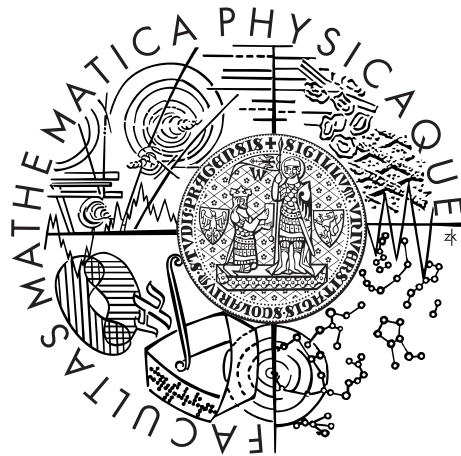


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Hana Šustková

Vliv hloubkové závislosti fyzikálních vlastností zemského pláště na charakter termální konvekce

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Geofyzika

Praha 2014

Poděkování

Ráda bych na tomto místě srdečně poděkovala mému vedoucímu diplomové práce, panu doc. RNDr. Ctiradu Matyskovi, DrSc., a to nejen za přívětivý přístup, stálou pomoc a podporu či kontrolu mé práce, ale také za množství poznámek i k formální úrovni práce. Dále bych velmi ráda poděkovala za podporu a pomoc paní doc. RNDr. Haně Čížkové, Ph.D. Děkuji především za komentáře k mé práci a zvláště pak za věcné připomínky, díky nimž práce, jak věřím, nabyla zcela nové úrovně. Ráda bych poděkovala také mému konzultantovi, panu RNDr. Ladislavu Hanykovi, Ph.D., za věnovaný čas a přívětivý přístup.

V mnohém si mé poděkování zaslouží i celá Katedra geofyziky a naše Fakulta matematicko-fyzikální na Univerzitě Karlově, a to za přístup k software, jenž jsem při práci použila (Matlab a Comsol), za zázemí a technickou pomoc. Obzvláště ráda bych poděkovala panu prof. RNDr. Jiřímu Zahradníkovi, DrSc., za odborný i lidský přístup.

Poděkovat bych chtěla také mé rodině, jejíž zázemí a psychická podpora tvoří velkou část samotných schopností člověka. Děkuji vám.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 21.7.2014

Podpis autora

Název práce: Vliv hloubkové závislosti fyzikálních vlastností zemského pláště na charakter termální konvekce

Autor: Hana Šustková

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Abstrakt:

Diplomová práce se týká studia konvekce kartézských modelů ve dvou a třech dimenzích. Konkrétně se věnuje systematickému sledování kritických Rayleighových čísel v závislosti na geometrii, modelu viskozity či funkčních závislostech dalších parametrů. V modelech se uvažuje vrstevnatá viskozita a konstantní, nebo teplotně a s hloubkou závislé parametry teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti. Systém byl popsán bezrozměrnou klasickou Boussinesqovou aproximací. Část práce je věnována aplikaci maticové metody pro řešení příslušné Stokesovy úlohy a současnému použití Eulerovy metody pro řešení termální rovnice. Samotné výpočty pak byly prováděny v prostředí komerčního software Comsol, a tedy pomocí konečných prvků. Bylo ukázáno, že dominantní vliv na kritická Rayleighova čísla má model viskozity (s rostoucí viskozitou narůstají i kritická Rayleighova čísla), dále velmi zásadní vliv má také geometrie (větší rozměr a dimenze geometrie snižuje kritická Rayleighova čísla). Přítomnost funkčních závislostí teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti vede také ke snížení kritických Rayleighových čísel. Na modelu s parametry viskozity a teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti blížící se Zemi pak bylo ukázáno rozvrstvení systému a vznik vyššího teplotního gradientu na hranicích těchto vrstev. Na závěr byl určen charakter šumu, generovaný časovým průběhem Nusseltova čísla pro chaotické režimy, jenž byl dále ověřen pomocí experimentu.

Klíčová slova: viskozita, tepelná vodivost a teplotní roztažnost zemského pláště; režimy termální konvekce

Title: Influence of depth dependence of the Earth's mantle properties on thermal-convection characteristics

Author: Hana Šustková

Department: Department of Geophysics

Supervisor: doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Abstract:

This thesis concerns the study of convection in Cartesian models in two and three dimensions. Specifically, it deals with the systematic monitoring of critical Rayleigh numbers based on the geometry model, on the functional dependence of the viscosity or of other parameters. Models has been created with layered viscosity and constant or temperature- and depth- dependent parameters (thermal expansion and conductivity). The system has been described by conventional dimensionless Boussinesq approximation. Part of the work is devoted to the application of matrix method for solving the appropriate Stokes flow and use of Euler's method for solving the thermal equation. The actual calculations were then performed in an environment of commercial software Comsol and thus by using the finite element method. It was shown that the dominant influence on the critical Rayleigh numbers has a viscosity model (with increasing viscosity the critical Rayleigh numbers increase), other important parameter is system's geometry (larger size and dimension of the geometry reduce the critical Rayleigh number). The presence of functional dependencies of thermal expansion and conductivity led to further reduction of the critical Rayleigh numbers. The stratification and layering of the system as well as the development of higher temperature gradient on the borders of these layers was shown on the model approximating Earth through its model parameters of viscosity, thermal expansion, and thermal conductivity. Next, a nature of the noise generated by time-development of Nusselt number for chaotic regime was determined and confirmed by experiment.

Keywords: viscosity, thermal conductivity and thermal expansivity of the Earth's mantle, thermal convection regimes

Obsah

Úvod	3
1 Vrstevnatý model termální konvekce v zemském plášti	5
1.1 Definice problému	5
2 Návrh numerické metody na řešení problému	7
2.1 Aplikace maticové metody na Stokesovo proudění	7
2.2 Termální rovnice Eulerovou metodou	13
2.3 Shrnutí	13
3 Numerické modelování úlohy	14
3.1 Numerické rozlišení	14
3.2 Užívané výpočetní algoritmy	15
3.3 Definice konvekčních režimů a jejich určování	15
3.3.1 Určování jednotlivých režimů	16
3.3.2 Mezní případy	25
3.4 Testování modelu	30
3.5 Dělení modelů	35
a) Geometrie	35
b) Parametry teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti	35
c) Parametr viskozity	39
4 Výsledky	41
4.1 Vliv modelů vrstevnaté viskozity	41
4.2 Vliv geometrie systému	44
4.3 Vliv geometrie systému i modelu viskozity	46
4.4 Vliv funkční závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti	50
4.5 Zemi podobné modely	60
5 Analýza frekvenčního spektra chaotických režimů	66
5.1 Numerické modely	66
5.2 Experimentální model	68
5.3 Vyhodnocení experimentu	69
5.4 Porovnání numerických modelů s experimentem	72
Závěr	77
Literatura	79
Přehled naměřených kritických Rayleighových čísel	80
A. Geometrie 2D čtverec 1x1	80
B. Geometrie 2D obdélník 2x1	82
C. Geometrie 2D obdélník 5x1	83
D. Geometrie 2D obdélník 10x1	84
E. Geometrie 3D krychle 1x1x1	85
F. Geometrie 3D kvádr 2x2x1	86

G. Geometrie 3D kvádr 5x5x1	86
Seznam použitých symbolů	87
Seznam tabulek	88
Seznam obrázků	88

Úvod

Poznávání prostředí, ve kterém žijeme, patří k lidstvu již od nejstarších dob. Nejsnáze můžeme poznávat prostředí zvláště na povrchu Země, tedy její atmosféru i nejsvrchnější části zemského tělesa. Avšak jevy, probíhající skrytě v zemském nitru, nemůžeme na rozdíl od jevů probíhajících na povrchu podrobit přímému zkoumání či měření. V mnoha bodech naší současné představy o dějích v Zemi probíhajících existuje mnohá nejednoznačnost. Neznáme přesné parametry materiálů, neznáme přesné teploty či tlaky, neznáme ani přesné chemické složení. O další poznání zemského tělesa jako celku a odstranění těchto nejednoznačností usiluje především geofyzika - snaží se nahlédnout nepřímě do zemských hlubin a navrhnout modely, jež by jí mohly nejlépe odpovídat. Syntézou měření a modelování pak můžeme činit pokroky v poznání Země i jejích vnitřních pochodů; často však řešíme obrácené úlohy s mnoha neznámými či úlohy špatně podmíněné, což přesnost výsledků nadále omezuje.

Věda se o výše nastíněné otázky v moderním slova smyslu začala zabývat teprve nedávno. Až koncem 19. století vzniká seismologie jako samostatný vědní obor, obor klíčový pro poznávání zemského nitra. Mezníkem budiž první instrumentální měření zemětřesení z roku 1889 v Postupimi. Na to navazuje v roce 1906 objev zemského jádra R. Oldhamem na základě studia seismických vln. S počátkem 20. století se také rodí myšlenky o deskové tektonice, zažehnuté představou kontinentálního driftu. Tu v roce 1912 publikoval A. Wegener. Pochody v nitru Země se tak ve 20. století dostaly do popředí zájmu výzkumu. Ten se ale zpočátku orientoval více na seismicitu Země. Myšlenka termální konvekce v plášti se stala běžnou součástí úvah o Zemi teprve před pár desítkami let, a přitom dodnes máme pro konvekci jen nepřímé důkazy: pozorujeme fyzikálně zajímavou strukturu Země díky seismické tomografii a termální konvekci připisujeme také pohyby litosférických desek.

Geofyzikální výzkum i teorie se pokouší dané informace sjednotit do stabilního a co nejuvěrnějšího modelu dějů v Zemi, které nám pomohou pochopit její historii a zemské pochody. Jedním z nástrojů je i numerické modelování termální konvekce, které pak můžeme srovnávat s obrazem pláště získaným tomografií a zpřesňovat parametry modelu tak, aby skutečnosti co nejlépe odpovídal. Numerickému modelování termální konvekce se věnuje i má diplomová práce.

Chování konvektujícího systému je závislé na množství parametrů, většinu z nich známe pro Zemi jen přibližně, v některých případech jen jako řádové odhady (např. viskozitu). Práce je zaměřena na analýzu chování spíše jednoduchých systémů v závislosti na geometrii a obecné funkční závislosti tepelné vodivosti a teplotní roztažnosti. Ráda bych tím odpověděla na následující otázky: jaká je spojitost mezi přechody do jednotlivých konvekčních režimů systému s variací či absencí funkčních závislostí tepelné vodivosti a teplotní roztažnosti? Jak se tyto vztahy změní, bude-li systém charakterizován i proměnnou viskozitou? Jsou tyto vztahy alespoň do jisté míry invariantní vůči geometrii systému?

Chtěla bych poskytnout širší studii tohoto problému, a umožnit tak i případnou spojitost s jevy v zemském či jiném tělese. Ačkoliv byly jednoduché kartézské geometrie již tolikrát studovány, ráda bych ukázala přímé souvislosti mezi geometrií, viskozitou a dalšími parametry a mezi přechody konvektujícího systému do jed-

notlivých režimů, dále nalézt možné obecnější důsledky, které by z toho mohly plynout. Svou snahu jsem zaměřila i na vyvinutí dostatečně rychlé numerické metody, jež by dostatečně širokou studii umožnila.

Ráda bych také numerické výpočty alespoň v některých ohledech doplnila experimentem, který by mohl výsledky numerických výpočtů potvrdit či doplnit.

1. Vrstevnatý model termální konvekce v zemském plášti

Diplomová práce se zaměřuje na systematické zkoumání základních režimů termální konvekce s obecně teplotně a hloubkově závislými materiálovými veličinami (tepelné vodivosti a teplotní roztažnosti) v kartézské geometrii. Níže představený model pracuje s po vrstvách konstantními viskozitami, model je zobrazen 2D či 3D boxem s podmínkami nulové rychlosti na hranicích, s pevnou teplotou na horní a spodní hranici a nulovým tepelným tokem přes vertikální stěny. Následuje podrobnější definice řešené úlohy.

1.1 Definice problému

Problém je popsán soustavou rovnic sestávající ze Stokesova tečení a termální rovnice v Boussinesqově klasické aproximaci. Systém je popsán v bezrozměrných veličinách.

V modelu jsou stanoveny průběhy tepelné roztažnosti a difuzivity závislé pouze na souřadnici z a teplotě T jako

$$\alpha(T, z) = \bar{\alpha}(T, z)\alpha_0 \quad (1.1)$$

a

$$\kappa(T, z) = \bar{\kappa}(T, z)\kappa_0. \quad (1.2)$$

Teplota je funkcí všech souřadnic, $T = T(x, y, z)$.

Modelování termální konvekce je prováděno v kartézské oblasti o rozměrech (X, Z) ve 2D případě a (X, X, Z) v případě řešení ve 3D. Oblast je dále rozdělena do N suboblastí, vrstev, jež mají danou tloušťku h_i . V každé vrstvě je dále definována viskozita η_i . Pro celý model je stanoveno globální Rayleighovo číslo Ra jako

$$Ra = \frac{\alpha_0 g_0 D^3 \Delta T}{\kappa_0 \eta_0} \quad (1.3)$$

kde α_0 značí referenční tepelnou roztažnost, g_0 referenční tíhové zrychlení, D charakteristický rozměr (tloušťku pláště, tedy výšku oblasti Z), ΔT rozdíl teploty na dně ($z = 0$) a na povrchu ($z = z_n$), κ_0 referenční tepelnou difuzivitu a η_0 referenční viskozitu. Rayleighovo číslo je tak definováno jak pro modely s funkčně závislou tepelnou vodivostí a roztažností, viz definice v předchozím odstavci, tak pro modely s vrstevnatou viskozitou, v nichž je hodnota η_0 stanovena vždy na $\eta_0 = 1$.

Důležitou charakteristikou studovaného systému je také Nusseltovo číslo, které udává poměr tepelného toku horní hranicí oblasti daného modelu vůči tepelnému toku touto oblastí, jenž odpovídá pouze kondukční části tohoto celkového toku:

$$Nu = \frac{q_{celk}}{q_{kond}} \quad (1.4)$$

Stokesovo tečení ve vrstvě s konstantní viskozitou je představeno soustavou dvou rovnic:

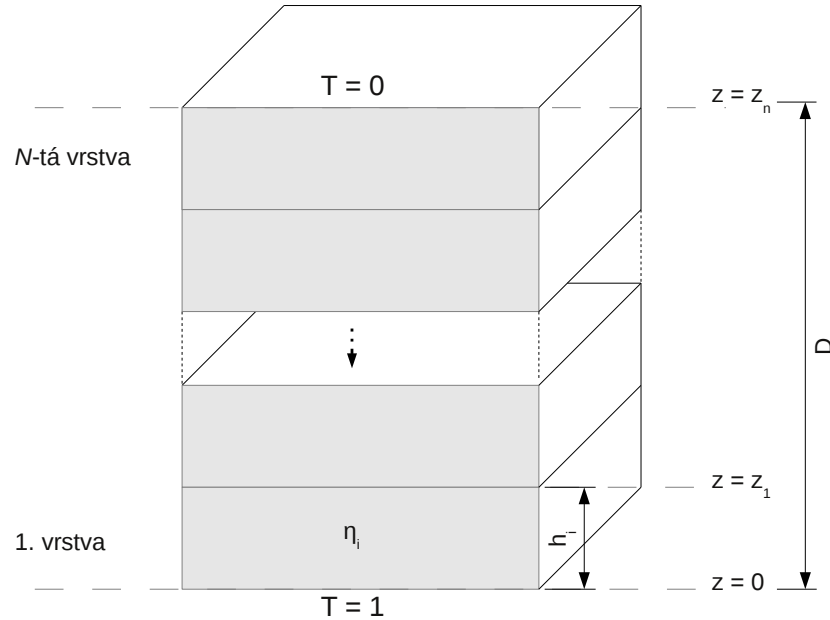
$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.5)$$

$$-\nabla \Pi + \eta \Delta \vec{v} = -\bar{\alpha} Ra \Theta \vec{e}_z \quad (1.6)$$

kde \vec{v} představuje vektor rychlosti proudění, Π tlak, Ra Rayleighovo číslo, viz vztah 1.3, \vec{e}_z jednotkový vektor ve směru osy z a Θ teplotní odchylku $T - T_0$ od referenční teploty T_0 .

Užívaná termální rovnice dále v klasické Boussinesqově aproximaci pro případ proměnné tepelné difuzivity zní:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nabla \cdot (\bar{\kappa} \nabla \Theta) - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla \Theta - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla T_0 \quad (1.7)$$



Obrázek 1.1: Vrstevnatý model

Problém je definován na kartézské síti. Počáteční rozložení teplot představuje počáteční podmínku na konvektující systém, který je popsán v rámci klasické Boussinesqovy aproximace.

Referenční bezrozměrná teplota $T_0 = 1 - z$ a teplotní odchylka Θ je na spodní a svrchní hranici fixována na nulové hodnotě. Z toho vyplývá, že v dalším textu užívaná veličina teploty T má na spodní hranici hodnotu 1 a na horní hranici hodnotu 0. Na vertikálních hranicích je předepsán nulový tepelný tok. Na všech vnějších hranicích je při numerických výpočtech předepsána podmínka nulové rychlosti, v návrhu numerické metody v kap. 2 je však v horizontálním směru uvažován volný prokluz, neboť tato okrajová podmínka lépe popisuje situaci v zemském plášti. Na vnitřních rozhraních platí spojitost rychlosti a plošných sil na ně působících, dále teploty a tepelného toku.

2. Návrh numerické metody na řešení problému

Problém představený v předchozí kapitole je možné řešit vícero numerickými přístupy. V následujícím textu bych ráda představila vlastní metodu pro řešení Stokesovy úlohy (rovnice 1.5 a 1.6), již jsem spočítala na návrh vedoucího diplomové práce. Tato metoda by dovolila užití rychlých Fourierových transformací a tím i možné celkové snížení výpočtového času, kterého by bylo možné dosáhnout i možnou paralelizací problému. Fourierova transformace by byla vhodnou aplikací pro výpočet na GPU, což by vedlo k dalšímu zkrácení výpočtového času, a to díky nepoměrně rychlejšímu výpočtu a nízkému objemu kopírovaných dat z CPU na GPU a zpět. Termální rovnici (1.7) je pak vzhledem k povaze rovnice možno spočítat již pomocí Eulerovy metody, s předpřipravením pravé strany rovnice Fourierovou transformací v předchozím kroku spolu s řešením Stokesova proudění.

2.1 Aplikace maticové metody na Stokesovo proudění

Nyní se zabýváme situací ve fixním čase t . Budeme tedy řešit pouze soustavu rovnic (1.5) a (1.6).

Provedme Fourierovu transformaci daných proměnných Π, \vec{v}, Θ , zadaných v kartézském souřadném systému jako $\Pi, \vec{v}, \Theta = \Pi, \vec{v}, \Theta(x, y, z)$, přes směrový vektor $\vec{r} = (x, y)$ dle předpisu (s představuje dané funkce výše):

$$F(s(x, y, z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\vec{r}, z) e^{-i\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} d\vec{r}. \quad (2.1)$$

Pak rovnice (1.5) a (1.6) můžeme přepsat do následujícího tvaru:

$$i\vec{\lambda} \cdot \vec{v}_\lambda + \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

$$-i\vec{\lambda} \hat{\Pi} + \eta \left(-\lambda^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{v}_\lambda = 0 \quad (2.3)$$

$$-\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial z} + \eta \left(-\lambda^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{v}_z = -Ra \hat{\Theta}, \quad (2.4)$$

kde rovnice (2.3) a (2.4) značí po transformaci ještě rozpis rovnice (1.6) do složek. Abychom se vyhnuli co možná nejvíce problému s později vystupujícím z v (2.2), postupujeme od rovnice (2.3).

$$\hat{\Pi} = i\eta \vec{\lambda} \cdot \vec{v}_\lambda - i\eta \partial_{zz} \frac{\vec{\lambda}}{\lambda^2} \cdot \vec{v}_\lambda \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial z} = i\eta \partial_z \vec{\lambda} \cdot \vec{v}_\lambda - i\eta \partial_{zzz} \frac{\vec{\lambda}}{\lambda^2} \cdot \vec{v}_\lambda \quad (2.6)$$

Rovnice (2.4) má tvar

$$-i\vec{\lambda} \cdot \partial_z \vec{v}_\lambda + \frac{i}{\lambda^2} \partial_{zzz} \vec{\lambda} \cdot \vec{v}_\lambda - \lambda^2 \hat{v}_z + \partial_{zz} \hat{v}_z = -\frac{Ra}{\eta} \hat{\Theta} \quad (2.7)$$

Z rovnice (2.2) dále víme, že

$$i\vec{\lambda} \cdot \vec{v}_\lambda = -\partial_z \hat{v}_z. \quad (2.8)$$

Tedy dosazením do (2.7) získáme

$$\partial_{zzzz} \hat{v}_z - 2\lambda^2 \partial_{zz} \hat{v}_z + \lambda^4 \hat{v}_z = \frac{\lambda^2 Ra}{\eta} \hat{\Theta}. \quad (2.9)$$

Řešení takové rovnice je možné napsat jako

$$\hat{v}_z = \hat{v}_{z,H} + \hat{v}_{z,P} \quad (2.10)$$

Budeme tedy hledat nejprve řešení homogenní rovnice v exponenciálním tvaru. K této lineární ODR příslušící charakteristický polynom a homogenní řešení je (zapišeme již ve formě vrstvy, kde z_i značí rozhraní)

$$\begin{aligned} \kappa^4 - 2\lambda^2 \kappa^2 + \lambda^4 &= 0 \\ \kappa_{1,2,3,4} &= \pm \lambda \\ \hat{v}_{z,H} &= B^{1,2}(\lambda) e^{\pm \lambda(z-z_i)} + z C^{1,2}(\lambda) e^{\pm \lambda(z-z_i)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Toto řešení pak spolu se zbývajícými funkcemi

$$\vec{v}_{\lambda,H} = \frac{i\vec{\lambda}}{\lambda^2} \left[\pm \lambda (B^{1,2}(\lambda) + (z-z_i) C^{1,2}(\lambda)) + C^{1,2}(\lambda) \right] e^{\pm \lambda(z-z_i)} \quad (2.12)$$

$$\hat{\Pi}_H = 2\eta C^{1,2}(\lambda) e^{\pm \lambda(z-z_i)} \quad (2.13)$$

řeší rovnice (2.2, 2.3) a (2.4) s nulovou pravou stranou.

Hledejme nyní partikulární řešení. Nechť má funkce $\hat{\Theta}$ tvar lineární funkce a Fourierovy řady

$$\hat{\Theta}(\vec{\lambda}, z, t) = a(\vec{\lambda}) + b(\vec{\lambda})(z-z_i) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} i\hat{\Theta}_k(\vec{\lambda}, t) \exp \left\{ ik\pi \frac{z-z_i}{z_{i-1}-z_i} \right\}, \quad \hat{\Theta}_k = -\hat{\Theta}_{-k}, \quad (2.14)$$

v této chvíli uvažujme čas t jako pevnou konstantu, tedy $\hat{\Theta}(\vec{\lambda}, z, t) = \hat{\Theta}(\vec{\lambda}, z)$, a dosaďme do rovnice (2.9). Partikulární řešení odpovídající lineární části $\hat{\Theta}$ odhadneme jako polynom prvního stupně:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{z,P1} &= M(\vec{\lambda})z + N(\vec{\lambda}) \\ \hat{v}_{z,P1} &= \frac{Ra}{\eta\lambda^2} [a(\vec{\lambda}) + b(\vec{\lambda})(z-z_i)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

A příslušná $\hat{v}_{\lambda,P2}, \hat{\Pi}_{P2}$

$$\vec{v}_{\lambda,P1} = i \frac{Ra\vec{\lambda}}{\eta\lambda^4} b(\vec{\lambda}) \quad (2.16)$$

$$\hat{\Pi}_{P1} = -\frac{Ra}{\lambda^2} b(\vec{\lambda}). \quad (2.17)$$

Pro hledání partikulárního řešení s Fourierovým rozvojem funkce $\hat{\Theta}$ hledáme řešení ve tvaru

$$\hat{v}_{z,P2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(\vec{\lambda}) i \hat{\Theta}_k(\vec{\lambda}, t) \exp \left\{ ik\pi \frac{z - z_i}{z_{i-1} - z_i} \right\}, \quad (2.18)$$

dosadíme do (2.9) a získáváme

$$M(\vec{\lambda})(k^4 \pi^4 + 2\lambda^2 k^2 \pi^2 + \lambda^4) = \frac{\lambda^2}{\eta} Ra$$

$$\hat{v}_{z,P2,k} = \frac{\lambda^2}{\eta(k^2 \pi^2 + \lambda^2)^2} Ra \hat{\Theta}_k \quad (2.19)$$

a příslušné

$$\hat{v}_{\lambda,P2,k} = -\frac{k\pi \vec{\lambda}}{\eta(k^2 \pi^2 + \lambda^2)^2} Ra \hat{\Theta}_k \quad (2.20)$$

$$\hat{\Pi}_{P2,k} = \frac{-ik\pi}{(k^2 \pi^2 + \lambda^2)} Ra \hat{\Theta}_k \quad (2.21)$$

Jestliže se tedy pohybujeme ve vrstvě o viskozitě η_i , je výsledné řešení soustavy (2.2, 2.3 a 2.4) následující:

$$\hat{v}_z(\vec{\lambda}, z)_i = B_i^{1,2}(\lambda) e^{\pm\lambda(z-z_i)} + C_i^{1,2}(\vec{\lambda})(z - z_i) e^{\pm\lambda(z-z_i)} + \frac{Ra}{\eta_i \lambda^2} [a_i(\vec{\lambda}) + b_i(\vec{\lambda})(z - z_i)]$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} i \hat{\Theta}_{k,i}(\vec{\lambda}) \frac{\lambda^2}{\eta_i(k^2 \pi^2 + \lambda^2)^2} Ra \exp \left\{ ik\pi \frac{z - z_i}{z_{i-1} - z_i} \right\} \quad (2.22)$$

$$\hat{v}_{\lambda}(\vec{\lambda}, z)_i = \frac{i\vec{\lambda}}{\lambda^2} [\pm\lambda (B_i^{1,2}(\lambda) + (z - z_i)C_i^{1,2}(\lambda)) + C_i^{1,2}(\lambda)] e^{\pm\lambda(z-z_i)} + i \frac{\vec{\lambda}}{\lambda^4} \frac{Ra}{\eta_i} b_i(\vec{\lambda})$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} i \hat{\Theta}_{k,i}(\vec{\lambda}) \frac{k\pi \vec{\lambda}}{\eta_i(k^2 \pi^2 + \lambda^2)^2} Ra \exp \left\{ ik\pi \frac{z - z_i}{z_{i-1} - z_i} \right\} \quad (2.23)$$

$$\hat{\Pi}(\vec{\lambda}, z)_i = 2\eta_i C_i^{1,2}(\lambda) e^{\pm\lambda(z-z_i)} - \frac{Ra}{\lambda^2} b_i(\vec{\lambda}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\Theta}_{k,i}(\vec{\lambda}) \frac{k\pi}{(k^2 \pi^2 + \lambda^2)} Ra \exp \left\{ ik\pi \frac{z - z_i}{z_{i-1} - z_i} \right\} \quad (2.24)$$

Nyní uvažujme N vrstev kapaliny popsané výchozími vztahy (2.2), (2.3) a (2.4), charakteristické vlastní konstantní viskozitou η_i . Spodní vrstva $i = 1$ prochází proměnnou z v intervalu $(0, z_1)$, v každé i -té vrstvě se tedy proměnná z pohybuje v rozmezí (z_{i-1}, z_i) vůči indexu vrstvy, osa z je směrem nahoru kladná.

Na svrchní a dolní hranici celého systému platí následující vztahy

$$\hat{\Theta} |_{z=0, z_N} = 0 \quad (2.25)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_z |_{z=0, z_N} = 0 \quad (2.26)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_z - ((\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z \Big|_{z=0, z_N} = 0 \quad (2.27)$$

a na rozhraní vrstev platí

$$[\vec{v}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.28)$$

$$[\boldsymbol{\tau}]_{-}^{+} \cdot \vec{e}_z = 0. \quad (2.29)$$

Jak vypadá systém proměnných \hat{v}_{z_i} , \hat{v}_{λ_i} , $\hat{\Pi}_i$ pro jednotlivé vrstvy?

