V_{0h} &= \text{span} \{w_1, \dots, w_m\} \\ \mathbf{V}_{0h} &= \text{span} \{(w_1, 0), (0, w_1), \dots, (w_m, 0), (0, w_m)\} \\ &\equiv \text{span} \{\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_{2m}^*\} \end{aligned}$$

Do obecné rovnice (35) dosadíme vyjádření pomocí nových souřadnic  $(\tilde{v}_i, \tilde{p}_i)$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h &= \mathbf{v}_h^* + \sum_{i=1}^{2m} \tilde{v}_i \mathbf{w}_i^* \\ p_h &= \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i q_i^* \end{aligned}$$

a zvolíme speciální volbu  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_i^*$  a  $q = q_i^*$ , takže lze bez problémů vyčíslit člen  $F(\mathbf{w}_i^*)$  v rovnici (35). V zájmu zjednodušení nepíšu explicitně souřadnicové složky, ale omezují se na indexy  $i, j$  náležející různým bázím (stupňům volnosti). V explicitním vyčíslení je samozřejmě třeba matice sestavit i se souřadnicemi.

Z jednotlivých členů pak dostaneme

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathbf{v}_h}{\Delta t}, \mathbf{w}_i^* \right) &= \sum_{j=1}^{2m} v_j \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) + \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*) \\ &\equiv \frac{(\mathbb{M}\tilde{\mathbf{v}})_i}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_i^*) &= c\left(\mathbf{c}, \mathbf{v}_h^* + \sum_{j=1}^{2m} v_j \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*\right) = c(\mathbf{c}, \mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*) + \sum_{j=1}^{2m} v_j c(\mathbf{c}, \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) \\
&\equiv (\mathbb{C}\tilde{\mathbf{v}})_i + c(\mathbf{c}, \mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*) \\
\nu((\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_i^*)) &= \nu\left(\left(\mathbf{v}_h^* + \sum_{j=1}^{2m} v_j \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*\right)\right) = \nu((\mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*)) + \sum_{j=1}^{2m} v_j \nu((\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*)) \\
&= (\mathbb{A}\tilde{\mathbf{v}})_i + \nu((\mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*)) \\
-(p_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^*) &= -\sum_{j=1}^n p_j (q_j^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^*) \equiv (\mathbb{B}\tilde{\mathbf{p}})_i \\
(q_i^*, \nabla \cdot \mathbf{v}) &= (q_i^*, \nabla \cdot \mathbf{v}_h^*) + \left(q_i^*, \sum_{j=1}^{2m} v_j \nabla \cdot \mathbf{w}_j^*\right) = (q_i^*, \nabla \cdot \mathbf{v}_h^*) + (\mathbb{B}^\top \tilde{\mathbf{v}})_i, \\
\left(\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v})^\top, \mathbf{w}_i^*\right)_{\Gamma_N} &= \left(\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_h^*)^\top, \mathbf{w}_i^*\right)_{\Gamma_N} + \sum_{j=1}^{2m} \tilde{v}_j \left(\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{w}_j^*)^\top, \mathbf{w}_i^*\right)_{\Gamma_N} \\
&= \left(\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_h^*)^\top, \mathbf{w}_i^*\right)_{\Gamma_N} + (\mathbb{N}\tilde{\mathbf{v}})_i
\end{aligned}$$

kde tildou jsem opět označil souřadnicové sloupcové vektory  $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{p}}$  a  $\mathbb{M}$  značí matici hmotnosti. Vidíme, že všechny členy jsou buďto na těchto souřadnicových vektorech nezávislé anebo jsou dány nějakou maticí. Slabou formulaci (35) dvou rovnic lze potom uspořádat do následující matice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbb{M}}{\Delta t} + \mathbb{C} + \mathbb{A} + \mathbb{N} & \mathbb{B} \\ \mathbb{B}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}' \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

kde máme dva nové sloupcové vektory

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'_i &= F(\mathbf{w}_i^*) - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*) - c(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*) - \nu((\mathbf{v}_h^*, \mathbf{w}_i^*)) - \left(\mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}_h^*)^\top, \mathbf{w}_i^*\right)_{\Gamma_N} \\
\mathbf{G}_i &= -(q_i^*, \nabla \cdot \mathbf{v}_h^*),
\end{aligned}$$

do kterých jsme posbírali absolutní členy. Soustava rovnic (36) je řešitelná za podmínky regulárnosti. Konvektivní člen způsobuje, že je obecně nesymetrická.

Počítačový program Elmer v sobě obsahuje rutinu [39, s. 14], která vypočítá jednotlivé příspěvky po elementech v rámci soustavy (36). Je třeba si uvědomit, že nenulových bázových funkcí je zpravidla velmi malý počet a tedy lze sestavit lokální matici, která se teprve následně poskládá do globálního lineárního systému.

Integrál na elementu se počítá pomocí Gaussovy kvadratury. Funkční hodnoty jsou vyhodnoceny na standardizovaném elementu a pomocí definované transformace jsou přeneseny na skutečný element.

## Stabilizace

Pro tuto úlohu Franca a kol. [20] dovozují konkrétní podobu slabé formulace, ze které vyjdeme (tam zjednodušeně uvažované s Dirichletovou podmínkou), přičemž podrobnosti jsou popsány v manuálu [44, s. 80], ze kterého shrnu podstatné části. Ke slabé formulaci (35) přibude nový stabilizační člen, který má tvar

$$\sum_K \int \tau R(\mathbf{v}, \mathbf{c}, p, t) (-\nabla q - \nu (\Delta \mathbf{w} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w})) + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{w}) \, d\Omega,$$

kde  $K$  označuje jednotlivé elementy triangulace a  $R(\mathbf{v}, \mathbf{c}, p, t)$  je reziduum NS rovnic

$$R(\mathbf{v}, \mathbf{c}, p, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - \nu (\Delta \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})) + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{f}.$$

Výše uvedená suma probíhá přes všechny prvky triangulace a integruje se po vnitřku prvku. Dále se ke slabé formulaci přidává stabilizační člen vyplývající z rovnice zachování hmotnosti

$$\sum_K \int \delta (\nabla \cdot \mathbf{v}) (\nabla \cdot \mathbf{w}) \, d\Omega.$$

Stabilizační parametry volíme následovně

$$\begin{aligned} \delta(K) &= \|\mathbf{c}\| h_K \text{Re}_x \\ \tau(K) &= \frac{h_K \text{Re}_x}{2 \|\mathbf{c}\|} \\ \text{Re}_x(K) &= \min \left( \frac{m_K \|\mathbf{c}\| h_K}{4\nu}, 1 \right), \end{aligned}$$

kde  $h_K$  je průměr konečného prvku a  $m_K$  stupeň interpolace. Pochopitelně i členy ve stabilizaci je třeba diskretizovat, což se provede přímočaře dosazením. Pro referenci zde odkazuji na manuál [44, s. 81], kde je úplný seznam diskretizace všech stabilizačních členů.

## 4.3 Deformace struktury

---

Při popisu deformace je třeba mít na zřeteli, že úlohu řešíme v materiálových souřadnicích  $\mathbf{X}$ . Ačkoliv popis podaný v mé bakalářské práci [48, s. 19] je sice správný, uvažoval jsem tam ve slabé formulaci pro jednoduchost jen lineární geometrii, ve které lze snadno napsat rovnice v laboratorních souřadnicích  $\mathbf{x}$ . V materiálových souřadnicích však rovnice vypadají odlišně. [5, s. 17 a násl.] Vyjdu tedy z modelu Lagrangeovy formulace deformací s velkými výchylkami imple-

mentovaného v počítačovém programu Elmer. [56, s. 47]

Konvence: V této podkapitole uvažujeme  $\Omega = \Omega_{\mathbf{X}}^S$ ,  $\mathbf{u} := \mathbf{u}_{k+1}$  a dále obdobnou konvenci jako v minulé kapitole.

### Slabá formulace

Definujeme obdobně jako u tekutiny následující prostory

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= H^1(\Omega_{\mathbf{X}}^S) \times H^1(\Omega_{\mathbf{X}}^S) \\ \mathbf{V}_0 &= \{\mathbf{w} \in \mathbf{V} : \mathbf{x} \in \Gamma_0^S \Rightarrow \mathbf{w} = 0\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Hledáme posunutí  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$  tak, aby pro libovolnou vektorovou funkci  $\mathbf{W} \in \mathbf{V}_0$  na  $\Omega_{\mathbf{X}}^S$  platila rovnice (25) ve slabé formulaci

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{X}} &= \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{S} \\ (\mathbf{W}, \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}) &= (\mathbf{W}, \nabla \cdot \mathbf{S}) = (\mathbf{W}, \mathbf{N} \cdot \mathbf{S})_{\Gamma^N} - (\nabla \mathbf{W}, \mathbf{S}) \\ (\mathbf{W}, \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}) + (\nabla \mathbf{W}, \mathbf{S}) &= (\mathbf{W}, \mathbf{N} \cdot \mathbf{S})_{\Gamma^N} = F(\mathbf{W}). \end{aligned} \quad (38)$$

V této rovnici bude první člen s materiálovou časovou derivací  $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{X}}$  později diskretizován Bossakovou metodou, poslední člen je vhodné vždy vyjádřit implicitně tak, aby jeho nelineární závislost mohla být aproximována iterativně.

Elmer to podle dokumentace [56, s. 47] provádí tak, že funkční hodnotu  $\mathbf{S}(\mathbf{F}_{k+1})$  rozepíše pomocí směrové derivace  $D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k)[\Delta\mathbf{F}]$ , kde  $\Delta\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_{k+1} - \mathbf{F}_k = \nabla \mathbf{u}_{k+1} - \nabla \mathbf{u}_k$ . (Směrová derivace je lineární zobrazení, které reprezentuje první člen Taylorova rozvoje funkce  $\mathbf{S}(\mathbf{F}_{k+1})$  kolem bodu  $\mathbf{S}(\mathbf{F}_k)$  v zadaném směru. Lze ji zapsat pomocí dvojného skalárního součinu (kontrakce v obou indexech)  $D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k)[\Delta\mathbf{F}] = (\Delta\mathbf{F} : \nabla_{\mathbf{F}} \mathbf{S}(\mathbf{F}))|_{\mathbf{F}_k}$ .<sup>4</sup> Celkem lze tedy aproximovat

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{F}_{k+1}) &= \mathbf{S}(\mathbf{F}_k) + D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k)[\Delta\mathbf{F}] \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{F}_k) + D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k)[\mathbf{u}_{k+1}] - D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k)[\mathbf{u}_k] \end{aligned}$$

Rovnici (38) platnou pro  $\forall \mathbf{W} \in \mathbf{V}_0$  proto přepíšeme s využitím konvence  $\mathbf{u} := \mathbf{u}_{k+1}$  do tvaru

$$(\mathbf{W}, \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}) + (\nabla \mathbf{W}, \mathbf{S}(\mathbf{F}_k) + D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k)[\mathbf{u}] - D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k)[\mathbf{u}_k]) = F(\mathbf{W})$$

a diskretizujeme s bází  $\mathbf{W}_i^* \in \mathbf{V}_{0h}$ ,  $\mathbf{u} = \sum_j \tilde{u}_j \mathbf{W}_j^*$ . Díky tomu dostaneme matri-

<sup>4</sup>Další část dokumentace [56] je však zavádějící, protože se patrně týká nelineárního modelu reologie. Proto následující popis vychází z teorie a rozboru zdrojového kódu programu.

covou rovnicí

$$\mathbb{M} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \mathbb{K} \tilde{u} = F,$$

kde  $\tilde{u}$  je sloupcový vektor souřadnic v rozvoji do báze,  $\mathbb{M}$  je matice hmotnosti,  $\mathbb{K}$  je matice tuhosti a  $F$  je vektor pravé strany. Tyto veličiny jsou dány následujícími vzorci:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{ij} &= (\nabla \mathbf{W}_i^*, D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k) [\mathbf{W}_j^*]) \\ \mathbb{M}_{ij} &= \rho_0 (\mathbf{W}_i^*, \mathbf{W}_j^*). \end{aligned} \quad (39)$$

K pravé straně  $F(\mathbf{W})$  přičteme zbývající člen  $(\nabla \mathbf{W}_i^*, D\mathbf{S}(\mathbf{F}_k) [\mathbf{u}_k] - \mathbf{S}(\mathbf{F}_k))$ . Počítačový program Elmer obsahuje rutinu, která adekvátním způsobem připočte k pravé straně matice členy odpovídající Neumannově podmínce na  $\Gamma^N = \Gamma^{\text{int}}$ , kde platí (33). Nelinearity jsou aproximovány pomocí hodnoty funkce v minulém kroku iterace. Zbývající Dirichletova podmínka je již zahrnuta v podmínce (37).

Lokální maticovou rovnici lze rozšířit o tzv. Rayleighovo tlumení, takže má celková rovnice tvar

$$\mathbb{M} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \mathbb{D} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \mathbb{K} \tilde{u} = F, \quad (40)$$

kde matice Rayleighova tlumení je definována vztahem

$$\mathbb{D} = \alpha \mathbb{M} + \beta \mathbb{K}, \quad (41)$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou koeficienty tlumení. Jejich určení může být někdy složité (pro kmitání hlasivek řádově  $\{\alpha\} = 100$ ,  $\{\beta\} = 0,001$ , viz [74]).

Počítačový program Elmer používá pro druhou derivaci Bossakovu metodu [62, s. 36]. To znamená, že diskretizace v čase systém (40) převede do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1-\alpha}{\beta (\Delta t)^2} \mathbb{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbb{D} + \mathbb{K} \right) \tilde{u}^{n+1} = \\ &F^{n+1} + \mathbb{M} \left( \frac{1-\alpha}{\beta (\Delta t)^2} \tilde{u}^n + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} v^n + \frac{1-\alpha}{2\beta} a^n \right) + \\ &+ \mathbb{D} \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \tilde{u}^n + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) v^n + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t a^n \right), \end{aligned}$$

kde koeficienty v rovnici jsou dány následujícími vzorci:

$$\begin{aligned} v^{n+1} &= v^n + \Delta t \left( (1 - \gamma) a^n + \gamma a^{n+1} \right) \\ a^{n+1} &= \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n}{\beta (\Delta t)^2} - \frac{v^n}{\beta \Delta t} + \left( 1 - \frac{1}{2\beta} \right) a^n \\ \beta &= \frac{1}{4} (1 - \alpha)^2 \\ \gamma &= \frac{1}{2} - \alpha. \end{aligned}$$

## 4.4 Deformace výpočetní oblasti

---

Jak bylo uvedeno výše, umělou deformaci výpočetní oblasti v ALE metodě řešíme v laboratorních souřadnicích  $\boldsymbol{x}$  jako pomocnou úlohu, přičemž slabou formulaci jsem uvedl ve své bakalářské práci [48, s. 19]. Zjednodušeně řečeno řešič MeshSolve řeší vždy lineární elastickou úlohu

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^M = 0, \quad (42)$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}^M, \boldsymbol{e}^M$  jsou tenzor napětí, respektive malých deformací výpočetní oblasti, které jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^M &= 2\lambda_1^M \boldsymbol{e}^M + \lambda_2^M \text{Tr} \boldsymbol{e}^M \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{e}^M &= \frac{1}{2} (\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}^M + (\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}^M)^\top). \end{aligned}$$

To vše jsou virtuální veličiny, jejichž jediným cílem je dosáhnout dobrých vlastností při deformaci výpočetní oblasti. Lamého koeficienty  $\lambda_1^M, \lambda_2^M$  se obecně mohou měnit v závislosti na  $\boldsymbol{x}$  a jejich funkční závislost lze volit účelně podle problému (v našem podání jde o konstanty, které se zadávají pomocí vlastností (28) virtuálního materiálu). Na místo Saint-Venantova modelu (26) zde máme Hookův zákon pro malé výchylky. Okrajové podmínky jsou předepsány čistě dirichletovské

$$\boldsymbol{u}^M = \begin{cases} \boldsymbol{u}^S, & \boldsymbol{x} \in \Gamma^{\text{int}} \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_{\boldsymbol{x}}^F \setminus \Gamma^{\text{int}} \end{cases} \quad (43)$$

Dosazením stále v silné formulaci (podle konvence již bez indexů) dostáváme

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 2\lambda_1 \nabla \cdot \boldsymbol{e} + \lambda_2 \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = 0,$$

přičemž souřadnice sítě jsou dány vztahem  $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}^M$ .



## Slabá formulace

Uvažme funkci  $\mathbf{u}^*$  splňující výše uvedenou okrajovou podmínku (43) a definujme prostory

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= H^1(\Omega_x^F) \times H^1(\Omega_x^F) \\ \mathbf{V}_0 &= \{\mathbf{w} \in V : \mathbf{x} \in \Gamma^D = \partial\Omega_x^F \Rightarrow \mathbf{w} = 0\}\end{aligned}$$

Potom hledáme funkci  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  splňující  $\mathbf{u} - \mathbf{u}^* \in \mathbf{V}_0$ . Volme  $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_0$  a rovnici (42) přepíšeme do slabé formulace (s obvyklou konvencí, viz výše)

$$\begin{aligned}0 &= (\mathbf{w}, \lambda_1 \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^\top \mathbf{u}) + \lambda_2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})) = \\ &= \lambda_1 (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{u}) + \lambda_1 (\nabla \cdot \mathbf{w}, \nabla \cdot \mathbf{u}) + \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{w}, \nabla \cdot \mathbf{u}).\end{aligned}$$

## Diskretizace

Provedme diskretizaci obdobně jako na straně 37 a s obdobným značením. Nyní již můžeme mluvit o výpočetní síti namísto výpočetní oblasti. Přímocharým dosazením dostáváme

$$\begin{aligned}0 &= \sum_j \{\lambda_1 (\nabla \mathbf{w}_i^*, \nabla \mathbf{w}_j^*) + \lambda_1 (\nabla \cdot \mathbf{w}_i^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_j^*) + \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{w}_i^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_j^*)\} \tilde{u}_j \\ 0 &= \mathbb{K} \tilde{\mathbf{u}},\end{aligned}\tag{44}$$

kde jsem označil matici tuhosti

$$\mathbb{K}_{ij} = \lambda_1 (\nabla \mathbf{w}_i^*, \nabla \mathbf{w}_j^*) + \lambda_1 (\nabla \cdot \mathbf{w}_i^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_j^*) + \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{w}_i^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_j^*).$$

Řešení rovnice (44) je třeba posunout o diskretizovanou verzi Dirichletových podmínek  $\mathbf{u}_h^*$ , čímž dostaneme kompletní řešení  $\mathbf{u}_h$  elastické úlohy pro deformaci sítě a tím i souřadnice  $\boldsymbol{\chi}$ . Ve zdrojovém kódu počítačového programu i v manuálu [44, s. 88] jsem zkontroloval, že uvedená rovnice je implementována popsáním způsobem.

## 5 Počítačová simulace

---

Cílem této kapitoly je popsat schéma počítačových programů simulace, jednotlivé použité programy a jejich moduly, provést několik numerických testů jednotlivých komponent a testy konzistence a ve funkčním programu simulovat s výchozím nastavením vybraný úsek na počátku fonace a diskutovat výsledky.

Alipour [1] uvádí, že relativně vysoký podíl studií zabývajících se simulací hlasivky postrádá přesný popis vstupních konstant, což znemožňuje replikovatelnost výsledku. Proto se v této věnuji důsledné rekapitulaci vstupních konstant a parametrů tak, aby výsledky byly replikovatelné a přezkoumatelné.

Elmer je modulární systém, který umožňuje provázat několik samostatných výpočetních modulů. Proto budu vycházet z toho, že vždy nejprve zprovozním a otestuji jednotlivé moduly samostatně, pak budu postupně zvyšovat složitost a teprve následně je zapojím do interakce.