Ve svrchní (N -té) vrstvě tedy požadujeme $\hat{v}_z(\vec{\lambda}, z_N) = 0$ a $\hat{\Theta}(\vec{\lambda}, z_N) = 0$:

$$\hat{v}_z(\vec{\lambda}, z_N) = B_N^1 + B_N^2 + \frac{Ra}{\eta_N \lambda^2} a_N \quad (2.30)$$

$$B_N^1 + B_N^2 = -\frac{Ra}{\eta_N \lambda^2} a_N \quad (2.31)$$

a dále

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \vec{e}_z - ((\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z &= 0 \\ \boldsymbol{\tau}_i &= -\Pi \mathbf{I} + \eta_i (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \\ \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \vec{e}_z &= -\hat{\Pi} \vec{e}_z + \eta \left(\partial_z \vec{v}_\lambda + i \vec{\lambda} \hat{v}_z, 2 \partial_z \hat{v}_z \right) \\ ((\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z &= -\hat{\Pi} \vec{e}_z + 2 \eta \partial_z \hat{v}_z \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (2.32)$$

z čehož získáme dvě rovnice a jejich elementární úpravou

$$\begin{aligned} \partial_z \hat{v}_\lambda + i \vec{\lambda} \hat{v}_z &= 0, \quad \hat{v}_z = 0 \\ \partial_z \vec{v}_\lambda &= 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{zz} \hat{v}_z = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

a jejich řešením

$$C_N^1 - C_N^2 = \frac{\lambda(B_N^1 + B_N^2)}{2}. \quad (2.34)$$

Protože známe součet funkcí $B_1^{1,2}$, získáme z této rovnosti rozdíl koeficientů $C_1^{1,2}$

$$C_N^1 - C_N^2 = -\frac{Ra}{2\lambda\eta_N} a_N. \quad (2.35)$$

Obdobným způsobem lze spočítat hodnoty na spodní hranici $z = 0$, rozdíl je však v přítomnosti exponenciál u argumentů čísel B_1 a C_1 , neboť tentokrát nejsou redukovány na jedničky:

$$B_1^1 e^{-\lambda z_1} + B_1^2 e^{\lambda z_1} = 2z_1 C_1^2 e^{\lambda z_1} + \frac{Ra}{2\lambda^2 \eta_1} (a_1 - b_1 z_1) (\lambda z_1 - 2) \quad (2.36)$$

$$C_1^1 e^{-\lambda z_1} - C_1^2 e^{\lambda z_1} = \frac{Ra}{2\lambda \eta_1} (a_1 - b_1 z_1) \quad (2.37)$$

Nyní může být vyřešeno obecné rozhraní pro $z = z_{i-1}$. Zde platí dle (2.28)

$$\begin{aligned} \hat{v}_{z,i-1} &= \hat{v}_{z,i} \\ \hat{v}_{\lambda,i-1} &= \hat{v}_{\lambda,i} \end{aligned} \quad (2.38)$$

a z (2.29) vychází

$$\begin{aligned}\eta_{i-1} \left(\partial_z \hat{v}_{\lambda, i-1} + i \vec{\lambda} \hat{v}_{z, i-1} \right) &= \eta_i \left(\partial_z \hat{v}_{\lambda, i} + i \vec{\lambda} \hat{v}_{z, i} \right) \\ -\Pi_{i-1} + 2\eta_{i-1} \partial_z \hat{v}_{z, i-1} &= -\Pi_i + 2\eta_i \partial_z \hat{v}_{z, i},\end{aligned}\quad (2.39)$$

což mohu upravit pomocí funkce \hat{v}_z užitím vztahů (2.2) a (2.5) jako

$$\begin{aligned}\hat{v}_{z, i-1} &= \hat{v}_{z, i} \\ \partial_z \hat{v}_{z, i-1} &= \partial_z \hat{v}_{z, i} \\ \eta_{i-1} (\partial_{zz} \hat{v}_{z, i-1} + \lambda^2 \hat{v}_{z, i-1}) &= \eta_i (\partial_{zz} \hat{v}_{z, i} + \lambda^2 \hat{v}_{z, i}) \\ \eta_{i-1} (3\lambda^2 \partial_z \hat{v}_{z, i-1} - \partial_{zzz} \hat{v}_{z, i-1}) &= \eta_i (3\lambda^2 \partial_z \hat{v}_{z, i} - \partial_{zzz} \hat{v}_{z, i})\end{aligned}\quad (2.40)$$

a vyjádřit tak jednoduše vztahy mezi jednotlivými derivacemi v_z vůči jednotlivým vrstvám v podobě následující matice:

$$\begin{pmatrix} v_z \\ \partial_z v_z \\ \partial_{zz} v_z \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_i = K_{i-1} \cdot \begin{pmatrix} v_z \\ \partial_z v_z \\ \partial_{zz} v_z \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{i-1}, \quad (2.41)$$

jenže funkce na hladině z_{i-1} , která odpovídá rozhraní mezi vrstvami $i-1$ a i , není známa, známa je funkce na hladině z_{i-2} a předpis pro její tvar na z_{i-1} , proto

$$\begin{pmatrix} v_z \\ \partial_z v_z \\ \partial_{zz} v_z \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{i, z_{i-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 \left(\frac{\eta_{i-1}}{\eta_i} - 1 \right) & 0 & \frac{\eta_{i-1}}{\eta_i} & 0 \\ 0 & 3\lambda^2 \left(1 - \frac{\eta_{i-1}}{\eta_i} \right) & 0 & \frac{\eta_{i-1}}{\eta_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_z \\ \partial_z v_z \\ \partial_{zz} v_z \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{i-1, z_{i-1}} \quad (2.42)$$

$$\begin{pmatrix} v_z \\ \partial_z v_z \\ \partial_{zz} v_z \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{i-1, z_{i-1}} = M_{i-1} \cdot \begin{pmatrix} v_z \\ \partial_z v_z \\ \partial_{zz} v_z \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{i-1, z_{i-2}} + S_{i-1} \quad (2.43)$$

Za funkce $(v_z, \partial_z v_z, \dots)$ ve vztahu (2.43) dosazujeme pouze jejich nezdvojenou část, obsahující koeficienty $B_{1,2}$ a $C_{1,2}$ (narozdíl od vztahu (2.42), kam dosazujeme funkce celé). Neznámou matici a vektor M_{i-1} a S_{i-1} můžeme vyjádřit jako

$$M_{i-1} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Pokud pro výraz $z_{i-2} - z_{i-1}$ zavedu označení $-h_{i-1}$ (záporně hloubka vrstvy), pak jednotlivé členy matice M_{i-1} a matice zrožů S_{i-1} jsou

$$\begin{aligned}M_{11} &= \cosh[\lambda h] - \frac{1}{2} \lambda h \sinh[\lambda h] \\ M_{12} &= -\frac{1}{2} h \cosh[\lambda h] + \frac{3}{2\lambda} \sinh[\lambda h] \\ M_{13} &= \frac{h}{2\lambda} \sinh[\lambda h] \\ M_{14} &= \frac{h}{2\lambda^2} \cosh[\lambda h] - \frac{1}{2\lambda^3} \sinh[\lambda h]\end{aligned}\quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
M_{21} &= -\frac{1}{2}\lambda (\lambda h \cosh [\lambda h] - \sinh [\lambda h]) \\
M_{22} &= \cosh [\lambda h] - \frac{1}{2}\lambda h \sinh [\lambda h] \\
M_{23} &= \frac{h}{2} \cosh [\lambda h] + \frac{1}{2\lambda} \sinh [\lambda h] \\
M_{24} &= \frac{h}{2\lambda} \sinh [\lambda h]
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
M_{31} &= -\frac{1}{2}\lambda^3 h \sinh [\lambda h] \\
M_{32} &= \frac{1}{2}\lambda (-\lambda h \cosh [\lambda h] + \sinh [\lambda h]) \\
M_{33} &= \cosh [\lambda h] + \frac{1}{2}\lambda h \sinh [\lambda h] \\
M_{34} &= \frac{h}{2} \cosh [\lambda h] + \frac{1}{2\lambda} \sinh [\lambda h]
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
M_{41} &= -\frac{1}{2}\lambda^3 (\lambda h \cosh [\lambda h] + \sinh [\lambda h]) \\
M_{42} &= -\frac{1}{2}\lambda^3 h \sinh [\lambda h] \\
M_{43} &= \frac{1}{2}\lambda (\lambda h \cosh [\lambda h] + 3 \sinh [\lambda h]) \\
M_{44} &= \cosh [\lambda h] + \frac{1}{2}\lambda h \sinh [\lambda h]
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$S_{i-1} = \frac{Ra}{\eta_{i-1}} \begin{pmatrix} \frac{h_{i-1}}{\lambda^2} + b_i(\vec{\lambda}) \\ -\sum_l \frac{\lambda^2 l \pi}{h_{i-1} (l^2 \pi^2 + \lambda^2)^2} ((-1)^l - 1) \hat{\Theta}_l \\ 0 \\ \sum_l \frac{\lambda^2 l^3 \pi^3}{h_{i-1}^3 (l^2 \pi^2 + \lambda^2)^2} ((-1)^l - 1) \hat{\Theta}_l \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

Z tohoto vztahu pro v_z a její derivace ve vrstvě i v závislosti na v_z a příslušné derivace ve vrstvě $i - 1$ můžeme zapsat obecný vzorec pro libovolnou vrstvu i ve vztahu k vrstvě první, a to pomocí součinu matic.

$$\begin{pmatrix} v_z \\ \partial_z v_z \\ \partial_{zz} v_z \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{i,z_i} = K_{i-1} \cdot \left(\dots K_1 \cdot \left(M_1 \cdot \begin{pmatrix} v_z \\ \partial_z v_z \\ \partial_{zz} v_z \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{1,z_0} + S_1 \right) \dots + S_{i-1} \right) \tag{2.50}$$

Pro řešení soustavy na N vrstvách je tedy třeba vyřešit soustavu pro $B_1^{1,2}, C_1^{1,2}$ a $B_N^{1,2}, C_N^{1,2}$ pomocí vztahů (2.31), (2.35), (2.36), (2.37) a vztahu (2.50) pro $i = N$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z v_z \\ 0 \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{N, z_N} = K_{N-1} \cdot \left(\dots K_1 \cdot \left(M_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_z v_z \\ 0 \\ \partial_{zzz} v_z \end{pmatrix}_{1, z_0} + S_1 \right) \dots + S_{N-1} \right) \quad (2.51)$$

2.2 Termální rovnice Eulerovou metodou

Termální rovnice je řešena Eulerovou (nebo obecně Runge-Kutta) metodou.

Při výpočtu Stokesova proudění lze ze získaných rychlostí, tlaků a teplot, jež jsou vypočítány v duálním prostoru (ve spektrální oblasti) Fourierovou transformací, ještě před jejich transformací do oblasti prostorové, jednoduše spočítat i členy pravé strany termální rovnice:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \Delta \Theta - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla \Theta - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla T_0. \quad (2.52)$$

Zde se uplatní tvar Fourierovy transformace diferenciálních operátorů, které ve spektrální oblasti přecházejí na různé operace násobení. Řešení členů pravé strany rovnice 2.52 je tak ve spektrální oblasti jednoduchou operací. Jednotlivé členy je pak třeba transformovat zpět do prostorové oblasti, v níž jsou provedeny součiny rychlostí a gradientu teploty. Následně řešíme pouze změnu teploty za daný časový krok Δt :

$$\Theta_{\Delta t} = (\Delta \Theta - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla \Theta - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla T_0) * \Delta t, \quad (2.53)$$

získáme vzniklý rozdíl teploty $\Theta_{\Delta t}$ a výslednou teplotu v daném časovém kroku pak získáme snadno jako $\Theta(t + \Delta t) = \Theta(t) + \Theta_{\Delta t}$.

2.3 Shrnutí

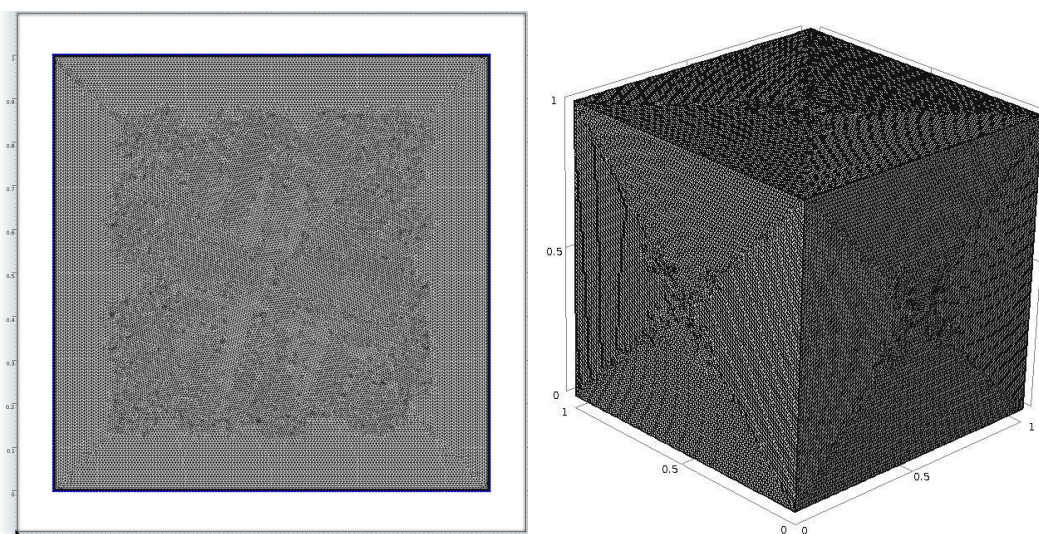
Jsou-li po úspěšném výpočtu Stokesova proudění maticovou metodou do časové oblasti transformovány rychlosti a tlak a popsáním způsobem vypočítána nová výchozí teplota, začíná výpočet pro další časový krok znovu od začátku maticovou metodou pro Stokesovo proudění. Tím je možné kompletně vyřešit časový vývoj konvekce popsany soustavami rovnic 1.5, 1.6 a 1.7, a to za užití metody rychlých Fourierových transformací.

3. Numerické modelování úlohy

Ačkoliv jsem v předchozí kapitole navrhla vlastní numerickou metodu k řešení problému, k modelování úlohy definované v kapitole 1 jsem nakonec použila komerční software Comsol, který problém řeší v konečných elementech (finite elements). Tento krok jsem učinila z praktických důvodů - danou metodu jsem chtěla naprogramovat v Intel Fortranu a užít k tomu knihovny Intel MKL. Vyskytly se však problémy s aplikací Fourierovy transformace, které jsem nedokázala odstranit. Z tohoto důvodu jsem se uchýlila ke komerčnímu software v konečných elementech, jehož výpočetní rychlost sice není srovnatelná s očekávanými vloženími do mé numerické metody, nabízí však numerické postupy, jež byly již dříve dostatečně testovány. Není tedy třeba testovat metodu samotnou a stačí provést testování daného modelu, jenž bude úlohu počítat.

3.1 Numerické rozlišení

Oblast ve 2D či 3D jsem proložila sítí s volnou triangulací (metoda byla nastavena jako automatická, software tedy rozhodne, zda bude vybrána Delaunayho triangulace, či metoda Advancing front). Oblasti měly nastaveny maximální a minimální velikost buňky, podél hraničních oblastí pak bylo 8 vrstev buněk (ve 2D) nebo 10 vrstev buněk (ve 3D). Typický počet buněk pak představoval asi 70 000 (odpovídá nastavení maximální velikosti buňky na asi 7 promile daného rozměru buňky a minimální na asi 0.2 promile) pro 2D případ a asi 2 100 000 buněk pro případ 3D (odpovídá nastavení maximální velikosti buňky na asi 3 procenta daného rozměru buňky a minimální na asi 4 promile). V komplikovanějších případech jsem ale později počítala s modelem s 600 000 buňkami, který dosahoval již velmi dobré přesnosti. Samozřejmě by bylo možné oblasti ještě více zahustit, tím by se ale výrazně navyšovala časová náročnost. Toto nastavení vzešlo z testu, který jsem provedla (viz níže).



Obrázek 3.1: Ukázka nasítované oblasti ve 2D (vlevo) a ve 3D (vpravo)

3.2 Užívané výpočetní algoritmy

Pro časový krok byla použita metoda BDF (Backward Differentiation Formulas) s volným výběrem kroku o maximálním řádu 2. Konzistentní inicializace byla prováděna pomocí zpětné Eulerovy metody. Řešení matic probíhalo pomocí numerické metody PARDISO, v některých případech pomocí numerické metody MUMPS. Toto nastavení jsem zvolila na základě doporučení tvůrců software Comsol pro daný typ numerického problému, jež je řešen, a dále pak laděním dle své osobní zkušenosti.

3.3 Definice konvekčních režimů a jejich určování

System popsaný rovnicemi (1.5), (1.6) a (1.7) v průběhu času dospěje do jistého stavu, v němž pak setrvává. Tyto stavy jsou obvykle charakteristické, a to obzvláště časovým průběhem Nusseltova čísla, ale také i časovým průběhem jiných veličin, a dovolují tak nalézt hranice mezi jednotlivými stavy/režimy na základě pozorování těchto časových průběhů a hodnot veličin. Různých režimů dosáhne i model, u něhož bude změněno pouze jeho globální Rayleighovo číslo. Rayleighovo číslo, jehož variací systém konverguje buď k původnímu, či již k jinému režimu, se nazývá kritické Rayleighovo číslo. Rozlišují tyto režimy:

1. **kondukční režim** - v buňce dochází pouze ke kondukčnímu přenosu tepla, neprobíhá konvekce materiálu
2. **konvekční režim** - teplo vstupující do buňky je přenášeno jak kondukcí, tak konvekcí materiálu

stacionární režim : po dosažení stacionárního režimu jsou rychlost i teplotní gradient v každém bodu buňky nezávislé na čase. Atraktorem ve stavovém prostoru je nehybný bod.

v buňce se mohou objevit dva typy režimů:

- (a) 1. stacionární režim - ve středu konvekční buňky se teplota blíží průměrné, časový vývoj Nusseltova čísla nejprve odpovídá vývoji v kondukčním režimu, a funkce je tedy ve dvou úsecích konstantní - po dosažení hodnoty 1 pro kondukční režim a po jistém časovém vývoji po dosažení konečné hodnoty Nusseltova čísla pro daný režim
- (b) 2. stacionární režim - průměrné teplotě se teplota blíží na hranicích konvekční buňky, časový vývoj Nusseltova čísla má pouze jeden úsek konstantní hodnoty, časovým vývojem přechází přímo v konstantní funkci konečné hodnoty Nusseltova čísla pro daný režim.

periodický režim : rychlost i teplotní gradient jsou v každém bodu buňky periodickou funkcí času, Hopfova bifurkace - atraktorem ve stavovém prostoru je uzavřená křivka, časový vývoj Nusseltova čísla je periodickou funkcí času

chaotický režim : rychlost a teplotní gradient je nekonstantní aperioidickou funkcí času, atraktor ve stavovém prostoru opisuje křivku, jež se nikdy neuzavře, časový vývoj Nusseltova čísla je chaotický a neperiodický v čase

3.3.1 Určování jednotlivých režimů

Zásadním procesem v řešení této diplomové práce je určování jednotlivých režimů pro daný model. Tento proces se promítne ve všech výsledcích a závěrech této diplomové práce, a proto bych se této problematice chtěla věnovat více.

Jak již bylo naznačeno výše, režimy se od sebe odlišují v časových průbězích Nusseltova čísla, můžeme také sledovat atraktory jednotlivých režimů, zajímavé jsou časové závislosti průměrných teplot buňky (ve své podstatě se chovají jako Nusseltova čísla, v některých případech je na nich ale lépe vidět přechod mezi jednotlivými stavy, jako např. přechod mezi 1. a 2. stacionárním režimem), informace obsahují také teplotní a rychlostní pole dané oblasti a jejich časový vývoj či horizontálně průměrované teplotní křivky v závislosti na hloubce a času. Všechny tyto informace však musí být pečlivě vyhodnoceny s uvážením faktorů, jež jejich výpovědní hodnotu mohou změnit:

1. numerické rozlišení
2. časový krok
3. délka měření
4. chyba měření (rozlišení v Rayleighových číslech)
5. numerické metody použité pro vyhodnocení jednotlivých parametrů/časových průběhů a další

Jestliže bude numerické rozlišení příliš nízké nebo naopak časový krok příliš dlouhý, není možné spolehlivě vyhodnotit časové závislosti výše popsanych veličin a není ani možné se spolehnout na numerickou metodu, která daný model spočítala. Tyto dva body jsem eliminovala testováním (benchmark) a laděním systému tak, aby ve standardních situacích počítal správně. Mohu tedy předpokládat, že numerické rozlišení je dostatečné a časový krok dostatečně krátký. Ve všech případech je ale třeba i toto minimálně do úvah zahrnout, neboť testovány byly standardní modely s konstantní viskozitou, konstantními teplotními roztažnostmi a vodivostmi, a tedy i zde je třeba experimenty opakovat a ověřovat stabilitu výsledků.

Z toho plyne, že jednotlivé běhy výpočtu je třeba opakovat, sledovat změnu výsledků v závislosti na změně časového kroku či rozlišení. Toto je ale časově velice náročné, zvláště jsou-li modely trojrozměrné a rozsáhlé. Z tohoto důvodu nebylo možné vždy toto činit, snažila jsem se ale v každém případě dosáhnout maximální stability nalezeného řešení, např. pomocí podobných modelů, u nichž dostatečnost rozlišení a časového kroku byla ověřena.

V každém měření je třeba zahrnout chybu měření, která plyne z diskrétního rozložení Rayleighových čísel. Chybu měření jsem tak stanovila zcela standardně jako polovinu rozdílu mezi modelovanými Rayleighovy čísly.

Důležitým parametrem chybovosti měření je také užitá metoda vyhodnocení sledovaných veličin. V tomto bodě jsem se mnohdy spoléhala na Comsol. Tím mám na mysli zvláště časový průběh Nusseltových čísel a průměrných teplot, či teplot průměrovaných v horizontálním směru, kde se jednalo pouze o posouzení kvantitativní. Tedy určení přechodu mezi kondukčním a konvekčním režimem,

kde jsem (na příkladu Nusseltova čísla) sledovala přesažení hodnoty 1, která naznačuje, že systém přechází do kondukčního režimu. Stejně tak kvantitativně jsem sledovala pomocí Comsolu také odchýlení vertikálně průměrovaných teplot v buňce od lineární závislosti na hloubce, která také naznačuje přechod ke konvekčnímu režimu a tak podobně s ostatními veličinami. Takto jsem určovala kritické Rayleighovo číslo pro přechod z kondukce do prvního stacionárního stavu a z prvního do druhého stacionárního stavu.

Větší pozornost si zaslouží určování přechodu do periodického režimu a stejně tak určování přechodu do chaotického režimu. Je třeba zjistit, pro která Rayleighova čísla již není Nusseltovo číslo jakožto závislé na čase konstantní funkcí, popř. kdy již není periodické, obdobně všechny ostatní sledované veličiny. Samozřejmě je možné určit tento přechod hrubě tam, kde je již periodičnost, popř. aperiodičnost časové závislosti veličiny patrná i kvantitativně. Měřené časové řady byly sledovány ve spektrální oblasti (jedná se o Fourierovu transformaci), konkrétně jsem se zaměřila na amplitudové spektrum. V kondukčním režimu se ve spektru vyskytuje pouze delta funkce pro nulovou frekvenci. Tato delta funkce odpovídá hodnotě Nusseltova čísla $Nu = 1$ pro daný časový vývoj (obr. 3.2). S nastoupením konvekce se Nusseltovo číslo zvýší, ale zůstane konstantní - tedy i ve spektru zůstane pouze delta funkce pro nulovou frekvenci, tato delta funkce ale zvýší svou absolutní velikost (obr. 3.3). V případě přechodu ze stacionárního do periodického režimu se ve spektru objeví nově jeden člen Fourierova rozvoje - tedy pík u nenulové frekvence (obr. 3.4). S navyšováním Rayleighova čísla počet členů řady roste, objevují se různé nenulové frekvence ve spektru, a na hranici periodického a chaotického režimu je tedy jejich počet již značný. Spektrum časové řady na přechodu periodického a chaotického režimu se pak celé zvedne (obr. 3.5).

Dále je třeba zmínit otázku trvání časového vývoje. Čím déle se systém vyvíjí, tím přesnějších výsledků je možné dosáhnout. Do každého experimentu tak vstupuje další chyba měření, závislá na tomto parametru.

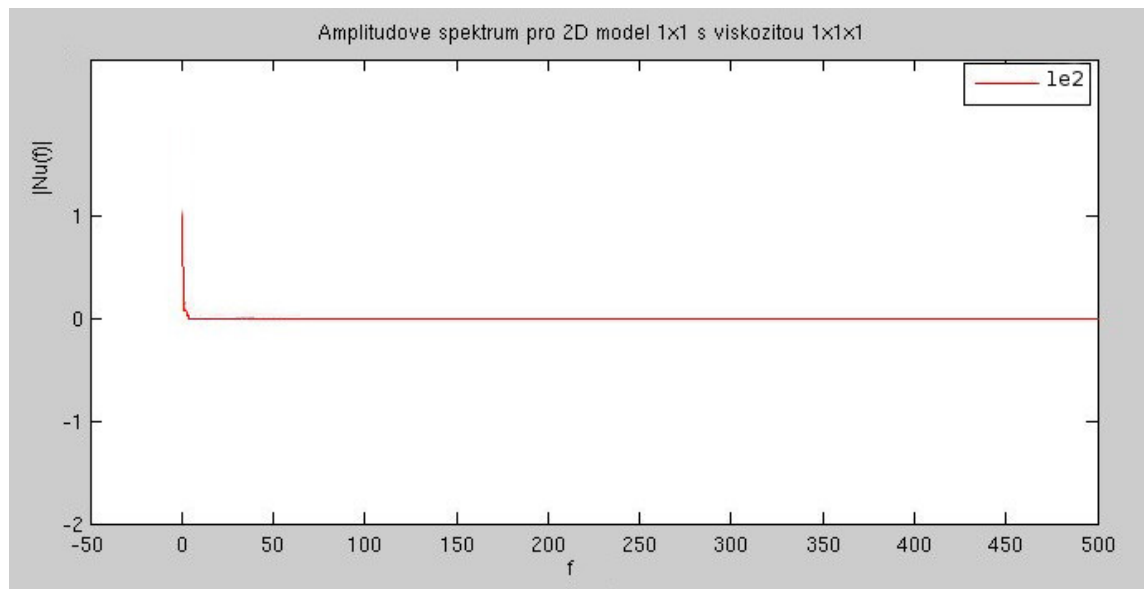
Na následujících stranách uvádím typické příklady jednotlivých stavů a jejich charakteristické veličiny (obrázky 3.6 až 3.10), dále pak ukázkou mezních případů.

Obrázek č. 3.6 obsahuje časový vývoj Nusseltova čísla, průměrnou teplotu v buňce v závislosti na hloubce a rychlostí a teplotní pole pro čistě kondukční režim. V tomto režimu ještě nedochází ke konvekci materiálu v buňce. Nusseltovo číslo tedy dosahuje po jistém časovém vývoji časově nezávislé hodnoty 1 a průměrná teplota v buňce v závislosti na hloubce se řídí Fourierovým zákonem:

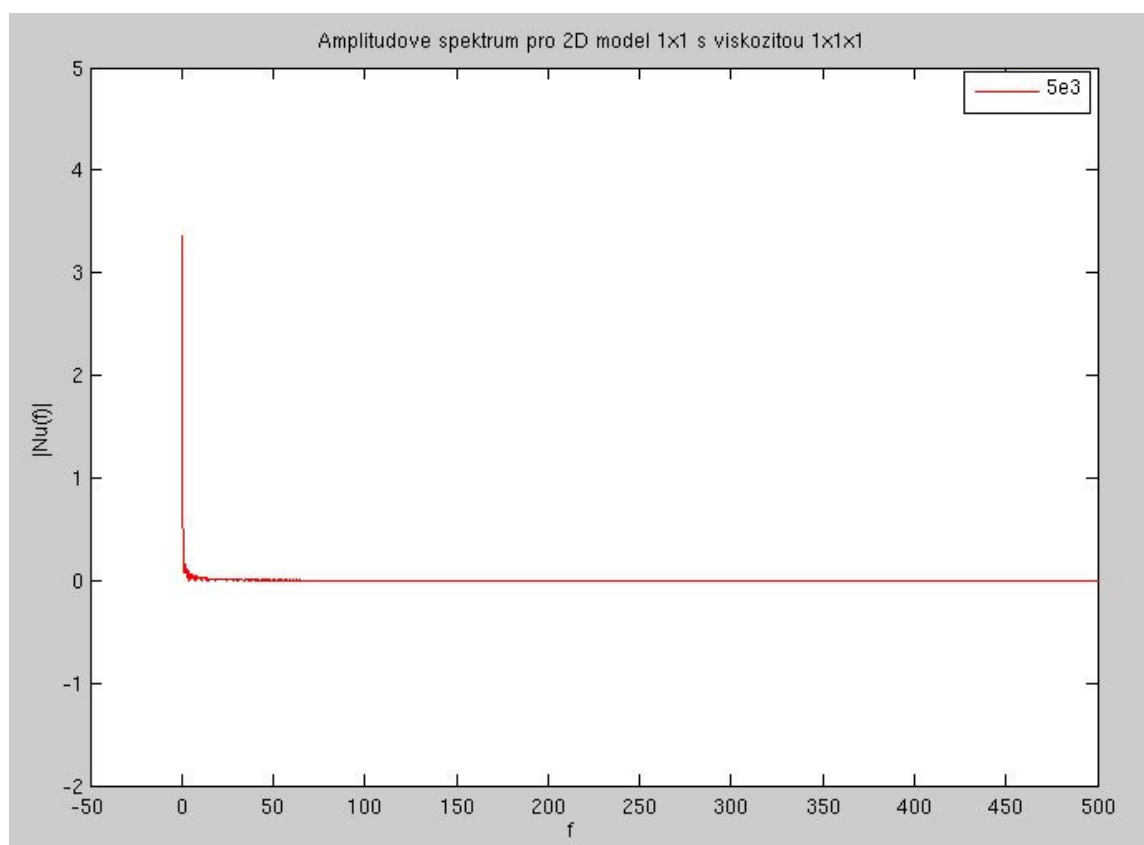
$$q = -k\nabla T \quad (3.1)$$

kde q značí hustotu tepelného toku, k součinitel tepelné vodivosti a T teplotu. Průměrnou teplotu v závislosti na hloubce tak v případě zde užívaných okrajových podmínek popisuje lineární funkce mezi teplotami 1 na horké spodní hranici (zde souřadnice 0) a teplotami 0 na chladné horní hranici (zde souřadnice 1). Rychlostní pole je v tomto chaotické s malými amplitudami, neexistuje význačný směr proudění, jedná se pouze o náhodné procesy, které spontánně zanikají. Teplotní pole odpovídá průměrné teplotě v závislosti na hloubce a má lineární charakter.

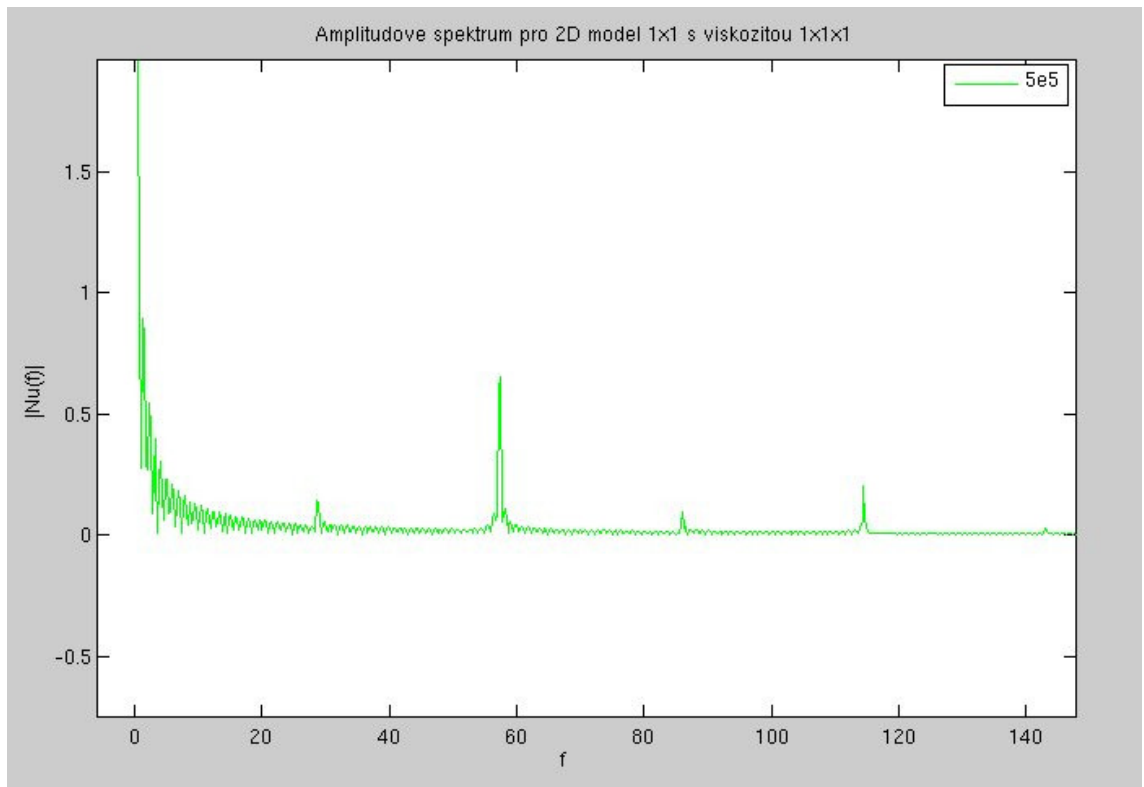
Spektrální obraz jednotlivých režimů



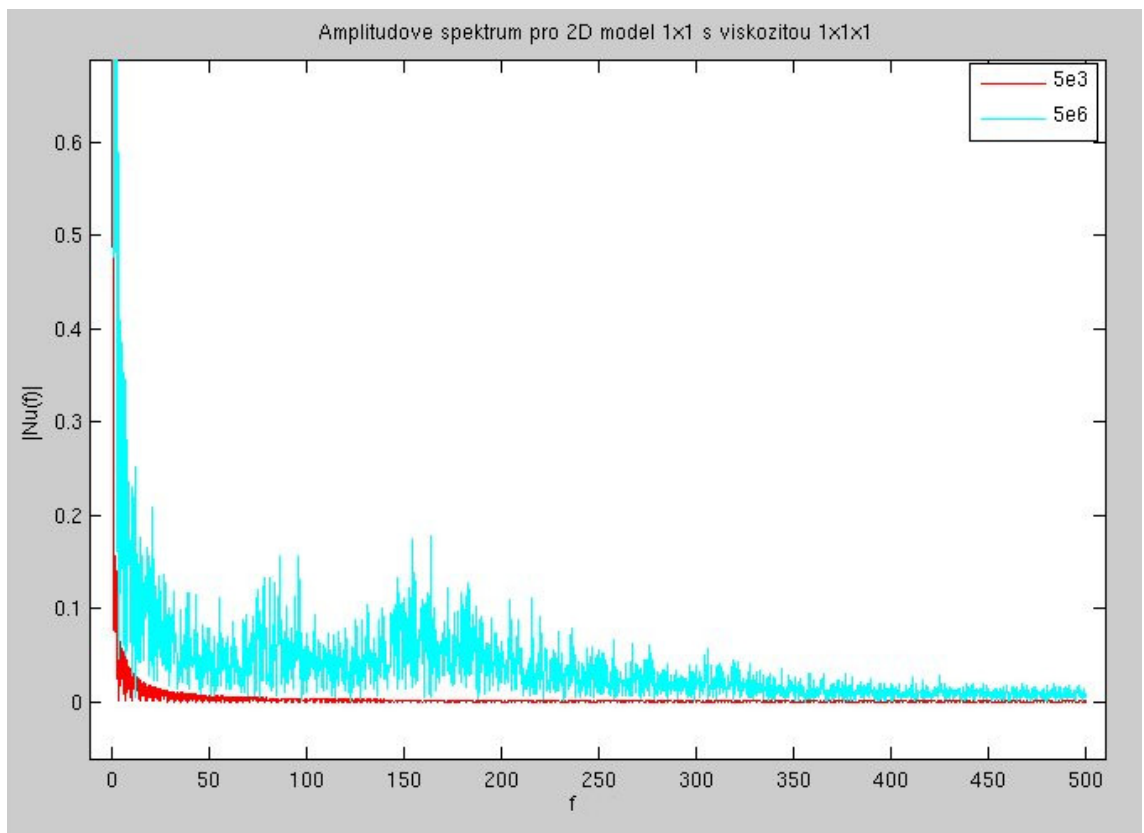
Obrázek 3.2: Kondukční režim



Obrázek 3.3: Konvekční režim - 1. stacionární režim (2. stacionární režim vypadá kvalitativně stejně)

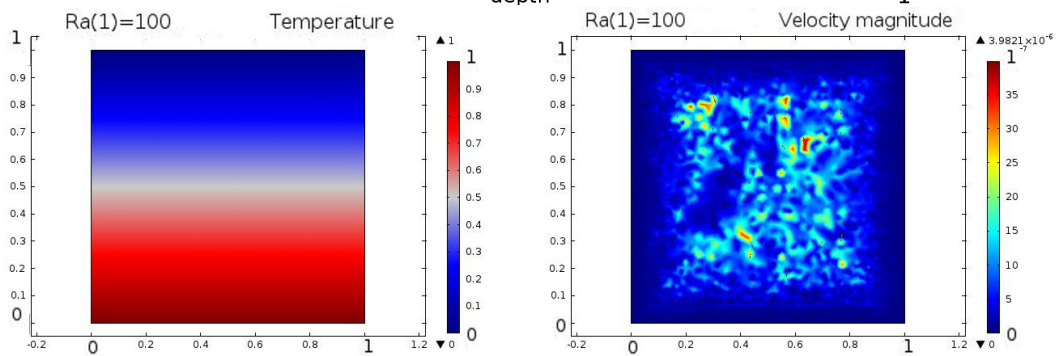
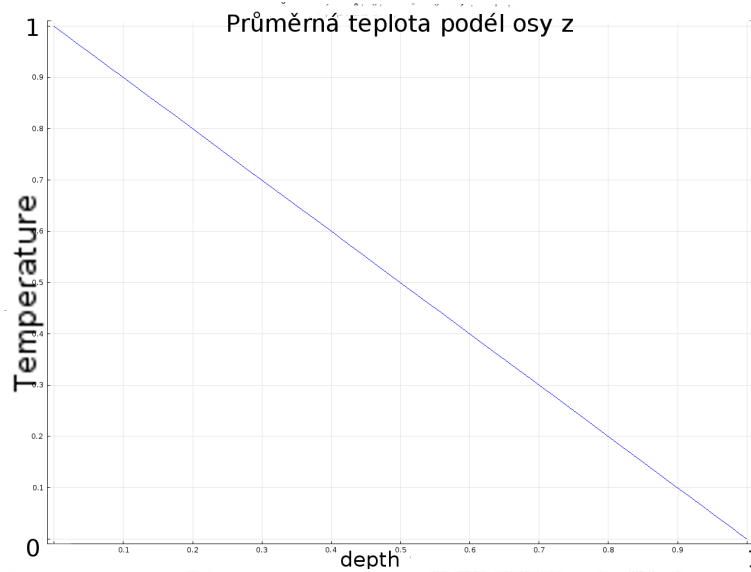
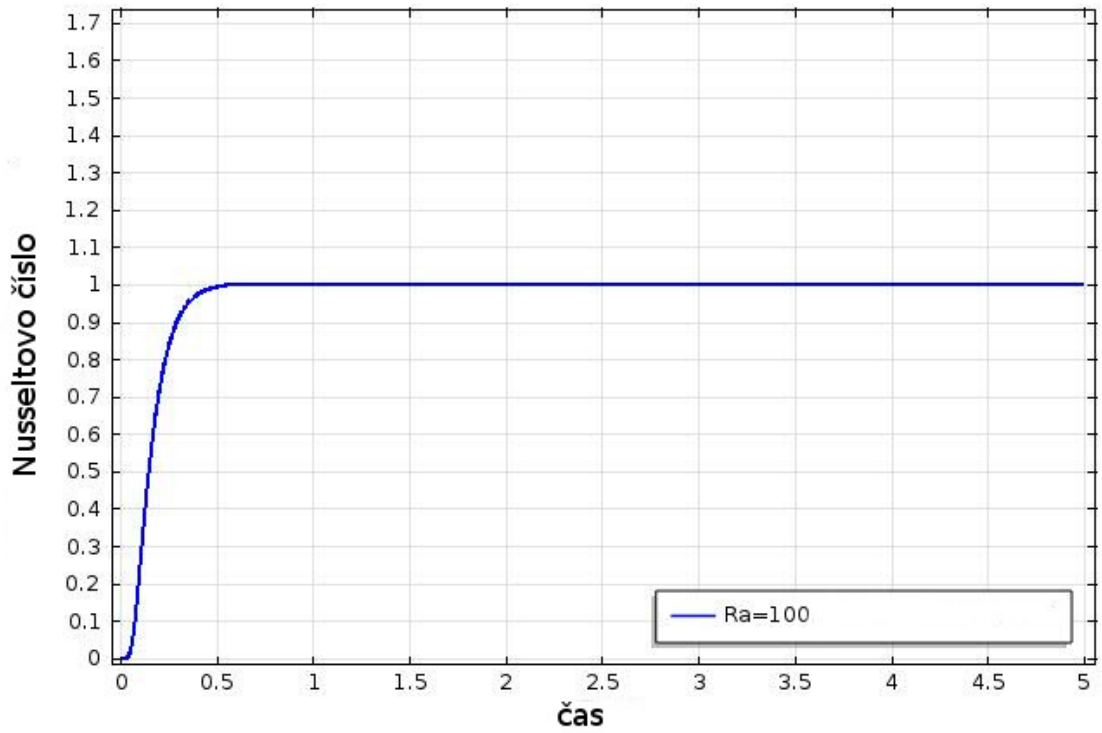


Obrázek 3.4: Konvekční režim - periodický režim

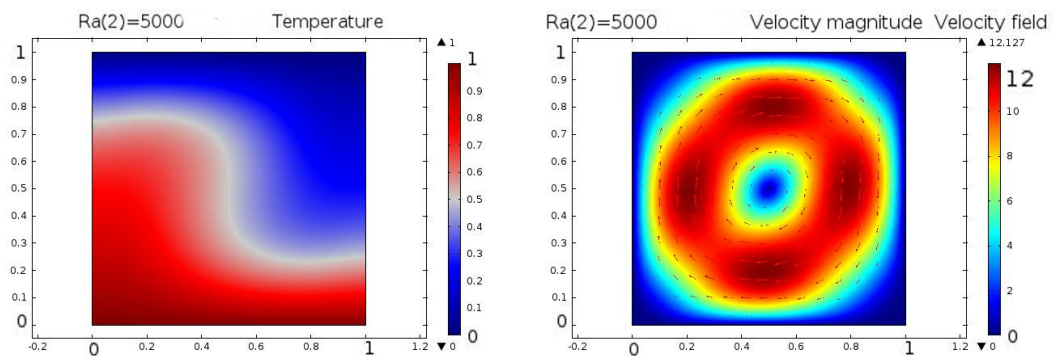
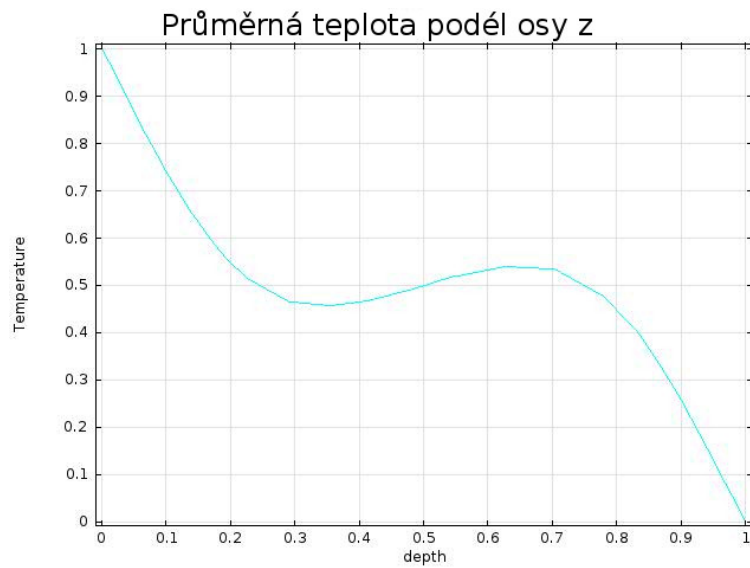
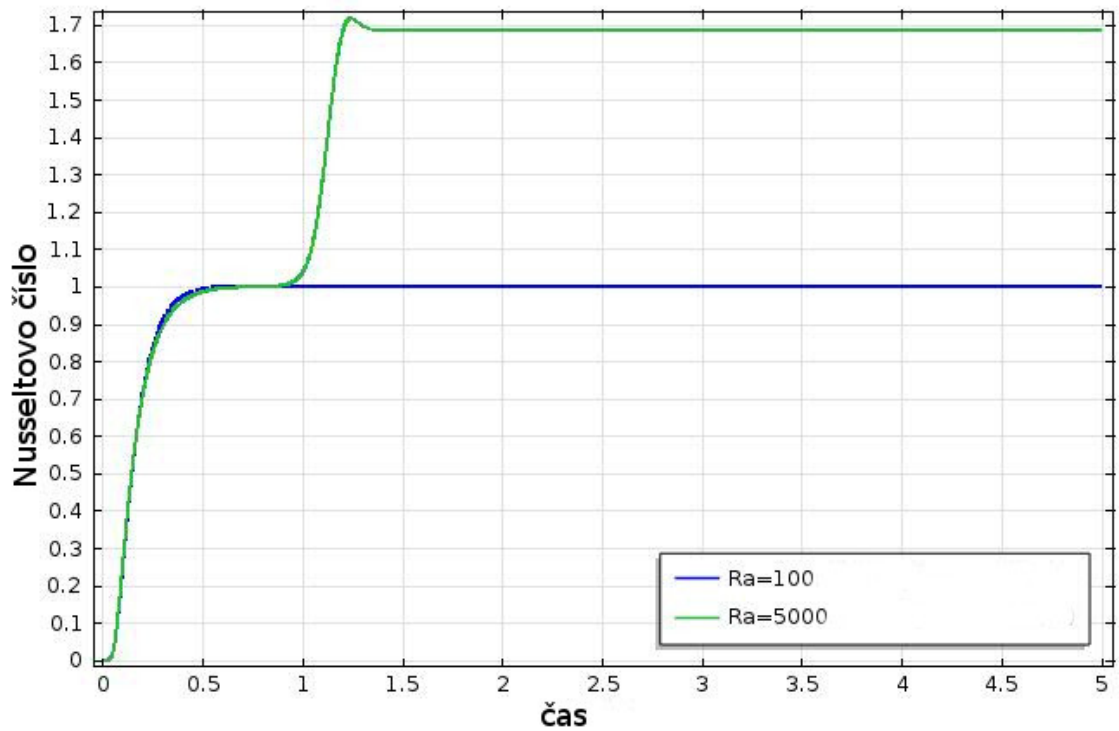


Obrázek 3.5: Konvekční režim - chaotický režim (zeleně) v porovnání se stacionárním režimem (červeně)

Obrázek 3.6: Podkritické Ra číslo pouze kondukční režim ($Ra = 1 \cdot 10^2$)



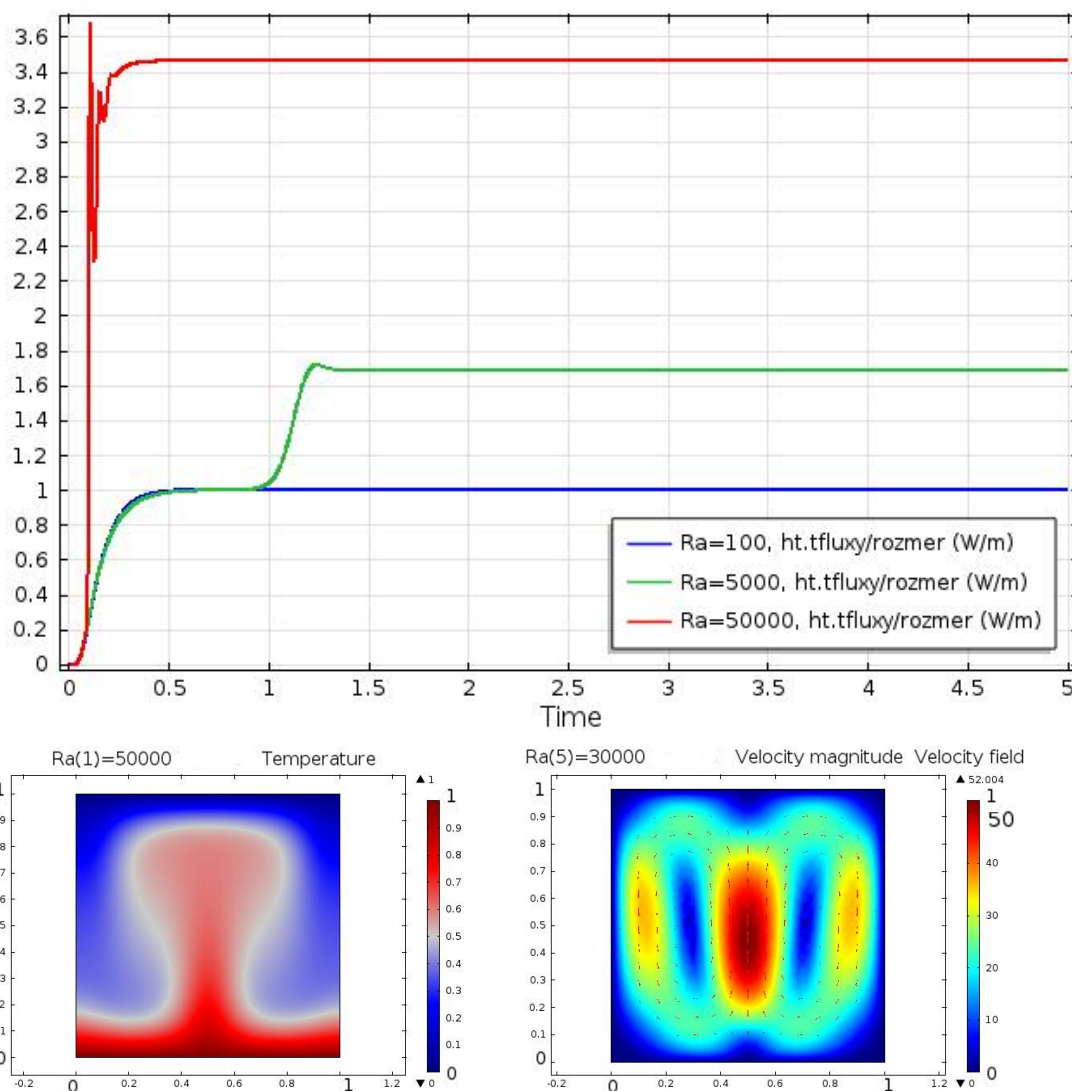
Obrázek 3.7: První nadkritické Ra číslo: stacionární režim ($Ra = 5 \cdot 10^3$)



Při překročení kritického Ra čísla mezi kondukčním a konvekčním režimem se začne v buňce objevovat význačný směr proudění materiálu. Nusseltovo číslo

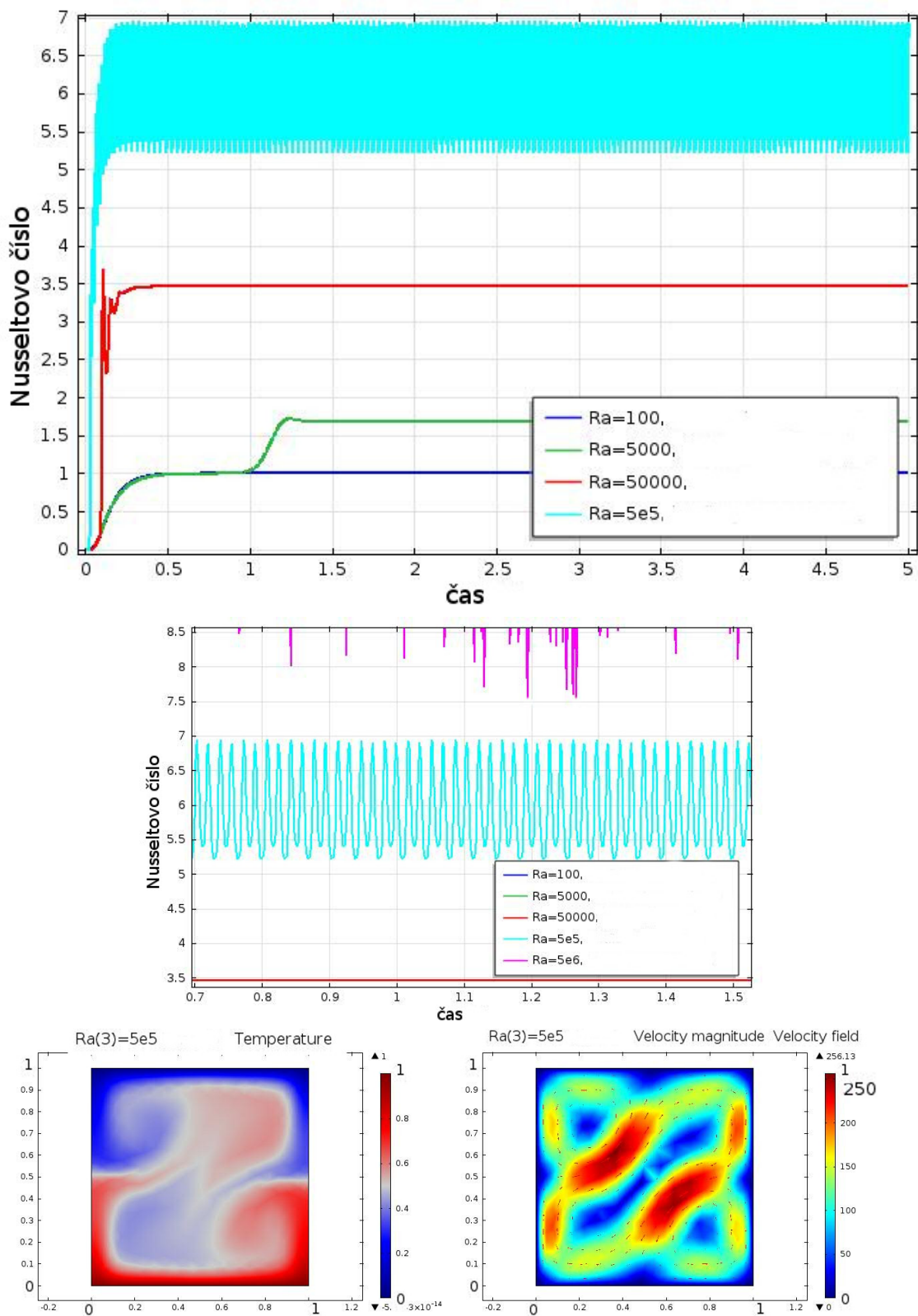
nejprve dosahuje hodnoty 1 jako v kondukčním řešení, poté však narůstá na vyšší hodnotu. Na této hodnotě Nusseltovo číslo pak setrvává a přejde v konstantní časovou funkci. Materiál putuje po uzavřené křivce blížící se elipse, jejíž ohniska leží poblíž středu buňky. Teplotní pole má osu inverze pro $z = 0.5$, horký materiál stoupá vzhůru, zde se ochlazuje a znovu padá dolů. Vzhledem k tomu, že přes spodní a vrchní hranici je teplo přenášeno pouze kondukcí, začíná se zde formovat hraniční vrstva s velkým teplotním gradientem. Časová závislost průměrné teploty neobsahuje žádné výrazné skoky či inflexní body.

Obrázek 3.8: **Druhé nadkritické Ra číslo:** druhý stacionární režim ($Ra = 5 \cdot 10^4$)



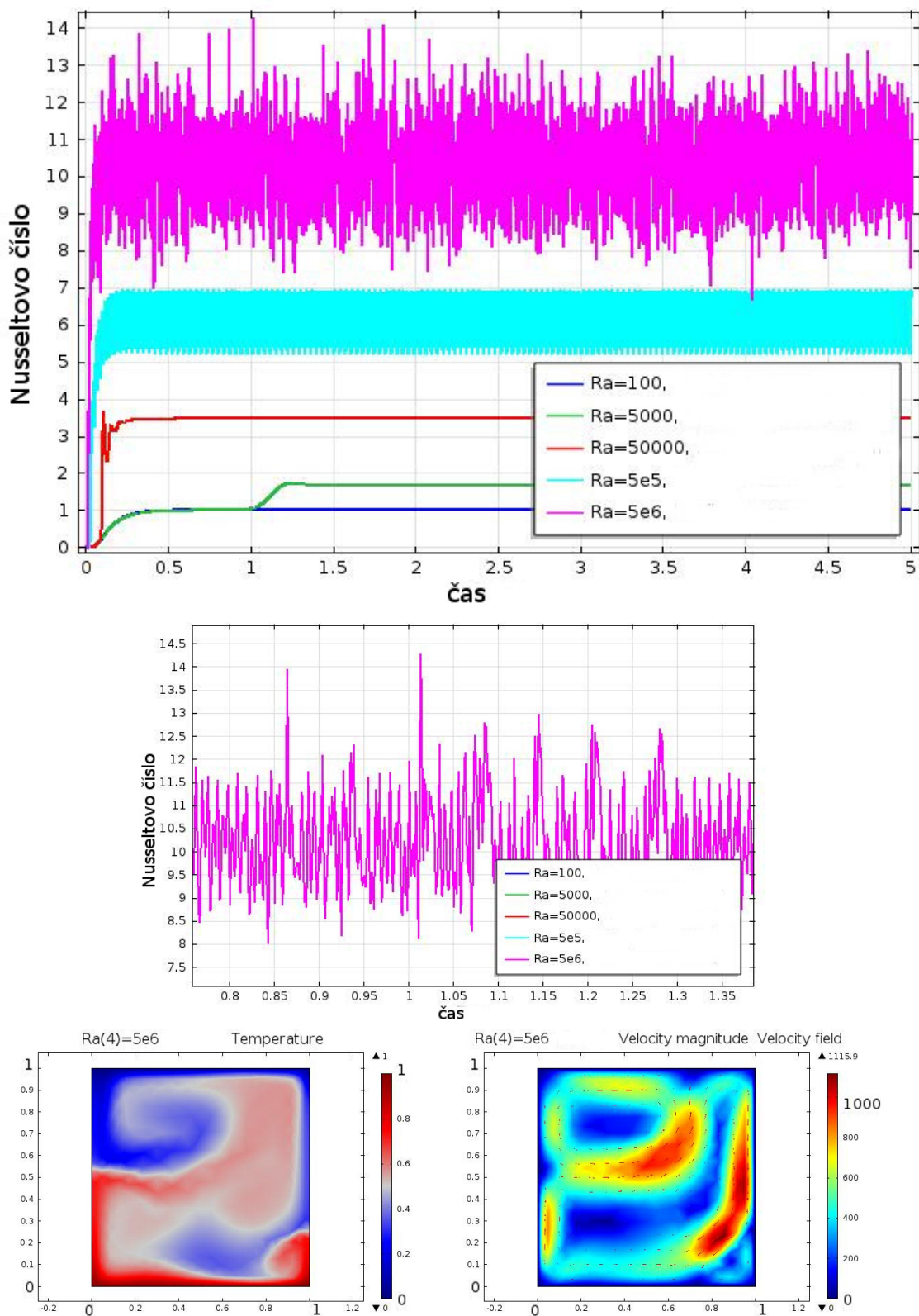
Jestliže je překročeno druhé kritické Ra číslo, konvekce získá symetrický charakter s osou zrcadlení definovanou $x = 0.5$. Časový vývoj konvekce je velmi podobný předchozímu případu, i zde postupně nastane stacionární stav a průměrná teplota se již nemění, Nusseltovo číslo Nu dosáhne konstantní hodnoty, avšak časový vývoj průměrné teploty v buňce je charakterizován v průběhu dosahování stacionárního stavu jednorázovým skokem na vyšší teplotu.

Obrázek 3.9: Třetí nadkritické Ra číslo: periodický režim ($Ra = 5 \cdot 10^5$)



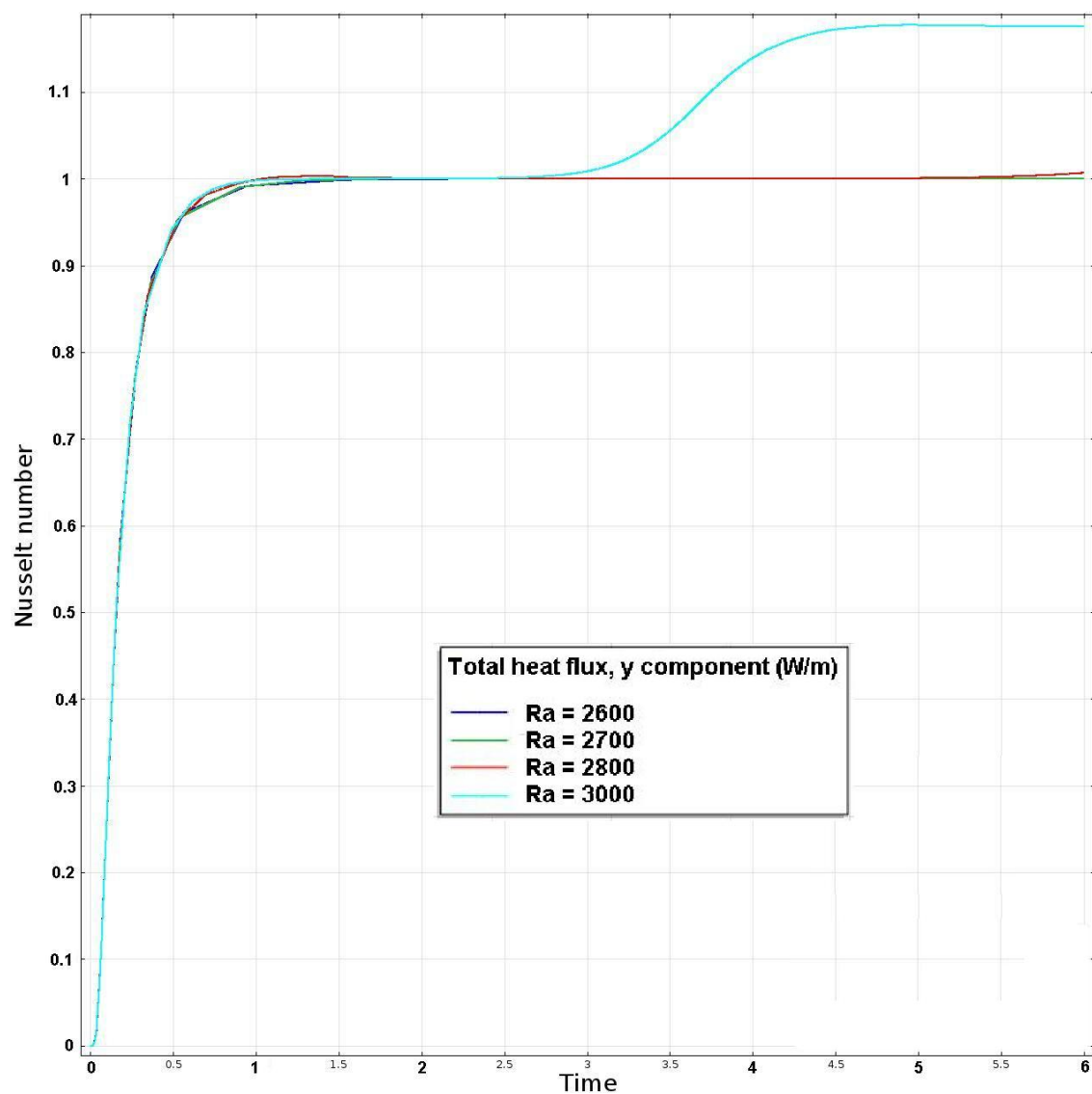
V případě periodického režimu se konvekce dostává znovu do antisymetrického stavu a průměrná teplota v buňce a s ní i Nusseltovo číslo získají periodicky oscilující charakter. Časový vývoj je nejprve shodný s vývojem stacionárního režimu, který však v jistém kritickém čase přejde do režimu periodického.

Obrázek 3.10: Čtvrté nadkritické Ra číslo: chaotický režim ($Ra = 5 \cdot 10^6$)

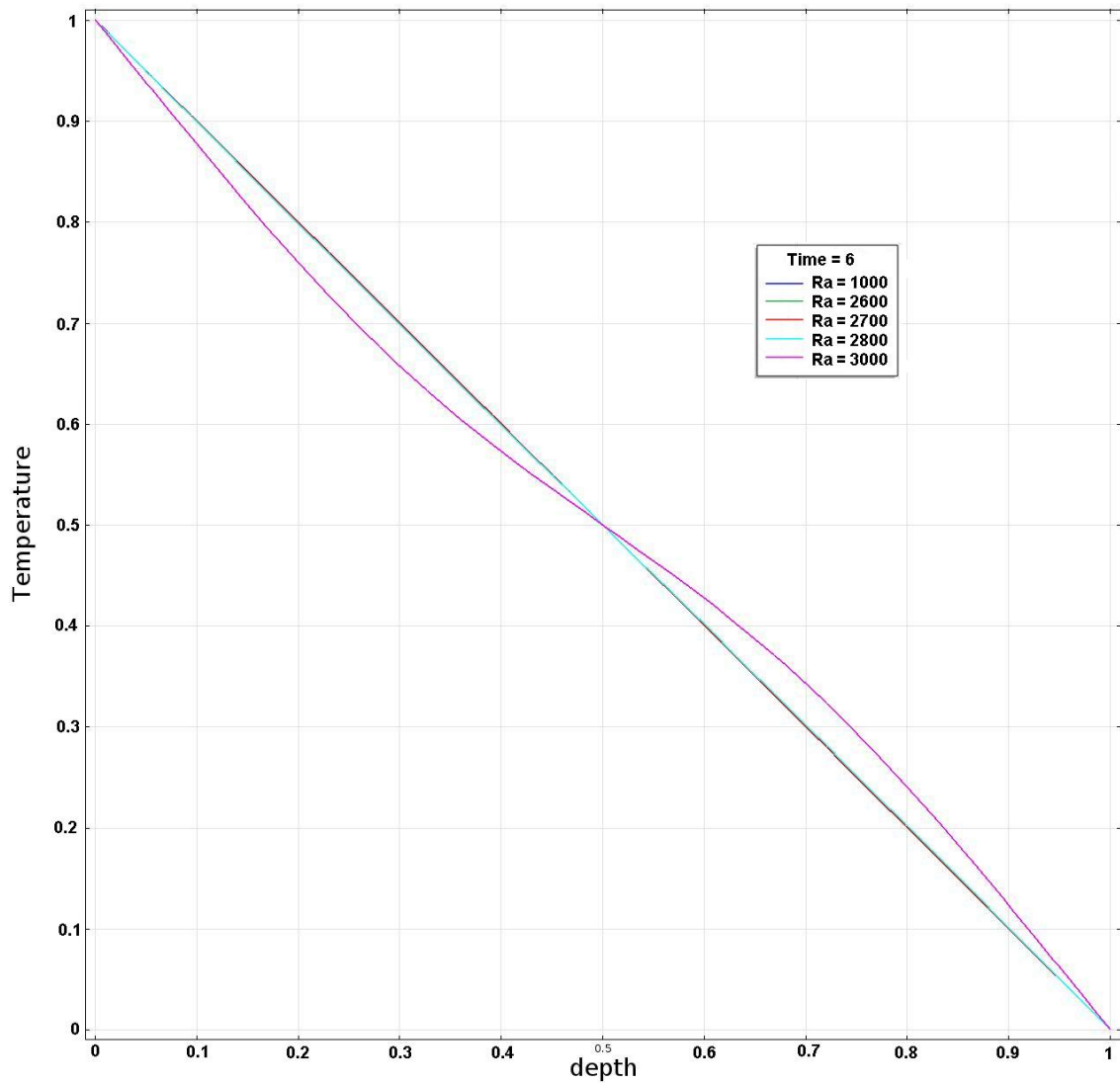


Chaotický režim nastupuje ze všech režimů nejrychleji a je charakteristický pozbytím jakékoliv symetrie. Nusseltovo číslo začne neperiodicky oscilovat a obraz teploty a rychlosti v buňce se rychle mění. S vyšším Ra číslem jsou změny i výchylky oscilací Nusseltova čísla větší.