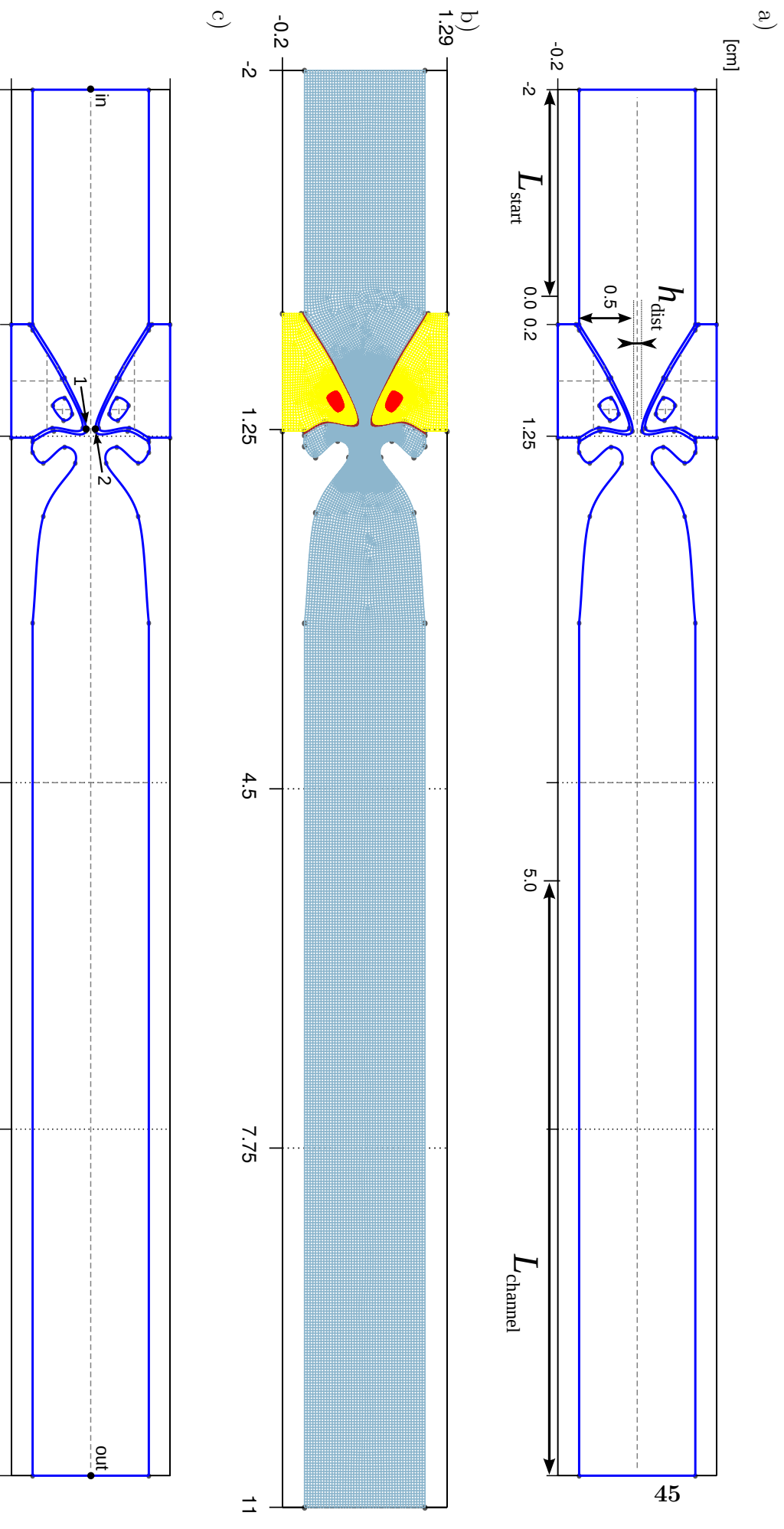
### 5.1 Geometrie a fyzikální parametry

---

Geometrický tvar oblasti hrtanu je převzat z práce [70, s. 988], kde byl naměřeny vlastnosti vyříznutého hrtanu. Výpočetní oblast modeluji pomocí programu `gms` [22]. Tento tvar hlasivky jsem použil již ve své bakalářské práci [48], přičemž geometrie je škálována na centimetry. Zbytek vokálníhoho traktu má tvar obdobný jako používá práce [25].

Zheng a kol. [87] prokázali, že na 2D proudění mají nepravé hlasové vazy vliv, protože snižují impedanci hlasivkové štěrbině díky tomu, že omezují náhodné odklánění proudu. Proto jsou v modelu zahrnuty i nepravé hlasové vazy. Konkrétní označení geometrických parametrů obsahuje obrázek 5a). Veličiny označené písmenem jsou proměnné a jejich hodnota je specifická pro každý uvažovaný případ. Ovšemže na reálný *larynx* nenavazuje tak dlouhá trubice, kterou v této práci volím spíš kvůli snadnější konvergenci.

Parametry mohou být velmi variabilní [1, s. 340]. Proto jsem nejprve provedl krátkou rešerši používaných či změřených parametrů (tab. 1). Podle těchto údajů, výše probraných aspektů práce a podle tabelovaných hodnot jsem sestavil tabulku použitých parametrů (tab. 4). Při modelování struktury hlasivky jsem vycházel z parametrů uvedených v článku Feistauera a Horáčka, kteří uvádějí konkrétní parametry pro tři vrstvy hlasivky (epitel, ligament a thyroarytenoidní sval, viz podkapitola 2.1 na straně 6). [18, s. 369]



**Obrázek 5:** Příklad geometrie, výpočetní síť a umístění senzorů

- a) Z geometrických veličin bude pro tuto kapitolu důležitý parametr  $L_{channel}$ , v další kapitole se budu měnit parametr  $h_{dist}$ .  
 Parametr  $L_{start} = 2$  cm neměním.
- b) Příklad výpočetní sítě s 45897 vrcholů. Epitel na povrchu a ligament uprostřed jsou červeně, žlutě je sval.
- c) Sensor č. 1 je na vrcholu dolní hlasivky, sensor č. 2 je na nejspodnější části horní hlasivky, senzory in a out jsou ve středu vtoku a výtoku.

| Parametr                  | Použité hodnoty  |
|---------------------------|--|
| ligament                  | $E_{\text{lig}} = 65\,000 \text{ Pa}$                          |
|                           | $\eta_{\text{lig}} = 0,4$                                      |
|                           | $\rho_{\text{lig}} = 1030 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$      |
| epitel                    | $E_{\text{ep}} = 25\,000 \text{ Pa}$                           |
|                           | $\eta_{\text{ep}} = 0,49$                                      |
|                           | $\rho_{\text{ep}} = \rho_{\text{lig}}$                         |
| sval                      | $E_{\text{m}} = 8\,000 \text{ Pa}$                             |
|                           | $\eta_{\text{m}} = \eta_{\text{ep}}$                           |
|                           | $\rho_{\text{m}} = \rho_{\text{lig}}$                          |
| vlastnosti vzduchu        | $\rho^{\text{F}} = 1,205 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$       |
|                           | $\mu = 1,983 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$          |
| vlastnosti výpočetní sítě | $E^{\text{M}} = 2 \text{ Pa}$                                  |
|                           | $\eta^{\text{M}} = 0,3$  |
| vstupní rychlostní profil | $v_{\text{max}} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vodorovně) |

**Tabulka 4:** Výchozí fyzikální parametry numerického modelu

## 5.2 Použité programy

Numerické zpracování je založeno na několika počítačových programech, které jsou navzájem provázány a dále podrobněji popsány.

Cílem popisu v této části je zdůraznit všechny vlastnosti použité při numerickém modelování, které umožňují opakovaně dosáhnout výsledků a ověřit je. Replikovatelnost výsledku je založena na tom, že všechny počítačové programy použité v této práci mají otevřený zdrojový kód (open source [61]), takže lze ověřit jejich principy fungování ve zdrojovém kódu, což jsem také v řadě případů udělal, případně odstranit zjištěné chyby. Celá implementace diplomové práce je zveřejněna<sup>5</sup> a budu rád, když na zveřejněnou práci někdo naváže při svém výzkumu.

Použité počítačové programy lze znázornit do schématu uvedeného v tab. 5. Pro výpočet se používá balík `Elmer` ve verzi 8.2. Ten má v sobě zabudováno jednak grafické rozhraní (GUI), které usnadňuje definování okrajových podmínek, jednak také `ElmerSolver`, který řeší rovnice podle zadaného textového konfiguračního souboru ve formátu `sif`. Podrobný popis nastavení jednotlivých modulů nalezneme v dokumentaci [56].

<sup>5</sup>Viz repozitář na githubu <https://github.com/jmichalek/hlasivky>.

- 
- `vocalSolve` – obslužný program ve skriptovacím jazyce bash vlastní výroby s příloženým dokumentovaným zdrojovým kódem
    - `analyze.py` – vlastní pythonovský skript využívající knihovny `numpy` [83], `matplotlib` [31], `pandas` [47] a `scipy` [33] ke spektrální analýze a zpracování dat
  - `Gmsh` – geometrie a síť [22]
  - `ElmerSolver` – numerická simulace [62, 56, 61]
    - Fortranová funkce – vstupní profil `myprocedures.f90`
    - `ElmerGrid` – konverze do formátu pro Elmer
    - Procedura na řešení rovnice:
      - \* `ElasticSolve`
      - \* `MeshSolve`
      - \* `FlowSolve`
  - `paraview` – vizualizace výstupu a zpracování výstupu do obrázků a animací [3]
- 

**Tabulka 5:** Schéma použitých programů

Přehled příkazů použitých v obslužném programu obsahuje výpis zdrojového kódu 1. Je v něm také názorně ukázán typický pracovní postup (*workflow*) při simulaci a zpracování výsledků.<sup>6</sup> Kompletní přehled si lze zobrazit v dokumentovaném zdrojovém kódu. Obslužný program v žádném případě není optimalizovaný a obsahuje i zastaralé části, které jsem potřeboval v různých fázích psaní této práce a jejichž potřeba následně odpadla. Poskytován je jak stojí a leží s touto výhradou bez jakékoliv záruky.

Parametry modelu jsou vždy dány v souboru `config.ini` (viz příklad zdrojového kódu 2), odkud se přenášejí pomocí programu `vocalSolve` do vstupního souboru Elmeru `case.sif`. Tento soubor má přednost před výchozím nastavením ve složce šablon.

### 5.3 Proudění a jeho testování

---

Prvně se budu věnovat modulu proudění, v této práci proudění nestlačitelnému. Proudění je v balíku Elmer implementováno v modulu `FlowSolve`<sup>7</sup>. Program

---

<sup>6</sup>Podle zvyklostí je program dokumentován v angličtině.

<sup>7</sup>Viz zdrojový kód na adrese <https://github.com/ElmerCSC/elmerfem/blob/devel/fem/src/modules/FlowSolve.F90>

### Zdrojový kód 1: Seznam používaných příkazů s nápovědou

```
1 vocalSolve -c # connect to server and show running simulations
2 vocalSolve -l # start local simulation based of config.ini file
3 vocalSolve -r # start remote simulation based on local config.ini file
4 vocalSolve --analyze # download the data from sensors and calculate
5 vocalSolve -s # download the .vtu results (for images and animations)
6 vocalSolve -u # update the script on remote server
7 python3 analyze.py --compare # generate comparison for the tests of consistency
8 python3 analyze.py -ps vmax # generate graphs for parametric study of value vmax
9
10 # typical workflow
11 vocalSolve -r # execute in a folder with config.ini
12 vocalSolve --analyze # dtto
13 python3 analyze.py -ps vmax # execute in a folder with subfolders where you ran
    the above
```

Elmer obsahuje celou řadu benchmarkových testů na nestlačitelné proudění, viz např. klasický test proudění ve schodovitě se rozšiřující trubce [55, s. 39] [59, s. 41] a von Karmanovu nestabilitu při obtékání válce [55, s. 43] [64]. Byl také použit na simulaci proudění s konvekcí v několika pracích z oblasti geofyziky [78, 41]. Proto lze implementaci proudění považovat za spolehlivou, přesto ji nicméně otestuji na několika základních příkladech. Tutoriál obsahuje také příklad FSI interakce nosníku s prouděním, který může být inspirací pro tuto práci [55, s. 54]. Naopak známý benchmark 2D interakce nestlačitelného proudění a „vlajky na stožáru“ od Turka a Hrona [77] zatím v Elmeru implementován není.

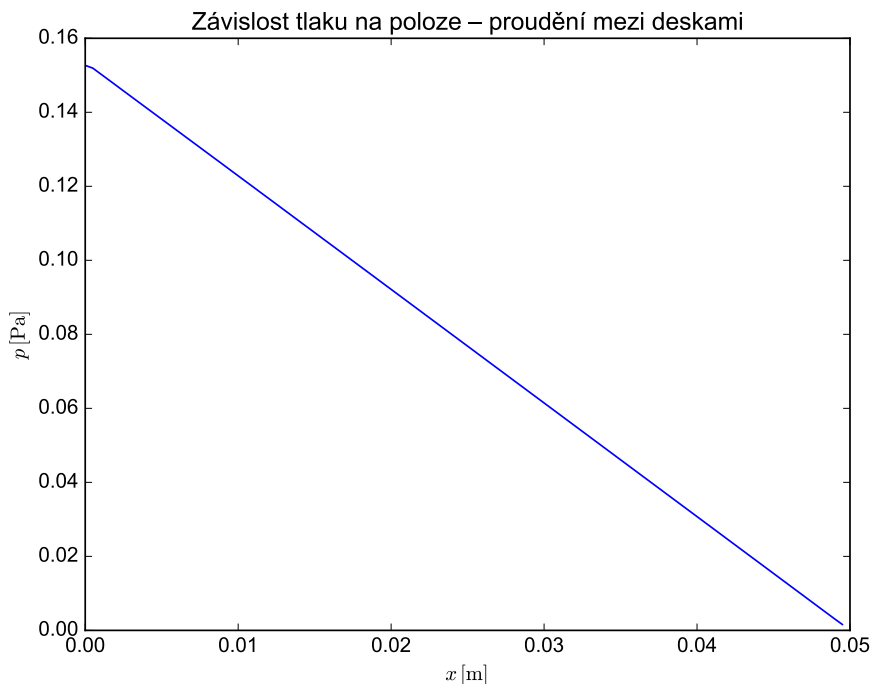
### Testovací úloha: Proudění mezi deskami

Při proudění mezi deskami lze vycházet z teoretických východisek uvedených v rozboru na straně 24. Při maximální rychlosti  $v_{\max} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , dynamické viskozitě vzduchu při pokojové teplotě  $\mu = 1,983 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , vzdálenosti desek  $2h = 0,01 \text{ m}$ , délce měřeného úseku  $\Delta x = 0,05 \text{ m}$  dostáváme numerickou simulací tlakový rozdíl  $\Delta p = 0,1593 \text{ Pa}$ . Numerická simulace probíhala ve stacionárním režimu nestlačitelného proudění vzduchu, pomocí modulu `FlowSolve` se stabilizací, přímým řešičem `Umfpack` a tolerancí  $\varepsilon = 10^{-7}$ . Výsledky jsou zachyceny na obrázku 6.

Teoretická předpověď podle vzorce (17) je  $\Delta p = 0,1586 \text{ Pa}$ . Odchylka počítačové simulace od analytického vzorce činí 0,4 %, což lze považovat za velmi dobrou shodu. Lze shrnout, že jsem ověřil funkčnost modulu pro stacionární řešení nestlačitelných NS rovnic na této testovací úloze.

## Zdrojový kód 2: Vstupní soubor

```
1 # GEOMETRY
2 hdist=0.09 # separation between vocal folds (in cm) > 0
3 channellength=6
4 channelstart=2
5
6 # MESH
7 centralh=0.01 # size of elements in the central region
8 globalc=0.05 # global mesh size
9 elasticsolversettings='Element = p:2'
10
11 # PROFILE
12 vmax=2.0 # central profile speed
13
14 # BOUNDARY CONDITIONS
15 outletbc=' Slip Coefficient 1 = Variable Velocity 1, Velocity 2
16 MATC "-SigmaN(tx)"
17 Slip Coefficient 2 = Variable Velocity 1, Velocity 2
18 MATC "-SigmaN(tx)"' # use special boundary condition
19
20 # NUMERICS
21 nsoptions='Bubbles = True'
22 outputintervals=100
23
24 # lol TIME
25 step=0.00001 # timestep
26 intervals=50000 # number of intervals
27 starttime='Exec Condition = Variable Time
28 Real
29 0.00 -1.0
30 0.00199 -1.0
31 0.00201 1.0
32 20.0 1.0
33 End' # start elast solver at this time (MATC)
```



**Obrázek 6:** Testovací případ proudění mezi deskami

### Testovací úloha: Proudění částí vokálního traktu

Nyní zvolíme členitější geometrii, a to konkrétně skutečnou 2D geometrii části vokálního traktu (viz obr. 5a). Cílem je nejen ozkoušet řešič nestlačitelného proudění ve složitější geometrii, ale také pozorovat, jaké vírové struktury v dané geometrii vznikají. Díky tomu je pak budeme při plné FSI srovnat efekty vznikající geometrií a interakcí. Stále uvažujeme stěny trubice jako nepohyblivé.

Jako výchozí nastavení simulace uvažujme na vstupu do kanálu okrajovou podmínku v podobě parabolického vtoku (18) s maximem  $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , okrajovou podmínku na výtoku (22). Ve výchozí simulaci uvažuji numerický faktor tlumení zpětného vtoku ve stabilizační podmínce na výtok úměrný horizontální rychlosti  $\varkappa = v_x$  (viz na straně 26), protože takové nastavení se mi osvědčilo jako nejstabilnější. Dále uvažuji vzdálenost hlasivek  $h_{\text{dist}} = 0,09 \text{ cm}$ , délku kanálu za hlasivkou  $L_{\text{channel}} = 6 \text{ cm}$ , délka kanálu před hlasivkou  $L_{\text{start}} = 2 \text{ cm}$ , doba trvání simulace  $T = N\Delta t$ , kde  $N = 5 \cdot 10^5$ . Byla použita výše uvedená Laplaceova diskretizace oblasti s prouděním pro 45897 vrcholů sítě, lineární Lagrangeovy prvky se stabilizací s převážně čtyřúhelníkovou triangulací doplněnou menším počtem trojúhelníkových prvků. Sít byla zahuštěna na pětinašobek v obdélníkovém okolí *glottis* (viz 5b). Tyto parametry označuji za výchozí nastavení modelu proudění a dále případně vždy uvedu jen ty parametry, které se vůči němu změnily.

Z výsledného proudění ve výchozím nastavení lze získat kvalitativní obrázek o tom, co se v simulaci bez interakce děje. Testování proudění v tomto případě



probíhalo s časovým krokem  $\Delta t = 10^{-5}$  s.

Začátek simulace:

1. Nejprve je proudění dokonale laminární a nevířivé (obr. 7.1). V důsledku podmínky přilnavosti proudnice probíhají podél stěn, a to dokonce i ve výchlipce mezi pravými a nepravými hlasivkami (*ventriculus laryngis* – na obrázku jsou nepravé hlasové vazy znázorněny bíle, neboť jejich pohyb neuvažujeme). Samotné uvedení veškeré tekutiny do pohybu způsobí v prvním časovém kroku přetlak cca 25 kPa, který se hned v následujícím kroku sníží na rozumnou hodnotu kolem 160-170 Pa (obr. 8.1). Na konci trubice pak není parabolický profil, ale zastropovaný profil, podobně jako u tzv. rozběhové dráhy laminárního proudu. [14, s. 143]
2. V hlasivkové štěrbině se utvoří proud (*jet*), který vyvolá cirkulaci vzduchu ve výchlipce za hlasivkami a v supraglotálním prostoru (obr. 7.2). Teprve plynutím času se nepravidelnosti vytvořené proudem šíří dále směrem k výtoku.
3. Jakmile se cirkulující víry dostanou dále od *glottis*, začínají se vytvářet kolem proudu další víry (obr. 7.3). Proudění má již zjevně nepravidelný charakter. Část tekutiny se vrací podél stěn proti proudu.
4. V důsledku pohybu vírové cesty se proud v určité vzdálenosti přetrhává a část tekutiny odtéká do vírů, část se šíří dále. Díky sevření víry z obou stran, které tekutinu jakoby vymrštují do prostoru, se tekutina rychleji rozšiřuje do celého průřezu (obr. 7.4).

Rozvinuté proudění:

1. Po dostatečně dlouhé době lze proudění ve velké části kanálu popsat jako řadu difundujících vírů zabírajících celou šířku trubice (obr. 8.1). Na též obrázku lze vidět také tlak, který dosahuje maximálních hodnot 160-170 Pa a v ústí *glottis* a v okolí vírů občas pozorujeme podtlak.
2. Těsně za *glottis* v okolí proudu se neustále tvoří malé víry, které spolu interagují a postupem v trubici se slučují do větších útvarů (obr. 8.2). Pokud velký vír odteče, přetrhne se proud a zároveň se na druhé straně utvoří větší vír, může také dojít k převrácení vertikální výchylky proudu. V oblasti numerické simulace hlasivek se tento jev označuje za Coandův efekt [18, s. 326].
3. Vidíme (viz obr. 8.3), že umístění proudu do značné míry souvisí s orientací největšího víru za *glottis*, neboť proud se na tento vír namotává jakoby „na

vřeteno“. Difundující víry v žádném případě netvoří pravidelnou vírovou cestu, nýbrž v průběhu času dochází k větším či menším změnám, interakci a slučování vírů.

4. Rozvinutá vírová cesta (viz obr. 8.4) se šíří rychlostí cca  $0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , s délkou víru přibližně 1,4 cm (která přibližně odpovídá tloušťce trubice). Tomu odpovídá frekvence přibližně 60 Hz. Vzhledem k tomu, že víry se mohou slučovat a interagovat, nelze frekvenci stanovit přesně, nýbrž uváděné hodnoty jsou s přesností cca 20 %.

### Zpětný proud na výtoku

Pokud použijeme podmínku nulové trakce (20) a zvolíme příliš krátký kanál např.  $L_{\text{channel}} = 3 \text{ cm}$ , simulace nebude ani při relativně malém kroku  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  konvergovat v důsledku tzv. zpětného proudu (obr. 9). Řešením je právě zmiňovaná podmínka (22) anebo prodloužení kanálu.

## 5.4 Struktura a její modální analýza

---

Testování struktury při dynamickém i statickém zatížení se věnovala moje bakalářská práce [48], na kterou se v plném rozsahu odkazuji. Zejména bych rád uvedl, že při simulaci FSI jsem použil standardní modul pro velké deformace `ElasticSolve`.<sup>8</sup>

Stejně jako v článku Jana Valáška a kol. [80] provedu modální analýzu (v režimu malých výchylek) pro elastickou strukturu [56, s. 41]. Teorie modální analýzy vychází z lineární elasticity (již uvedené [48] nebo části této práce o deformace výpočetní oblasti). Pro simulaci jsou použity kvadratické prvky. Program Elmer spočítá vlastní čísla  $\lambda$ , z nichž spočteme úhlovou frekvenci  $\omega = \sqrt{\lambda}$  a normální frekvenci  $f = \omega/2\pi$ .

Z výsledků (obr. 10 na straně 56) vyplývá velmi dobrá shoda s tím, že frekvence se pohybuje kolem 100 Hz (základní frekvence mužského hlasu). Výsledek se relativně dobře shoduje s článkem [88], kde autoři obdrželi pro první dva vlastní kmity  $f_1 = 120 \text{ Hz}$  a  $f_2 = 216 \text{ Hz}$  (nicméně uvažovali poněkud jiný tvar hlasivky a vyšší hodnoty Youngova modulu). Tvary modů také kvalitativně odpovídají jiným pracím. [85, 80]

## 5.5 Interakce a testy konzistence

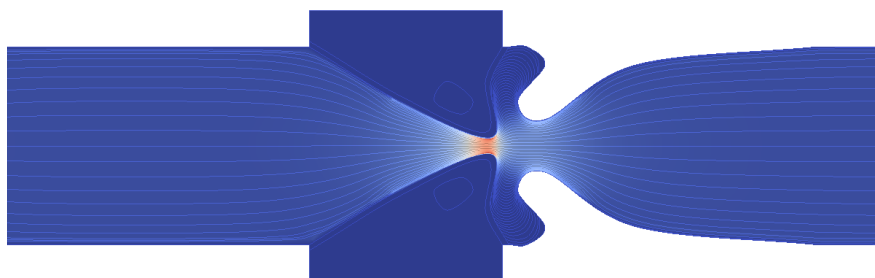
---

Interakce je zprostředkována jednak hraniční silou vystihující okrajovou podmínku (32), jednak samostatně řešeným problémem výpočetní sítě (podka-

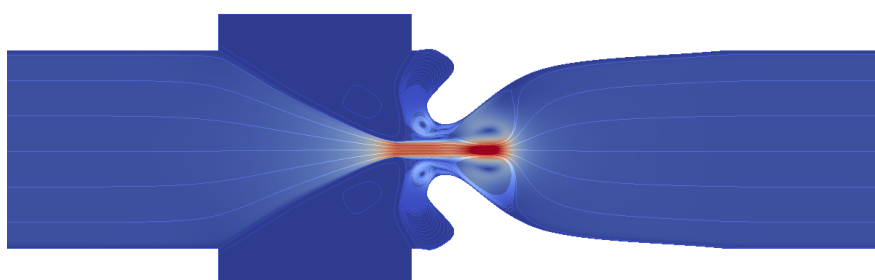
---

<sup>8</sup>Viz zdrojový kód na adrese <https://github.com/ElmerCSC/elmerfem/blob/devel/fem/src/modules/ElasticSolve.F90>

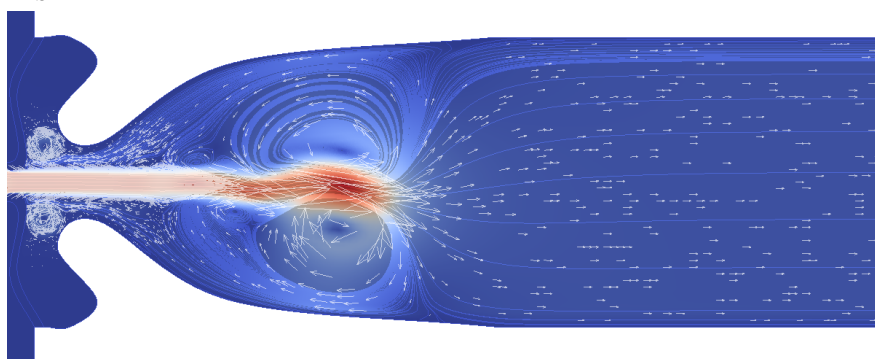
1)  $t = 0$  ms



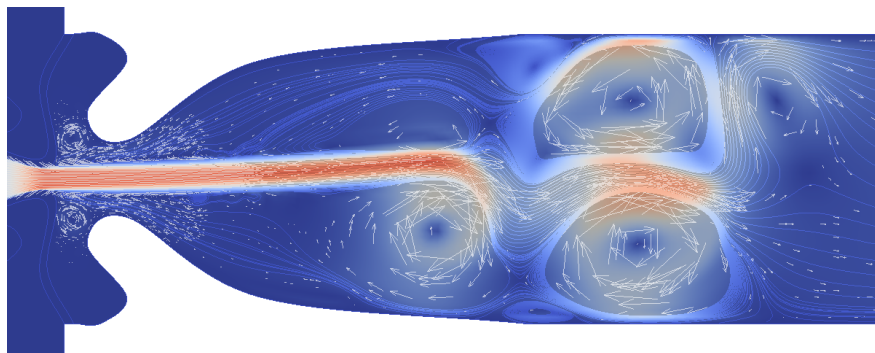
2)  $t = 1$  ms



3)  $t = 2$  ms

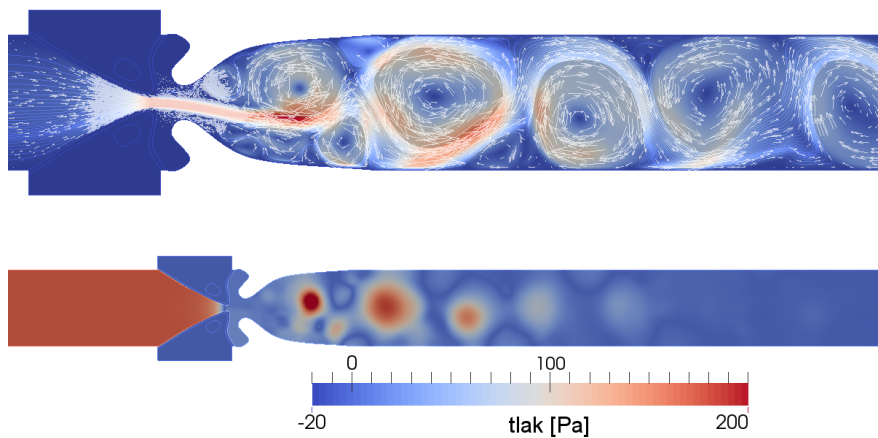


4)  $t = 5$  ms

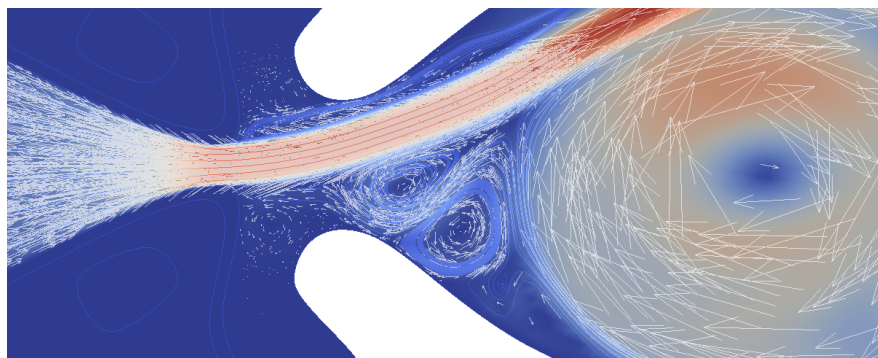


**Obrázek 7:** Testovací případ proudění ve vokálním traktu bez interakce – počátek proudění. Škála rychlosti je uvedena na obr. 8.4. Přidané šipky jen doplňují směr rychlosti. Je zobrazen pouze výřez.

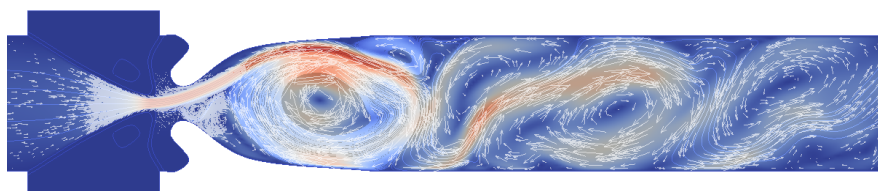
1)  $t = 35$  ms



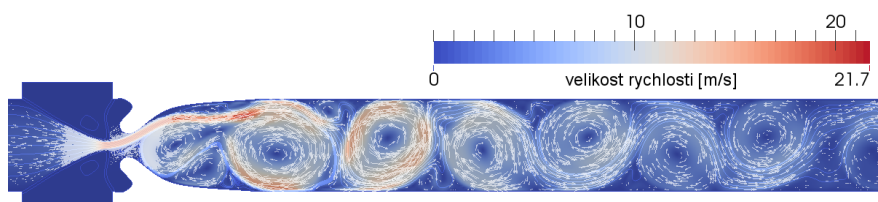
2)  $t = 43$  ms



3)  $t = 44$  ms

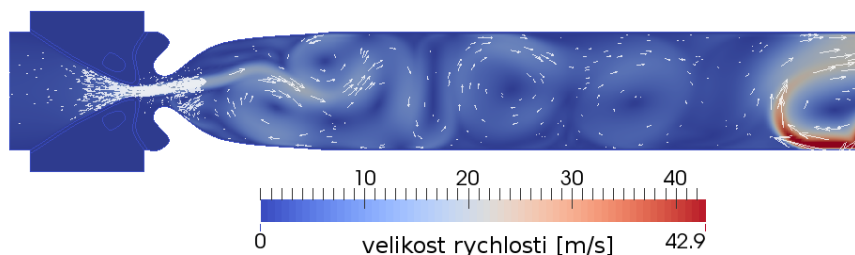


4)  $t = 78$  ms

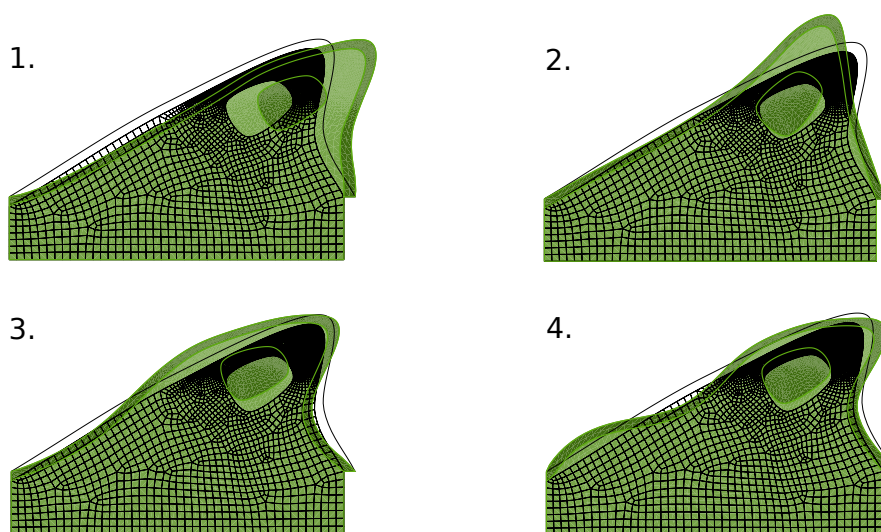


**Obrázek 8:** Testovací případ proudění ve vokálním traktu – rozvinuté proudění. Přidané šipky jen doplňují směr rychlosti. S výjimkou posledního obrázku jde jen o výřezy.

$t = 35,4 \text{ ms}$



**Obrázek 9:** Ukázka kolapsu simulace kvůli zpětnému proudu



- |                           |                           |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1. postranní kmity        | 2. přímýkavé kmity        | 3. dovírací kmity         | 4. vlna                   |
| $f_1 = 104,96 \text{ Hz}$ | $f_2 = 149,38 \text{ Hz}$ | $f_3 = 188,90 \text{ Hz}$ | $f_4 = 255,88 \text{ Hz}$ |

**Obrázek 10:** Modální analýza hlasivky. Černé čáry označují klidový stav, barevně je vyznačen tvar hlasivky v jedné z extrémních poloh vlastního kmitu. Barva nenese žádnou další informaci.

pitola 4.4). V interakci tedy vystupují dva výše uvedené řešiče `FlowSolve`, `ElasticSolve` a dále řešič výpočetní sítě `MeshSolve` a nástroj pro ukládání výstupu `SaveScalar`. Pro numerickou simulaci je v Elmeru třeba kvůli implementaci ALE metody používat v proudění jen polynomy 1. řádu.

Vzhledem k tomu, že pro takto složitý problém nejsou dokázány žádné matematické věty o existenci řešení, je třeba k získání rozumné míry věrohodnosti provést testy na zahuštěné oblasti, s kratším časovým krokem, na delším kanále atd., aby bylo zajištěno, že simulace není některým numerickým parametrem nepříznivě ovlivněna. Pro stručnost mluvím o „testech konzistence“.

**Sledovanou veličinou**, kterou chci hlavně zjišťovat, je závislost polohy hlasivky na čase, resp. frekvenční spektrum této závislosti. Testy konzistence tedy vycházejí z metodiky založené na přímém srovnání závislosti  $y$ -ové výchylky sen-

zoru 1 pevně spojeného s vrcholem spodní hlasivky (viz obr. 5b). Vertikální výchylku vybírám kvůli tomu, že přerušuje proud tekutiny, a má tedy pro fonaci rozhodující význam. Spektrum vyjadřuji pomocí výkonové spektrální hustoty spočítané rychlou Fourierovou transformací. Používá se funkce `periodogram` z balíku `signal` z pythonovského projektu `scipy` (Welshova metoda [84] s obdélníkovou okénkovou funkcí).

Výchozí model interakce má parametry dle tab. 4, časový krok  $\Delta t = 10^{-4}$  s, počet kroků  $N = 500$ . Řešič elasticity a pohybu výpočetní sítě byl aktivován až v čase  $t_{\text{akt}} = 0,002$  s. Další parametry jsou shodné jako u výchozího modelu proudění (podrobnosti na straně 51). Tento model označuji dále za výchozí model interakce a vždy uvedu jen ty parametry, které se vůči němu změnily.

Provedl jsem následující testy konzistence (viz obr. 11):

1. Výchozí model interakce.
2. Simulace se zjemněnou sítí má 182217 vrcholů, které vznikly půlením stran všech konečných prvků ve výchozí simulaci.
3. Simulace s polovičním časovým krokem má  $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-4}$  s.
4. Simulace s dlouhým kanálem má  $L_{\text{channel}} = 10$  cm.
5. Simulace s nulovou trakcí uvažuje podmínku na výtoku bez stabilizace, tj.  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ .
6. Kombinovaná simulace uvažuje kratší časový krok  $\Delta t = 0,4 \cdot 10^{-4}$  s,  $L_{\text{channel}} = 8$  cm a zjemnění sítě dle bodu 2.
7. Simulace s tlumením uvažuje Rayleigovo tlumení  $\{\alpha\} = 3,2$ ,  $\{\beta\} = 0,07$ , viz (41),  $L_{\text{channel}} = 10$  cm, kvadratické elementy ve struktuře a konstantní numerický faktor v podmínce na výtok  $\varkappa = 1$ .
8. Odlišná diskretizace, slabá formulace obsahuje člen  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  namísto klasické formulace s Laplaciánem a  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ , viz rovnice 16 na straně 24.
9. Stabilizace nahrazena bubble metodou. [56, s. 25] [65, 4]
10. Konstantní numerický faktor v podmínce na výtok  $\varkappa = 1$ .

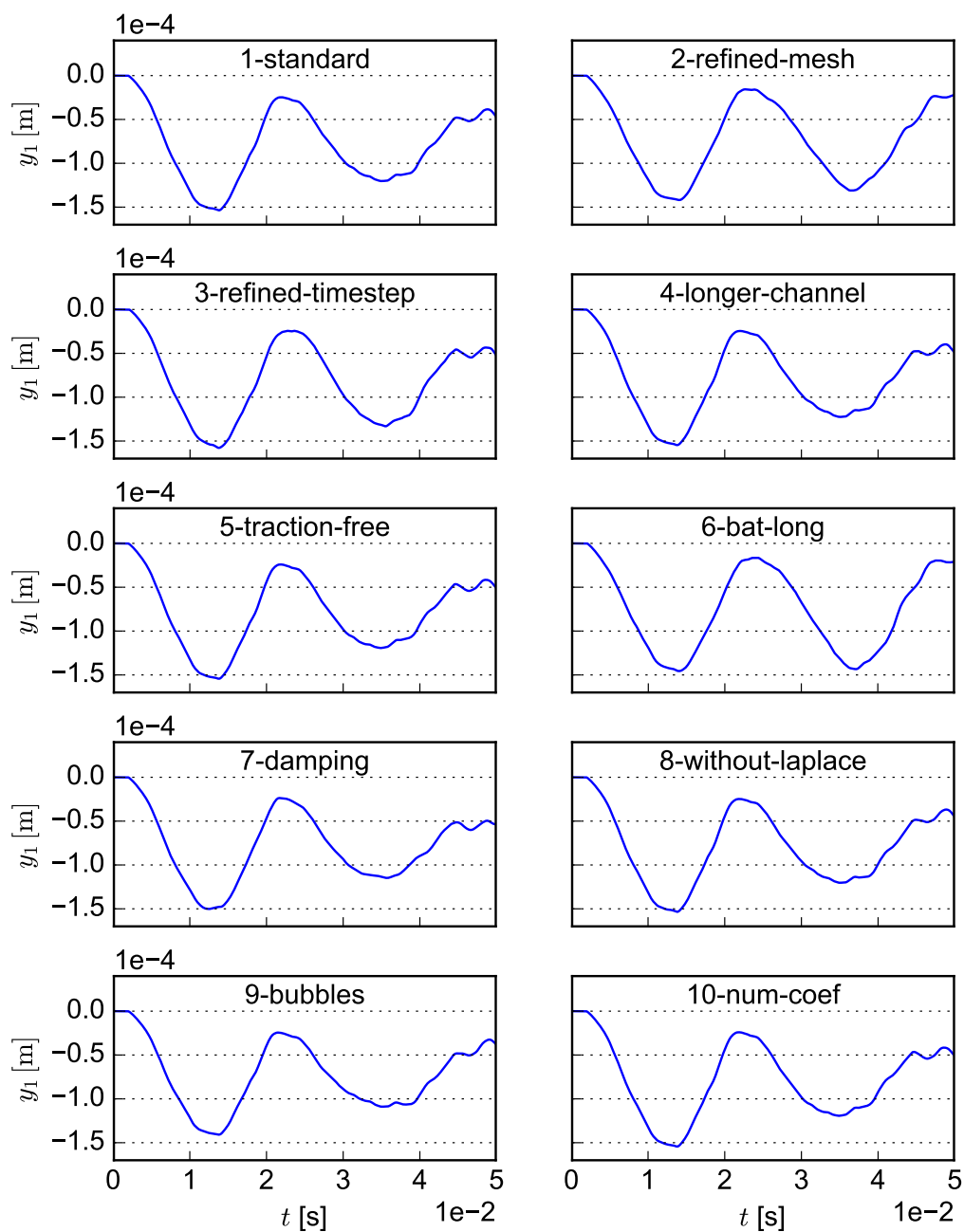
Z těchto testů vyplývá, že zpřesnění numerických parametrů vede k numericky blízkým výsledkům. Simulace se co do sledované veličiny drobně liší šířkou vrcholu v grafu, resp. amplitudou kmitů. Tak např. v simulacích na zahuštěné síti zobrazených na obrázcích 11.2 a 11.6 se amplituda v závěru testovacího času zjevně vrací blíže výchozí poloze než u řidší sítě. Z toho lze dovodit, že zpřesnění

by bylo možné dosáhnout zejména podrobnější sítě, což ovšem vyžaduje vyšší výpočetní výkon. Srovnání testů konzistence 1 a 10 je v souladu s literaturou (viz na straně 26), neboť ve volbě stabilizačního parametru je jistá volnost. Pokud se pohybuje v rozumných mezích, nemá podstatný vliv na výsledek. Výchozí varianta  $\varkappa = v_x$  se ukazuje jako stabilnější než volba  $\varkappa = 1$ .