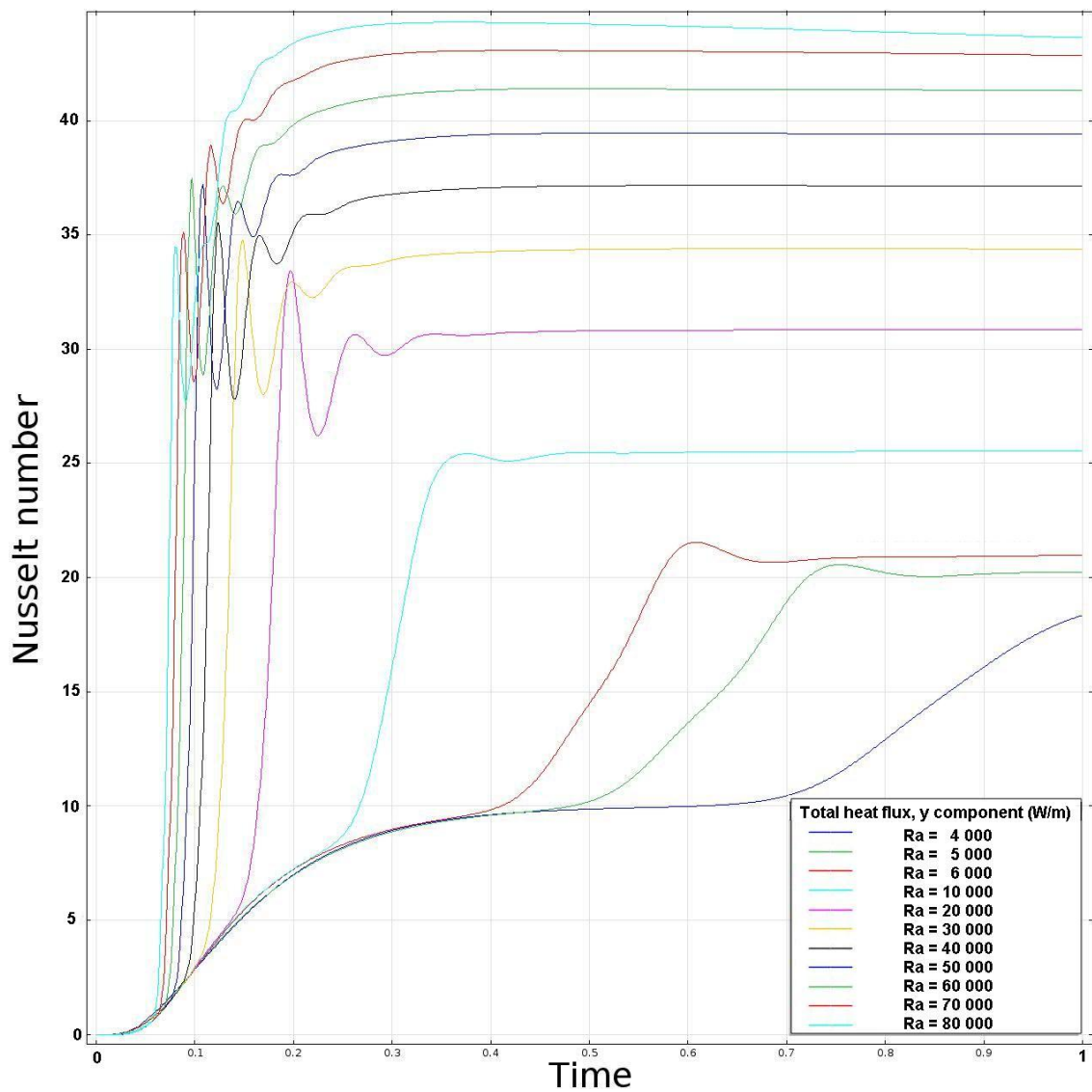
3.3.2 Mezní případy



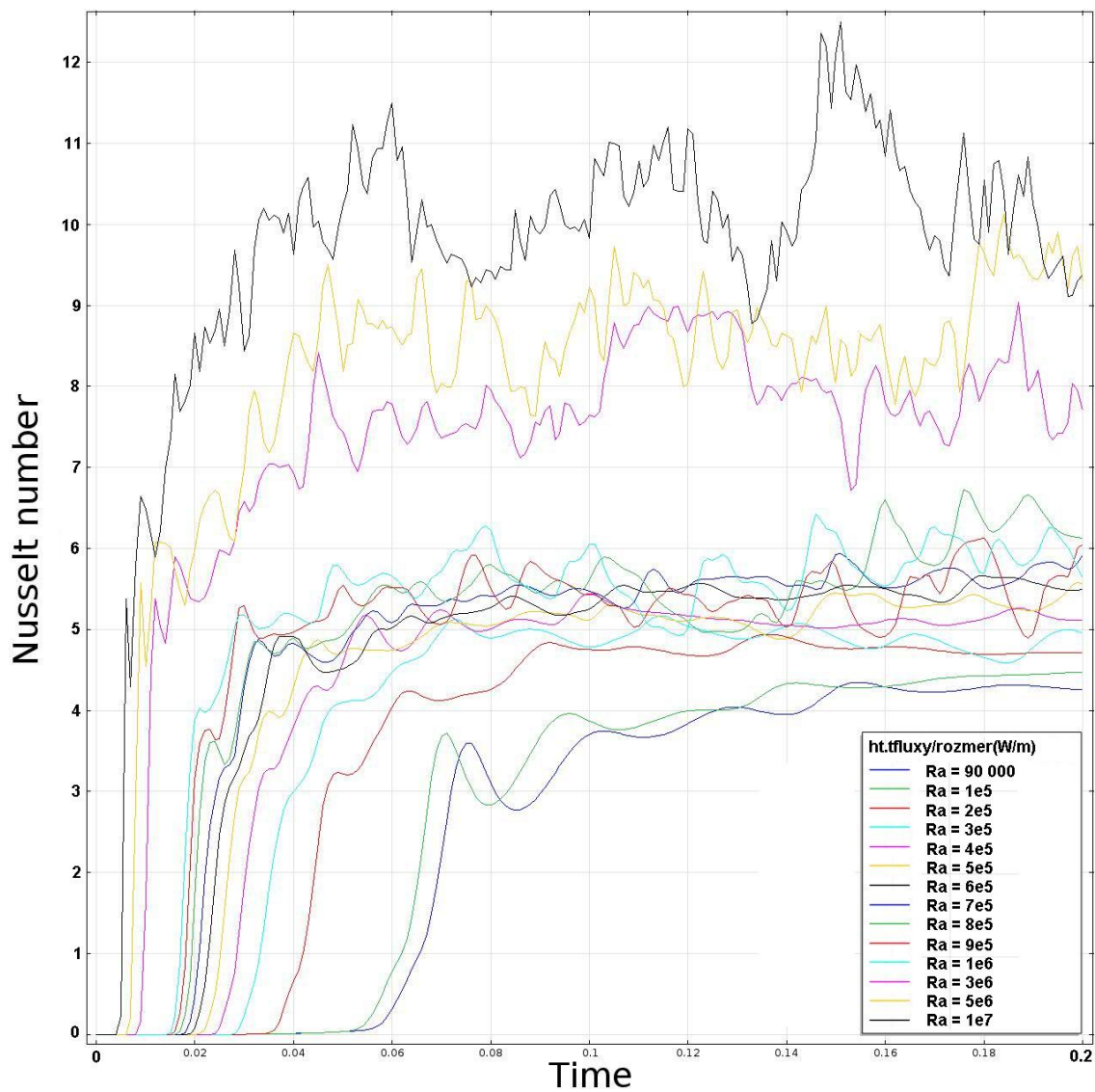
Obrázek 3.11: Nusseltovo číslo pro model s konstantní viskozitou geometrie 1x1 - přechod mezi kondukčním a konvekčním režimem



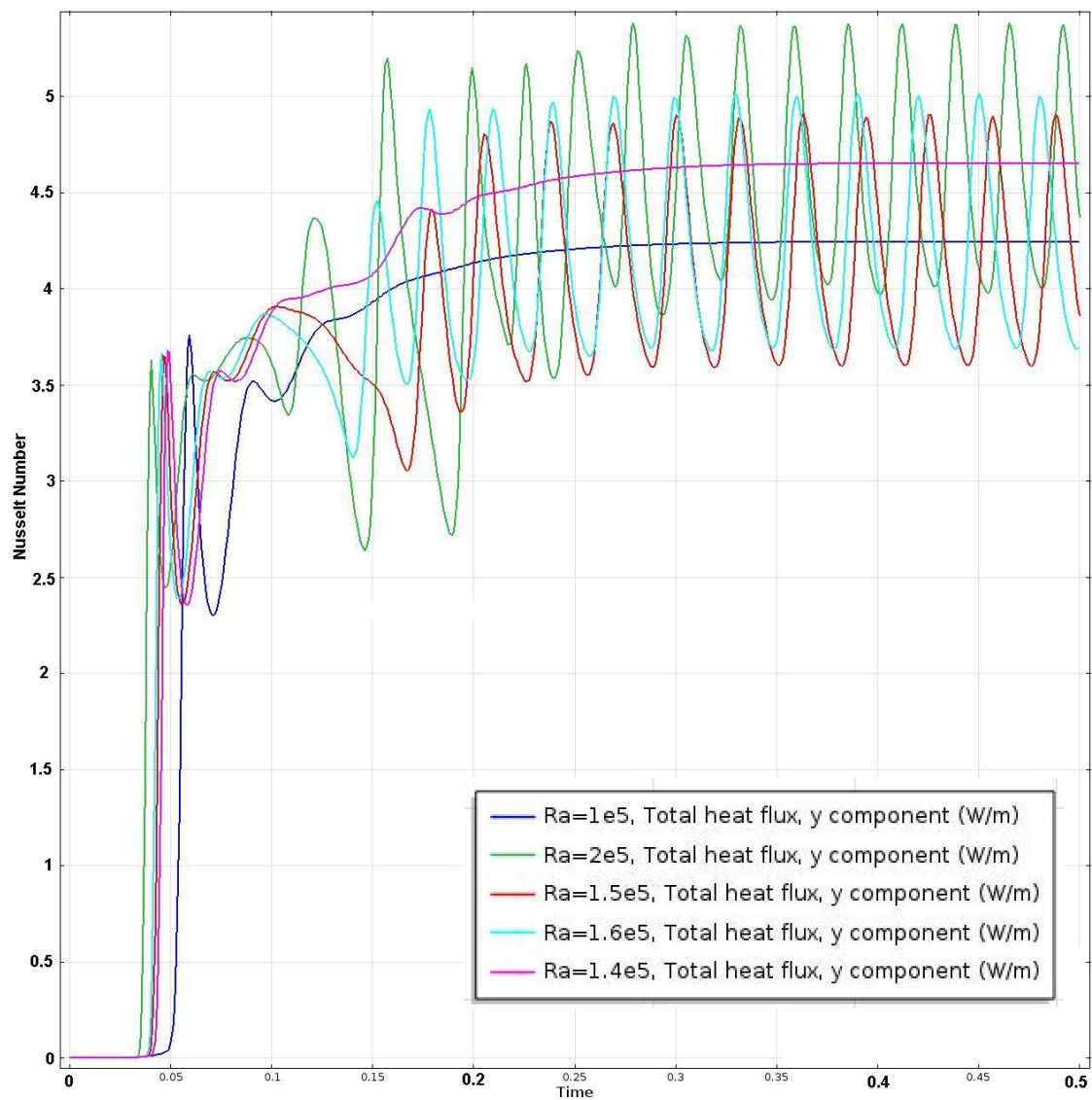
Obrázek 3.12: Teplota průměrovaná v horizontální rovině pro model s konstantní viskozitou geometrie 1x1 - přechod mezi kondukčním a konvekčním režimem



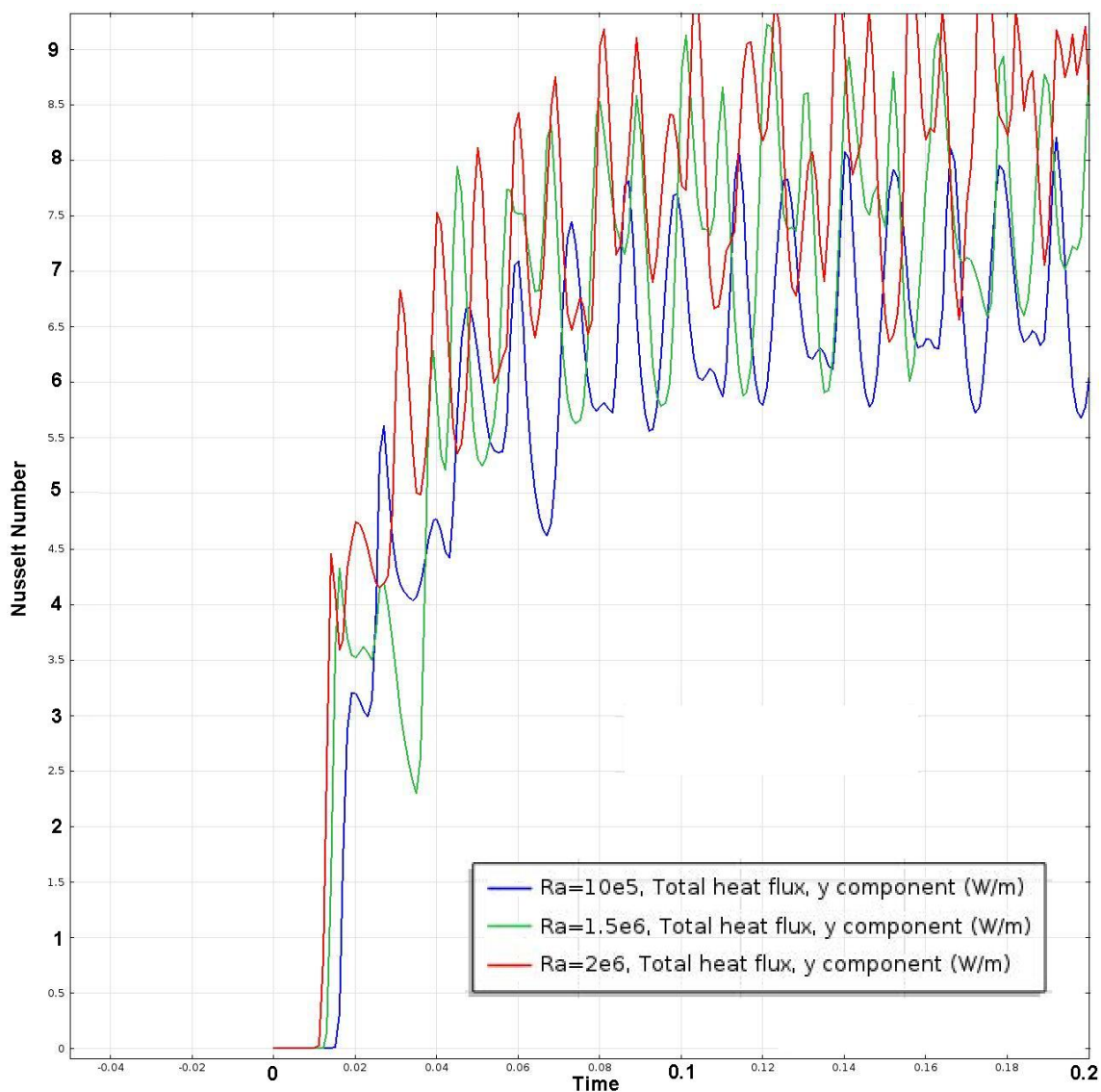
Obrázek 3.13: Nusseltovo číslo pro model s vrstevnatou viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$ geometrie 10x1 - přechod mezi prvním a druhým stacionárním režimem



Obrázek 3.14: Nusseltovo číslo pro model s vrstevnatou viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$ geometrie 10x1 - přechod mezi periodickým a chaotickým režimem



Obrázek 3.15: Nusseltovo číslo pro model s vrstevnatou viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$ geometrie 10x1 - přechod mezi druhým stacionárním a periodickým režimem



Obrázek 3.16: Nusseltovo číslo pro model s konstantní viskozitou geometrie 1x1 - přechod mezi periodickým a chaotickým režimem

3.4 Testování modelu

Nejprve byly provedeny testy na základě známých výsledků termální konvekce v boxu 1x1 pro systém Boussinesqovy aproximace, jak byla představena v Kapitole 1, tedy rovnice č. 1.5, 1.6 a 1.7.

Všechny testy byly provedeny na modelu navrženém v Comosolu 4.2a, v numerickém rozlišení a s použitím výpočetních algoritmů specifikovaných výše.

Nejprve byl testován standardní bezrozměrný model 2D boxu v poměru stran 1:1 s konstantními parametry (bezrozměrně $\eta = 1$, $\rho = 1$, $k = 1$, $\alpha = 1$) k účelu srovnání s údaji v článku *A benchmark comparison for mantle convection codes* (Blankenbach et al., 1989). Prováděný test měl stejné parametry jako v článku uváděný případ 1 (*benchmark case 1*, [1], s. 25), na hranicích tedy na rozdíl od specifikace problému v kapitole 1 byl povolen *free-slip* na vnějších hranicích oblasti.

Výsledky z testu ukazují dobrou shodu Nusseltových čísel (Nu), vypočítaných

dle vzorce 1.4, pro všechny tři Rayleighova čísla $Ra = (10^4, 10^5 \text{ a } 10^6)$, dále tepelného toku v daných bodech q_1 (levý horní) a q_2 (pravý horní roh oblasti). Modely se od Blankenbachovy simulace liší v průměrných rychlostech a maximálních rychlostech. Tento jev jsem nepovažovala, vzhledem k většímu rozptylu hodnot uváděných Blankenbachem a s přihlédnutím k různým numerickým metodám, za podstatný.

Výsledky jsou shrnuty v tabulce na obrázku č. 3.17.

		Nu	
Ra	model	Blankenbach	
1,0E+04	4,88444	4,8844	
1,0E+05	10,5371	10,534	
1,0E+06	21,99388	21,972	

		q1	
Ra	model	Blankenbach	
1,0E+04	8,05758	8,0594	
1,0E+05	19,04495	19,079	
1,0E+06	45,27528	45,964	

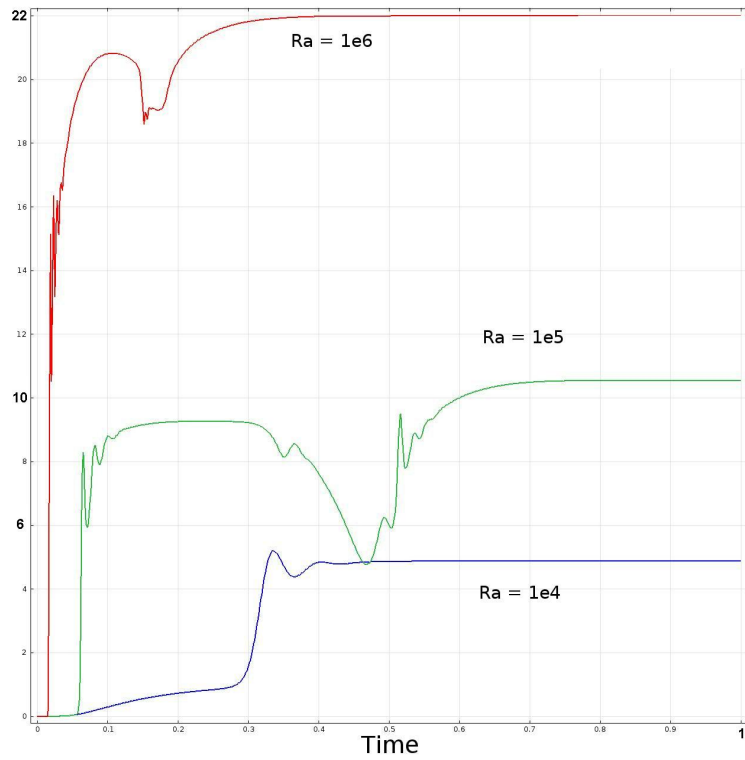
		Vmax	
Ra	model	Blankenbach	
1,0E+04	69,463	61,637	
1,0E+05	362,61	266,2	
1,0E+06	1669,4	1104,34	

		q2	
Ra	model	Blankenbach	
1,0E+04	0,58742	0,5888	
1,0E+05	0,71532	0,72275	
1,0E+06	0,83878	0,8772	

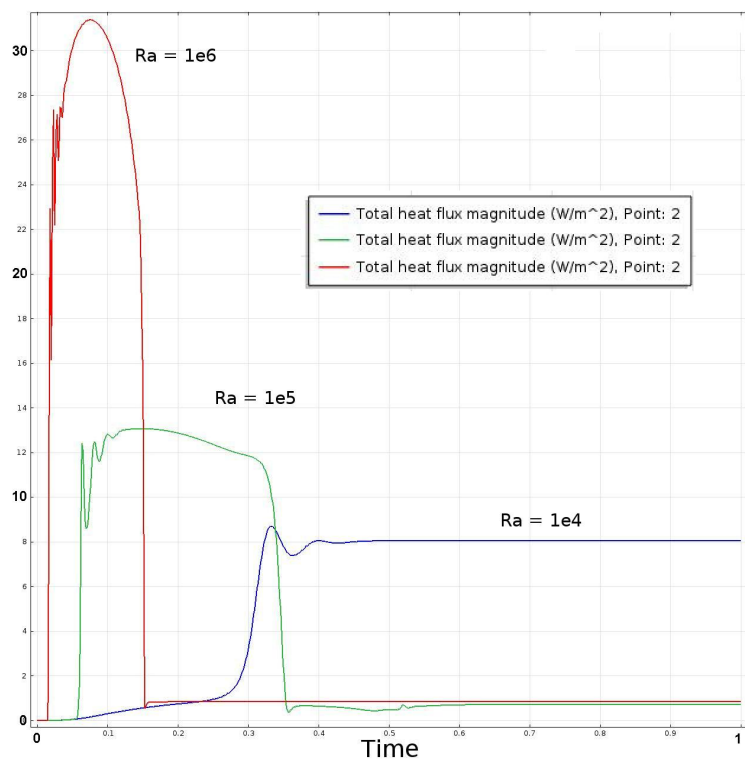
		Vaver	
Ra	model	Blankenbach	
1,0E+04	40,46969	41,422	
1,0E+05	179,62672	198,2	
1,0E+06	773,34818	881,63	

Obrázek 3.17: Srovnání hodnot Nu , V_{max} , V_{aver} , q_1 a q_2 z článku (Blankenbach et al., 1989) a hodnot získaných pomocí simulace v Comsolu

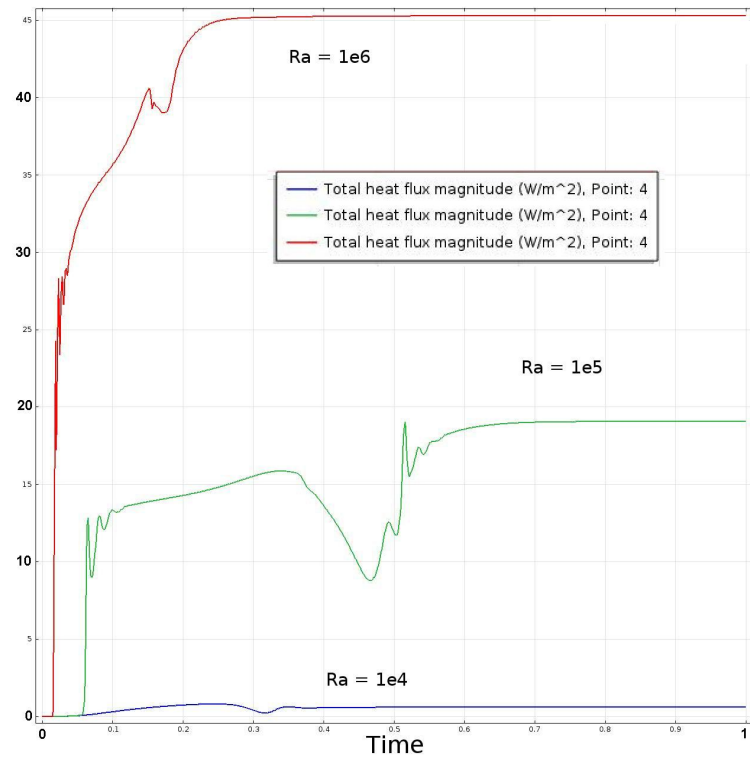
Na obrázcích č. 3.18, 3.19 a 3.20 uvádím také časové vývoje hledaných veličin pro dané modely tří Rayleighových čísel, a to vývoj Nusseltova čísla a obou tepelných toků (pozn. v mém modelu jsou pro $Ra = 10^5$ a 10^6 vůči Blankenbachovu článku přehozeny tepelné toky q_1 a q_2). Pro všechny tři Rayleighova čísla uvádím také rychlostní a teplotní pole.



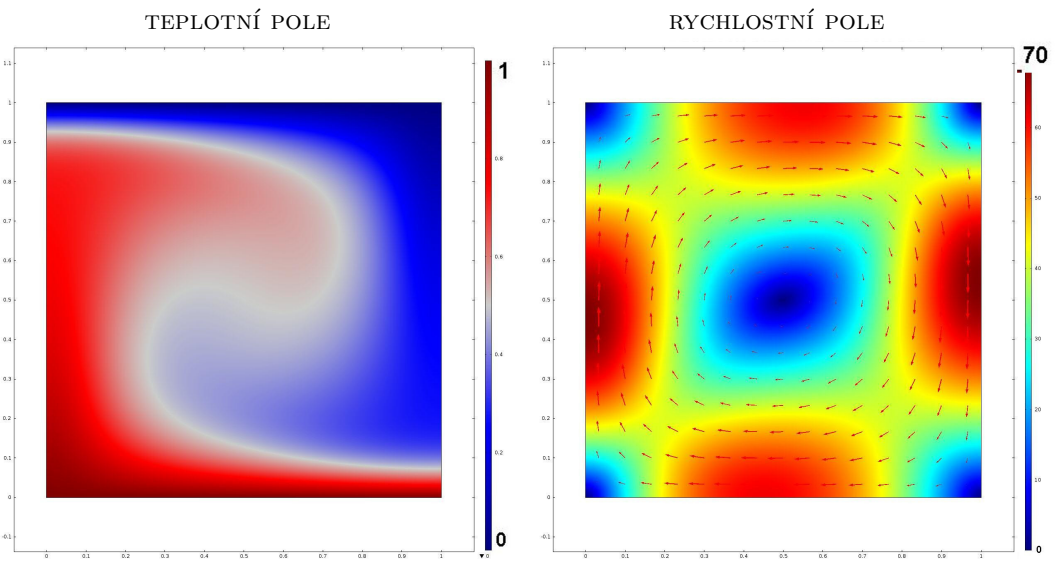
Obrázek 3.18: Nusseltova čísla Nu v testovaných modelech



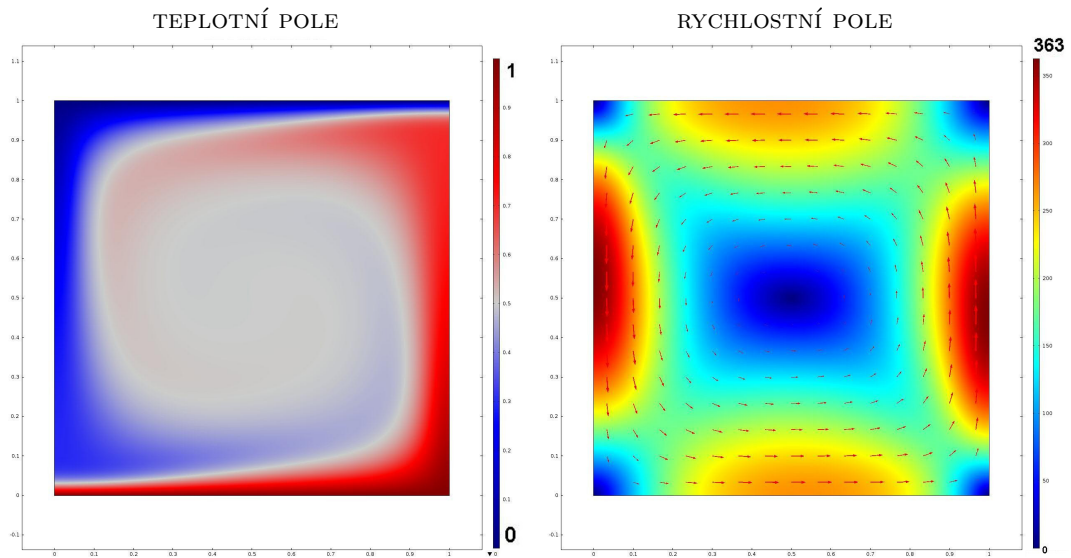
Obrázek 3.19: Tepelný tok q_1 v testovaných modelech



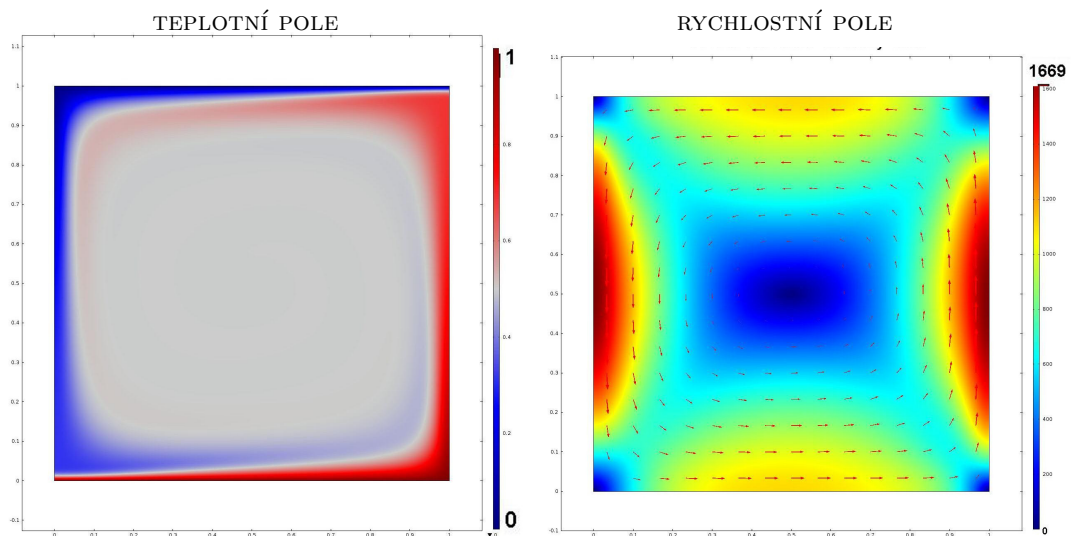
Obrázek 3.20: Tepelný tok q_2 v testovaných modelech



Obrázek 3.21: Testovací model pro $Ra = 10^4$ dle článku (Blankenbach et al., 1989)



Obrázek 3.22: Testovací model pro $Ra = 10^5$ dle článku (Blankenbach et al., 1989)



Obrázek 3.23: Testovací model pro $Ra = 10^6$ dle článku (Blankenbach et al., 1989)

Model s nulovým skluzem na hranicích byl také porovnán s prací autorů Venturi, Salvigni (Venturi, Salvigni, 2007), v němž je uváděno kritické Rayleighovo číslo pro počátek konvekce jako $Ra_c = 2.62 \cdot 10^3$, což, dle tabulky 3.1 je ve shodě s testovaným modelem:

	kritické Ra číslo
počátek konvekce	$2.65 \cdot 10^3 \pm 50$
druhý stacionární stav	$2.725 \cdot 10^4 \pm 50$
periodická konvekce	$1.55 \cdot 10^5 \pm 500$
chaotická konvekce	$1.75 \cdot 10^6 \pm 5000$

Tabulka 3.1: Vlastnosti konvekce boxu 1x1 s konstantními parametry

3.5 Dělení modelů

Na základě výše uvedených skutečností si dovoluji model sestrojený v Comsolu označit jako ověřený.