Podpůrným kritériem konzistence v tomto testu je kvalitativní srovnání stavu systému v přesně definovaném čase (obr. 12). Z povahy FSI a proudění obecně vyplývá, že jde o složitý fyzikální problém, který typicky nemá analytické řešení a navíc je velmi citlivý na numerickou nepřesnost simulace. Na obrázcích je vidět, že ačkoliv se trajektorie senzoru na hlasivce liší jen málo, skutečné proudění v prostoru se už liší podstatně. V tomto ohledu je simulace (zejména interakce vírů) citlivá na konkrétní numerické parametry. Nelze očekávat, že odlišné nastavení simulace povede ke stejnému proudění. Všechny následující simulace je třeba brát s výhradou, že nejde o přesné předpovědi chování tekutiny, nýbrž pouze o přibližné modely, jejichž cílem je zejména vystihnout charakter chování hlasivky, nikoliv vypočítat přesné hodnoty veličin.

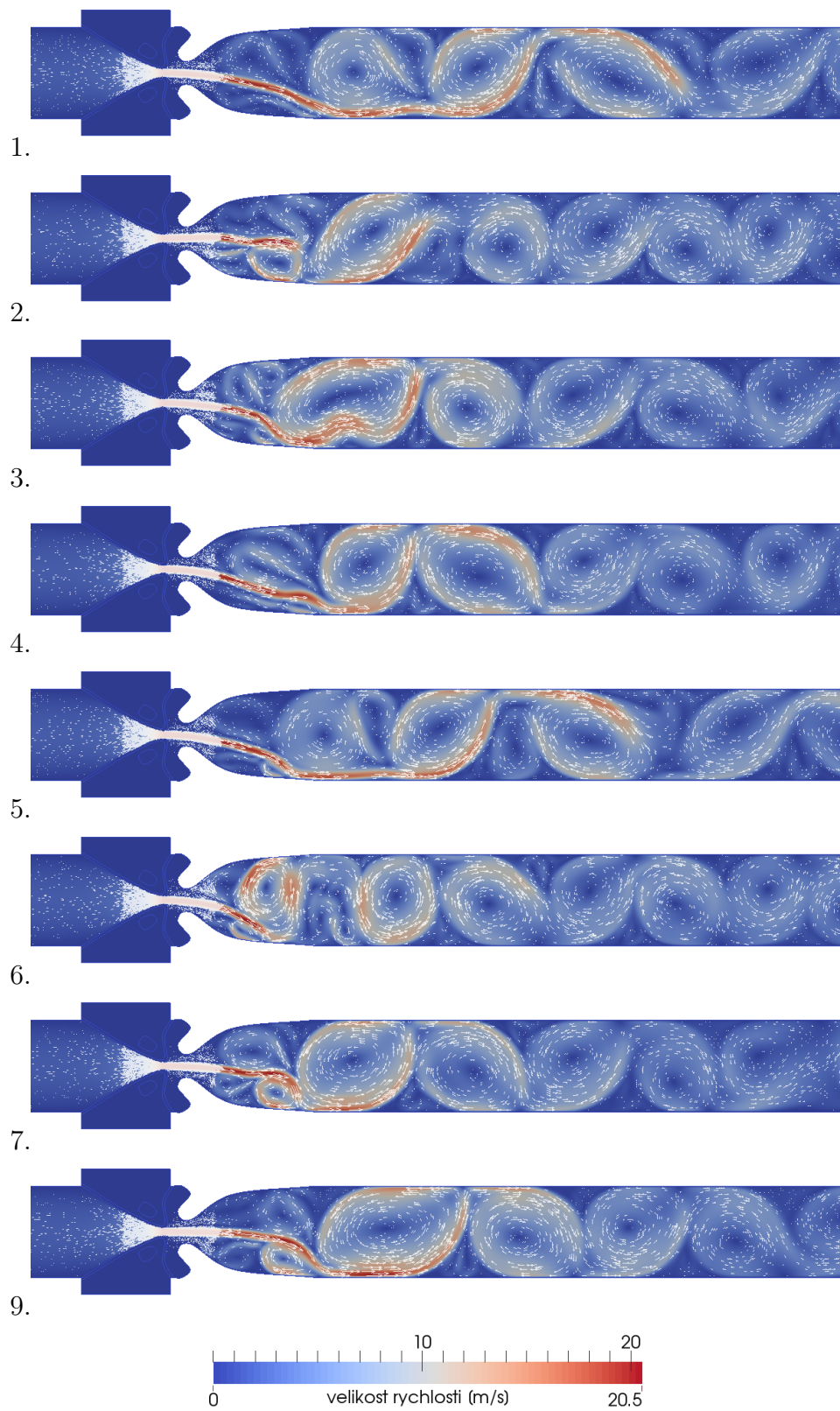
Pro dokreslení bych rád ukázal, jak systém tří spřažených řešičů konverguje. Příklad konvergence je na obr. 13. Typickým měřítkem konvergence je  $L_2$  norma, kterou pro  $k$ -tou iteraci daného řešiče značíme  $N_k$  ( $k$  dispozici jsou i jiné normy [62, s. 33]). Počet iterací spřaženého systému většinou nepřesahuje 8, nicméně v případě horších numerických parametrů simulace může výsledek divergovat. Tento problém by bylo možné vyřešit také zahrnutím adaptivního časového kroku, který je v Elmeru implementován, nicméně pro účely této práce jsem si vystačil se snížením tolerance  $\varepsilon_{\text{cpl}}$  a snížením relaxačního faktoru.

Na základě uvedených pozorování lze tedy shrnout, že představený model dobře konverguje, nicméně proudění je citlivé na numerické parametry. Jeho konkrétní průběh je tak třeba vnímat s jistou rezervou. Sledované veličiny v podobě posunutí senzorových bodů 1 a 2 jsou narozdíl od proudění méně citlivé. Odchylku jejich hodnoty lze ve výchozím nastavení na časové škále 50 ms ohraničit tolerancí max. cca 20 % amplitudy. Přesnost výpočtu by bylo možné zlepšit zejména zahuštěním výpočetní sítě.

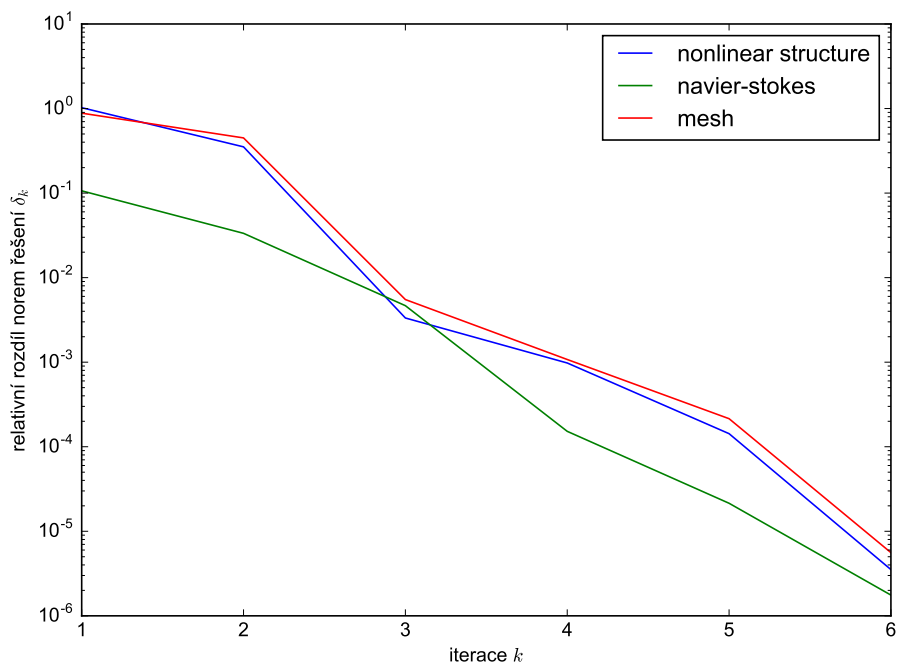


**Obrázek 11:** Testy konzistence – srovnání vertikální výchylky. Vynesena je výchylka senzoru na vrcholu spodní hlasivky ve vertikálním směru. Přehled analyzovaných případů je na straně 57.





**Obrázek 12:** Testy konzistence – stav proudění v čase  $t = 50$  ms. Přesné parametry jednotlivých simulací jsou pod rubrikou 5.5 na straně 56.



**Obrázek 13:** Testy konzistence – rychlost konvergence  $L_2$  normy u druhého časového kroku modelu s interakcí s výchozími parametry. Na obrázku je vyneseno relativní rozdíly  $\delta_k$  norem  $N_k$  a  $N_{k-1}$  jednotlivých dílčích řešení definovaný vztahem  $\delta_k = \frac{2|N_k - N_{k-1}|}{N_k + N_{k-1}}$  v závislosti na iteraci  $k$ . Nejnáročnější je konvergence NS rovnic. Na počátku simulace jde až o cca 10 iterací, během výpočtu pak počet iterací klesá na několik jednotek.

## 5.6 Rozbor simulace s výchozím nastavením

---

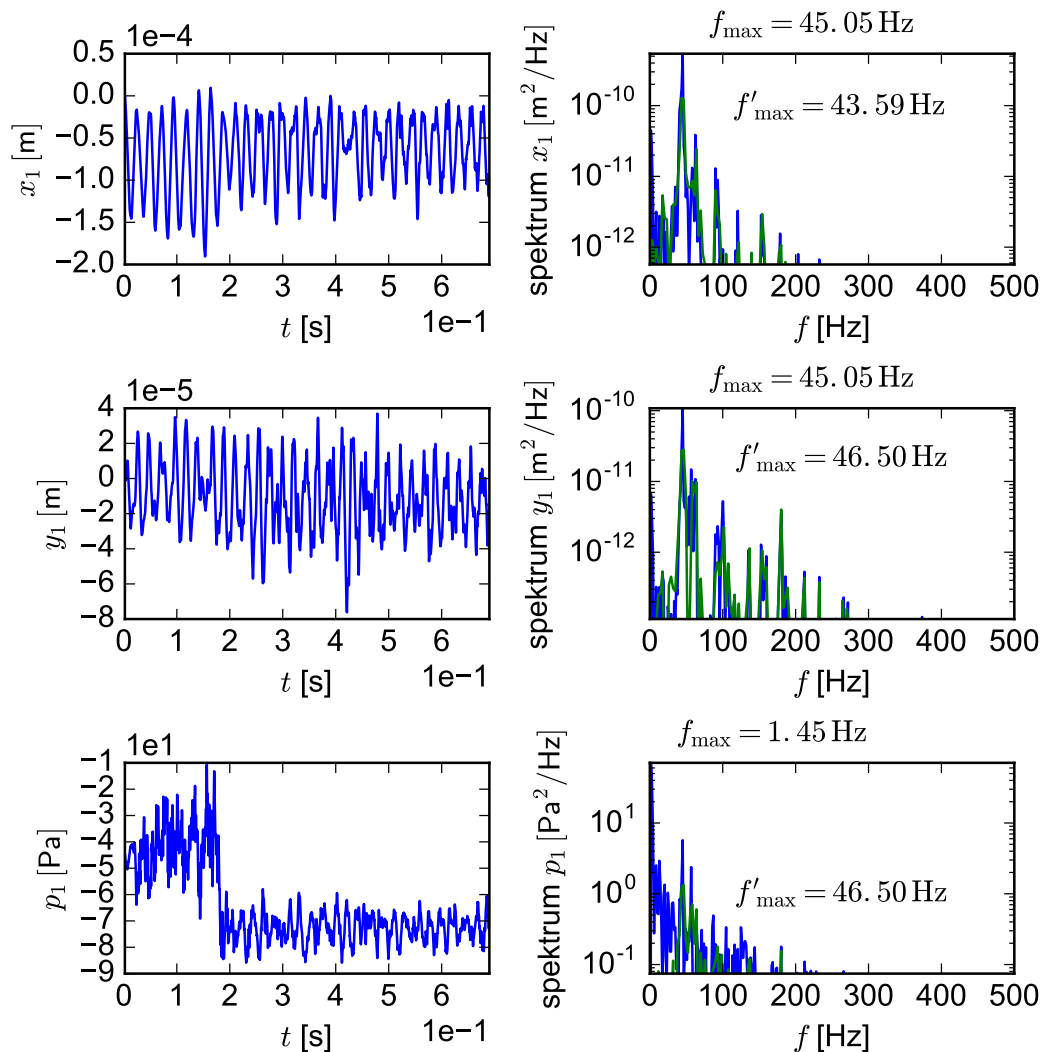
Nyní se budu věnovat jedné konkrétní simulaci při nastavení parametrů, které jsem uvedl pod bodem 6 předchozí podkapitoly o testech konzistence. Zejména bych chtěl předeslat, že v žádném případě netvrdím, že níže uvedená simulace vystihuje skutečnou fonaci (byť bez kontaktu hlasivek). Simulace fonace je podle mého názoru složitější, protože je třeba souhry vhodných parametrů.

Proces analýzy je obslužným programem plně automatizován. Průměrná simulace trvá podle požadovaného počtu kroků, délky jednoho časového kroku, hustoty sítě a stupně interpolace cca mezi 15 a 60 hodinami při využití jednoho jádra na serveru geof40 provozovaném katedrou geofyziky (6-core i7-3930K/3.20 Sandy Bridge, Intel MIC, 14x32/1.3 GB, Ubuntu 14.04).

Zabýval jsem se závislostí několika veličin v následujících sensorových bodech: 1 označuje vrchol dolní hlasivky, 2 označuje nejnižše položenou část horní hlasivky, in označuje střed hranice na vtoku a out střed hranice na výtoku (viz umístění sensorů na obr. 5c).

V bodech na povrchu hlasivky 1 a 2 jsem zkoumal výchylku bodu od počáteční polohy označenou  $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ , resp.  $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)$  a dále hodnotu tlaku. Z grafu znázorňujícího pohyb dolní hlasivky (viz obr. 14) je patrné, že hlasivka kmitá s relativně ustálenou amplitudou, s dominantní frekvencí kolem 45 Hz v obou souřadnicích, nicméně nejde o zcela ustálené harmonické kmitání. Dále pozorujeme v grafu  $x_1(t)$  celou řadu dalších vrcholů, z těch významnějších lze uvést 62 Hz a 90 Hz. Z výsledků se jeví, že hlavní vrchol není zcela ostrý, ale má vedlejší vrchol. Zkoumal jsem také, jak se vyvíjí spektrum s časem a dospěl jsem k závěru, že s výjimkou odstínění přechodových jevů nedochází k významnému posunu frekvence vrcholů grafu.

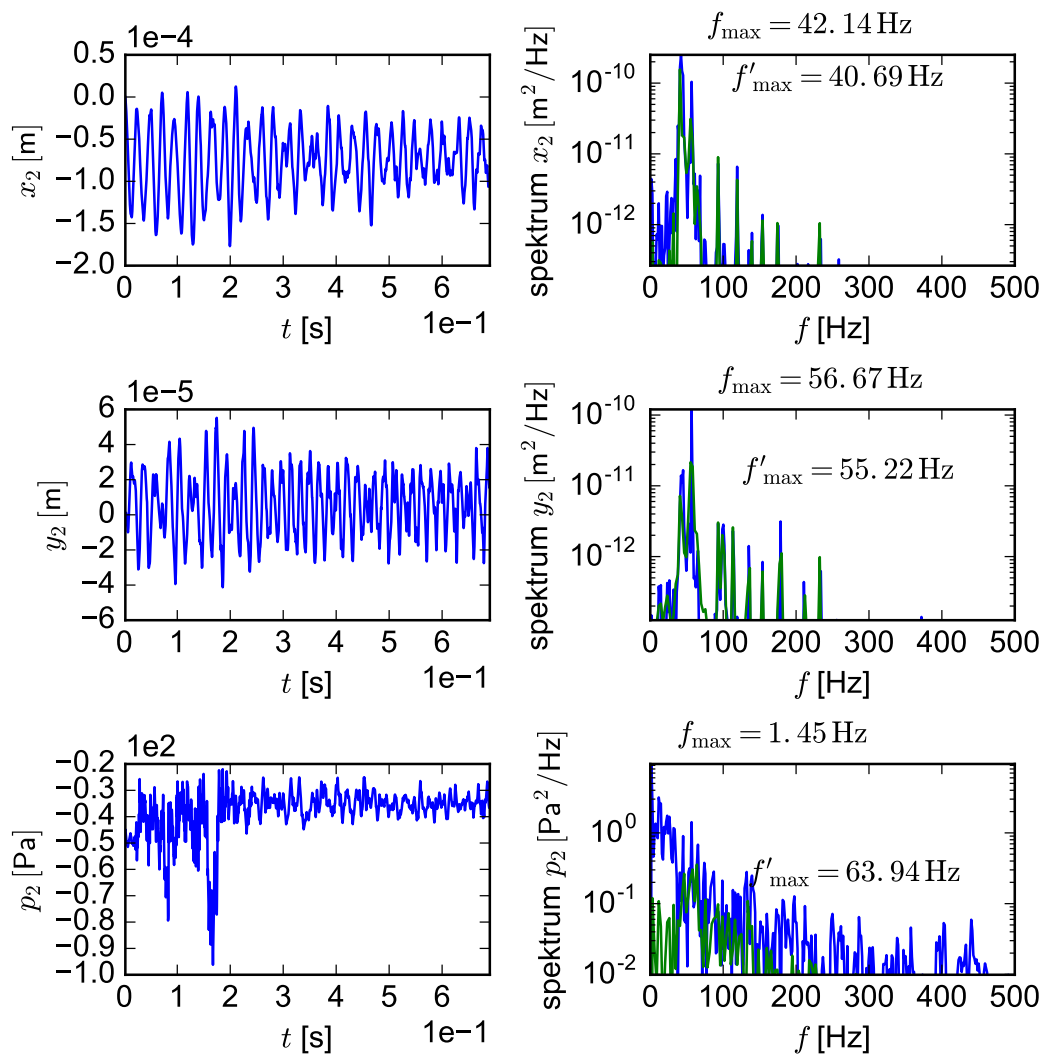
Podstatnější je závislost  $y_1(t)$ , kterou jsem označil za hlavní sledovaný parametr (viz podkapitola 5.5 na straně 56), protože ovlivňuje průtok tekutiny hlasivkou. Ve spektru vertikální výchylky jsou vyšší frekvence zastoupeny s relativně vyšší intenzitou. Opět zde pozoruji vedlejší vrchol, tentokrát s frekvencí 56 Hz. Hned druhý nejvýraznější vrchol má frekvenci 100 Hz (která je blízká s základní frekvenci vlastních kmitů 105 Hz). Další významné vrcholy mají frekvence 90 Hz, 135 Hz, 153 Hz (která je blízká vlastní frekvenci 149 Hz) a 180 Hz (která je blízká vlastní frekvenci 189 Hz). Lze shrnout, že ve spektru  $y$ -ové výchylky lze pozorovat frekvence blízké frekvencím zjištěným modální analýzou (obr. 10). Z kanálu vycházejí difundované víry s frekvencí cca 90 Hz, zatímco v simulaci bez interakce v podkapitole 5.3 na straně 49 vycházela frekvence nižší. Co se týče tlaku, na posledním grafu obr. 14 je patrný pokles v čase kolem 0,2 s. Vizualizací lze zjistit, že pokles tlaku je způsoben „přilepením“ proudu (*jetu*) ke spodní hraně



**Obrázek 14:** Simulace s výchozím nastavením – dolní hlasivka. Závislost spektra spočítaného z druhé poloviny simulace je označena zelenou barvou a příslušná maximální frekvence  $f'$ . Skok v tlaku na grafu vlevo dole je způsoben přilepením proudu ke hranici oblasti; podrobnosti v textu na předchozí straně.