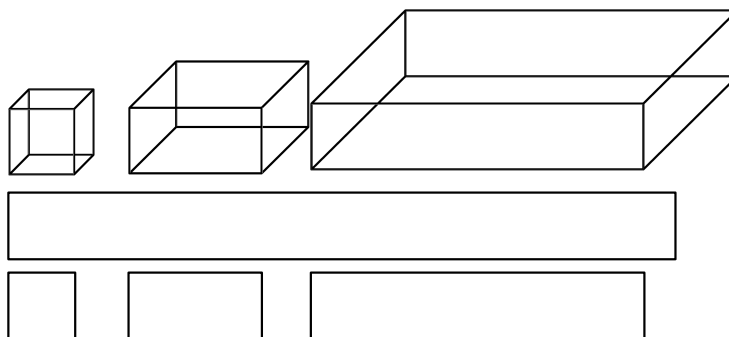
S tímto modelem, s vlastnostmi a použitými algoritmy definovány výše, pak byly provedeny všechny zbývající numerické experimenty.

Modely byly děleny dle trojího rozlišení:

a) Geometrie

Numerické výpočty jsem provedla s modely v kartézské geometrii ve 2D a 3D:

- 2D čtvercový box 1x1
- 2D obdélníkový box 2x1
- 2D obdélníkový box 5x1
- 2D obdélníkový box 10x1
- 3D krychlový box 1x1x1
- 3D krychlový box 2x2x1
- 3D krychlový box 5x5x1



Obrázek 3.24: modelované oblasti ve 3D (výše) a ve 2D (níže)

b) Parametry teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti

Následně probíhá dělení také dle parametrů tepelné vodivosti a teplotní roztažnosti:

- modely s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$
- modely s parametry funkčně závislými: $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$

Definujme nyní funkční závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti:

Uvažujme funkci teplotní roztažnosti $\alpha(z, T)$, kde z představuje hloubku ($z = 0$ na CMB) a T teplotu:

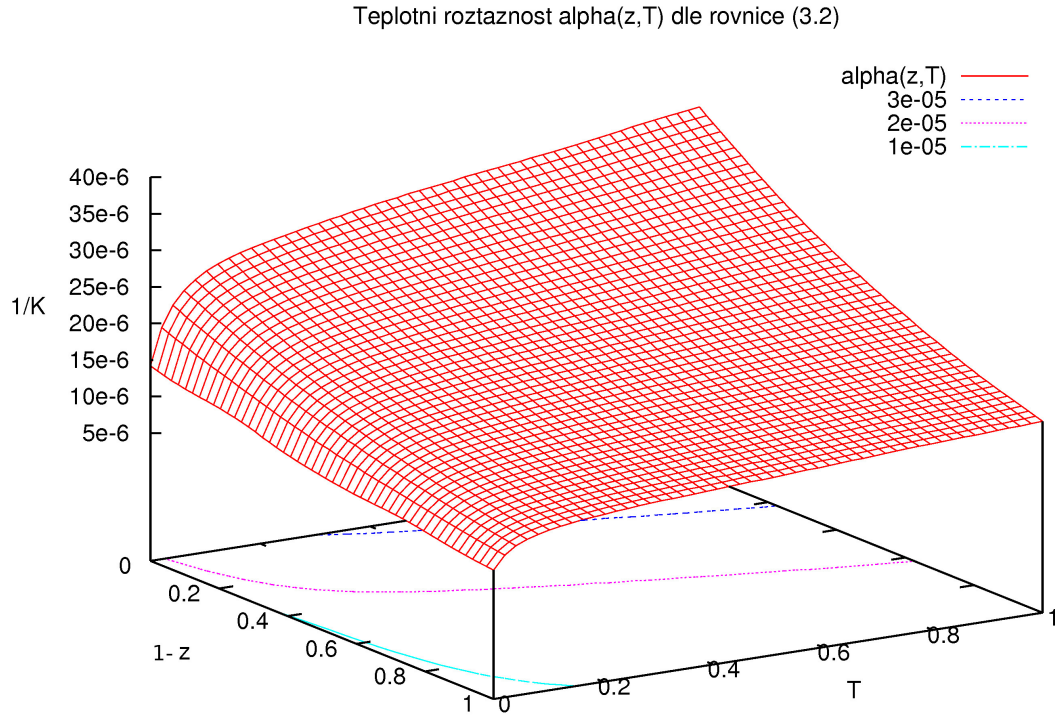
$$\alpha(z, T) = \left(b_0 + b_1(T \cdot T_k + T_b) + \frac{b_2}{(T \cdot T_k + T_b)^2} \right) \exp^{-b_3 \cdot (1-z) \cdot z_{konst}} \quad (3.2)$$

kde $T_k = 3700$ K představuje směrnici teploty a $T_b = 300$ K konstantní člen teploty, $z_{konst} = 2.7 \cdot 10^6$ m představuje hloubku pláště a koeficienty $b_0 - b_3$ jsou dány tabulkou 3.2:

$$\begin{aligned} b_0 &= 2.68 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \\ b_1 &= 2.77 \cdot 10^{-9} \\ b_2 &= -1.21 \\ b_3 &= 3.76 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

Tabulka 3.2: Koeficienty pro funkci tepelné roztažnosti

Tato funkce má v bezrozměrné oblasti průběh:



Obrázek 3.25: Funkce teplotní roztažnosti dle rovnice (3.2)

a funkci tepelné vodivosti $\kappa(z, T)$, kde z představuje hloubku ($z = 0$ na CMB) a T teplotu:

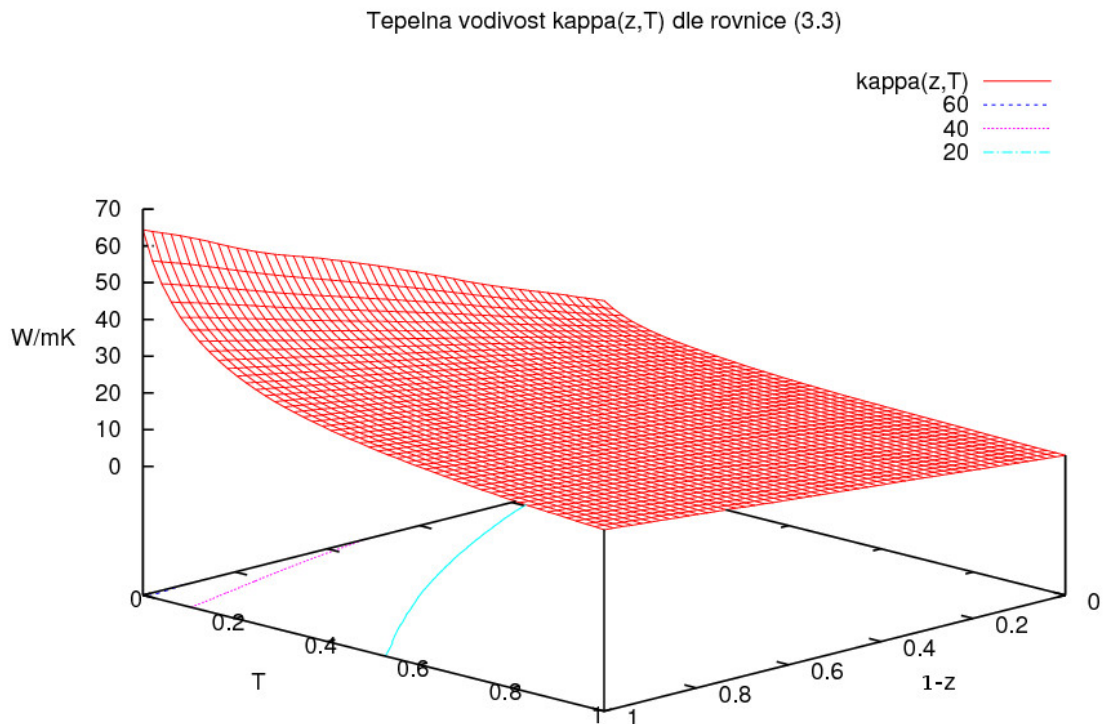
$$\kappa(z, T) = (k_0 + k_1 \cdot (1-z) \cdot z_{konst}) \left(\frac{300}{T \cdot T_k + T_b} \right)^{k_2} \quad (3.3)$$

kde $T_k = 3700 \text{ K}$ představuje směrnici teploty a $T_b = 300 \text{ K}$ konstantní člen teploty, $z_{konst} = 2.7 \cdot 10^6 \text{ m}$ představuje hloubku pláště a koeficienty $k_0 - k_2$ jsou dány tabulkou 3.3:

$$\begin{aligned} k_0 &= 13.6 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \\ k_1 &= 1.88 \cdot 10^{-5} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1} \\ k_2 &= 0.58 \end{aligned}$$

Tabulka 3.3: Koeficienty pro funkci tepelné vodivosti

Tato funkce má v bezrozměrné oblasti průběh:



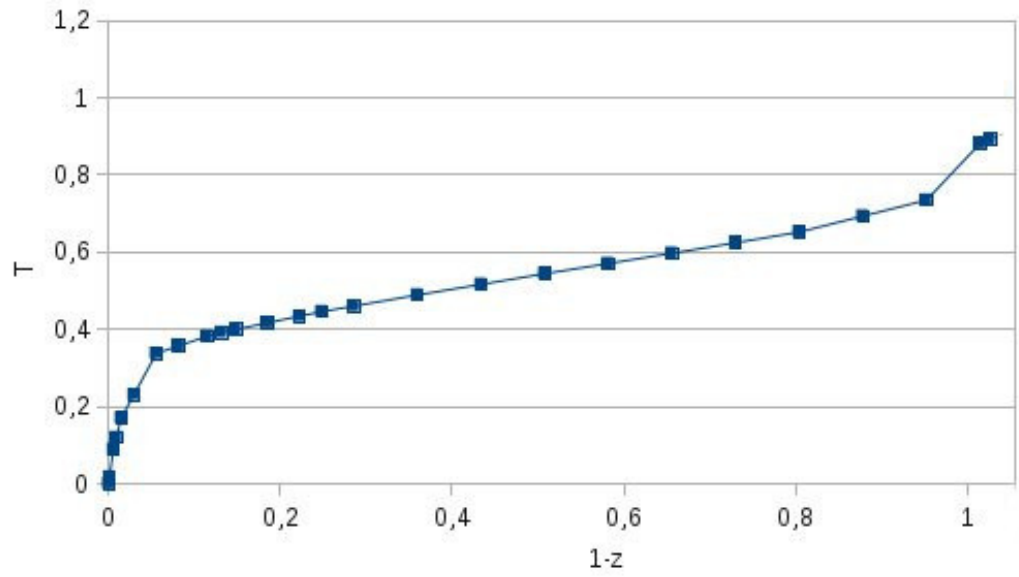
Obrázek 3.26: Funkce tepelné vodivosti dle rovnice (3.3)

Jedná se o funkce adaptované z článku autorů Tosi, Yuen, de Koker a Wentz-covitch (Tosi et al., 2013), adaptované na bezrozměrný model pláště - uvažují zde teplotu na CMB $T_{CMB} = 4000 \text{ K}$ a teplotu na povrchu $T_{povrch} = 300 \text{ K}$.

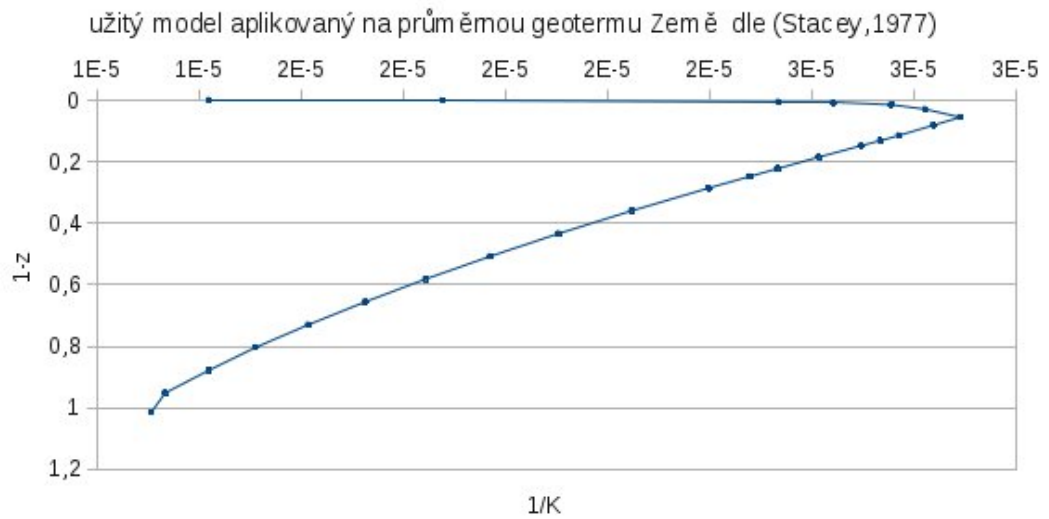
Tyto funkce byly adaptovány na geotermu Země dle publikace ve (Stacey, 1977). Průběh těchto funkcí viz obrázek č. 3.27.

Dané funkce byly použity v modelech třemi různými způsoby - byla aplikována pouze funkce tepelné roztažnosti a tepelná vodivost byla ponechána konstantní; poté naopak tepelná roztažnost zůstala konstantní a tepelná vodivost byla funkcí hloubky a teploty a na závěr obě veličiny byly uvažovány jako funkční závislosti teploty a hloubky.

Geoterma Země dle (Stacey, 1977)



Teplotní roztažnost



Tepelná vodivost



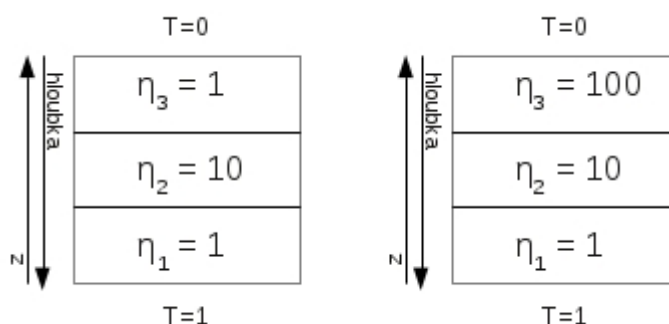
Obrázek 3.27: Funkce teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti dle rovnic (3.2) a (3.3), a to pro model geotermu Země dle (Stacey, 1977).

c) Parametr viskozity

Modely byly ještě rozděleny do skupin dle průběhů viskozit:

- modely s konstantní viskozitou
- modely s třemi stejně vysokými oblastmi viskozity o bezrozměrných hodnotách $\eta_i = (1, 10, 1)$ a $\eta_i = (1, 10, 100)$
- modely se Zemi podobným průběhem viskozity

Definice modelů s vrstevnatou viskozitou (bod 2):



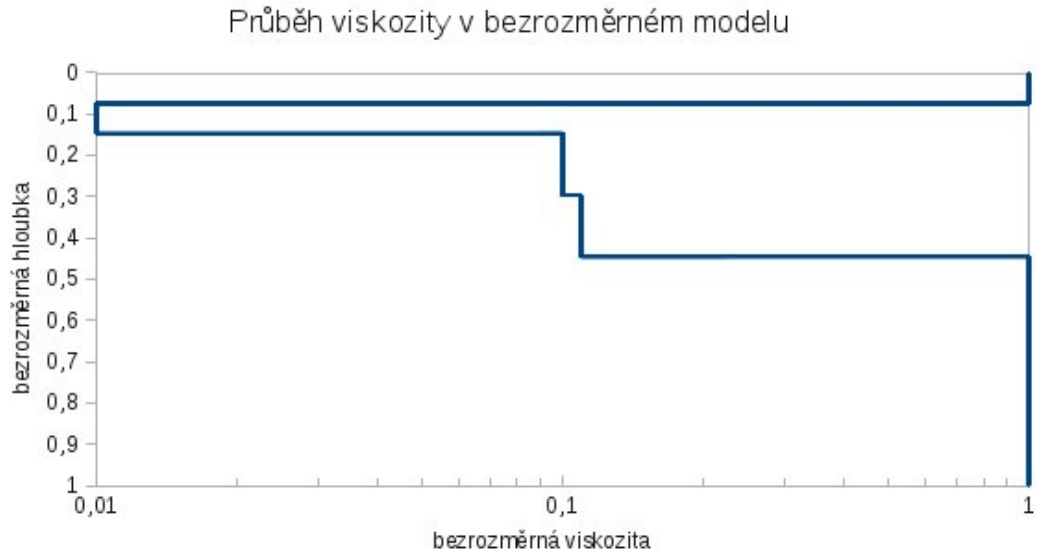
Obrázek 3.28: Funkce po částech konstantní viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ a $\eta_i = (1, 10, 100)$

Definice modelů se Zemi podobným průběhem viskozity (bod 3):

Průběh viskozity pro dané modely byl vybrán jako co nejbližší průběhu viskozity Zemí, mimo jádro. Referenční model se vztahuje k datům uvedených v práci A.M. Forte (Forte, 2007 - Fig. 8, model King and Masters), uvedený užitý model sestával z těchto hodnot (tabulka 3.4 a graf na obrázku 3.29):

hloubka [km]	viskozita [Pa.s] ⁷	bezrozměrná hloubka	bezrozměrná viskozita
0	1,00E+023	0,00	1
200	1,00E+021	7,41E-002	0,01
400	1,00E+022	1,48E-001	0,1
800	1,10E+022	2,96E-001	0,11
1200	1,00E+023	4,44E-001	1

Tabulka 3.4: Průběh viskozity ve zvoleném modelu



Obrázek 3.29: Funkce po částech konstantní viskozity užitý pro simulace

Tento typ průběhu vrstevnaté viskozity je numericky náročnější vzhledem k relativně tenkým vrstvám rozdílných viskozit, což implikuje nutnost použití hustších sítí; navíc se jedná o oblasti se sníženou viskozitou. Takové oblasti by mohly usnadnit přechod z jednotlivých režimů do režimů vyšších, rychleji by mohlo být dosahováno chaotického stavu. Navíc jednotlivé vrstvy mohou vykazovat rozdílná chování, materiál v jejich blízkosti může měnit směr a typ proudění.

Shrneme-li výše uvedené, modelovány byly oblasti ve 2D a 3D, s konstantními, nebo hloubkově a teplotně závislými parametry α a κ a s konstantní, rovnoměrně, nebo Zemi podobnou vrstevnatou viskozitou. Výpočty byly opakovány a stanovování kritických Rayleighových čísel probíhalo na základě popisu představeného v této kapitole.

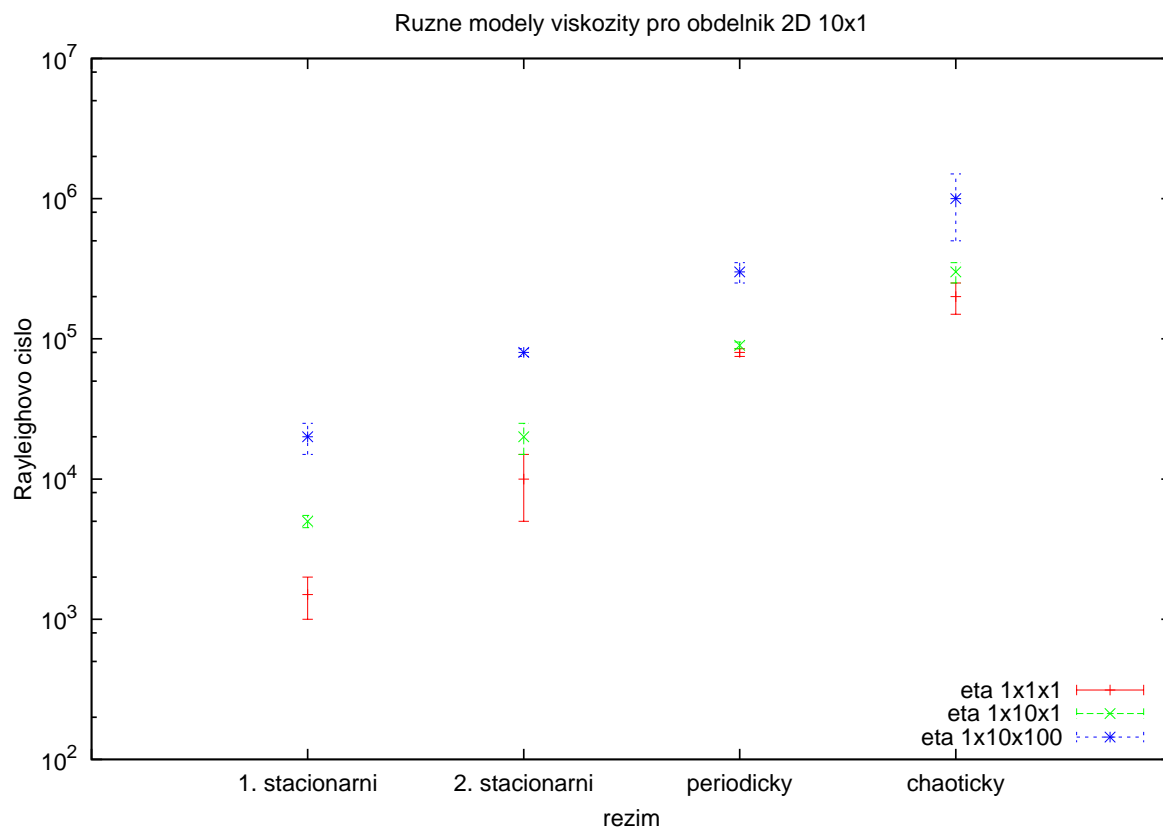
Rayleighova čísla, pro něž byly modely počítány, sledovala lineární posloupnost $(10^3, 9 \cdot 10^3)$ s krokem 10^3 , $(10^4, 9 \cdot 10^4)$ s krokem 10^4 , $(10^5, 9 \cdot 10^5)$ s krokem 10^5 a dále čísla 10^6 , $3 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^6$ a 10^7 .

4. Výsledky

Na základě výpočtů provedených v modelu představeném v předchozích kapitolách byla postupem popsáním výše stanovena kritická Rayleighova čísla pro modely geometrií 2D pravoúhelníků o poměrech stran 1x1 až 10x1 a 3D oblastí o poměrech stran 1x1x1 až 5x5x1. Celkový přehled všech stanovených kritických Rayleighových čísel je uveden v příloze práce č. A - G.

4.1 Vliv modelů vrstevnaté viskozity

Největší vliv na hodnotu kritických Rayleighových čísel má podle provedených výpočtů model vrstevnaté viskozity. Vliv modelů viskozity na rozdíl kritických Rayleighových čísel byl více než řádový. Typická závislost kritických Rayleighových čísel na modelu vrstevnaté viskozity vykazuje nárůst kritických Rayleighových čísel s růstem kontrastu viskozity.



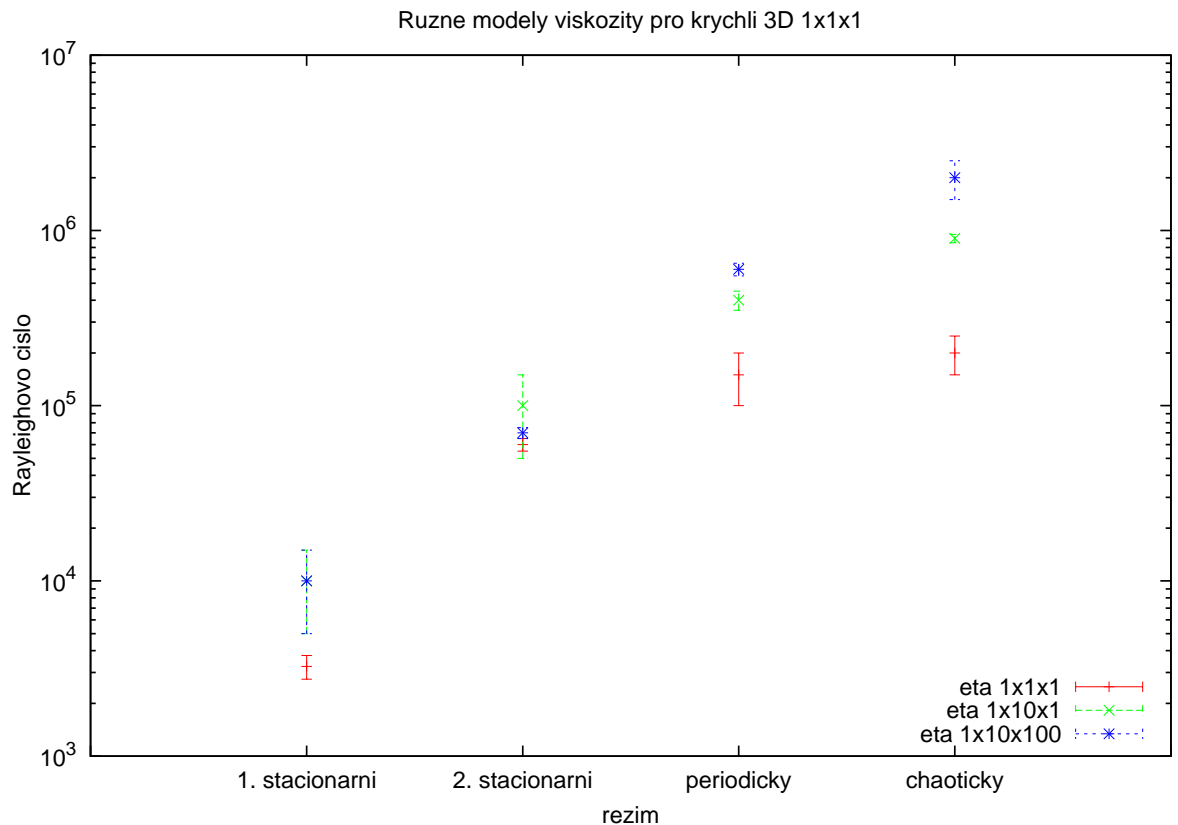
Obrázek 4.1: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrii 10x1 s konstantní viskozitou.

Na příkladu s 2D geometrií obdélníku 10x1 (obrázek č. 4.1) je patrné, že největší rozdíl model viskozity způsobuje u prvního kritického Rayleighova čísla, rozdíl kritických Rayleighových čísel přechodů mezi dalšími stavy se pak postupně snižuje. Toto chování odpovídá fyzikální představě o vlivu viskozity na konvekci systému. Jestliže je viskozita nízká, systém přechází do jednotlivých

režimů snáze (v absolutní hodnotě nižší Rayleighova čísla). Je-li však velmi vysoká, systém se přibližuje spíše k pevnému tělesu, v němž se teplo přenáší nejvíce kondukcí.

Pokud však systém přesáhl první kritické Rayleighovo číslo a konvektuje, může vliv viskozity na kritická Rayleighova čísla slábnout, zvláště pak, je-li ložisko zvýšené viskozity jen lokální (jako v případě viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$). Přechod do chaotického režimu je tak spojen zpravidla s menším rozdílem kritických Rayleighových čísel jednotlivých režimů viskozity, než jaký vzniká mezi kritickými čísly pro přechod z kondukčního do konvekčního režimu. Tento jev se zakládá na dostatečné energii systému (vysoké Rayleighovo číslo může být dosaženo např. snížením vertikálního rozměru oblasti, zvýšením teplotního rozdílu povrchů apod.), a tedy malém vlivu viskozity na systém.

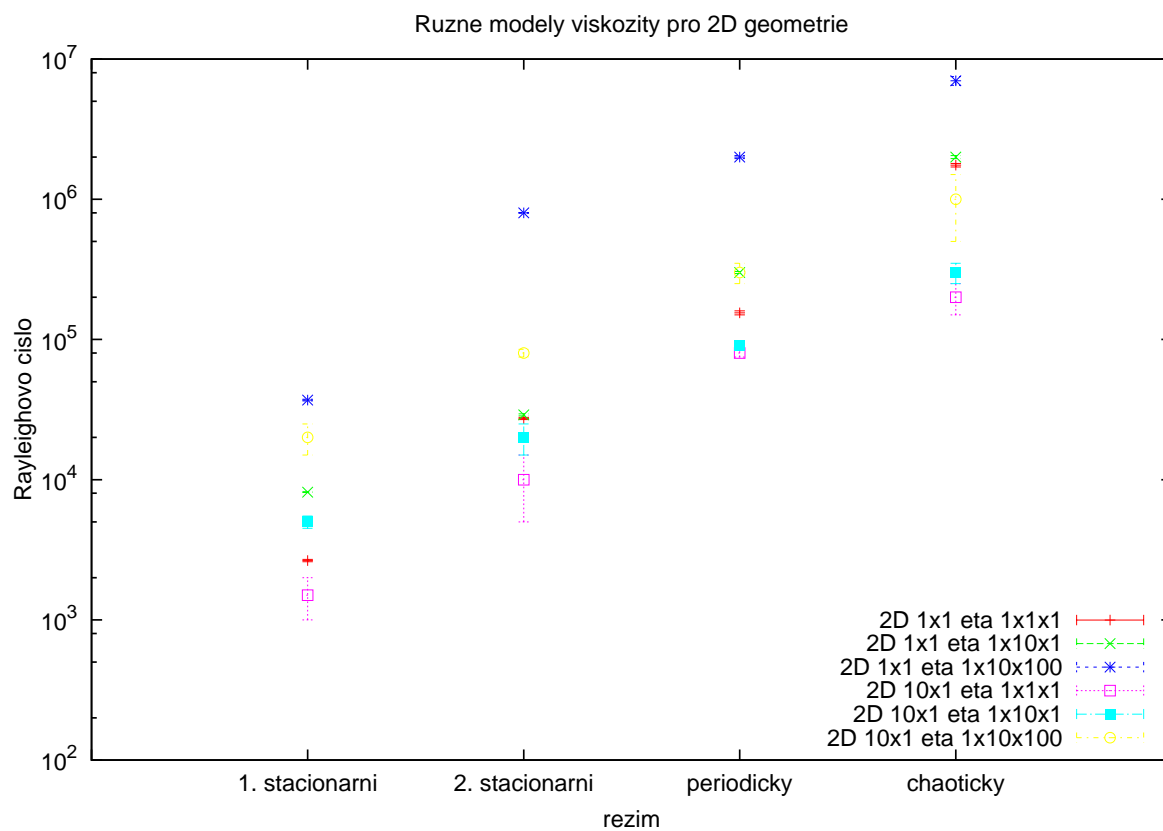
V případě malých horizontálních rozměrů se však ještě silně projevuje okrajová podmínka, která má tendenci systém stabilizovat v daném režimu. Kvůli tomu hodnoty kritických Rayleighových čísel mohou vzrůst. Proto také pozorujeme kritická Rayleighova čísla v modelech 1x1 a 1x1x1 pro konstantní a vrstevnatou viskozitu typu $\eta_i = (1, 10, 1)$ vyšší než pro viskozitu typu $\eta_i = (1, 10, 100)$ (příklad na obrázku č. 4.2). Toto spíše není efekt modelu viskozity.



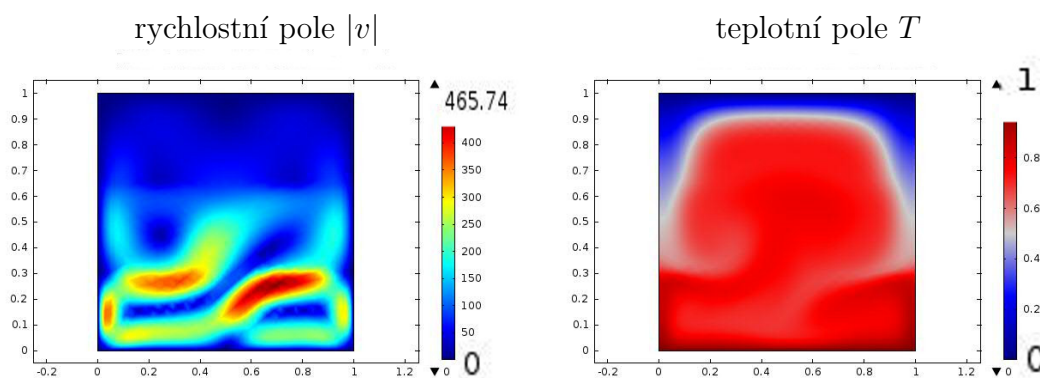
Obrázek 4.2: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 3D geometrii 1x1x1 s konstantní viskozitou.