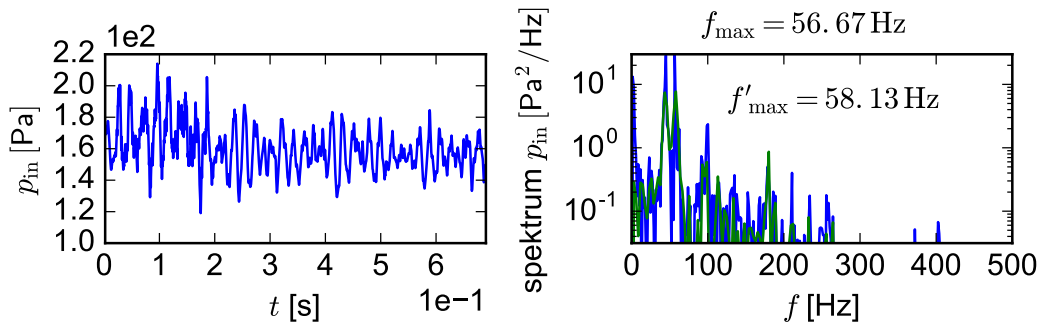
výtokové trubice (viz obr. 17 v pozdějším čase  $t = 258$  ms), zatímco do tohoto okamžiku se proud střídavě přetřhával a odkláněl nahoru a dolů.

Kmitání dolní hlasivky můžeme srovnat i s kmitáním horní hlasivky (senzor č. 2, viz obr. 15). Z grafu časové závislosti spektra je patrné, že kmitání hlasivek je blízké, zejména na začátku simulace, kdy kmitají zrcadlově (viz také obr. 18). Po „přilepení“ proudu ke stěně ovšem dochází ke zřetelným odchylkám, a to i ve frekvenční oblasti, a dále amplituda vertikálního kmitání spodní hlasivky je větší než u vrchní hlasivky. Co se týče vstupního tlaku (na hranici s předepsaným vstupním profilem rychlosti), tak pozorujeme jeho periodickou oscilaci, ovšem s poněkud vyšší frekvencí než má kmitání hlasivek (obr. 16a). Pro kontrolu jsem vynesl i tlak uprostřed výstupní hranice (obr. 16b).

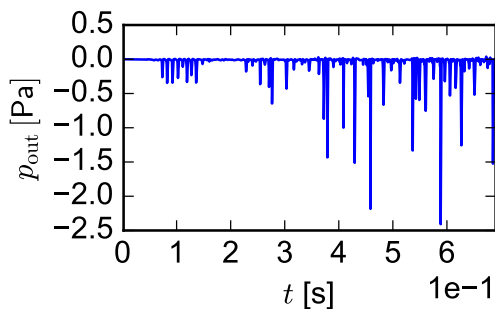


**Obrázek 15:** Simulace s výchozím nastavením – horní hlasivka. Závislost spektra spočítaného z druhé poloviny simulace je označena zelenou barvou a příslušná maximální frekvence  $f'$ .

a)

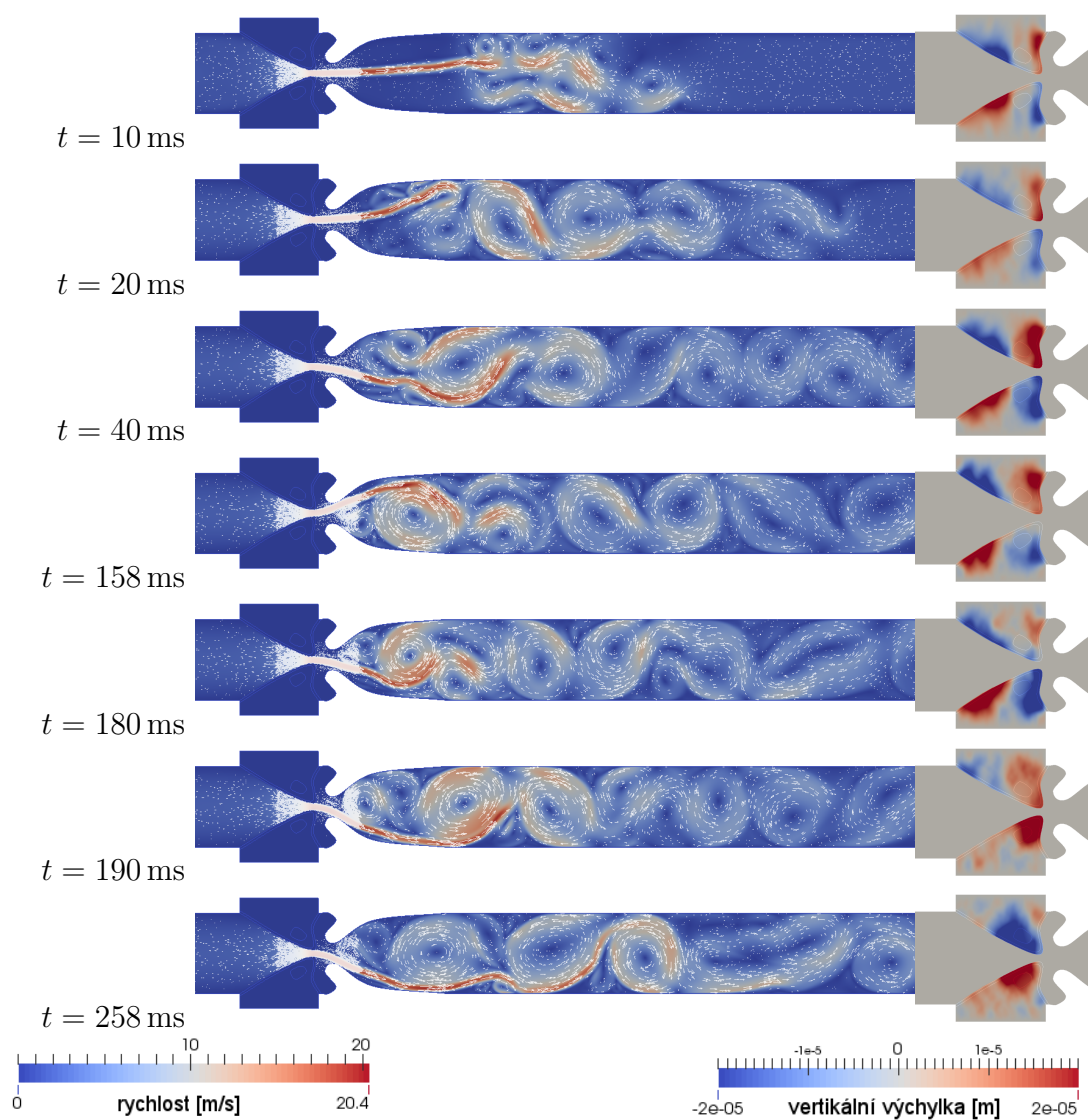


b)



**Obrázek 16:** Simulace s výchozím nastavením – závislost tlaku v senzorových bodech

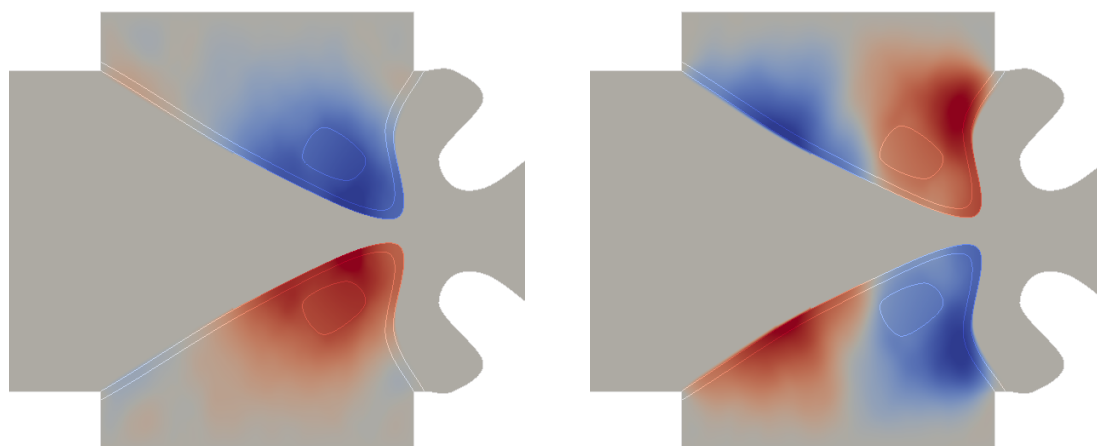
Na základě provedené simulace lze shrnout, že hlasivky kmitají relativně symetricky s drobnými asymetriemi. Tyto asymetrie jsou posíleny v případě, že dojde k „přilepení“ proudu ke stěně trubice. Proud dosahuje maximální rychlosti cca  $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , která je ve fyziologickém rozmezí (tab. 1). Dominantní frekvence kmitání se pohybuje kolem 45 Hz. Nekoresponduje s žádnou frekvencí zjištěnou modální analýzou. Ve spektru jsem pozoroval další intenzivní frekvence odpovídající modální analýze. Kmitání hlasivek vedlo k maximálnímu posunutí o cca 0,2 mm a k zúžení hlasivkové štěrbině o cca 10 %.



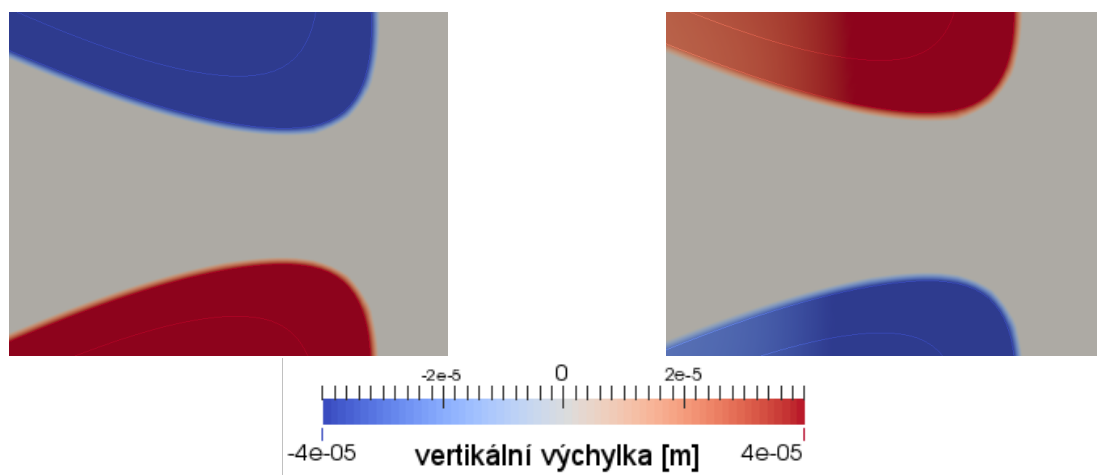
**Obrázek 17:** Simulace s výchozím nastavením – proudění (vlevo) a vertikální výchylky (vpravo) v různých časech

$t = 26 \text{ ms}$

$t = 36 \text{ ms}$



detail:



**Obrázek 18:** Grafické znázornění extrémních poloh kmitání hlasivky ve vertikálním směru. Na levém obrázku je hlasivková štěrbina o cca 0,1 mm (tj. cca o 10 %) zúžená oproti druhému extrému na pravém obrázku.



## 6 Parametrická studie

---

Jak naznačuje právě probraný příklad, není žádný empirický důvod domnívat se, že libovolné nastavení fyzikálních parametrů vokálního traktu povede k dokonalému buzení kmitání hlasivky, které bude dobře zřetelné, pravidelné a s ustálenou amplitudou (ani neodezní, ani nedojde ke kontaktu hlasivek, který není v simulaci implementován). Cílem této kapitoly je prozkoumat vliv fyzikálních parametrů na sledovanou veličinu, tj. kmitání ve vertikálním směru.

Je třeba vybrat takové fyzikální parametry, které se typicky mění (tj. ne např. viskozita a hustota vzduchu). Pro parametrickou studii jsem vybral následující parametry: rychlost profilu  $v_{\max}$ , vzdálenost hlasivek  $h_{\text{dist}}$ , Youngův modul epitelu  $E_{\text{ep}}$  a Youngův modul svalů  $E_{\text{m}}$ .

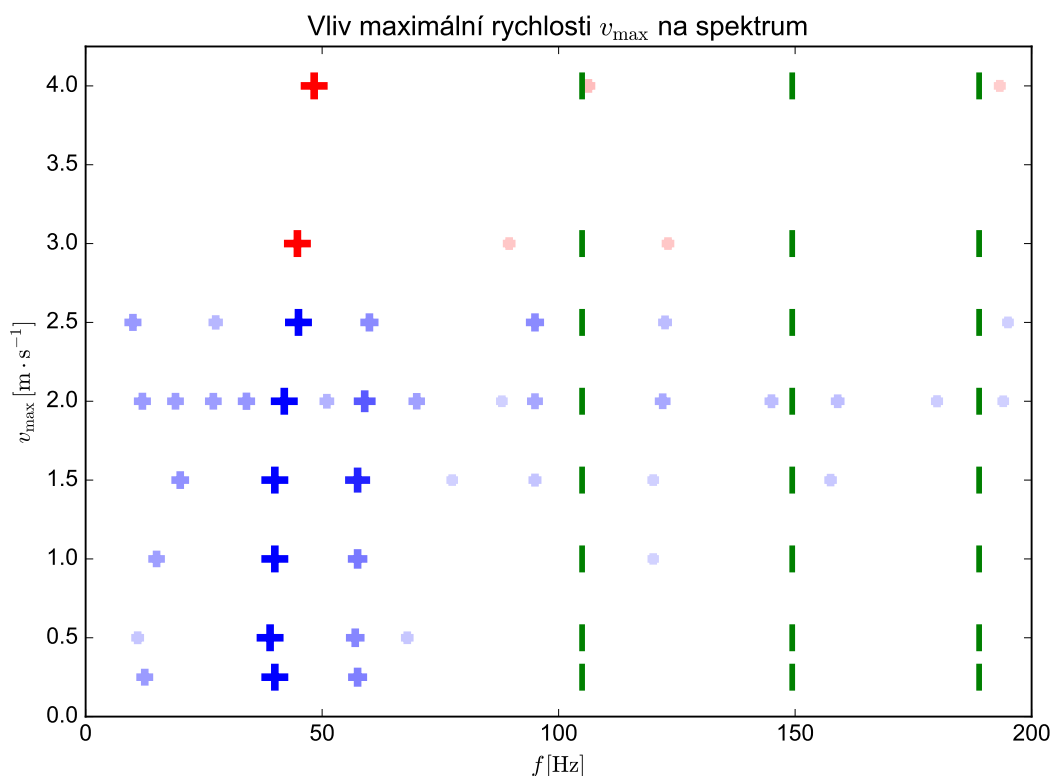
### 6.1 Závislost na vstupní rychlosti

---

Prvním uvažovaným parametrem je maximální rychlost vstupního profilu na hranici  $\Gamma_{\text{in}}$ , kterou označuji  $v_{\max}$  (viz obr. 19). Z grafu závislosti je patrné, že u všech simulací pro uvažované parametry má hlavní vrchol rozdvojenou strukturu s hlavním vrcholem 40 Hz, nicméně intenzita vedlejšího vrcholu 57 Hz se s parametrem mění. Např. pro rychlost  $v_{\max} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  je spektrální intenzita vedlejšího vrcholu srovnatelná s vrcholem příslušným základní frekvenci podle modální analýzy. Rovněž nelze říci, že by vývoj frekvencí byl monotónní v celém rozsahu parametru, byť např. v intervalu  $v_{\max} \in (1,5; 2,5) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  frekvence zřetelně rostou. V tomto intervalu je také jasně zřetelný vrchol o frekvenci 95 Hz, který je blízký základní frekvenci vlastních kmitů. Celkem v uvažovaném intervalu roste frekvence hlavního vrcholu ze 40 Hz na 47 Hz. Podstatné pozorování je, že pro vstupní rychlost nad  $v_{\max} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  se simulace neustálí a naopak směřuje ke kontaktu hlasivek. Tomuto poslednímu příkladu bych se rád stručně věnoval samostatně.

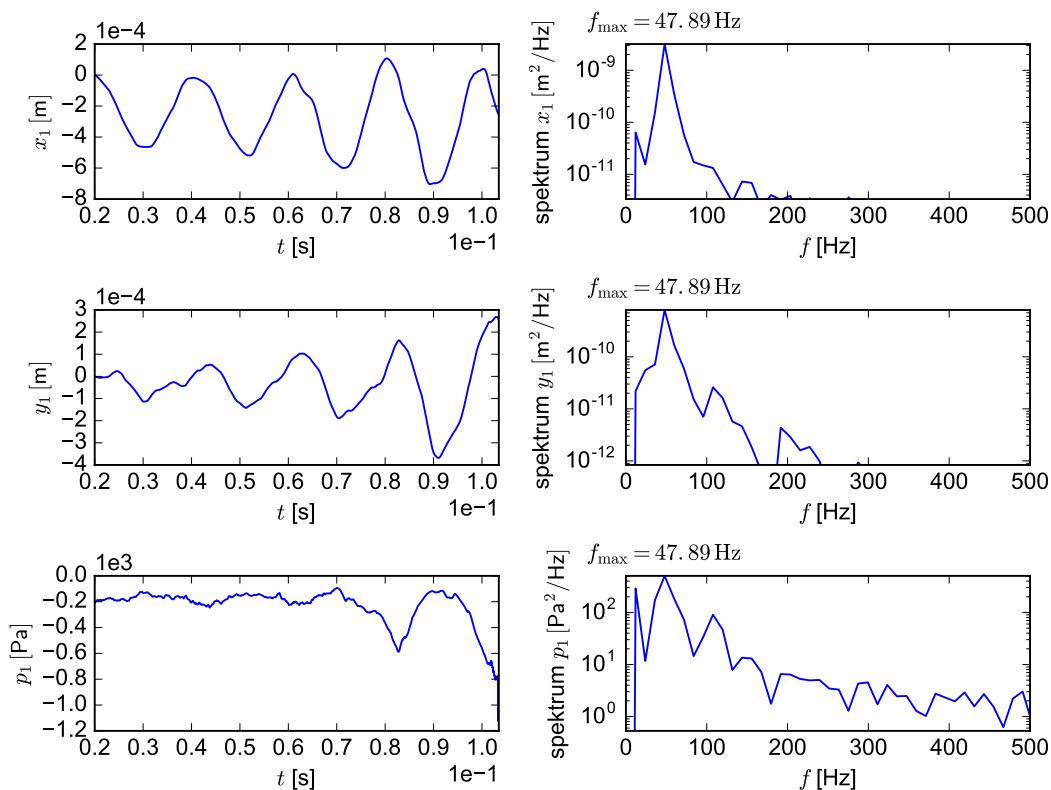
#### Velká vstupní rychlost způsobuje kontakt (práh fonace)

Je zřejmé, že zvýšením vstupní rychlosti se hlasivkám také předává více energie a zvyšuje se amplituda jejich kmitání. To lze dobře ilustrovat na příkladu simulace vedoucí ke kontaktu hlasivek (tzv. *phonation onset* neboli práh fonace) pro  $v_{\max} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (viz obr. 20 a 21). Při této rychlosti je pohyb hlasivek na obrázcích dobře zřetelný. V pravé části obrázku 21 je znázorněna jedna perioda pohybu hlasivek, o čemž svědčí také střídající se modrá a červená barva na jedné hlasivce s amplitudou cca  $2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Při symetrickém kmitání se tak pohybujeme v zobrazeném úseku kolem 50 % šířky štěrbiny. Na obrázku je patrné, že široké



**Obrázek 19:** Parametrická studie – vliv maximální rychlosti vstupního rychlostního profilu  $v_{\max}$  na spektrum. Na obrázku jsou vyneseny vrcholy ve spektrální charakteristice vertikální výchylky spodní hlasivky. Červeně jsou vyneseny simulace, které nebyly úspěšně dokončeny, typicky v důsledku kontaktu hlasivek. Ostatní FSI simulace jsou modře. Intenzita je znázorněna jednak velikostí křížku, jednak jeho sytostí. Intenzity jsou vždy normalizovány vzhledem k maximu spektrální charakteristiky pro danou hodnotu parametru. Zelenou čarou je v obrázku naznačeno spektrum zjištěné pomocí modální analýzy.