Oba efekty - vliv viskozity na kritická Rayleighova čísla a také vliv okrajové podmínky - pak můžeme souhrnně pozorovat na snímku č. 4.3. Na závěr pak uvádím příklad rychlostního a tepelného pole a časový průběh Nusseltova čísla pro geometrii 1x1 s průběhem viskozity $\eta_i = (1, 10, 100)$, a to pro Rayleighovo

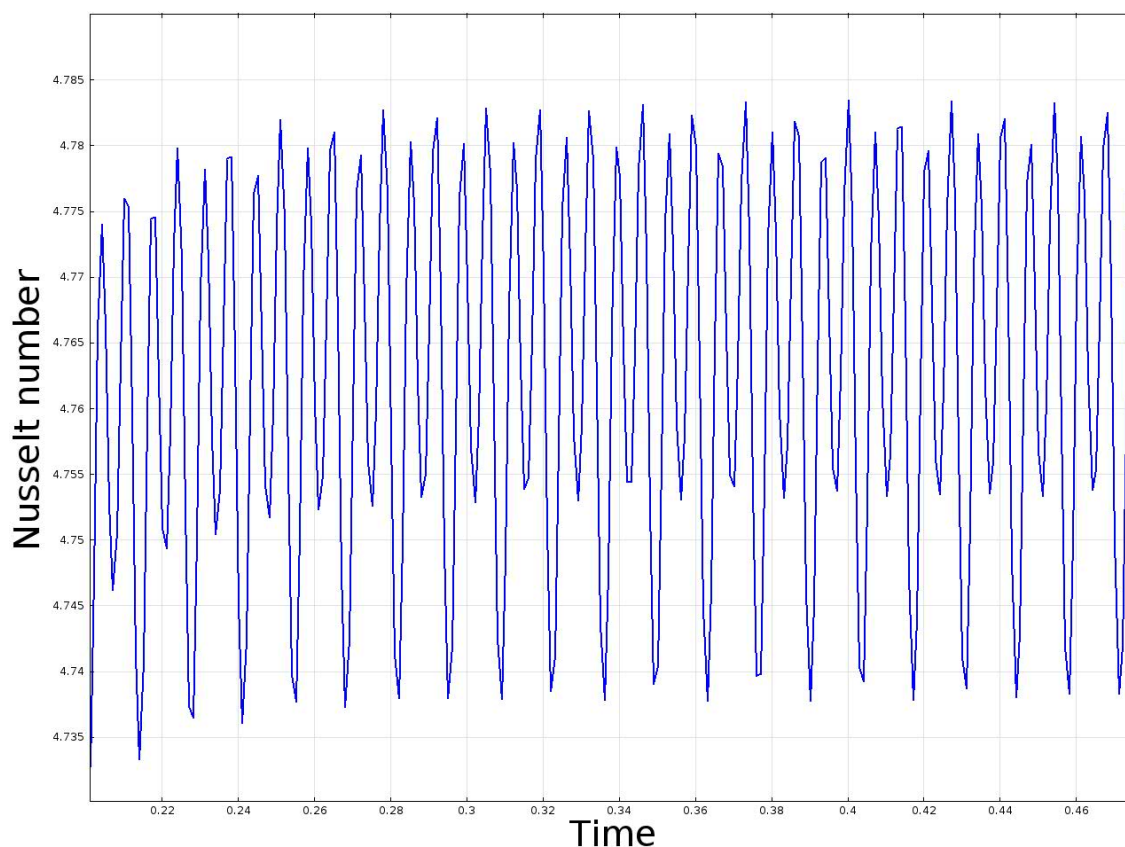
číslo $Ra = 5 \cdot 10^6$, jedná se tedy o systém v periodickém režimu (snímky 4.4 a 4.5).



Obrázek 4.3: Srovnání kritických Rayleighových číslech pro 2D geometrie s vrstevnatými modely viskozity.



Obrázek 4.4: Rychlostní a teplotní pole v bezrozměrných jednotkách v modelovém čtverci 1x1 s průběhem viskozity $\eta_i = (1, 10, 100)$, Rayleighovo číslo je $Ra = 5 \cdot 10^6$.



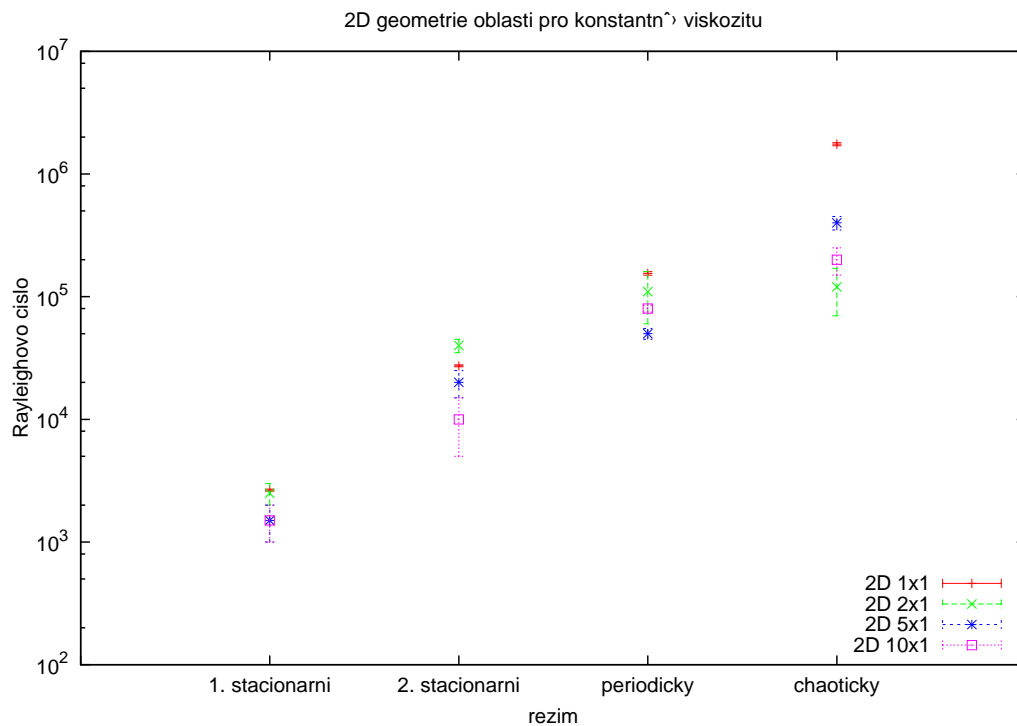
Obrázek 4.5: Nusseltovo číslo pro model čtverce 1x1 s průběhem viskozity $\eta_i = (1, 10, 100)$ (obr. 4.4), Rayleighovo číslo je $Ra = 5 \cdot 10^6$.

4.2 Vliv geometrie systému

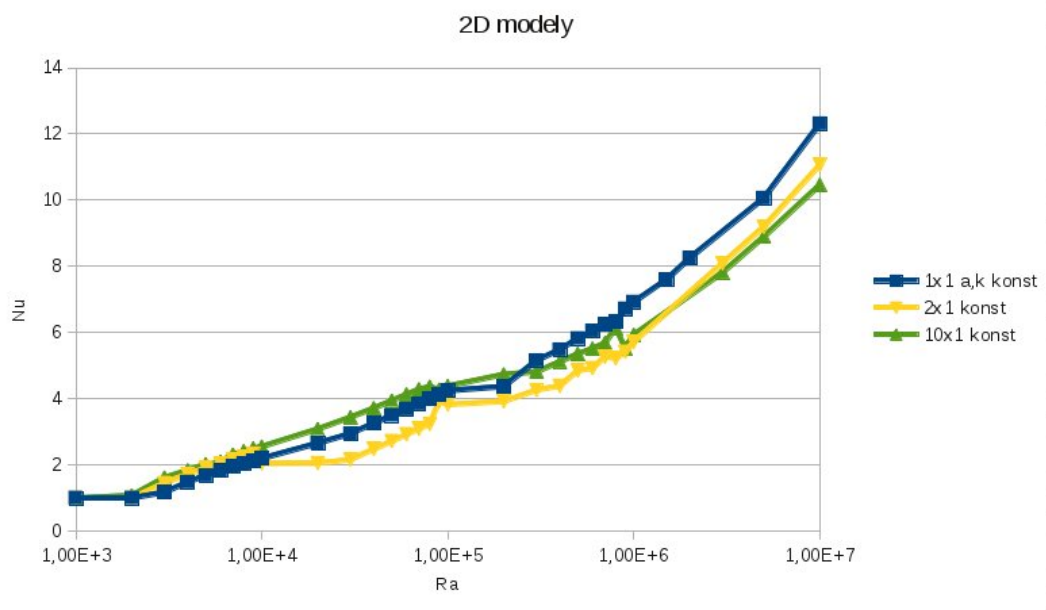
Též geometrie ovlivňuje kritická Rayleighova čísla významným způsobem. Na rozdíl od vlivu viskozity však rozdíl mezi kritickými čísly jednotlivých geometrií obvykle narůstá s vyššími režimy jen mírně (kritická Rayleighova čísla se u chaotického režimu liší více než u režimu stacionárního) a křivky sledují stejný směr. Větší, horizontálně rozsáhlejší oblasti jako 2D 5x1 či 10x1 či 3D 5x5x1 dosahovaly zpravidla vyšších režimů dříve, pro nižší Rayleighova čísla. To vyplývá z fyzikální představy větší volnosti větších systémů. Zajímavé je kritické Rayleighovo číslo přechodu do chaotického režimu pro geometrii 2x1, které systematicky narušuje výše popsany princip - v opozici k představě, že se vzrůstající horizontální rozsáhlostí klesají kritická Rayleighova čísla (snímky č. 4.6, 4.10 a další). Důvod, proč právě u této geometrie pozorujeme výrazný pokles kritického Rayleighova čísla pro přechod do chaotického režimu si vysvětlují jako efekt spojený se vznikem jedné celé konvekční buňky, která se již do této geometrie vejde. Jak je patrné ze srovnání závislosti Nusseltových na Rayleighových číslech (obrázek č. 4.7), závislost pro geometrii 2x1 se drží v oblasti minima ze všech vyobrazených geometrií, a totéž platí i pro srovnání závislosti Nusseltových čísel na číslech Rayleighových.

Je třeba stále uvažovat i vliv okrajové podmínky zvláště u malých geometrií

(1x1 a 1x1x1), které zvláště pak pro chaotický režim přispívají k nárůstu kritického Rayleighova čísla (snímek č. 4.6). Zde pozorujeme velmi obdobný rozptyl kritických Rayleighových čísel, který je narušen pouze geometrií 1x1 v chaotickém režimu.

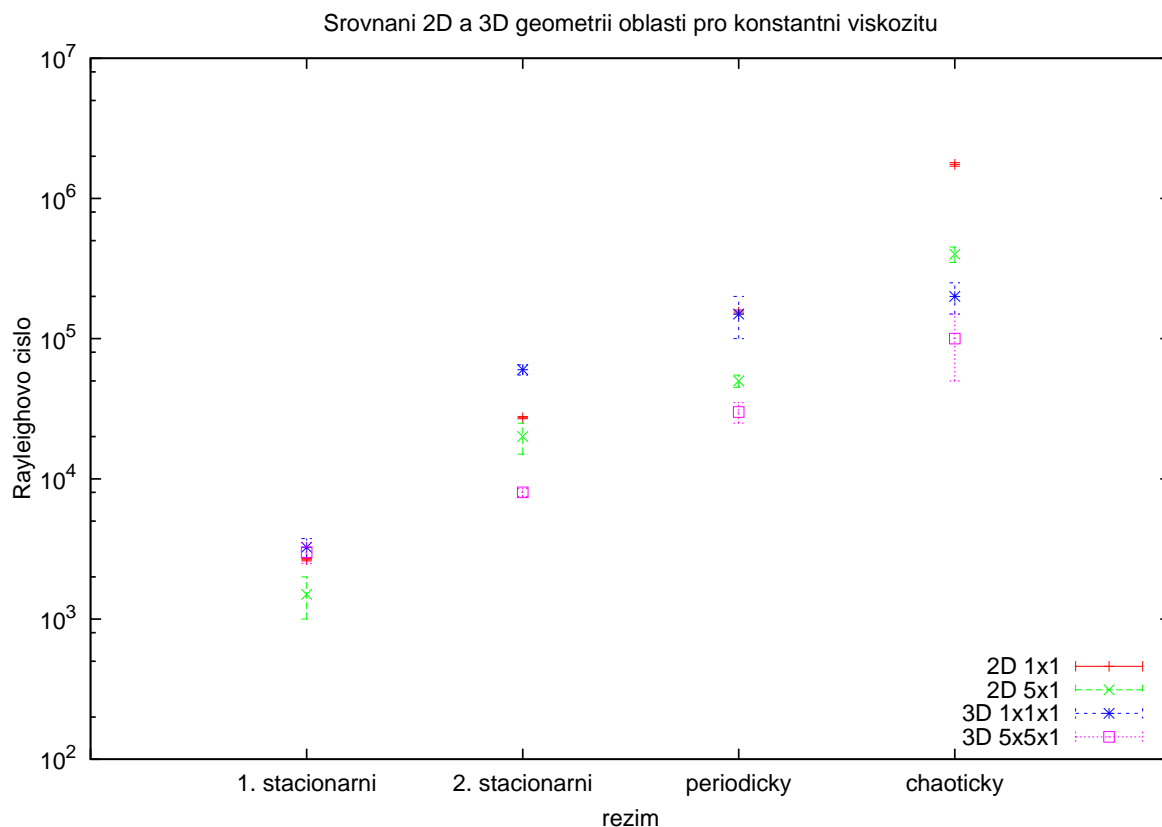


Obrázek 4.6: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrie s konstantní viskozitou.



Obrázek 4.7: Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číselch pro 2D geometrie s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ a s konstantní viskozitou

Důležitou roli hraje také dimenze systému. Vyšší dimenze systému znamená snížení kritických Rayleighových čísel, který logicky plyne z více stupňů volnosti systému. Efektem, který tento jev kompenzuje na obrázku č. 4.8, je znovu vliv okrajové podmínky. Avšak zcela v souladu s očekáváním má nejnižší kritické Rayleighovo číslo pro přechod do chaotického stavu geometrie 2D 5x1 a 3D geometrie 5x5x1.



Obrázek 4.8: Srovnání kritických Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi s konstantní viskozitou.

Přesto zvláště ve střední oblasti pozorujeme pokles kritických Rayleighových čísel se vzrůstem dimenze. Více patrný je tento jev, porovnáme-li i různé modely viskozity.

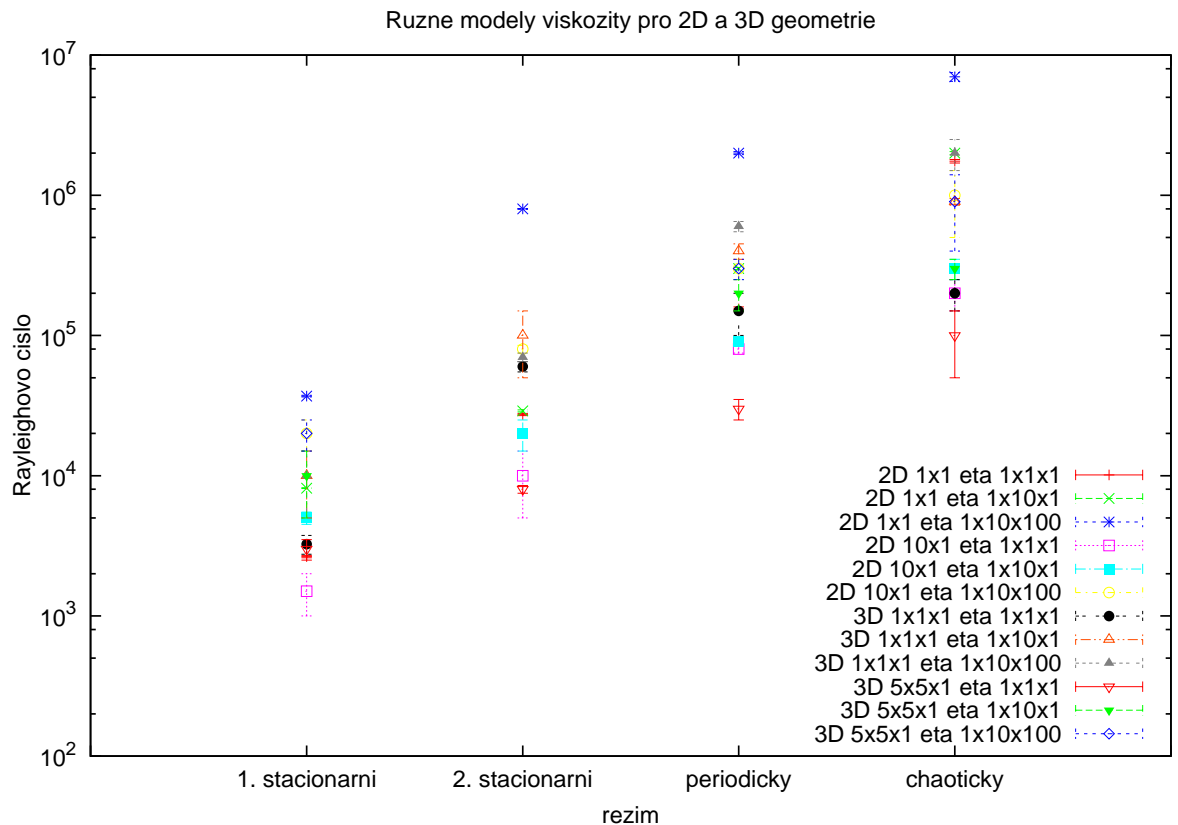
4.3 Vliv geometrie systému i modelu viskozity

Geometrický vliv na rozptyl kritických Rayleighových čísel je dále různý dle vlivu modelu viskozity. Jak bylo ukázáno výše, v případě modelů s konstantní viskozitou jsou rozdíly kritického Rayleighova čísla malé (poměr v řádu jednotek). Pro modely s vyšší viskozitou byl již tento rozdíl i řádový, vzrůstající s kontrastem viskozity (obr. č. 4.10, 4.11). Model zvýšené viskozity zesiluje také vliv hraniční podmínky.

Porovnáme-li modely se stejným průběhem viskozity, ale s různou dimenzí, zjistíme, že se vzrůstem dimenze vzrostl i rozptyl hodnot jednotlivých kritických Rayleighových čísel daných modelů. Zvláště rozptyl u kritického Rayleighova

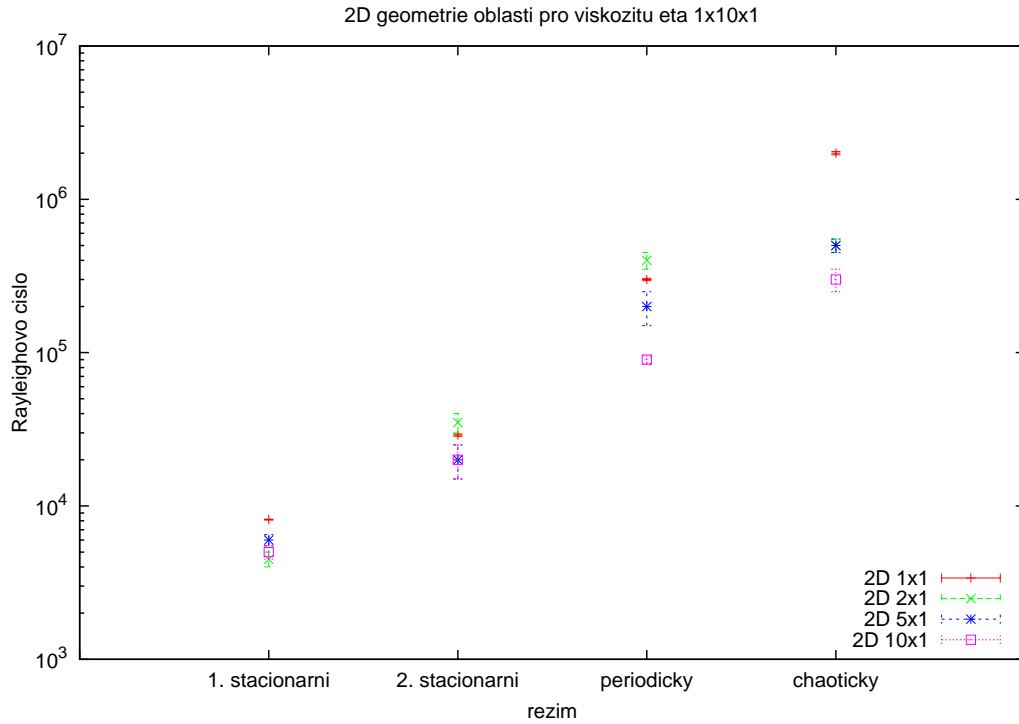
čísla pro přechod do 1. a 2. stacionárního stavu sledujeme větší rozdíly mezi jednotlivými geometriemi, ve vyšších konvekčních stavech již dimenze přílišnou rozdílnost nezpůsobuje. Samozřejmě i zde sledujeme vliv hraniční podmínky, která ovlivňuje 3D modely intenzivněji (větší podíl obsahu/obvodu hranice vůči celkovému objemu/obsahu).

Srovnáme grafy na obr. 4.8 a 4.9. Vliv dimenze na grafu obr. č. 4.8 se projevuje snížením kritických Rayleighových čísel, což je kompenzováno vlivem hraniční podmínky, která systém ve vyšších režimech spíše stabilizuje. Změníme-li ještě model viskozity z konstantního průběhu na průběh se zvýšenou viskozitou, jsou tím ovlivněna i kritická Rayleighova čísla pro stacionární režimy a tím se rozptýlí hodnoty rozdělí podél stejnoměrně širokého pásu. Hodnoty se neshlíhají u přechodů do nižších stavů, jak tomu bylo u modelu s konstantní viskozitou, navíc zvýšená viskozita navyšuje i absolutní hodnoty kritických Rayleighových čísel, což znamená, že s nárůstem kontrastu viskozit je tento pás hodnot Rayleighových čísel i širší.

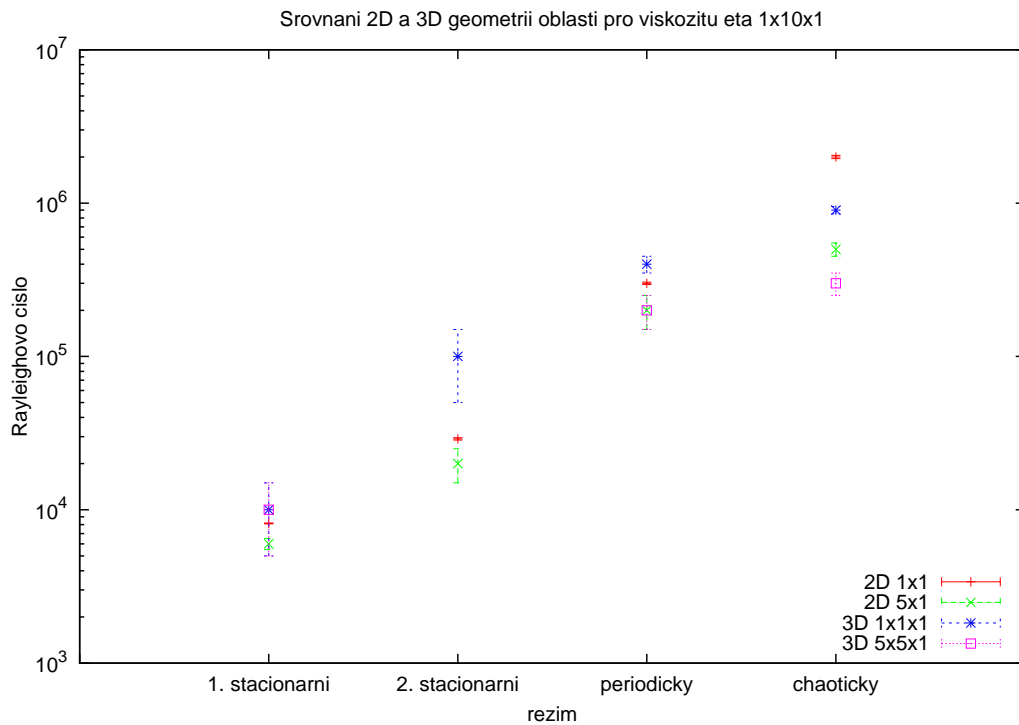


Obrázek 4.9: Srovnání kritických Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi s různými modely viskozity.

Na příkladu modelu viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ (obr. č. 4.10 a 4.11) je pak ještě tento celkový jev rozdělen dle dimenzí. Proto vidíme, že jednotlivá kritická Rayleighova čísla se pro 2D geometrii ještě žádný pás hodnot netvoří a rozptýlí se spíše u vyšších režimů (periodický, chaotický). Teprve přidáním dimenze se i absolutní hodnoty kritických Rayleighových čísel změní, čímž výše uvedený pás vzniká.



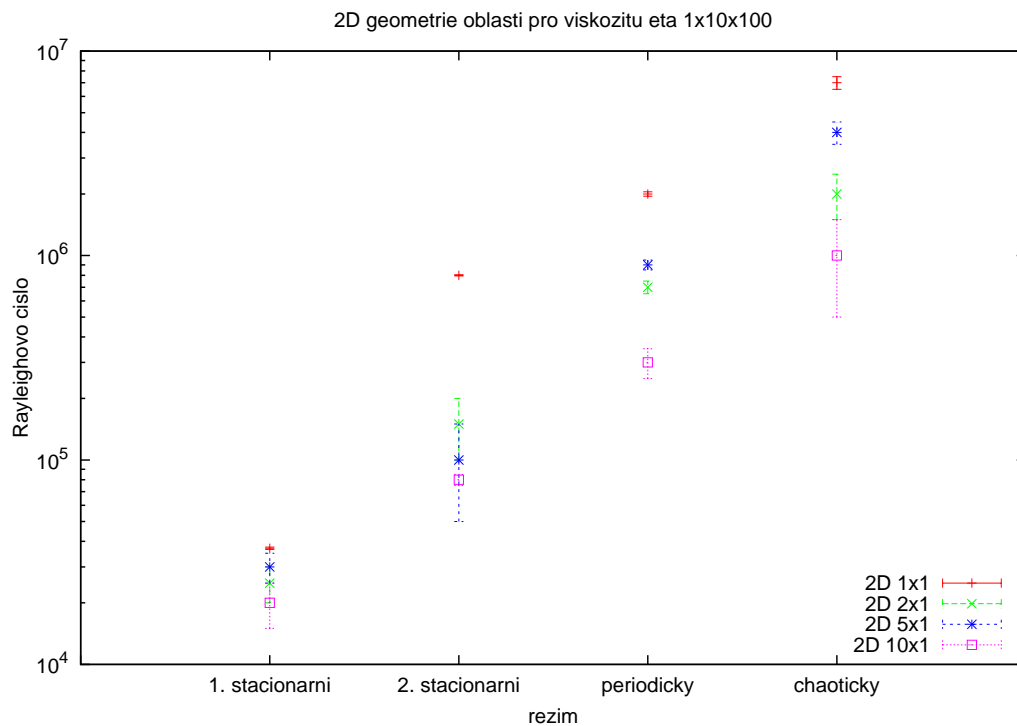
Obrázek 4.10: Srovnání kritických Rayleighových číslech pro 2D geometrie s viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$.



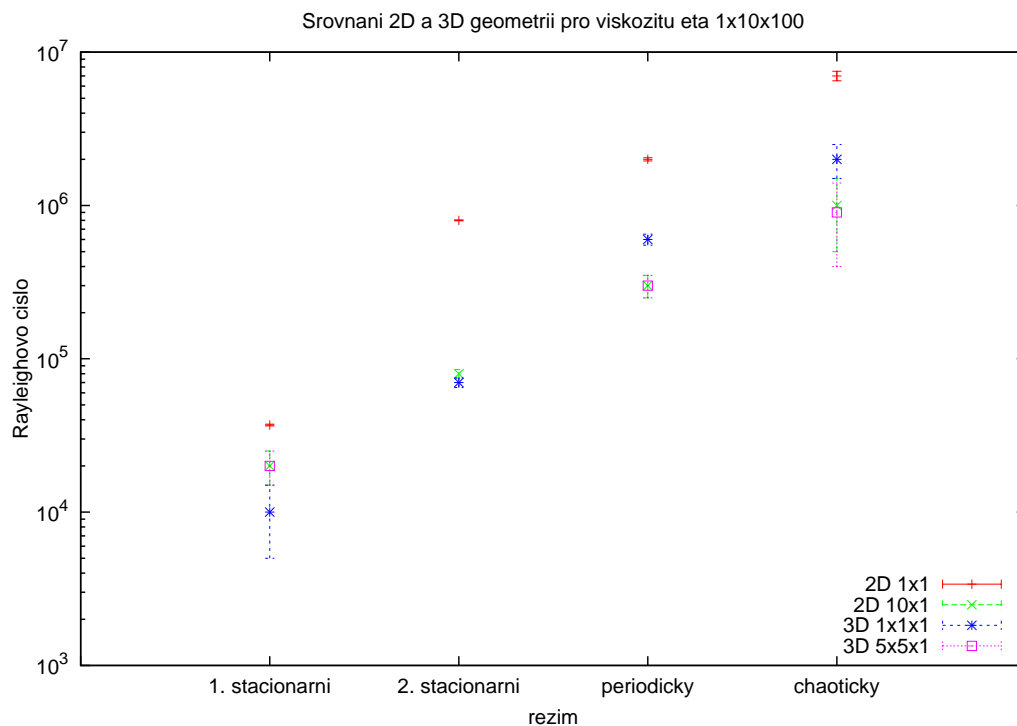
Obrázek 4.11: Srovnání kritických Rayleighových číslech mezi 2D a 3D geometriemi s viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$.

Podobně pak u modelu viskozity $\eta_i = (1, 10, 100)$ (snímek č. 4.12 4.13),

kde jsou jen rozdíly mezi jednotlivými kritickými Rayleighovými čísly pro daný přechod ještě výraznější. Toto je efekt viskozity, který byl diskutován výše.



Obrázek 4.12: Srovnání kritických Rayleighových číslech pro 2D geometrie s viskozitou $\eta_i = (1, 10, 100)$.



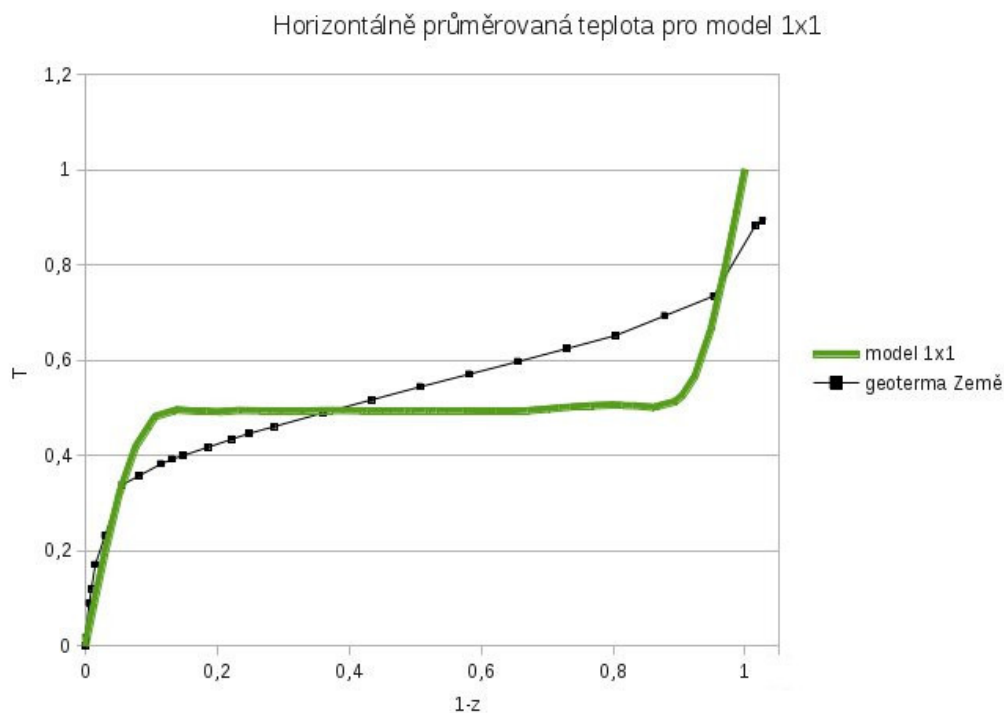
Obrázek 4.13: Srovnání kritických Rayleighových číslech mezi 2D a 3D geometriemi s viskozitou $\eta_i = (1, 10, 100)$.