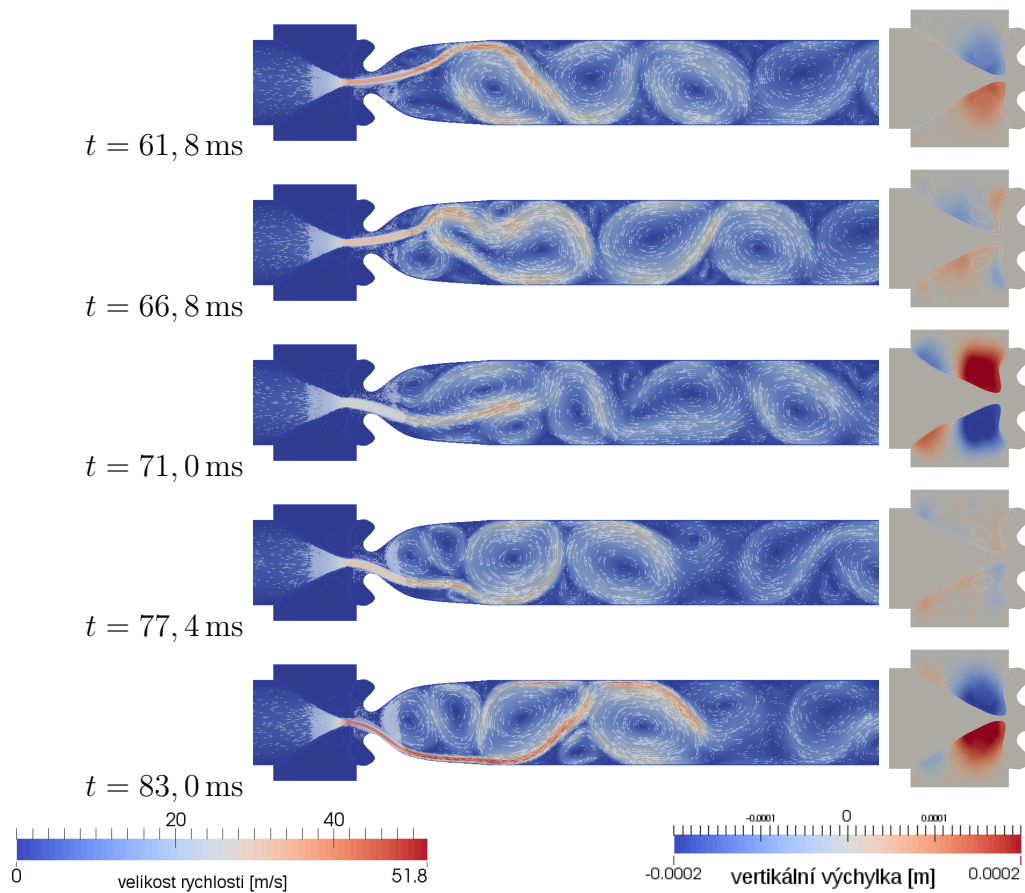
Simulace pro  $v_{\max} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  skončila z numerických důvodů (divergence řešiče NS rovnic). Simulace pro  $v_{\max} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  skončila v důsledku degenerace výpočetní sítě těsně před kontaktem hlasivek. Ostatní případy ukazují kmitání hlasivky v předfonačním režimu, které je nepravidelně periodické.



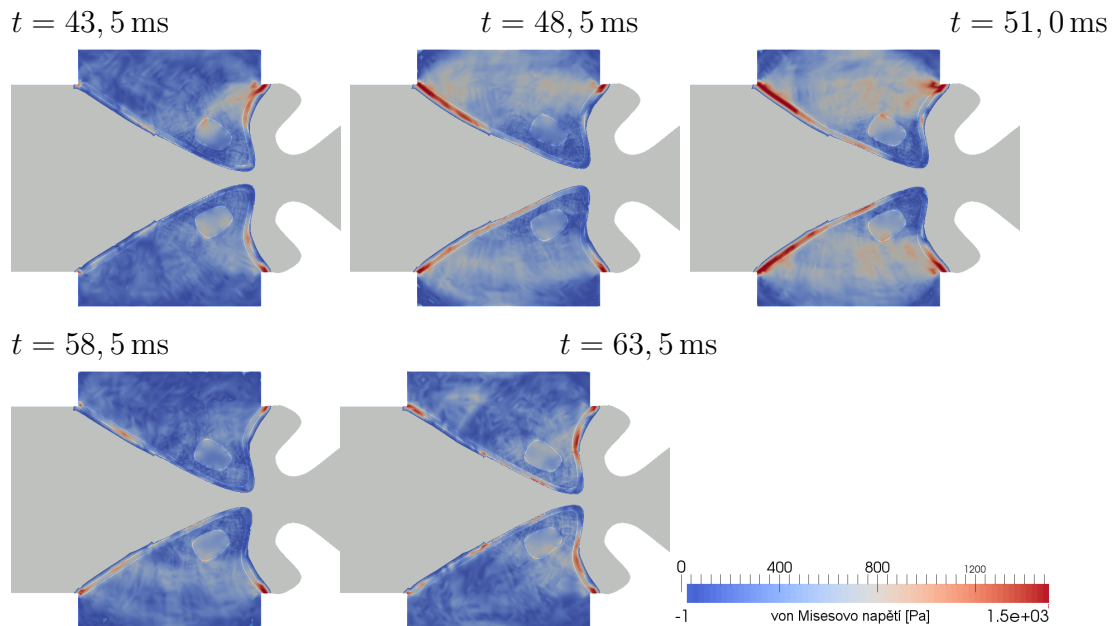
**Obrázek 20:** Závislost veličin pro případ  $v_{\max} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  vedoucí ke kontaktu.

rozevření (viz  $t = 71,0 \text{ ms}$ ) vede ke snížení rychlosti, díky čemuž se změní podmínky pro víry v trubici za hlasivkou (proud se již „nenavíjí“ na první velký vír za hlasivkou). Vidíme, že prodloužení či zkrácení glotální části hlasivky ve vertikálním směru doprovází vždy protichůdný pohyb úpatí hlasivky. Je také zřetelné, že amplituda  $y_1(t)$  roste, dokud nedojde ke kontaktu.

Na tomto příkladu si také ukážeme rozložení von Misesova napětí (29) v hlasivce během fonačního cyklu (obr. 22). Je třeba předem uvést, že jelikož se tato práce nezabývá kontaktem hlasivky, nutně tak přehlídí jednu z hlavních příčin překročení napětí, která vede k poškození hlasivek. Přesto lze ze simulace získat aspoň základní představu o napětích. Napětí je zjevně nejvyšší v epitelu v části, která se zrovna natahuje či smrštuje (dosahuje hodnot kolem 1,5 kPa). To je podstatné zejména z toho důvodu, že tato místa je třeba brát jako zvláště citlivá v případě operace hlasivek, případně je třeba namáhaná místa zohlednit při návrhu umělé náhrady hlasivek. Z obrázků je patrné, že jde zejména o úpony epitelu, případně střední část. Na vrcholu hlasivky tak vysoké napětí nepozorujeme. Avšak právě zde bude naopak docházet k rázům doprovázeným tlakem a kontaktním napětím. Podle Vampoly a kol. [81] dosahuje napětí v epitelu hodnot až cca 4 kPa.



**Obrázek 21:** Příklad vedoucí ke kontaktu – interakce hlasivky a tekutiny v extrémním případě pro maximum vstupní rychlosti tekutiny  $v_{\max} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . O jednu periodu později již interakce končí dotykem hlasivek.



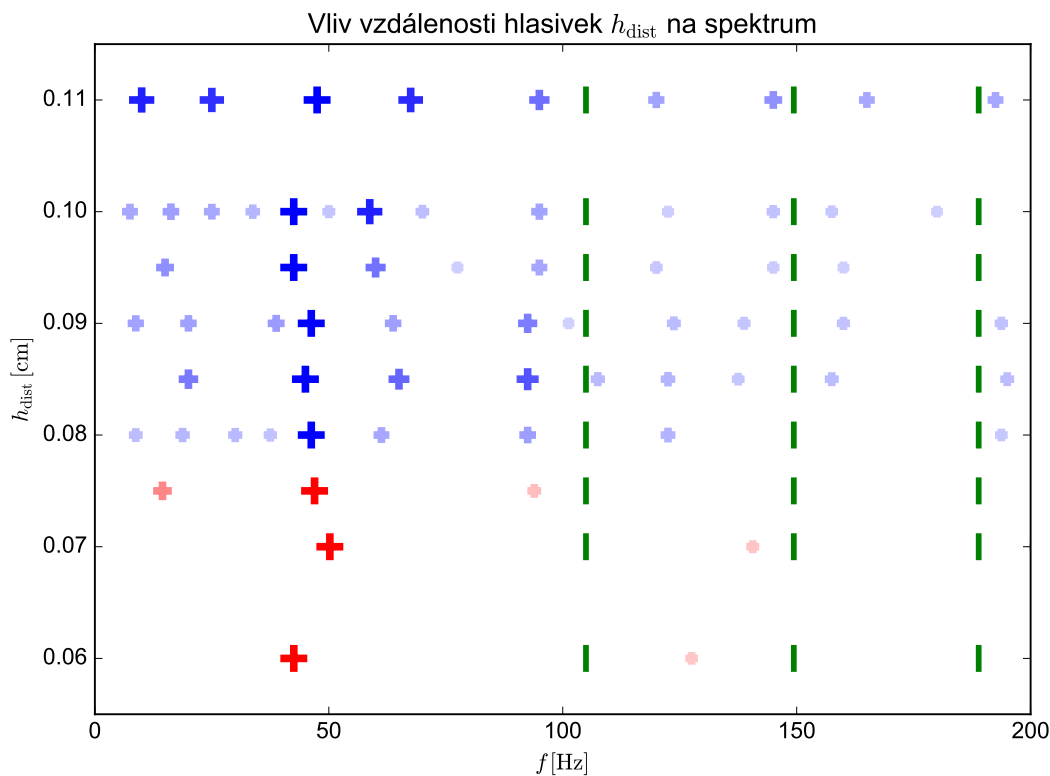
**Obrázek 22:** Příklad vedoucí ke kontaktu – závislost von Misesova napětí v hlasivce během jedné periody. „Zuby“ na povrchu hlasivky jsou problém vizualizačního software, který interpoluje i napříč oblastmi. Koncentrace napětí vzniká zejména kvůli nehladké hranici.

## 6.2 Závislost na šířce štěrbin

Druhým uvažovaným parametrem je počáteční vzdálenost hlasivek  $h_{\text{dist}}$  (viz obr. 23). V grafu je opět viditelný vrchol s frekvencí 42-50 Hz. Z grafu závislosti je stejně jako v předchozím příkladě patrné, že hlavní vrchol má členitou strukturu, nelze dovést monotónní závislost frekvenčního maxima na parametru, intenzita vedlejšího vrcholu rovněž není monotónní funkcí parametru a je dobře viditelný vrchol kolem 95 Hz, což je hodnota blízká základní frekvenci podle modální analýzy. Z grafu je také patrné, že pro  $h_{\text{dist}} \in (0,075 \pm 0,005)$  cm a menší opět dochází ke kontaktu hlasivek.

## 6.3 Závislost na pružnosti hlasivky

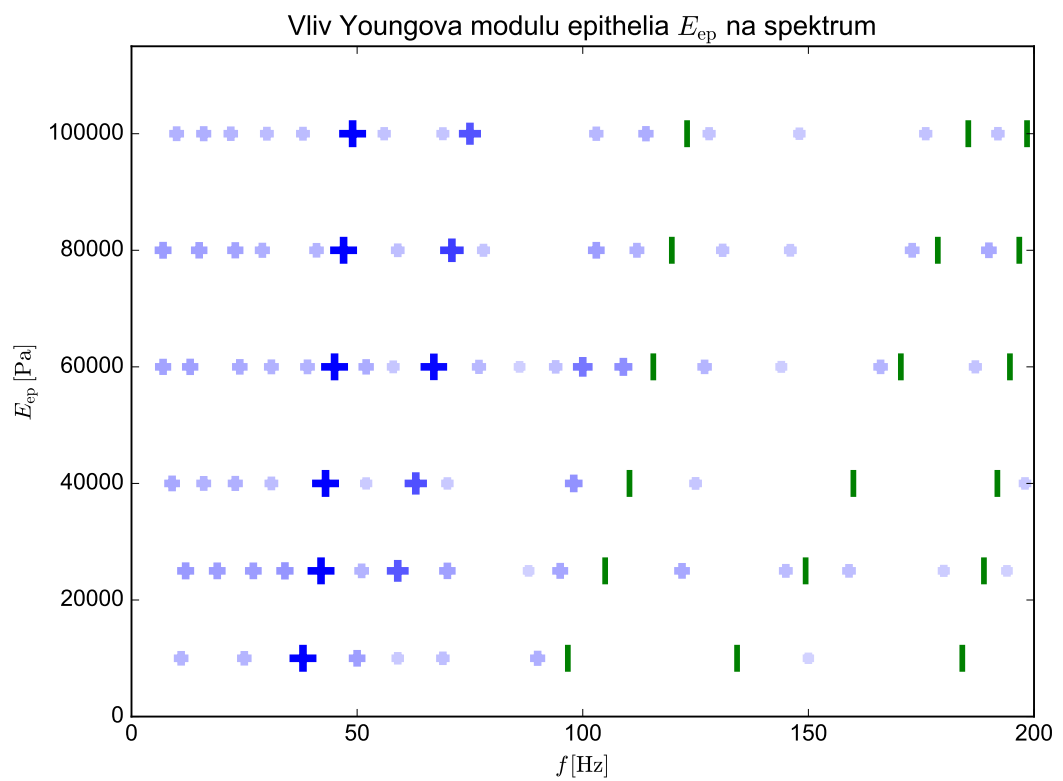
Třetím uvažovaným parametrem je Youngův modul pružnosti epitelu  $E_{\text{ep}}$  (viz obr. 24). V grafu je opět viditelný vrchol s frekvencí 42-50 Hz. Je zde zřetelná tendence ke zvyšování frekvence spolu s modulem pružnosti  $E_{\text{ep}}$ , která koresponduje se zvyšováním frekvencí vypočtených v modální analýze (viz zelené čáry na grafu). S růstem parametru roste frekvence jako konvexní funkce, přičemž tempo růstu je různé pro různé mody. Přestože se frekvence zjištěné modální analýzou opět odlišují od těch zjištěných z FSI přibližně o 10 Hz a v některých případech korespondující hodnoty z FSI chybí, trend je zjevně podobný. V měřeném rozsahu  $E_{\text{ep}} \in (10; 100)$  kPa je simulace stabilní.



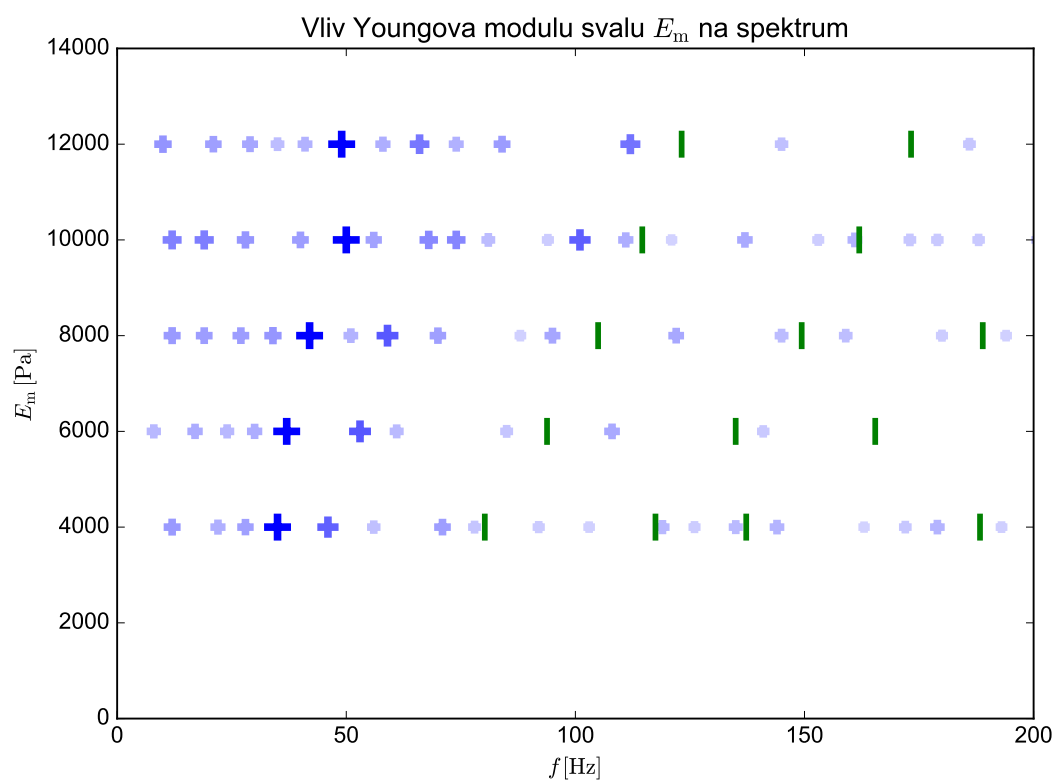
**Obrázek 23:** Parametrická studie – vliv počáteční vzdálenosti hlasivek  $h_{\text{dist}}$  na spektrum. Značení jako na obr. 19. Červeně označené simulace vedou ke kontaktu hlasivek (práh fonace).

Naměřená data (viz obr. 26) také ukazují předpokládanou skutečnost, že při zvýšení  $E_{\text{ep}}$  se zvýší spektrální hustota vyšších frekvencí ve spektru. Na těchto grafech lze dobře vidět obálka, která při některých parametrech modifikuje amplitudu signálu.

Čtvrtým uvažovaným parametrem je Youngův modul pružnosti svalu  $E_{\text{m}}$  (viz obr. 25). K tomu lze uvést vesměs totéž, co jsem uvedl o pružnosti povrchu. Samozřejmě pro plné porozumění vytvořenému modelu by bylo vhodné podrobně projít reprezentativní soubor možných parametrů, nicméně to by vyžadovalo superpočítač a překračuje to rozsah této práce.