4.4 Vliv funkční závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti

V modelech s funkčně závislou teplotní roztažností a tepelnou vodivostí byly aplikovány funkce dle rovnic (3.2) a (3.3) v předchozí kapitole. Uvádím příklad průběhu těchto funkcí v počítaných modelech.

Jak vyplývá ze vztahů (1.1), (1.2) pro teplotní roztažnost a tepelnou vodivost užívanou v modelu, doplněné vztahy (3.2), (3.3), hodnoty teplotní roztažnosti jsou v modelu vždy větší jedné, zatímco hodnoty tepelné vodivosti vždy menší než jedna, což při tomto škálování vede k poklesu kritických Rayleighových čísel, neboť zvýšení teplotní roztažnosti a snížení tepelné vodivosti snižuje stabilitu konvekce. Tento obecný vliv je však doprovázen dalšími efekty, jež mohou vést k opačnému jevu. Ve výsledku hodnoty kritického Rayleighova čísla dle geometrie a viskozity systému pro vyšší režimy, zvláště pak pro chaotický, naopak vzrůstají.

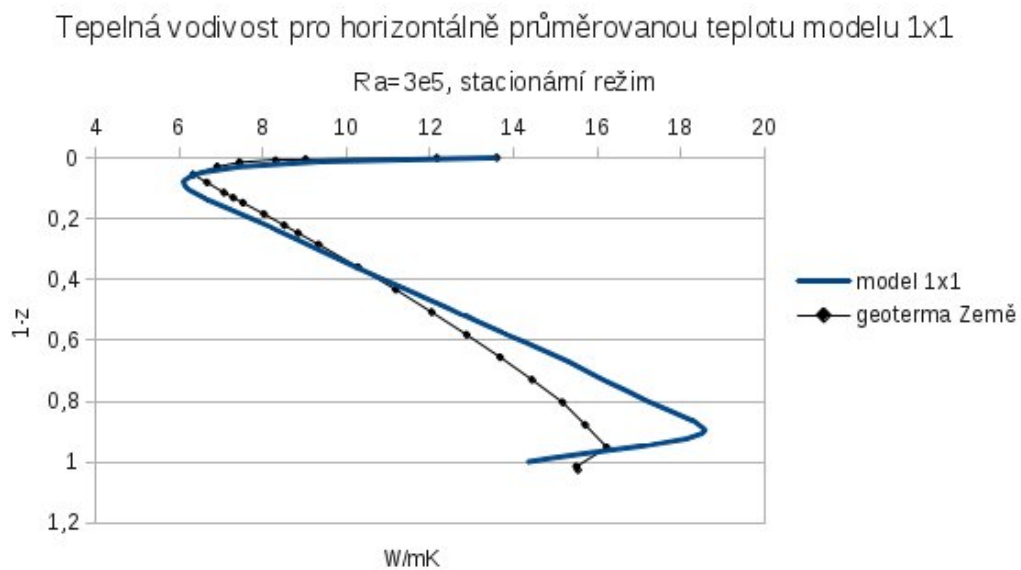
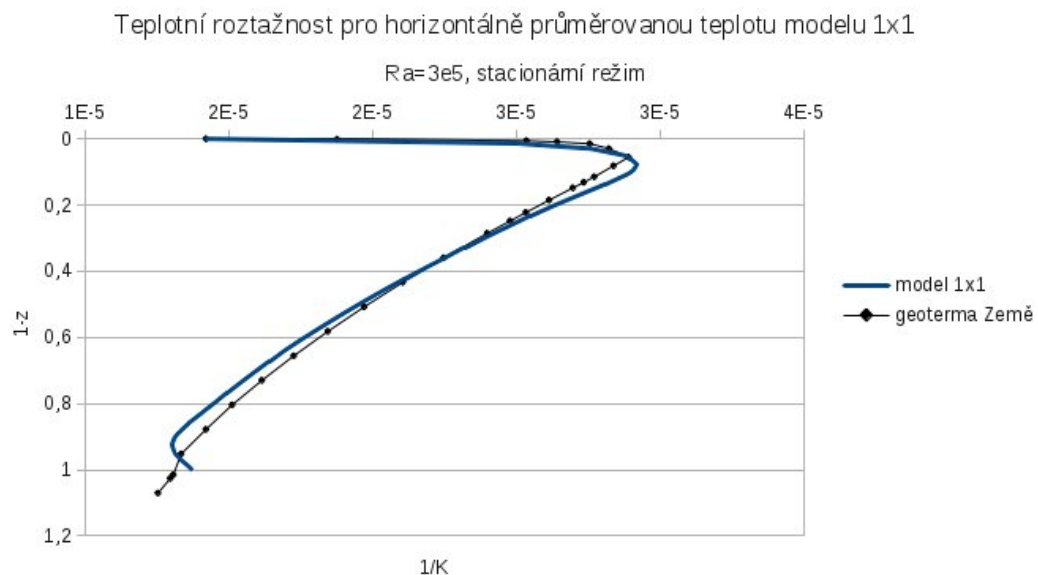
Jako příklad je uveden jednoduchý model 2D 1x1 čtverce s konstantní viskozitou ve stacionárním režimu. Jeho Rayleighovo číslo bylo $Ra = 3 \cdot 10^5$. Na obrázku 4.14 je uveden graf závislosti horizontálně průměrované teploty v modelu na hloubce. Pro tento průběh teploty je uveden průběh teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti (obr. č. 4.15) v závislosti na hloubce v daném modelu čtverce.



Obrázek 4.14: Horizontálně průměrovaná teplota v buňce 1x1 pro model s konstantní viskozitou funkčně závislou teplotní roztažností a tepelnou vodivostí (zeleně) v porovnání s geotermou Země dle (Stacey, 1977).

Průběhy funkcí připomínají očekávaný průběh těchto funkcí v Zemi (v grafech vyznačeny černě), rozdíl je samozřejmě patrný vlivem geometrie systému (v porovnání geoterm na obr. 4.14 vidíme, že je rozdíl v teplotních gradientech v blízkosti jádra; kartézský systém má gradienty v blízkosti jádra a povrchu sy-

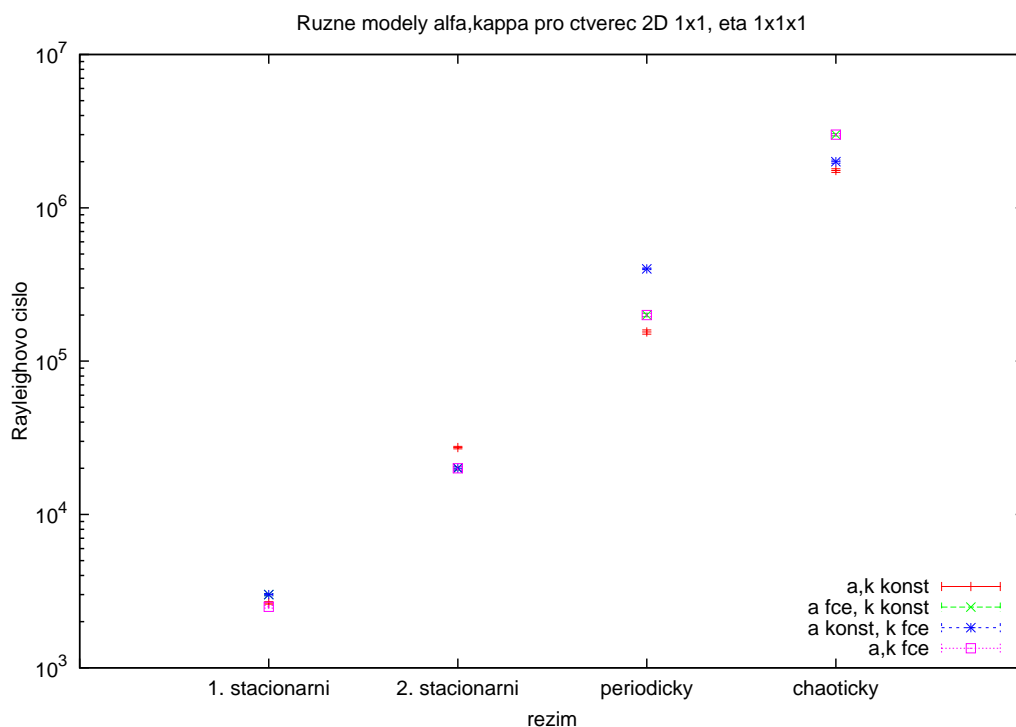
metrické, nikoliv však sférická geometrie - v případě geotermie Země zde však samozřejmě hrají roli ještě další efekty), dále v Zemi předpokládáme adiabatický průběh teploty pláštěm a v případě klasické Boussinesqovy aproximace je teplota ve střední části modelu konstantní, a tak dále. Rozdíl se pak projevuje v funkčních závislostech teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti na hloubce právě v rozdílném sklonu křivky ve střední oblasti (u Země pláště) a v oblasti spodní hranice (u Země blízko CMB).



Obrázek 4.15: Průběh funkce teplotní roztažnosti (nahore) a tepelné vodivosti (dole) v modelu 1x1 s konstantní viskozitou (výpočet na základě horizontálně průměrované teploty dle obr. 4.14). Průběh funkce je porovnán s jejím průběhem na základě geotermie Země dle (Stacey, 1977, obr. 3.27).

Funkční závislost teplotní roztažnosti α a tepelné vodivosti κ se u modelů s konstantní viskozitou projevovala jen mírně. Na modelu čtverce 1x1 sledujeme výraznější vliv funkční závislosti teplotní roztažnosti než tepelné vodivosti - jsou-

li v modelu přítomny oba jevy, výsledná kritická Rayleighova čísla sledují právě výsledky teplotní roztažnosti (snímek č. 4.16). Rozdíly v kritických Rayleighových číslech jednotlivých režimů jsou malé a často leží na hraně intervalu chyby měření. Rozdíl mezi kritickými Rayleighovými čísly se navyšuje pro přechody mezi vyššími režimy (periodický a chaotický režim), v nichž hraje transport materiálu stále výraznější roli, rozdíl narůstá i napříč jednotlivými geometriemi - rozdíl kritických Rayleighových čísel jednotlivých režimů u modelů s větší horizontální rozlehlostí (2D 10x1 či 3D 5x5x1) je větší.

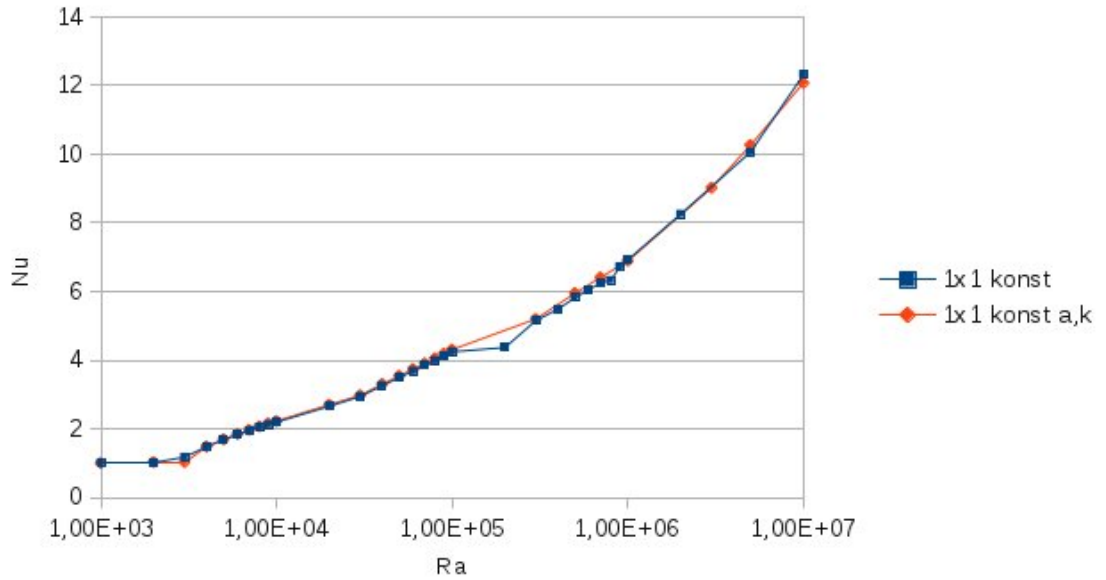


Obrázek 4.16: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrii 1x1 s konstantní viskozitou.

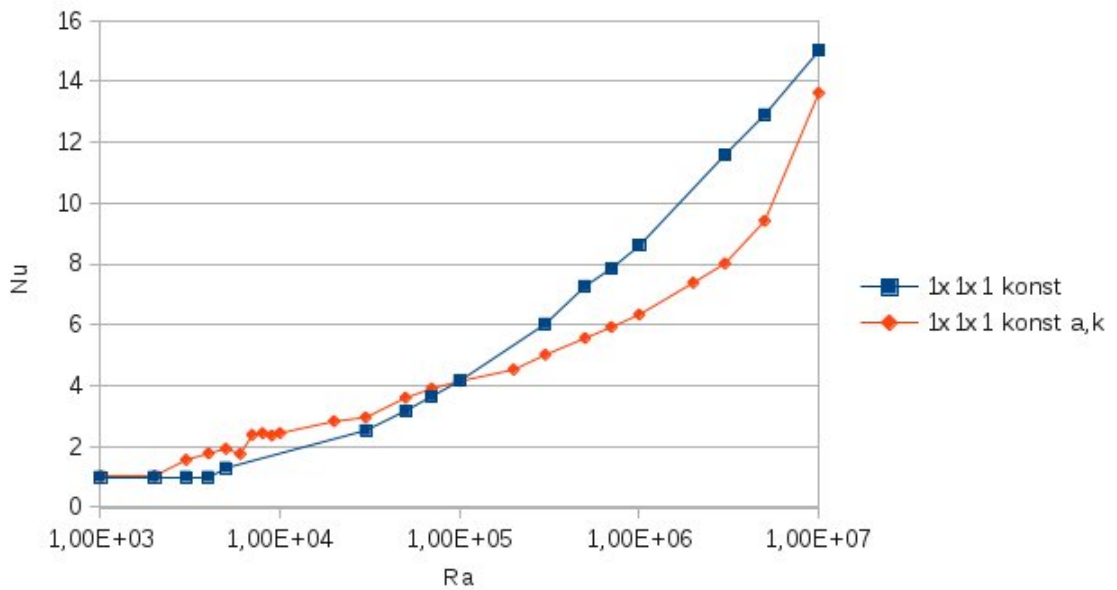
Na snímku č. 4.17 je vyobrazen graf závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 2D čtverec 1x1 s konstantní viskozitou. Je patrné, že zvláště pro nižší Rayleighova čísla se Nusseltova čísla jednotlivých modelů velmi podobají a křivky se mírně rozcházejí teprve pro vyšší Rayleighova čísla, ve vyšších režimech.

Podobně pro model 3D krychle 1x1x1 (obr. č. 4.18). Zde jsou však rozdíly mezi křivkami Nusseltových čísel již značně výraznější (výrazněji se projevuje trend rychlejšího nástupu konvekce z kondukčního stavu, ve vyšších režimech však spíše stabilizace systému), což plyne z větší volnosti systému, a tedy výraznější roli toku materiálu.

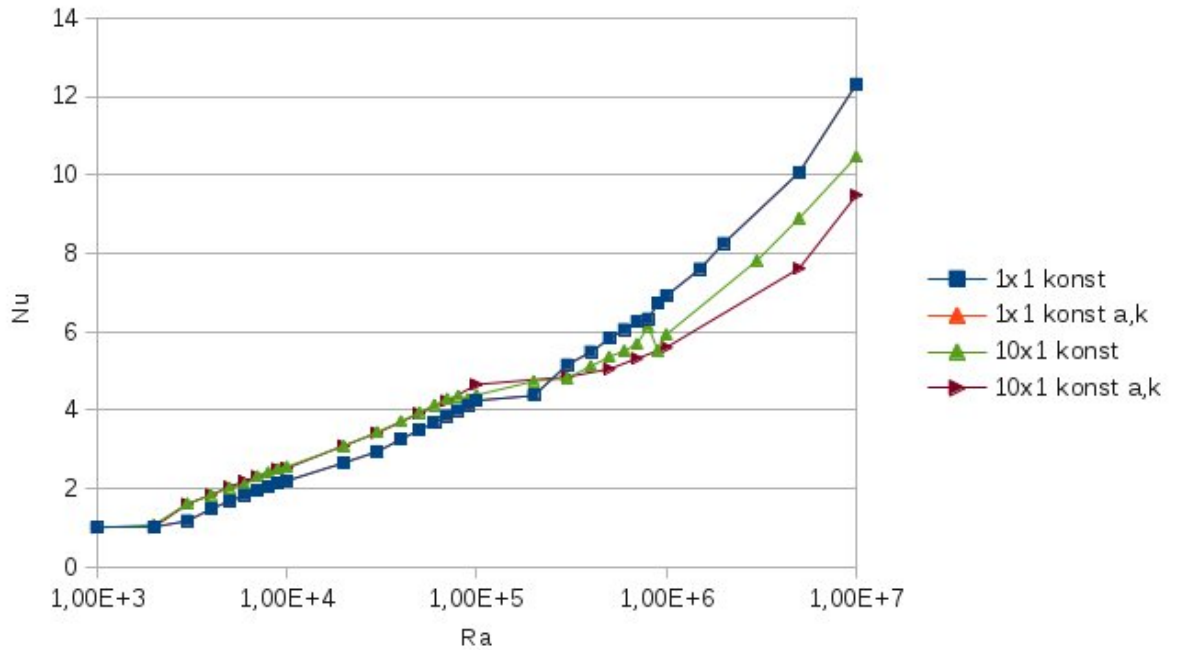
Jak je patrné, s větší volností systému (ať větší horizontální rozlehlostí, či vícedimenzionálností modelu) roste vliv funkční závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti, oba vlivy se vzájemně doplňují a postupně s růstem rozměrů modelů snižují kritická Rayleighova čísla zvláště u vyšších režimů. Je třeba dále zahrnout vliv typu hraniční podmínky, který však zpětně kritická Rayleighova čísla navyšuje, a to zvláště u horizontálně málo rozlehlých modelů.



Obrázek 4.17: Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 2D čtverec 1x1 s konstantní viskozitou s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ (modře) a s funkčně závislými parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$ (červeně)



Obrázek 4.18: Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 3D krychli 1x1x1 konstantní viskozity s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ a s funkčně závislými parametry konstantními parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$



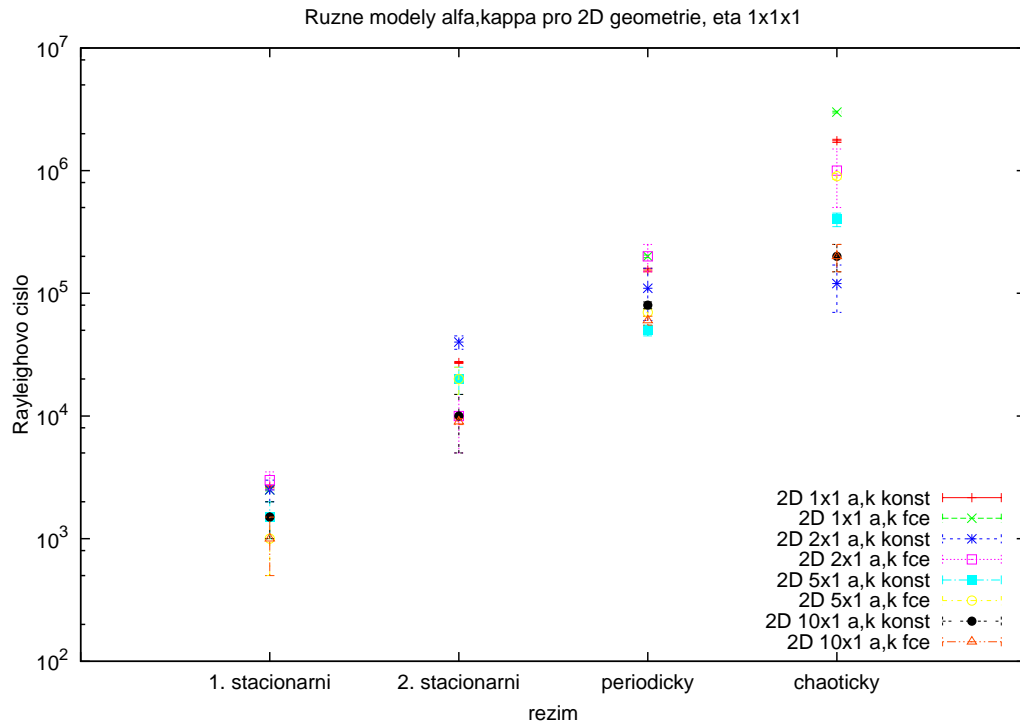
Obrázek 4.19: Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 2D modely 1x1 a 10x1 konstantní viskozity s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ (modrá a zelená) a s funkčně závislými parametry konstantními parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$ (červená a hnědá).

Na snímku č. 4.19 pak sledujeme tři základní efekty:

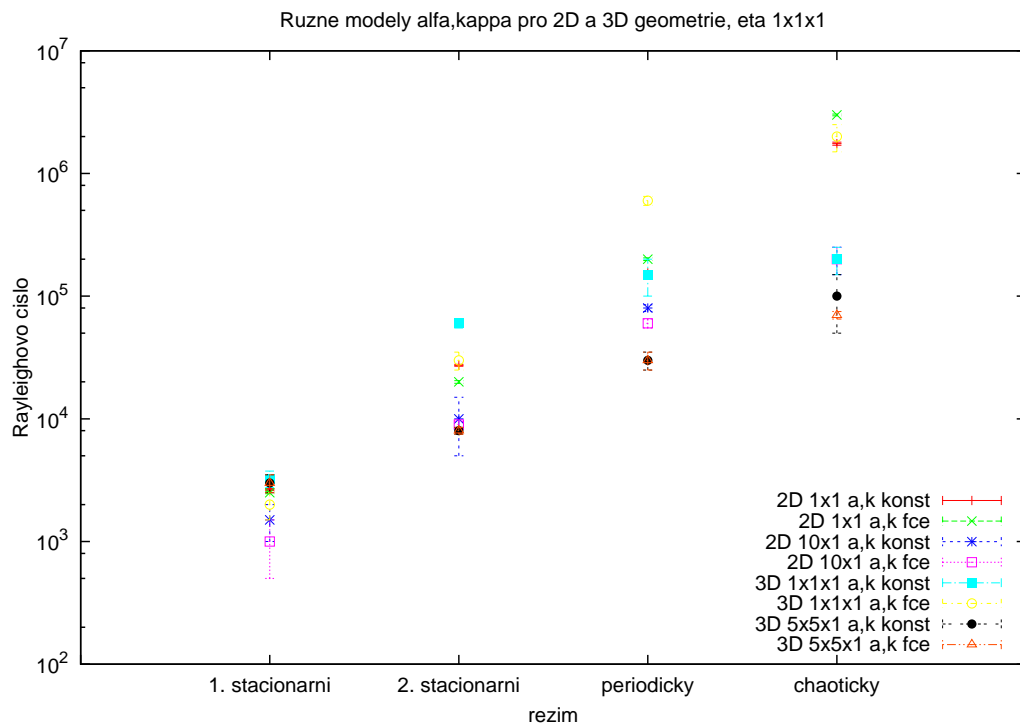
- vliv geometrie (dřívější nástup konvekce)
- vliv funkční závislosti α, κ (pokles Nusseltových čísel zvláště pro vyšší Rayleighova čísla)
- vliv hraniční podmínky (zvýšení kritických přechodů mezi režimy pro malý 1x1 model v oblasti periodického a chaotického režimu)

Porovnáme-li všechny 2D geometrie s konstantní viskozitou (graf na obr. č. 4.20), vidíme na první pohled vliv okrajové podmínky - kritická Rayleighova čísla pro chaotické režimy jsou pro malé modely výrazně vyšší. Vidíme ale i výše popsaný trend, tedy že s větší dimenzí a horizontální rozsáhlostí vliv funkčně závislé teplotní roztažnosti především, doplněný o vliv tepelné roztažnosti, snižují kritická Rayleighova čísla, a to s rostoucím vlivem u vyšších režimů. Podobný trend vidíme i v porovnání 2D a 3D geometrií - na snímku č. 4.21.

Vliv funkčně závislých parametrů teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti je pak patrný i vizuálně na teplotním a rychlostním poli daných modelů. Nejvýraznějším rozdílem je pokles gradientu teplot v oblasti, narůstá objem materiálu s teplotou kolem $\Delta T/2$ (průměrné teploty) a konvekce probíhá výrazněji v horizontálním směru, ubývá oblých tvarů stoupajících či klesajících útvarů.

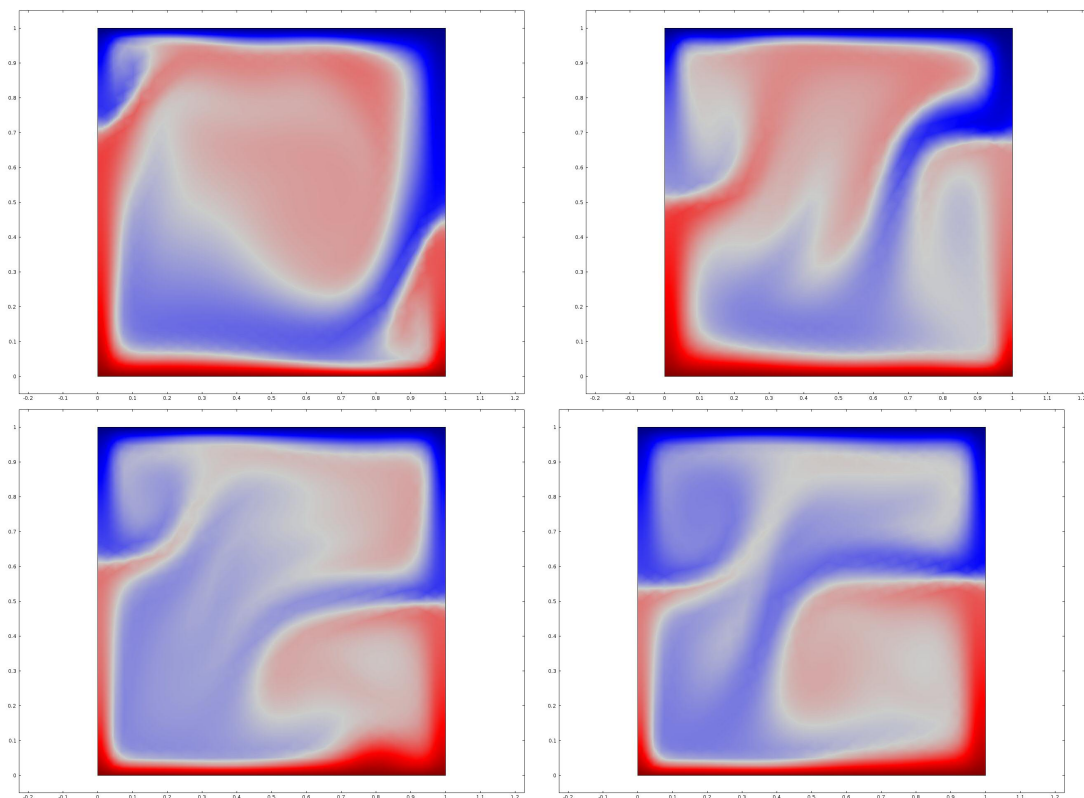


Obrázek 4.20: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrie s konstantní viskozitou.



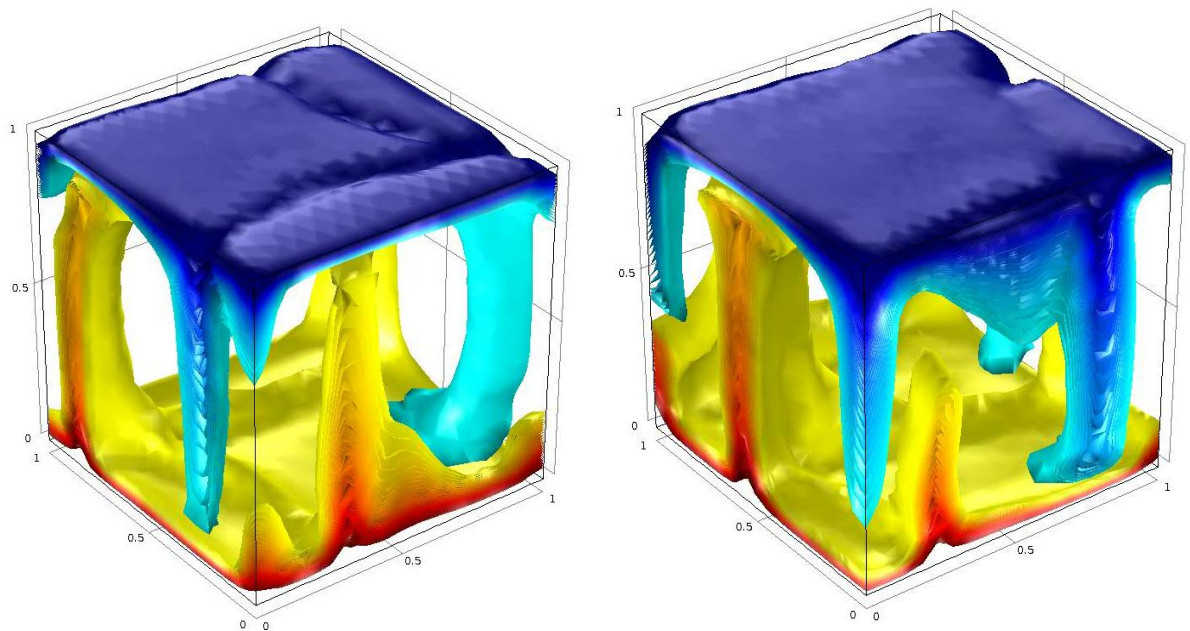
Obrázek 4.21: Srovnání kritických Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi s konstantní viskozitou.

Na sérii snímků 4.22 je možné vliv funkční závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti pozorovat na 2D modelu 1x1. Zleva doprava, po řádcích, byla spočítána nejprve situace pro konstantní průběh teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti, poté byla funkčně závislá pouze teplotní roztažnost, poté teplotní vodivost, na posledním snímku jsou funkčně závislé oba parametry. Jak je patrné, stoupavá pluma při levém okraji se postupně tenčí a napřimuje, místo šikmého stoupání postupně stoupá svisle vzhůru, popř. vodorovně doprava. Její teplota klesá a blíží se průměrné teplotě buňky. Stejně tak se ohřívá klesající pluma zprava, která je na snímku s konstantními parametry (vlevo nahoře) velmi výrazná a chladná, na snímku s oběma parametry funkčně závislými (vpravo dole) její teplota stoupla a její tvar s více blíží pravoúhlému. Stoupavá pluma u pravého okraje vlivem funkčně závislé teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti získává širší čelo, ale její teplota klesá a blíží se průměrné teplotě. Pluma se rozprostírá zvláště v horizontálním směru. Jednotlivé proudy jsou v modelu s funkčně závislými parametry výrazně tenčí než v modelu s parametry konstantními a poklesl i teplotní gradient na styku horkých a studených proudů.



Obrázek 4.22: Model 2D geometrie 1x1 s konstantní viskozitou, Rayleighovo číslo $Ra = 5 \cdot 10^6$, teplotní pole (červená je teplota 1, modrá je teplota 0). Vlevo nahoře teplotní pole pro $\alpha, \kappa = konst$, vpravo nahoře $\alpha = \alpha(T, z)$, $\kappa = konst$, vlevo dole $\alpha = konst$, $\kappa = \kappa(T, z)$ a vpravo dole funkčně závislé oba parametry, $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$.

Podobně se chová i systém ve 3D (obr. č. 4.23). Vlevo na obrázku je snímek z výpočtu modelu pro konstantní parametry α, κ , vpravo pro oba parametry funkčně závislé, $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$. Rozdíl mezi modelem s konstantními a funkčně závislými parametry spočívá zvláště v těchto rysech: na snímku z funkčně závislého modelu pozorujeme výrazné vertikální proudy a horizontální rozprostření čela plum (horký stoupavý proud na levé stěně oblasti), dále poklesl teplotní gradient. Horké stoupající plumy rostou podél rovných hřbetů (na obrázku s konstantními parametry vlevo pozorujeme hřbety zakřivené a s různorodou výškou).