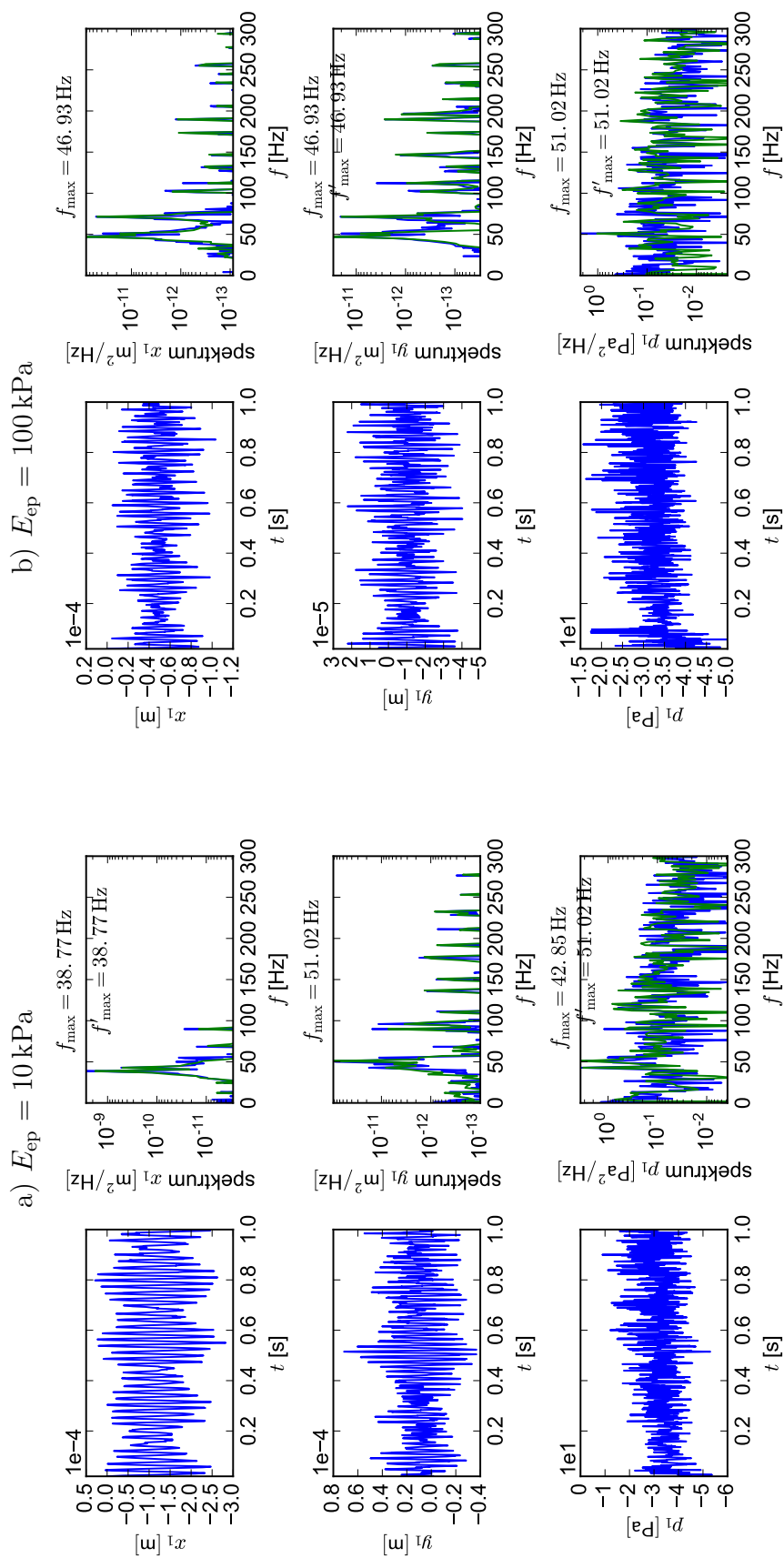


**Obrázek 24:** Parametrická studie – vliv Youngova modulu epitelu  $E_{ep}$  na spektrum. Značení jako na obr. 19.



**Obrázek 25:** Parametrická studie – vliv Youngova modulu svalu  $E_m$  na spektrum. Značení jako na obr. 19.





**Obrázek 26:** Závislost veličin – extrémní hodnoty parametru pružnosti povrchové vrstvy  $E_{ep}$ . Závislost spektra spočítaného z druhé poloviny simulace je označena zelenou barvou a příslušná maximální frekvence  $f'$ .

## 6.4 Diskuse výsledků

---

Tuto kapitolu bych rád uzavřel kvalitativním a kvantitativním porovnáním výsledků s dosavadními pracemi a experimentálními poznatky o kmitání hlasivek či hlasivkových náhrad, pokud o nich dosud nebyla řeč přímo v souvislosti s probíraným tématem. Srovnání se vznikem primárního tónu v lidském hlase je samozřejmě třeba vždy brát s určitou rezervou, neboť FE simulace používá celou řadu zjednodušujících předpokladů, a zejména v této práci nepočítám s kontaktem hlasivek (jde tedy o zkoumání kmitání pod prahem fonace).

Předně jsem výsledky porovnával s prací, ze které jsem převzal materiálové hodnoty [35]. Tato práce sice neobsahuje žádné konkrétní měření frekvence, ale jsou v ní obrázky proudění, které mají stejný charakter jako výsledky v této práci (viz obr. 17). Odlišnost spočívá nicméně v tloušťce epitelu, přičemž závislostí na tomto parametru by bylo vhodné se dále zabývat. Experimentálně interakci proudění a umělé hlasivky zkoumala práce [28], kde je pomocí PIV metody proměřen proud vycházející z hlasivek a vyfoceno jejich kmitání. Práce sice uvažuje jinou geometrii supraglotálního traktu (neboť uvažuje proudění dutinami celého vokálního traktu člověka), ale i tak experimentálně potvrzuje závěr, že proud je asymetrický, vychyluje se a „přilepuje“ se ke stěnám (Coandův efekt) a nad nepravými hlasivkami se tvoří velké víry o velikosti srovnatelné s průřezem kanálu, což jsem pozoroval (obr. 17). [1, s. 338] [68, s. 45]<sup>9</sup> [25, s. 122] Vytvořený model proudění se tedy s vybranými FE modely proudění kvalitativně shoduje. Nevýhoda vstupního profilu rychlosti oproti předepsání okrajové podmínky na vstupní tlak spočívá v tom, že vyvolává na počátku simulace nefyzikálně vysoký tlak. Vedle toho lze lépe měřit tlak pod hlasivkami než rychlostní profil.

Klíčovým parametrem zjišťovaným v této práci je frekvenční spektrum. V souladu s měřením [70] jsem pozoroval oscilaci subglotálního tlaku (obr. 16a), i když s jinou frekvencí. Z této práce jsem převzal geometrii hlasivky (viz [70, s. 993], hlasivka č. 8,  $f = 304$  Hz, žena, 72 let), která byla přesně geometricky zaměřena a jako jediná obstála ve všech experimentech. Nicméně autoři se nezabývali určením fyzikálních parametrů pružnosti, které jsou pro FE simulaci klíčové. Bez znalosti těchto parametrů nelze naměřenou a spočítanou frekvenci srovnávat.

Jak uvádí Alipour a kol. ve studii publikované v roce 2011 [1], jen cca 40 % studií simulujících hlasivky vůbec uvádí kompletní parametry struktury hlasivek a jejich určení často vychází z „informovaných“ odhadů. Modelování hlasivek se často používá právě kvůli náročnosti jejich přesného měření. To vede k tomu, že jen asi 37 % studií [1, s. 338] kvantitativně srovnává své výsledky s jinými zdroji. Relevantní srovnání je velmi obtížné. V tomto ohledu by bylo jistě výhodnější

---

<sup>9</sup>Pozn.: Petr Šidlof ve své práci předepisuje pohyb hlasivky, nejde o buzené kmity.

uvažovat některý standardizovaný model hlasivky (např. M5 [30]), ale tím bychom zase přišli o výhodu v podobě experimentálního měření. Z metodického hlediska lze ocenit např. článek Thomsonův a Murrayův [74], kde autoři ověřili svůj FE model na syntetickém modelu (náhrady), jehož výrobou se odborně zabývají. Ověřili shodu FE modelu a syntetického modelu ohledně hlavní frekvence kmitání (kolem 116 Hz). Bohužel autoři neprovedli modální analýzu, takže není k dispozici srovnání.

Naproti tomu Zörner a kol. [88] provedli vedle FE simulace FSI i modální analýzu a potvrdili, že frekvence zjištěné modální analýzou dominují i spektru FSI. (Viz shodně články citované v [85]). V této práci se mi tento závěr nepodařilo potvrdit, neboť frekvence FSI se pohybuje kolem 50 Hz proti frekvenci z modální analýzy cca 100 Hz. Nepodařilo se mi zjistit důvod tohoto výsledku, ačkoliv jsem provedl velký počet numerických testů s cílem vyloučit chybu metody. Z provedené parametrické studie nicméně vyplývá, že frekvence vrcholů ve spektru škálují požadovaným způsobem a že modální frekvence mají ve spektru FSI blízké korespondující body. Hasnedlová [25, s. 121] uvažuje ve své práci velmi podobnou geometrii a srovnatelné parametry a dospívá k zajímavému výsledku, kdy hlasivka nejprve kmitá s nižší frekvencí a teprve časem přejde na vyšší (dvojnásobnou) frekvenci. Bohužel ani po konzultaci s autorkou se mi tento její výsledek nepodařilo objasnit. Konzistenci modelu by bylo do budoucna dobré potvrdit simulací s M5 profilem hlasivky a simulací některého benchmarkového příkladu (viz např. [77]).

Za přednost své práce považuji skutečnost, že se podařilo sestavit samobuzený FE model hlasivky, za nedostatek považuji příliš velkou tloušťku epitelu v modelu struktury a nevysvětlení zjištěné dominantní frekvence FSI interakce. Omezení vyplývající z předpokladů metody jsem uvedl v první kapitole 2.2. Za nejperspektivnější cesty řešení nedostatků považuji přechod do 3D, naměřené nebo dobře zdůvodněné všechny fyzikální parametry simulace, modelování kontaktu hlasivek, rázů, přerušení proudu vzduchu při kontaktu a navazující stlačitelnost proudění doplněnou o model turbulence. Všechny tyto aspekty jsou v principu řešitelné v programu Elmer. Pro přechod do 3D je třeba implementovat naměřený model vokálního traktu, paralelizovat simulaci a spouštět ji na clusteru (výkonnost lze zlepšit např. adaptací výpočetní sítě). Dotyk hlasivek je možné v nejjednodušší podobě provést např. přerušením proudu při přiblížení hlasivek. Modely stlačitelnosti a turbulence jsou již v Elmeru implementovány, nicméně náročnou částí je zejména dosažení konvergence v celém rozsahu zkoumaných parametrů. Konvergenci numerického řešení lze pomoci adaptivním časovým krokem pro případ kolapsu simulace, případně BDF metodou druhého řádu [68], která bohužel ve vazbě na ALE metodu není dosud v Elmeru spolehlivě implementována.

## 7 Závěr

---

V této práci jsem vytvořil 2D model kmitání hlasivek vybuzeného interakcí s proudící tekutinou. Použil jsem přitom teorii velkých deformací, lineární rheologii odpovídající St. Venantovu-Kirchhoffovu modelu strukturovanou do 3 oblastí. Proudění bylo modelováno jako viskózní nestlačitelná tekutina se stabilizací. Numerika byla řešena metodou konečných prvků lineárními (příp. kvadratickými) elementy s ALE metodou. Podrobně jsem diskutoval fyzikální předpoklady a okrajové podmínky a na základě tohoto rozboru jsem sestavil slabou formulaci úlohy.

Těžiště práce spočívá v numerickém modelu, který simuluje kmitání hlasivek vybuzeného proudící tekutinou. Model zachycuje předfonační režim bez kontaktu hlasivek, případně stavy bezprostředně vedoucí ke kontaktu. Konzistenci modelu jsem ověřil pomocí testování jeho částí a porovnáním 10 variant numerického modelu. Prozkoumal jsem časovou závislost veličin zjištěných na senzorech připojených na hlasivku při bezkontaktním kmitání hlasivek v předfonačním režimu, určil jsem její frekvenční charakteristiku a popsal jsem charakter proudění, který jsem porovnal s prouděním v nepohyblivém vokálním traktu. Kmitání struktury spočítané v rámci FSI jsem porovnal s modální analýzou. Ve spektru FSI jsem pozoroval vrcholy odpovídající modálním frekvencím typicky jako druhé nejintenzivnější.

Následně jsem zpracoval parametrickou studii pro maximum rychlosti vstupního profilu  $v_{\max}$ , předfonační vzdálenost hlasivek  $h_{\text{dist}}$ , Youngův modul pružnosti epitelu  $E_{\text{ep}}$  a Youngův modul pružnosti svalu  $E_{\text{m}}$ . Parametrická studie zahrnuje porovnání výsledků FSI s výsledky zjištěnými modální analýzou. Speciálně jsem pro vyšší vstupní rychlosti vzduchu zkoumal počátek fonace (*phonation onset*), při kterém vybuzeného kmitání hlasivek bezprostředně směřuje ke kontaktu. Zdokumentoval jsem časovou závislost tohoto kmitání, charakter proudění i napětí v hlasivce. Parametrická studie potvrzuje, že jak dostatečné zvýšení vstupní rychlosti vzduchu, tak dostatečné zúžení hlasivkové štěrbiny vedou k začátku fonace. Parametrická studie také ukazuje, že posun spektra při změně elastických parametrů má u FSI a modální analýzy podobný průběh.

V celé simulaci jsem využil výhradně open source software, u kterého je možné prověřit zdrojový kód a přizpůsobit ho vlastní simulaci, a dále vlastní vyvinutý kód.

## Seznam použitých veličin a symbolů

---

Seznam je řazen abecedně podle latinky, u každého písmena jsou nejdříve velká písmena, potom malá písmena a potom odpovídající řecká písmena. Protože písmen je hodně, je třeba věnovat pozornost i velikosti a řezu písmene. Seznam obsahuje pouze značení, které je používáno opakovaně i mimo místo, kde bylo zavedeno.

|  |   |
|--|---|
| *  | označení bázových funkcí ve slabé formulaci       |
| $\sim$   | označení souřadnic ve slabé formulaci             |
| <b>A</b>   | vektor plochy v materiálových souřadnicích        |
| <b>a</b>   | vektor plochy v laboratorních souřadnicích        |
| $\alpha$   | první koeficient Rayleighova tlumení              |
| $\beta$  | druhý koeficient Rayleighova tlumení              |
| <b>C</b>   | Cauchyho deformační tenzor                        |
| <b>c</b>   | konvektivní rychlost                              |
| <b>D</b>   | matice Rayleighova tlumení                        |
| $\Delta t$   | časový krok simulace                              |
| $\nabla_{\mathbf{X}}$  | gradient v materiálových souřadnicích             |
| $\nabla_{\mathbf{x}}$  | gradient v laboratorních souřadnicích             |
| $\frac{\partial}{\partial t} \Big _{\mathbf{X}} \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}}$ | materiálová časová derivace veličiny $\mathbf{u}$ |
| $\frac{\partial}{\partial t} \Big _{\chi}$                                     | derivace počítaná při konstantním $\chi$          |
| <b>E</b>   | tenzor konečné deformace                          |
| $E_{\text{ep}}$  | Youngův modul pružnosti epitelu                   |
| $E_{\text{m}}$   | Youngův modul pružnosti svalu                     |
| $\epsilon$   | tenzor rychlosti deformace                        |
| $\eta$   | Poissonovo číslo                                  |
| <b>F</b>   | tekutina ( <i>fluid</i> )                         |

|                        |  |
|------------------------|--|
| $\mathbf{F}$           | deformační gradient                                  |
| $f$                    | generická funkce/frekvence kmitů                     |
| $\Gamma$               | hranice oblasti (viz podrobně kap. 3.1 na straně 13) |
| $h$                    | diskretizovaná veličina                              |
| $h_{\text{dist}}$      | počáteční šířka hlasivkové štěrbiny                  |
| $\mathbf{I}$           | identita   |
| $J$                    | jakobián deformačního gradientu                      |
| $\mathbb{K}$           | matice tuhosti                                       |
| $K$                    | index konečného prvku                                |
| $\varkappa$            | koeficient tlumení zpětného proudění                 |
| $L_{\text{channel}}$   | délka kanálu v prostoru nad hlasivkami               |
| $L_{\text{start}}$     | délka kanálu v prostoru pod hlasivkami               |
| $\lambda_1, \lambda_2$ | Lamého koeficienty                                   |
| $\mathbf{M}$           | výpočetní síť ( <i>mesh</i> )                        |
| $\mathbb{M}$           | matice hmotnosti                                     |
| $\mu$                  | dynamická viskozita                                  |
| $\mathbf{N}$           | normálový vektor v materiálových souřadnicích        |
| $N$                    | počet časových kroků                                 |
| $\mathbf{n}$           | normálový vektor v laboratorních souřadnicích        |
| $\nu$                  | kinematická viskozita                                |
| $\Omega, \omega$       | výpočetní oblast/podoblast                           |
| $p$                    | tlak   |
| $Q$                    | prostor testovacích funkcí tlaku ve slabé formulaci  |
| $R$                    | univerzální plynová konstanta                        |
| $\rho$                 | hustota v laboratorních souřadnicích                 |

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $\rho_0$              | počáteční hustota v materiálových souřadnicích                                  |
| $S$                   | struktura ( <i>structure</i> )  |
| $\mathbf{S}$          | Piola-Kirchhoffův tenzor 1. druhu   |
| $\bar{\mathbf{S}}$    | Piola-Kirchhoffův tenzor 2. druhu   |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | Cauchyho tenzor napětí  |
| $\sigma$              | von Misesovo napětí   |
| $\mathbf{t}$          | trakční vektor  |
| $\top$                | transpozice matice či vektoru   |
| $t$                   | čas   |
| $\mathbf{u}$          | vektor posunutí   |
| $V$                   | objem v materiálových souřadnicích  |
| $\mathbf{V}_0$        | prostor testovacích vektorových funkcí (rychlosti, posunutí) ve slabé formulaci |
| $v$                   | objem v laboratorních souřadnicích  |
| $\mathbf{v}$          | vektor absolutní rychlosti v laboratorních souřadnicích                         |
| $v_{\max}$            | maximum rychlostního profilu na vstupu  |
| $\hat{\mathbf{v}}$    | rychlost bodu výpočetní oblasti   |
| $\mathbf{X}$          | vektor polohy v materiálových souřadnicích                                      |
| $\mathbf{x}$          | vektor polohy v laboratorních souřadnicích                                      |
| $\boldsymbol{\chi}$   | vektor polohy v referenčních souřadnicích                                       |
| $\mathbf{w}$          | testovací funkce v laboratorních souřadnicích                                   |
| $\mathbf{W}$          | testovací funkce v materiálových souřadnicích                                   |

## Seznam obrázků

---

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Anatomie hlasivek . . . . .   | 7  |
| 2  | Pohled na živé hlasivky . . . . .   | 8  |
| 3  | Označení hranic oblastí . . . . .   | 15 |
| 4  | Znázornění ALE formulace a souvisejícího značení . . . . .                    | 19 |
| 5  | Geometrie, výpočetní sítě a umístění senzorů . . . . .                        | 46 |
| 6  | Testovací případ proudění mezi deskami . . . . .                              | 51 |
| 7  | Test proudění ve vokálním traktu bez interakce – začátek . . . . .            | 54 |
| 8  | Test proudění ve vokálním traktu bez interakce – rozvinuté proudění . . . . . | 55 |
| 9  | Ukázka kolapsu simulace kvůli zpětnému proudu . . . . .                       | 56 |
| 10 | Modální analýza hlasivky . . . . .  | 56 |
| 11 | Testy konzistence – srovnání vertikální výchylky . . . . .                    | 59 |
| 12 | Testy konzistence – stav proudění v čase $t = 50$ ms . . . . .                | 60 |
| 13 | Testy konzistence – rychlost konvergence normy . . . . .                      | 61 |
| 14 | Simulace s výchozím nastavením – dolní hlasivka . . . . .                     | 64 |
| 15 | Simulace s výchozím nastavením – horní hlasivka . . . . .                     | 65 |
| 16 | Simulace s výchozím nastavením – tlak v senzorech . . . . .                   | 66 |
| 17 | Simulace s výchozím nastavením – proudění a výchylky . . . . .                | 67 |
| 18 | Simulace s výchozím nastavením – extrémní polohy kmitání . . . . .            | 68 |
| 19 | Parametrická studie – vliv maximální rychlosti . . . . .                      | 70 |
| 20 | Případ vedoucí ke kontaktu – časový průběh a spektrum . . . . .               | 71 |
| 21 | Případ vedoucí ke kontaktu – proudění a výchylka . . . . .                    | 72 |
| 22 | Případ vedoucí ke kontaktu – napětí . . . . .                                 | 73 |
| 23 | Parametrická studie – vliv počáteční vzdálenosti . . . . .                    | 74 |
| 24 | Parametrická studie – vliv Youngova modulu epitelu $E_{ep}$ . . . . .         | 75 |
| 25 | Parametrická studie – vliv Youngova modulu svalu $E_m$ . . . . .              | 76 |
| 26 | Grafy pro extrémní hodnoty parametru pružnosti povrchové vrstvy . . . . .     | 77 |



## Seznam tabulek

---

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Parametry hlasivek uváděné ve studiích . . . . .         | 9  |
| 2 | Fyzikální veličiny související s deformací . . . . .     | 14 |
| 3 | Fyzikální veličiny související s napětím . . . . .       | 15 |
| 4 | Výchozí fyzikální parametry numerického modelu . . . . . | 47 |
| 5 | Schéma použitých programů . . . . .                      | 48 |

## Seznam použité literatury

---

1. ALIPOUR, F., BRUCKER, C., COOK, D. D. et al. Mathematical models and numerical schemes for the simulation of human phonation. *Current Bioinformatics*. 2011, roč. 6, č. 3, s. 323–343. ISSN 1574-8936.
2. ALIPOUR, F.; VIGMOSTAD, S. Measurement of vocal folds elastic properties for continuum modeling. *Journal of Voice*. 2012, roč. 26, č. 6, s. 816–e21. Dostupný také z WWW: [http://www.ritsumei.ac.jp/~isao/Papers/Alipour\\_Model\\_CBI02011.pdf](http://www.ritsumei.ac.jp/~isao/Papers/Alipour_Model_CBI02011.pdf). ISSN 0892-1997.
3. AYACHIT, U. *The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application*. Clifton Park (NY, USA): Kitware, Inc., 2015. ISBN 978-1930934306.
4. BAIOCCHI, C., BREZZI, F.; FRANCA, L. P. Virtual bubbles and the Galerkin-least squares method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1993, roč. 105, s. 125–141. ISSN 0045-7825.
5. BAZILEVS, Y., TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. *Computational fluid-structure interaction: methods and applications*. Chichester (UK): John Wiley & Sons, 2013. ISBN 978-0-470-97877-1.
6. BENNINGER, M. S., MURRY, T.; JONHNS, M. M. (ed.). *The Performer's Voice*. 2nd Edition. San Diego: Plural Publishing Inc., 2015. ISBN 978-1-59756-543-1.
7. BIRKEN, P. *Numerical methods for the unsteady compressible Navier-Stokes equations*. 2013. Habilitační práce na Universität Kassel, Německo. Dostupný také z WWW: <https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2013013042485/3/BirkenHabilitation.pdf>.
8. BODNÁR, T., GALDI, G. P.; NEČASOVÁ, Š. (ed.). *Fluid-Structure Interaction and Biomedical Applications*. Basel: Springer, 2014. ISBN 978-3-0348-0821-7.
9. BRAACK, M., MUCHA, P. B.; ZAJACZKOWSKI, W. M. Directional do-nothing condition for the Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Mathematics*. 2014, roč. 32, č. 5, s. 507–521. ISSN 0254-9409.
10. BRDIČKA, M. *Mechanika kontinua*. Praha: Nakladatelství československé akademie věd, 1959. ISBN 978-80-200-2039-0.
11. DE VRIES, M., SCHUTTE, H., VELDMAN, A.; VERKERKE, G. Glottal flow through a two-mass model: comparison of Navier–Stokes solutions with simplified models. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2002, roč. 111, č. 4, s. 1847–1853. ISSN 0001-4966.

12. DONEA, J.; HUERTA, A. *Finite element methods for flow problems*. Chichester: John Wiley & Sons, 2003. ISBN 978-0-471-49666-3.
13. DONEA, J., HUERTA, A., PONTHOT, J.-P.; RODRÍGUEZ-FERRAN, A. Arbitrary lagrangian–eulerian methods. In *Encyclopedia of Computational Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, 2004, s. 413–437. ISBN 0-470-84699-2.
14. DRÁBKOVÁ, S. *Mechanika tekutin*. Ostrava: Ediční středisko VŠB-TUO, 2007. ISBN 978-80-248-1508-4.
15. DURAN, A. F., ROVIRA, R. C.; MOLIST, J. M. *A numerical formulation to solve the ALE Navier-Stokes equations applied to the withdrawal of magma chambers*. 2000. Dizertační práce na Universitat Politècnica de Catalunya, Španělsko.
16. FEISTAUER, M. *Theory and Numerics for Problems of Fluid Dynamics*. Praha: Charles University in Prague. Faculty of Mathematics a Physics, 2006. ISBN nepřiděleno.
17. FEISTAUER, M., J, F.; STRAŠKRABA, I. *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford: Clarendon Press, 2003. ISBN 0-19-850588-4.
18. FEISTAUER, M., SVÁČEK, P.; JAROMÍR, H. Numerical Simulation of Fluid-Structure Interaction Problems with Applications to Flow in Vocal Folds. In BODNÁR, T., GALDI, G. P.; NEČASOVÁ, Š. (ed.). *Fluid-Structure Interaction and Biomedical Applications*. 2014. ISBN 978-30348-0821-7.
19. FOUCHET-INCAUX, J. Artificial boundaries and formulations for the incompressible Navier–Stokes equations: applications to air and blood flows. *SeMA Journal*. 2014, roč. 64, č. 1, s. 1–40. ISSN 2254-3902.
20. FRANCA, L. P.; FREY, S. L. Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1992, roč. 99, č. 2, s. 209–233. Dostupný také z WWW: ([http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90041-H](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(92)90041-H)). ISSN 0045-7825.
21. GABRIEL, D. *Numerical Solution of Large Displacement Contact Problems by the Finite Element Method*. 2003. Dizertační práce na Českém vysokém učení technickém v Praze, Česká republika.
22. GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009, roč. 79, č. 11, s. 1309–1331. ISSN 0029-5981.

23. GRAY, H. *Anatomy of the Human Body*. Philadelphia: Lea & Febiger, 1918. ISBN 1-58734-102-6.
24. GRESHO, P. M. Some current CFD issues relevant to the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1991, roč. 87, č. 2, s. 201–252. ISSN 0045-7825.
25. HASNEDLOVÁ, J. *Fluid-structure interaction of compressible flow*. 2012. Dizertační práce na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze, Česká republika.
26. HORÁČEK, J. Osobní sdělení dr. Horáčka, ÚT AVČR. Duben 2016.
27. HORÁČEK, J.; ŠVEC, J. Aeroelastic model of vocal-fold-shaped vibrating element for studying the phonation threshold. *Journal of Fluids and Structures*. 2002, roč. 16, č. 7, s. 931–955. ISSN 0889-9746.
28. HORÁČEK, J., ŠIDLOF, P., URUBA, V. et al. Coherent structures in the flow inside a model of the human vocal tract with self-oscillating vocal folds. *Acta technica ČSAV*. 2010, roč. 55, č. 4, s. 327–343. ISSN 0001-7043.
29. HRON, J.; TUREK, S. *A monolithic FEM/multigrid solver for an ALE formulation of fluid-structure interaction with applications in biomechanics*. Berlin Heidelberg: Springer, 2006. ISBN 978-3-540-34595-4.
30. HUNTER, E. et al. *National Repository for Laryngeal Data*. 2016. Online repozitář dat o hrtanu. Dostupný z WWW: <http://www.nrld.org/>.
31. HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing In Science & Engineering*. 2007, roč. 9, č. 3, s. 90–95. ISSN 1521-9615.
32. ISHIZAKA, K.; FLANAGAN, J. L. Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords. *Bell system technical journal*. 1972, roč. 51, č. 6, s. 1233–1268. ISSN 0005-8580.
33. JONES, E., OLIPHANT, T., PETERSON, P. et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001–. [Online; accessed 2016-05-10]. Dostupný také z WWW: <http://www.scipy.org/>.
34. KLÍMA, J. *Výpočtové modelování funkce lidských hlasivek*. 2009. Diplomová práce na VUT v Brně, Česká republika. Dostupný také z WWW: [https://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=16763](https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=16763).
35. KOSÍK, A., FEISTAUER, M., HORÁČEK, J.; SVÁČEK, P. Numerical simulation of interaction of human vocal folds and fluid flow. In *Vibration Problems ICOVP 2011*. 2011, s. 765–771. ISBN 0930-8989.

36. KOSÍK, A., FEISTAUER, M., HADRAVA, M.; HORÁČEK, J. Numerical simulation of the interaction between a nonlinear elastic structure and compressible flow by the discontinuous Galerkin method. *Applied Mathematics and Computation*. 2015, roč. 267, s. 382–396. ISSN 0096-3003.
37. KRČMOVÁ, M. *Fonetika a fonologie [online]*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2009 [cit. 2016-05-06]. Elportál. Dostupný také z WWW: <http://is.muni.cz/elportal/?id=852835%3E>.
38. LOGAN, D. *A first course in the finite element method*. Boston: Cengage Learning, 2011. ISBN 978-1-305-63511-1.
39. LYLÝ, M., MALINEN, M.; RÅBACK, P. *Elmer Programmer's Tutorial*. 2013. CSC – IT Center for Excellence. Dostupný také z WWW: <ftp://nic.funet.fi/index/elmer/doc/ElmerProgrammersTutorial.pdf>.
40. MÁDLIK, M. *Interaction of a Fluid Flow with an Elastic Body*. 2010. Dizertační práce na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze, Česká republika. Dostupný také z WWW: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/42395/>.
41. MAIEROVÁ, P. *Evolution of the Bohemian Massif: Insights from numerical modeling*. 2013. 148 s. Dizertační práce na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze, Česká republika. Dostupný také z WWW: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/60130/>.
42. MARKERT, B. *Weak or strong: on coupled problems in continuum mechanics*. Stuttgart: Universität Stuttgart, 2010. Habilitační práce na Universität Stuttgart, Německo. Dostupný také z WWW: [http://www.mechbau.uni-stuttgart.de/ls2/Organisation/mitarbeiter/ehemalige/markert/Files/Markert10\\_Habil.pdf](http://www.mechbau.uni-stuttgart.de/ls2/Organisation/mitarbeiter/ehemalige/markert/Files/Markert10_Habil.pdf). ISBN 3-937399-20-8.
43. MARTINEC, Z. *Continuum mechanics. Lecture notes*. Praha: Charles University. Faculty of Mathematics a Physics. Department of Geophysics, 2003. Dostupný z WWW: <http://geo.mff.cuni.cz/vyuka/Martinec-ContinuumMechanics.pdf>. ISBN nepřiděleno.
44. MARTTI, V., RUOKOLAINEN, J., MALINEN, J. et al. *Elmer User's Guide. Draft*. 1999. Dostupný také z WWW: <http://www.nic.funet.fi/pub/sci/physics/elmer/doc/old/OldElmerUserguide.pdf>.
45. MATTHEUS, W.; BRÜCKER, C. Asymmetric glottal jet deflection: Differences of two-and three-dimensional models. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2011, roč. 130, č. 6, s. EL373–EL379. ISSN 0001-4966.
46. MCCOY, S. *Your Voice: An Inside View*. Princeton: Inside View Press, 2004. Dostupný také z WWW: <http://www.voiceinsideview.com/docs/Phonation.pdf>. ISBN 978-0-9755307-8-8.

47. MCKINNEY, W. Data Structures for Statistical Computing in Python. In WALT, S. van der; MILLMAN, J. (ed.). *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*. 2010, s. 51–56.
48. MICHÁLEK, J. *Konečněpruková 2D formulace vibrací elastické struktury při velkých deformacích*. 2011. Bakalářská práce na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze, Česká republika. Dostupný z WWW: <http://geo.mff.cuni.cz/theses/2011-Michalek-Bc.pdf>.
49. MIN, Y. B., TITZE, I. R.; ALIPOUR-HAGHIGHI, F. Stress-strain response of the human vocal ligament. *Annals of Otology, Rhinology & Laryngology*. 1995, roč. 104, č. 7, s. 563–569. ISSN 0003-4894.
50. MITTAL, R., ERATH, B. D.; PLESNIAK, M. W. Fluid dynamics of human phonation and speech. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2013, roč. 45, s. 437–467. ISSN 0066-4189.
51. OLIVEIRA ROSA, M. de, PEREIRA, J. C., GRELLET, M.; ALWAN, A. A contribution to simulating a three-dimensional larynx model using the finite element method. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2003, roč. 114, č. 5, s. 2893–2905. ISSN 0001-4966.
52. PROKOPOVÁ, J., FEISTAUER, M., HORÁČEK, J., KOSÍK, A.; KUČERA, V. On the Interaction of Compressible Flow and Human Vocal Folds. In *Vibration Problems ICOVP 2011*. 2011, s. 759–764. ISBN 0930-8989.
53. PUNČOCHÁŘOVÁ, P., KOZEL, K., HORÁČEK, J.; FÜRST, J. An unsteady numerical solution of viscous compressible flows in a channel for low mach numbers. *Journal of Computational and Applied Mechanics*. 2007, roč. 8, č. 2, s. 175–191. ISSN 0377-0427.
54. RÁBACK, P. *Vyjádření autora programu k implementaci ALE metody v časovém kroku BDF*. 2010. Dostupný z WWW: <http://www.elmerfem.org/forum/viewtopic.php?f=3&t=303&p=4470#p1013>.
55. RÁBACK, P. *Elmer GUI Tutorials*. 2013. CSC – IT Center for Excellence. Dostupný také z WWW: <http://www.nic.funet.fi/index/elmer/doc/ElmerTutorials.pdf>.
56. RÁBACK, P., MALINEN, M., RUOKOLAINEN, J., PURSULA, A.; ZWINGER, T. *Elmer Models Manual*. 2015. CSC – IT Center for Excellence. Dostupný také z WWW: <http://www.nic.funet.fi/index/elmer/doc/ElmerModelsManual.pdf>.

57. RADOLF, V., LAUKKANEN, A.-M., HORÁČEK, J.; LIU, D. Air-pressure vocal fold vibration and acoustic characteristics of phonation during vocal exercising. Part 1: Measurement in vivo. *Engineering Mechanics*. 2014, roč. 21, č. 1, s. 53–59. ISSN 1802-1484.
58. RANNACHER, R. Artificial Boundaries and Flux and Pressure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1996, roč. 22, s. 325–352. ISSN 1097-0363.
59. RANNACHER, R. Methods for numerical flow simulation. In *Hemodynamical Flows*. Basel: Springer, 2008, s. 275–332. ISBN 978-3-7643-7805-9.
60. REDFORD, M. A. (ed.). *The Handbook of Speech Production*. Chichester (UK): Wiley Blackwell, 2015. ISBN 978-0-470-65993-9.
61. RUOKOLAINEN, J. et al. *Official git repository of Elmer FEM software*. 2016. CSC – IT Center for Excellence. Dostupný z WWW: [⟨https://github.com/ElmerCSC/elmerfem⟩](https://github.com/ElmerCSC/elmerfem).
62. RUOKOLAINEN, J., MALINEN, M., RÅBACK, P. et al. *Elmer Solver Manual*. 2014. CSC – IT Center for Excellence. Dostupný také z WWW: [⟨http://www.nic.funet.fi/index/elmer/doc/ElmerSolverManual.pdf⟩](http://www.nic.funet.fi/index/elmer/doc/ElmerSolverManual.pdf).
63. SCOVAZZI, G.; HUGHES, T. J. R. *Lecture Notes on Continuum Mechanics Mechanics on Arbitrary Moving Domains*. Aluquerque: Sandia National Laboratories, 2007. Technical Report SAND-2007-6312P.
64. SCHÄFER, M., TUREK, S., DURST, F., KRAUSE, E.; RANNACHER, R. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. In HIRSCHHEL, E. H. (ed.). *Flow Simulation with High-Performance Computers II*. Wiesbaden: NNFM Vieweg, 1996.
65. SOLIN, P., SEGETH, K.; DOLEZEL, I. *Higher-order finite element methods*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003. ISBN 1-58488-438-X.
66. STANDRING, S. (ed.). *Gray's Anatomy*. 41st Edition. New York: Elsevier, 2015. ISBN 978-0-7020-5230-9.
67. STORY, B. H. An overview of the physiology, physics and modeling of the sound source for vowels. *Acoustical Science and Technology*. 2002, roč. 23, č. 4, s. 195–206. ISSN 1346-3969.
68. ŠIDLOF, P. *Fluid-Structure Interaction in Human Vocal Folds*. 2007. Dizertační práce na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze, Česká republika. Dostupný také z WWW: [⟨https://tel.archives-ouvertes.fr/pastel-00002366/document⟩](https://tel.archives-ouvertes.fr/pastel-00002366/document).

69. ŠIDLOF, P., HORÁČEK, J.; ŘIDKÝ, V. Parallel CFD simulation of flow in a 3D model of vibrating human vocal folds. *Computers & Fluids*. 2013, roč. 80, s. 290–300. ISSN 0045-7930.
70. ŠIDLOF, P., ŠVEC, J. G., HORÁČEK, J. et al. Geometry of human vocal folds and glottal channel for mathematical and biomechanical modeling of voice production. *Journal of Biomechanics*. 2008, roč. 41, č. 5, s. 985–995. ISSN 0021-9290.
71. ŠVANCARA, P., HORÁČEK, J.; HRŮZA, V. FE modelling of the fluid-structure-acoustic interaction for the vocal folds self-oscillation. In *Vibration Problems ICOVP 2011*. 2011, s. 801–807. ISBN 0930-8989.
72. ŠVEC, J. G.; SCHUTTE, H. K. Videokymography: high-speed line scanning of vocal fold vibration. *Journal of Voice*. 1996, roč. 10, č. 2, s. 201–205. ISSN 0892-1997.
73. THOMSON, S. L., MONGEAU, L.; FRANKEL, S. H. Aerodynamic transfer of energy to the vocal folds. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2005, roč. 118, č. 3, s. 1689–1700. ISSN 0001-4966.
74. THOMSON, S. L.; MURRAY, P. R. Self-oscillating, multi-layer numerical and artificial vocal fold models with thin epithelial and loose cover layers. In MANNFREDI, C. (ed.). *Models and analysis of vocal emissions for biomedical applications: 7th international workshop: August 25-27, 2011*. 2011, s. 57–60. ISBN 978-88-6655-009-9.
75. TITZE, I. R. (ed.). *Vocal Fold Physiology: Frontiers in Basic Science*. San Diego: Singular Pub Group, 1993. ISBN 978-1879105867.
76. TITZE, I. R.; ALIPOUR, F. *The myoelastic aerodynamic theory of phonation*. Denver: National Center for Voice a Speech, 2006. ISBN 0-87414-122-2.
77. TUREK, S.; HRON, J. Proposal for numerical benchmarking of fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow. In BUNGARTZ, H.-. J.; SCHÄFER, M. (ed.). *Fluid-Structure Interaction*. Berlin Heidelberg: Springer, 2006, s. 371–385. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Dostupný také z WWW: [http://adhesion.ucd.ie/ccm/CCM\\_II\\_files/Hron%20Turek%20Benchmark.pdf](http://adhesion.ucd.ie/ccm/CCM_II_files/Hron%20Turek%20Benchmark.pdf).
78. ULVROVÁ, M. *Dynamics of fluids and transport applied to the early Earth*. 2012. Dizertační práce na Ecole normale supérieure de lyon-ENS LYON, Francie. Dostupný také z WWW: [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00776472/file/ULVROVA\\_Martina\\_2012\\_These\\_VD.pdf](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00776472/file/ULVROVA_Martina_2012_These_VD.pdf).



79. VALÁŠEK, J., SVÁČEK, P.; HORÁČEK, J. Numerical simulation of fluid-structure interaction represented by human vocal folds in airflow. In *EPJ Web of Conferences*. 2015.
80. VALÁŠEK, J., SVÁČEK, P.; HORÁČEK, J. Numerical Simulation of Interaction of Fluid Flow and Elastic Structure Modelling Vocal Fold. In *Applied Mechanics and Materials*. 2016, s. 693–700.
81. VAMPOLA, T., HORÁČEK, J.; KLEPÁČEK, I. Prediction of Impact Stress in Human Vocal Folds During Collisions Using a 3D FE Model of the Larynx. In *ICVPB 2008 The 6th International Conference on Voice Physiology and Biomechanics, Tampere, Finland*. 2008.
82. VAN DEN BERG, J. Myoelastic-aerodynamic theory of voice production. *Journal of speech and hearing research*. 1958, č. 1, s. 227–44. ISSN 0022-4685.
83. VAN DER WALT, S., COLBERT, S. C.; VAROQUAUX, G. The NumPy array: a structure for efficient numerical computation. *Computing in Science & Engineering*. 2011, roč. 13, č. 2, s. 22–30. ISSN 1521-9615.
84. WELCH, P. D. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on audio and electroacoustics*. 1967, roč. 15, č. 2, s. 70–73. ISSN 0018-9278.
85. XUE, Q., ZHENG, X., BIELAMOWICZ, S.; MITTAL, R. Sensitivity of vocal fold vibratory modes to their three-layer structure: Implications for computational modeling of phonation. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2011, roč. 130, č. 2, s. 965–976. Dostupný také z WWW: <http://engineering.jhu.edu/fsag/wp-content/uploads/sites/23/2014/06/JAS000965.pdf>.
86. ZHENG, X., MITTAL, R., XUE, Q.; BIELAMOWICZ, S. Direct-numerical simulation of the glottal jet and vocal-fold dynamics in a three-dimensional laryngeal model. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2011, roč. 130, č. 1, s. 404–415. ISSN 0001-4966.
87. ZHENG, X., BIELAMOWICZ, S., LUO, H.; MITTAL, R. A computational study of the effect of false vocal folds on glottal flow and vocal fold vibration during phonation. *Annals of Biomedical Engineering*. 2009, roč. 37, č. 3, s. 625–642. ISSN 0090-6964.
88. ZÖRNER, S., KALTENBACHER, M.; DÖLLINGER, M. Investigation of prescribed movement in fluid–structure interaction simulation for the human phonation process. *Computers & Fluids*. 2013, roč. 86, s. 133–140. ISSN 0045-7930.