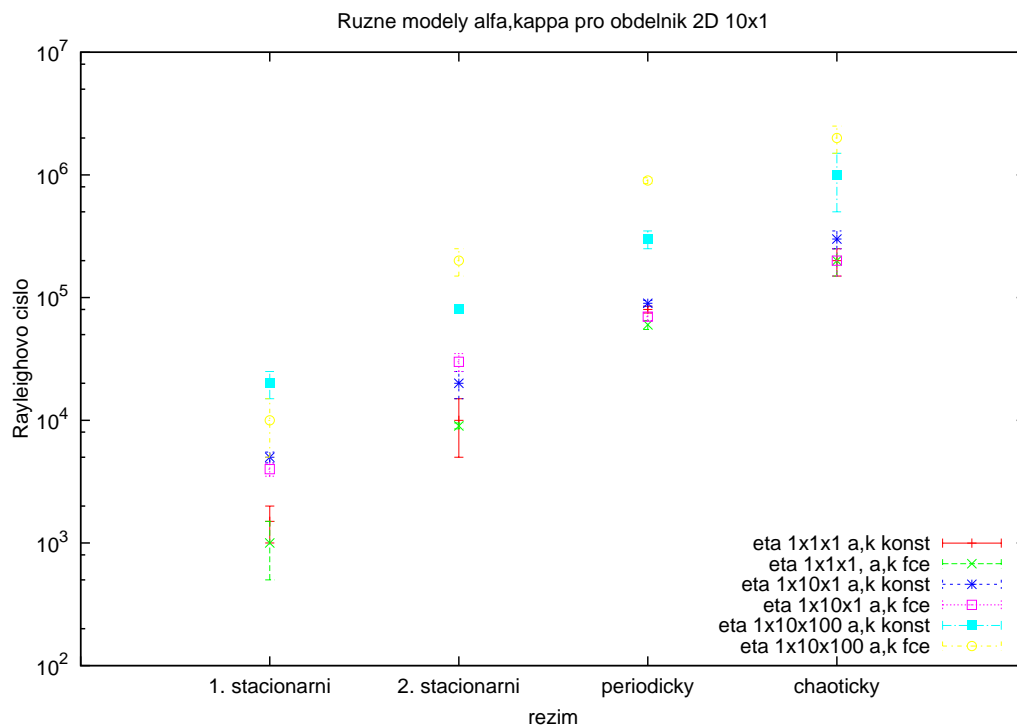


Obrázek 4.23: Model 3D krychle 1x1x1 s konstantní viskozitou, pro Rayleighovo číslo $Ra = 2 \cdot 10^6$, teplotní pole (červená až žlutá - bezrozměrná teplota 1 - 0.6; modrá až zelená - bezrozměrná teplota 0 - 0.4). Vlevo model s konstantními hodnotami $\alpha, \kappa = konst.$, vpravo funkčně závislé $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$.

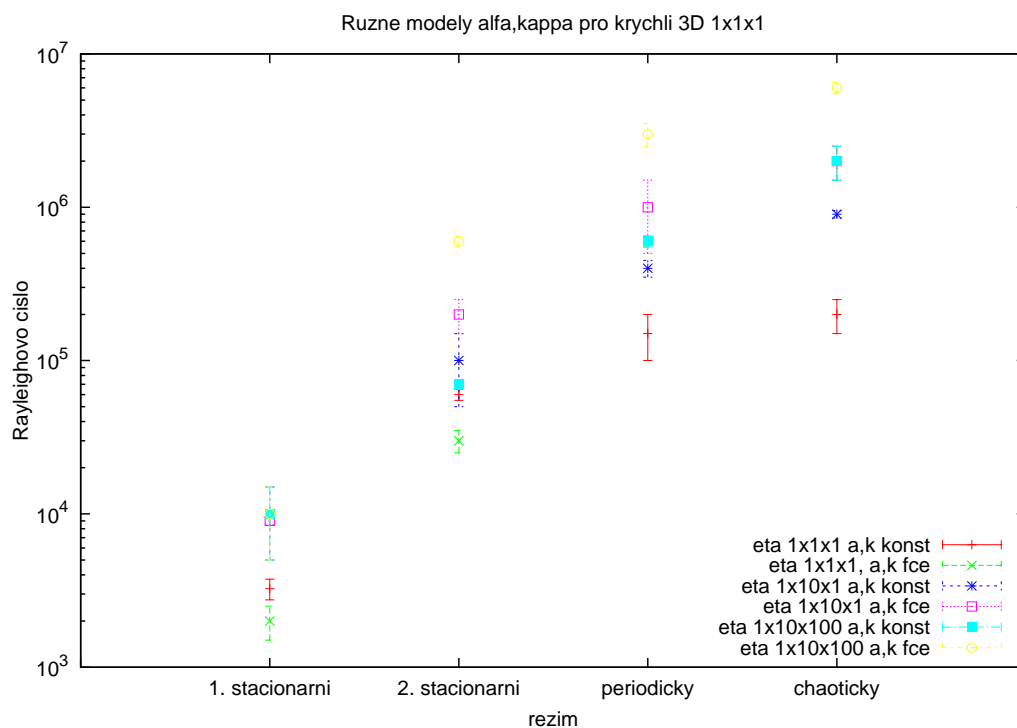
Tyto efekty, demonstrovány na 2D a 3D modelu (obr. č. 4.22 a 4.23), vyplývají z definovaných funkcí tepelné vodivosti a teplotní roztažnosti. Tepelná vodivost je definována jako lineární funkce s hloubkou a odmocninná funkce s teplotou. Vzhledem k svému postavení v tepelné rovnici u gradientu divergence teploty a pozici v Rayleighově čísle zvyšuje tepelný tok zvláště v oblastech tepelného gradientu, při styku horkého a studeného materiálu se teploty rychleji vyrovnávají. Na základě toho jsou ztenčeny jednotlivé plumy a vznikají široká čela plum. Výraznější je tento efekt pro vyšší hloubky. Teplotní roztažnost je polynomiální funkcí teploty a exponenciální funkcí hloubky. Vyskytuje se pouze v Rayleighově čísle, a tak působí pouze v pohybové rovnici. Efekt funkční závislosti teplotní roztažnosti spočívá ve výraznějším vertikálním transportu materiálu (inerciální síly), funkce je dále velmi citlivá na hloubku, a z toho také vyplývají rozšířené proudy jednotlivých plum.

Z jednotlivých závislostí kritických Rayleighových čísel na jednotlivých funkcích však vyplývá, že efekt tepelné vodivosti či teplotní roztažnosti tak, jak byl prezentován zde na základě funkcí fitujících prostředí v Zemi, nehrají příliš výraznou roli a ve srovnání s vlivem viskozity, potažmo geometrie, jsou spíše nepodstatné.

Společný vliv funkční závislosti parametrů, geometrie a viskozity je možné dále pozorovat na grafech č. 4.24 a 4.25.



Obrázek 4.24: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrii 10x1 s různými modely viskozity.

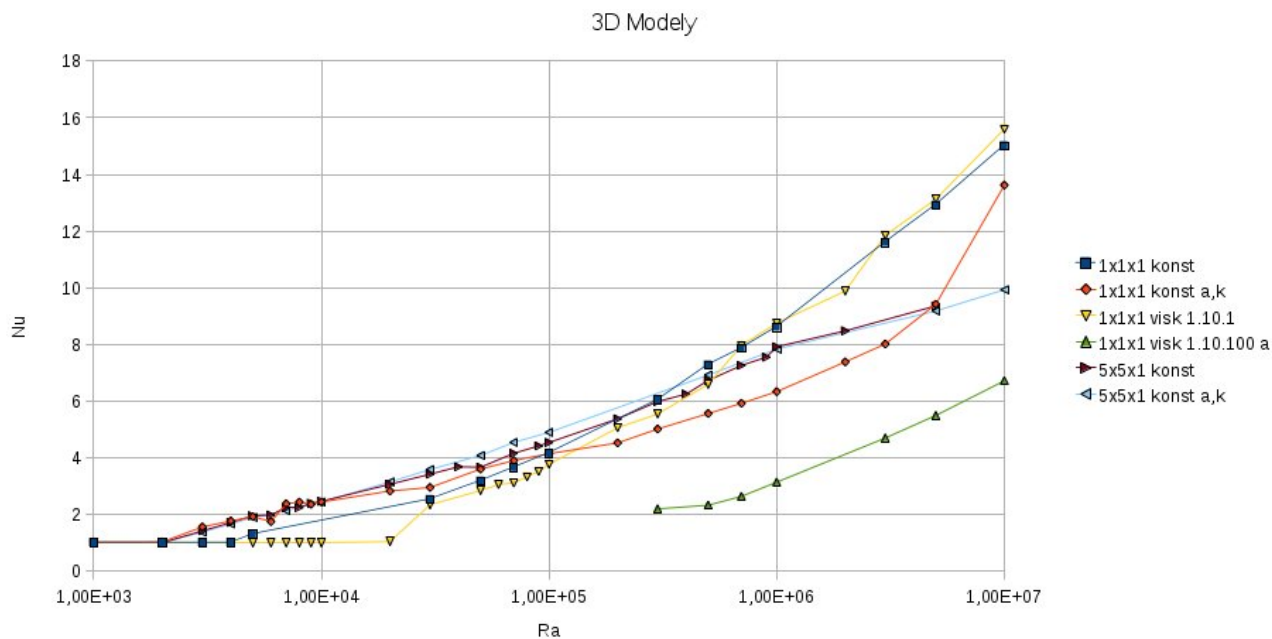


Obrázek 4.25: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 3D geometrii 1x1x1 s různými modely viskozity.

Horizontálně rozsáhlá geometrie 10x1 ve 2D z grafu 4.24 doplňuje již výše vyřčené výsledky - největší vliv na model má viskozita, s jejím nárůstem výrazně stoupají i kritická Rayleighova čísla. Funkčně závislé modely pak pro jednotlivé modely viskozit dosahují kritických Rayleighových čísel o něco nižších, ale vždy jen v řádech jednotek. Vliv funkčně závislých parametrů se prohlubuje s kontrastnějším modelem viskozity - je-li viskozita konstantní, rozdíl Rayleighových čísel je v rámci chyby měření. Pro model viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ již rozdíl naroste na hranici jedné jednotky a pro model viskozity $\eta_i = (1, 10, 100)$ už jsou to až dvě až tři jednotky. Největší rozdíl mezi kritickými Rayleighovými čísly modelů s konstantními parametry a parametry funkčně závislými pozorujeme pro vyšší režimy (periodický a chaotický), v souladu s vlivem jednotlivých funkcí na konvekci dle jejich umístění v pohybové a tepelné rovnici.

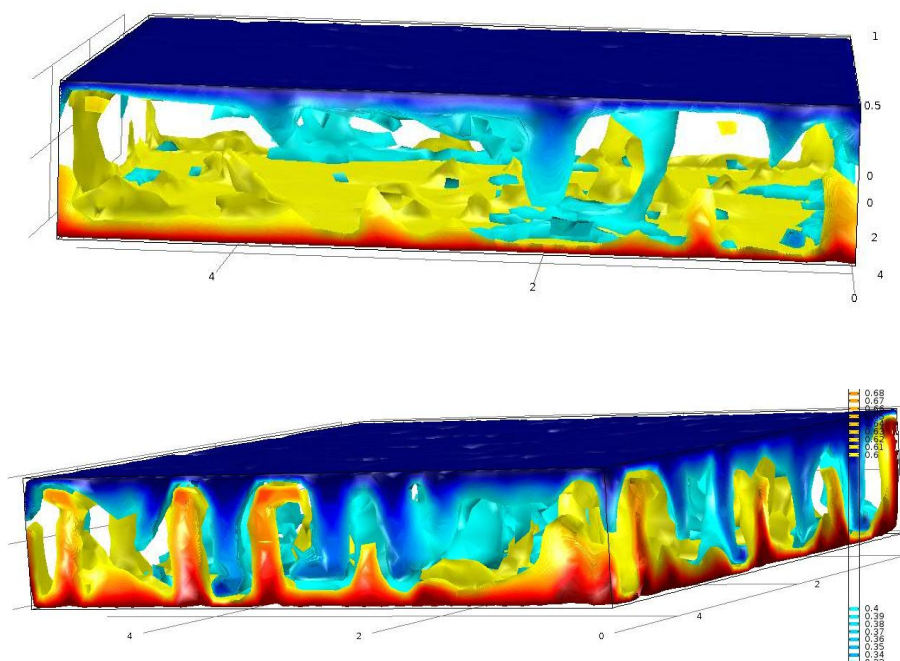
Pro srovnání uvádím ještě geometrii 3D 1x1x1 (obrázek 4.25), v níž hraje podmínka na hranici důležitou roli. Stejně jako v případě geometrie 2D 1x1 i zde je vliv funkčně závislých parametrů omezován hraniční podmínkou a vede k navýšení kritických Rayleighových čísel. Tento nárůst je tím vyšší, čím větší jsou kontrasty ve viskozitě modelu. Jak je možné očekávat, funkčně závislé parametry snižují kritická Rayleighova čísla, vzhledem ale k hraniční podmínce se tento trend projevuje pouze u nižších konvekčních režimů. Pro režimy periodické či chaotické sledujeme rozdíl kritických Rayleighových čísel až řádový, jedná se však o jejich navýšení, nikoliv pokles, jak by bylo možné očekávat. Tento nárůst je způsoben stabilizací na stěnách modelu.

Jak je možné vyčíst z grafu na obr. 4.26, Nusseltova čísla modelů viskozity pro danou geometrii se postupně scházejí pro vyšší Rayleighova čísla do jedné křivky, Nusseltova čísla pro modely funkčně závislých parametrů jsou pro dostatečně horizontálně rozlehlé modely vždy o něco vyšší. V grafu je patrný vliv hraniční podmínky pro model 1x1x1, který již u modelu 5x5x1 není patrný.



Obrázek 4.26: Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 3D krychli 1x1x1 s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ s Zemi podobným průběhem viskozity (modře) a s konstantní viskozitou (červeně)

Na závěr je uveden snímek ze dvou simulací s konstantní viskozitou v geometrii 3D 5x5x1, a to pro model s konstantními parametry a pro model s funkčně závislými parametry. Z ukázky (obr. 4.27) je patrné oživení konvekce, napřímění proudů podél vertikálního směru a rozšíření čel jednotlivých plam. Jak již bylo uvedeno, tyto efekty jsou projevem exponenciální závislosti teplotní roztažnosti s hloubkou či odmocninné závislosti tepelné vodivosti na teplotě a lineární závislosti na hloubce.

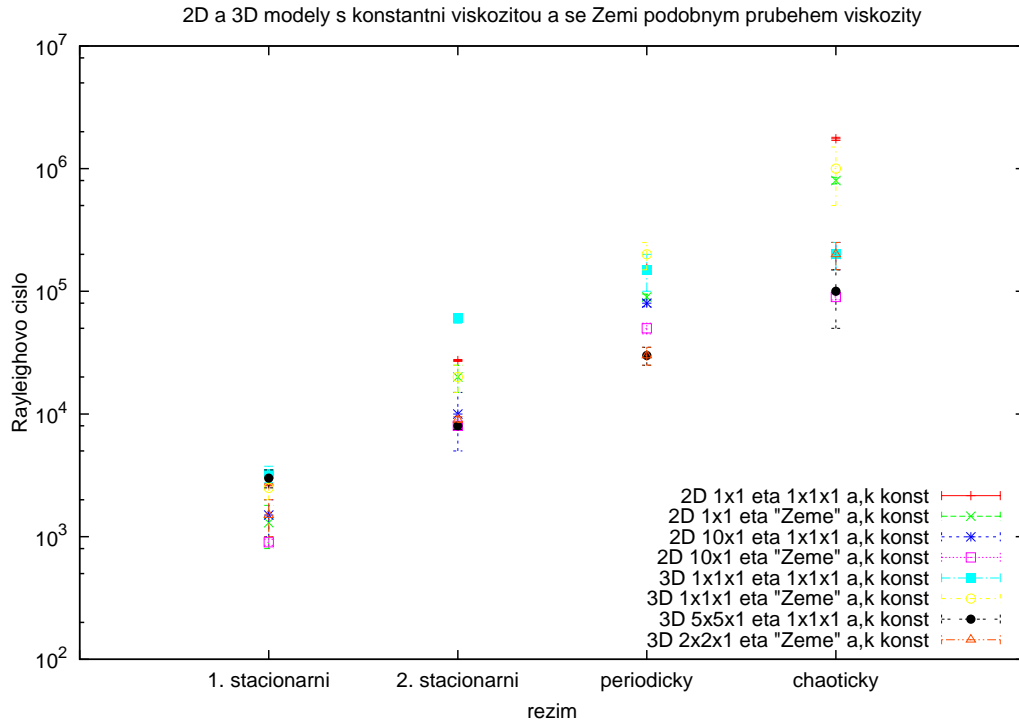


Obrázek 4.27: Model 3D kvádrů 5x5x1 s konstantní viskozitou, pro Rayleighovo číslo $Ra = 5 \cdot 10^6$, teplotní pole (červená až žlutá - bezrozměrná teplota 1 - 0.6; modrá až zelená - bezrozměrná teplota 0 - 0.4). Nahoře model s konstantními hodnotami $\alpha, \kappa = konst.$, dole funkčně závislé $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$.

4.5 Zemi podobné modely

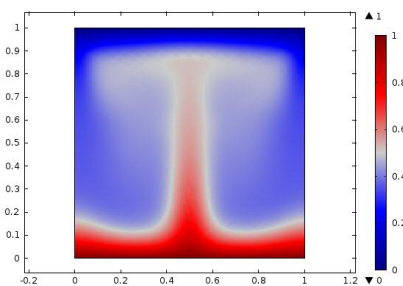
Na základě výsledků bylo ukázáno, že největší vliv na kritická Rayleighova čísla a na průběh konvekce má viskozita modelu. Z tohoto důvodu byla spočítána sada modelů s průběhem viskozity podobným průběhu v Zemi.

Modely se Zemi podobným průběhem viskozity, viz tabulka 3.4, vykazovaly snížení kritických Rayleighových čísel v porovnání s modely s konstantní viskozitou. Graf pro geometrie 2D 1x1, 2D 10x1, 3D 1x1x1, 3D 2x2x1 a 3D 5x5x1 viz obrázek č. 4.28. Toto snížení bylo v řádu jednotek, maximálně v rozdílu jednoho řádu. Takový rozdíl je srovnatelný s modelem viskozity $\eta_i = (1, 10, 100)$, kde byl kontrast viskozity též dva řády.

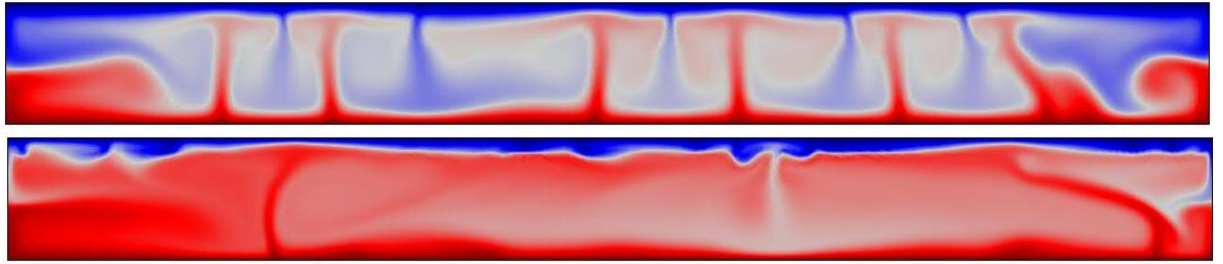


Obrázek 4.28: Kritická Rayleighova čísla pro 2D a 3D geometrie se Zemi podobným průběhem viskozity a s konstantní viskozitou.

V tomto modelu však bylo mírně jiné rozložení vrstev, které se projevuje v deformaci tepelného a rychlostního pole v porovnání s modely s viskozitami rozvrstvenými pravidelně, jako třeba model $\eta_i = (1, 10, 100)$. Z pochopitelných důvodů probíhala konvekce nejživěji v oblasti s nejnižší viskozitou ("astenosféra" v modelu Země), kde materiál dosahoval nejvyšší velikosti rychlosti. V kanálu se sníženou viskozitou, který je relativně tenký, tak probíhá proudění preferenčně horizontálně. Efekt je doplněn vlivem funkční závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti, jež k vertikálnímu proudění s výrazným rozlitím čel plum do vodorovného směru také podporují (viz obr. 4.29).



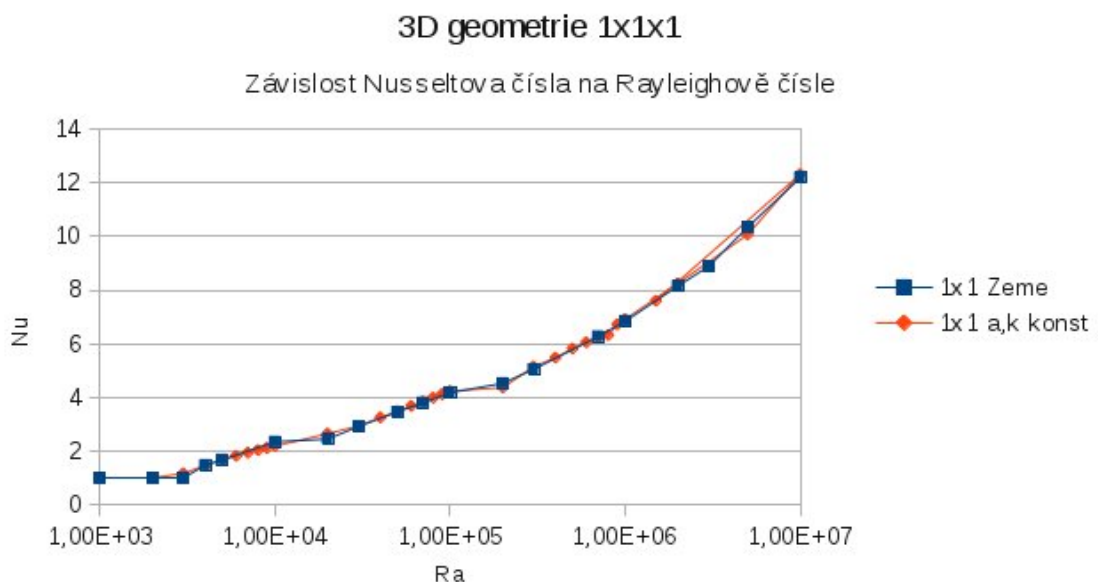
Obrázek 4.29: Teplotní pole pro model 2D 1x1 pro průběh viskozity podobný Zemi, s funkčně závislými parametry α a κ , pro $Ra = 9 \cdot 10^4$.



Obrázek 4.30: Teplotní pole pro model 2D 10x1 pro průběh viskozity podobný Zemi, s funkčně závislými parametry α a κ , pro $Ra = 2 \cdot 10^5$ (nahore) a $Ra = 2 \cdot 10^6$ (dole).

Jestliže se systém dostane do chaotického režimu, chová se obdobně jako každý model s kontrastní viskozitou - vytvoří se vrstvy. Jak je patrné z obrázku 4.30, v oblasti s vysokým kontrastem viskozity o dva řády se vytvořila vrstva s vysokým gradientem teploty. Na obrázku je patrná klesající studená pluma v druhé polovině napravo, jejíž široké čelo se pak rozprostírá po velké části dna oblasti. Obdobně by se mohla chovat i Země, kde kromě vlivu viskozity a funkčně závislých parametrů výraznou roli hrají ještě fázové přechody a radioaktivní rozpady, které mění tepelnou bilanci systému a mohou podpořit, nebo utlumit konvekci v dané oblasti.

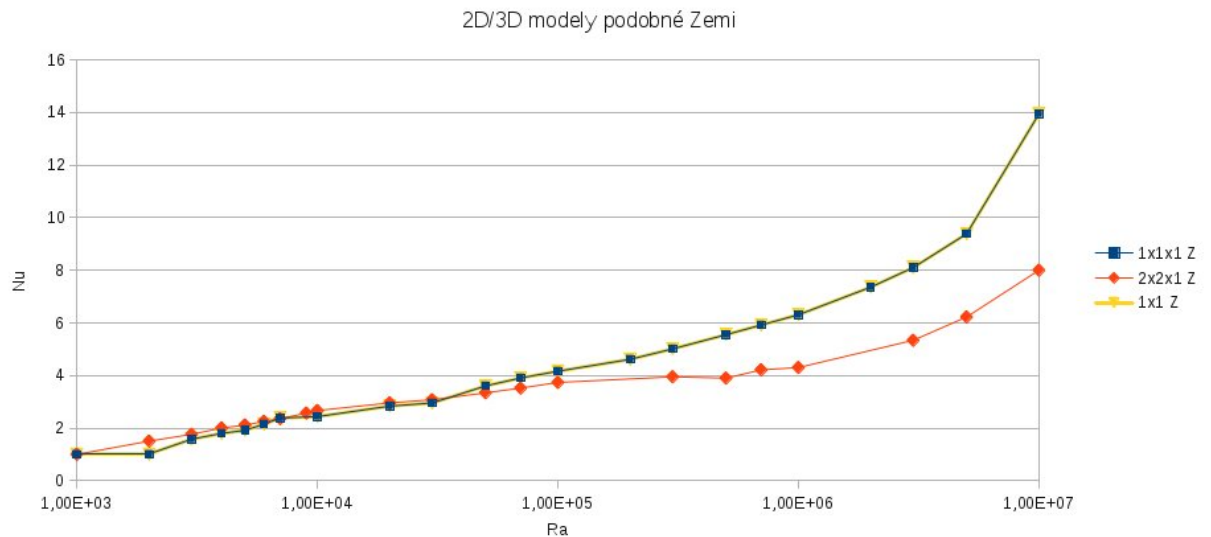
Jako další byl sledován stejný efekt viskozity a geometrie jako v předchozích kapitolách, tedy podpoření poklesu kritických Rayleighových čísel pro všechny režimy vlivem geometrie poklesem kritických Rayleighových čísel zvláště pro vyšší režimy vlivem kanálů snížené viskozity.



Obrázek 4.31: Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 3D krychli 1x1x1 s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ s Zemi podobným průběhem viskozity (modře) a s konstantní viskozitou (červeně)

Jak je navíc patrné z grafu na obr. 4.31, vliv viskozity může být potlačen geometrií - vlivem hraniční podmínky, jako je tomu v případě malých geometrií jako

je 2D 1x1 nebo 3D 1x1x1. Závislost Nusseltových čísel na Rayleighových číslech je tak pro tyto geometrie v podstatě stejná, liší se pouze v detailech nástupu jednotlivých režimů. Navíc závislost Nusseltových čísel na Rayleighových číslech je pro tyto dvě geometrie velmi podobná (viz obrázek srovnání závislostí Nusseltových čísel pro geometrie 2D 1x1, 3D 1x1x1 a 3D 2x2x1 na obr. 4.32).



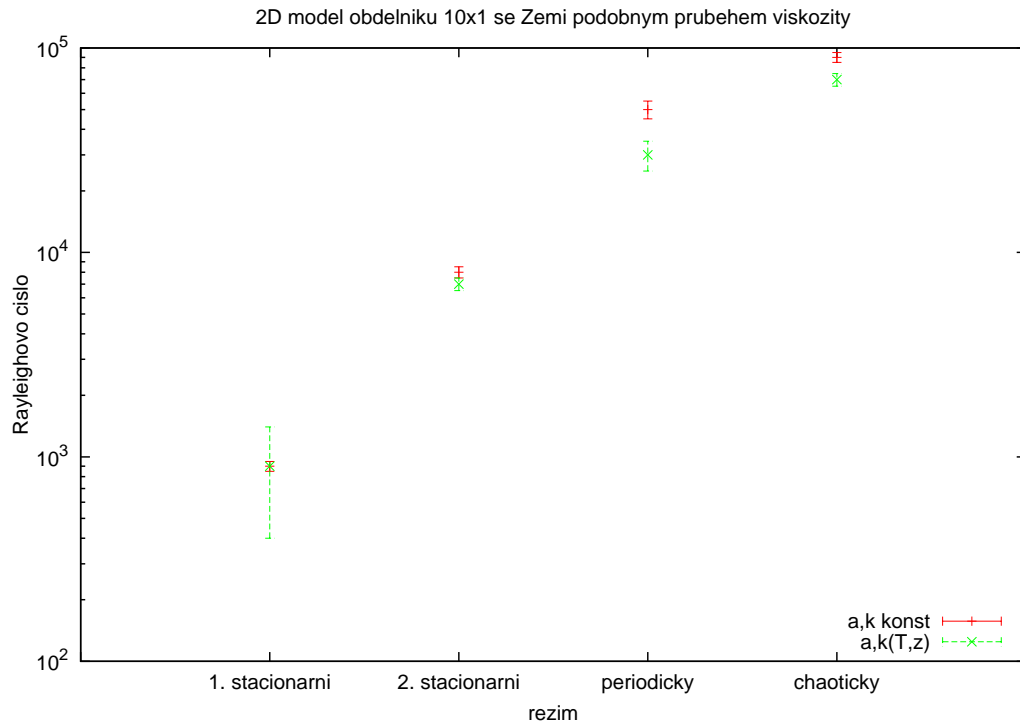
Obrázek 4.32: Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro modely s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ a se Zemí podobným průběhem viskozity.

Zkoumány byly režimy také při funkční závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti.

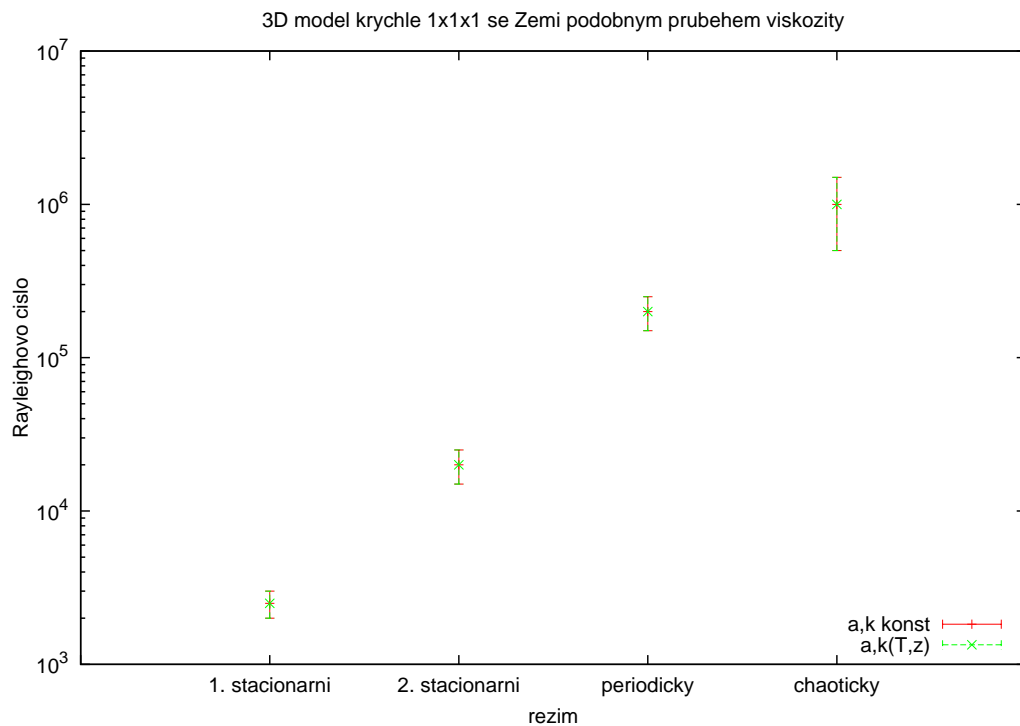
Vliv funkční závislosti $\alpha, \kappa(T, z)$ se projevil stejně jako u modelů s konstantní viskozitou. Čím vyšší režim, tím výraznější byl pokles Rayleighova čísla pro model s funkčně závislými parametry α, κ oproti modelu s těmito parametry konstantními (obrázek č. 4.33). U modelů se silným stabilizačním vlivem okrajové podmínky je však tento trend oslaben. Jak je uvedeno na příkladu 3D modelu 1x1x1, naměřené hodnoty kritických Rayleighových čísel jsou pro konstantní i funkčně závislé parametry prakticky totožné a funkční závislost teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti není patrná (obrázek č. 4.34).

Jak vyplývá z celkového porovnání různých geometrií na obr. 4.35, sledujeme zde všechny již výše popsané efekty:

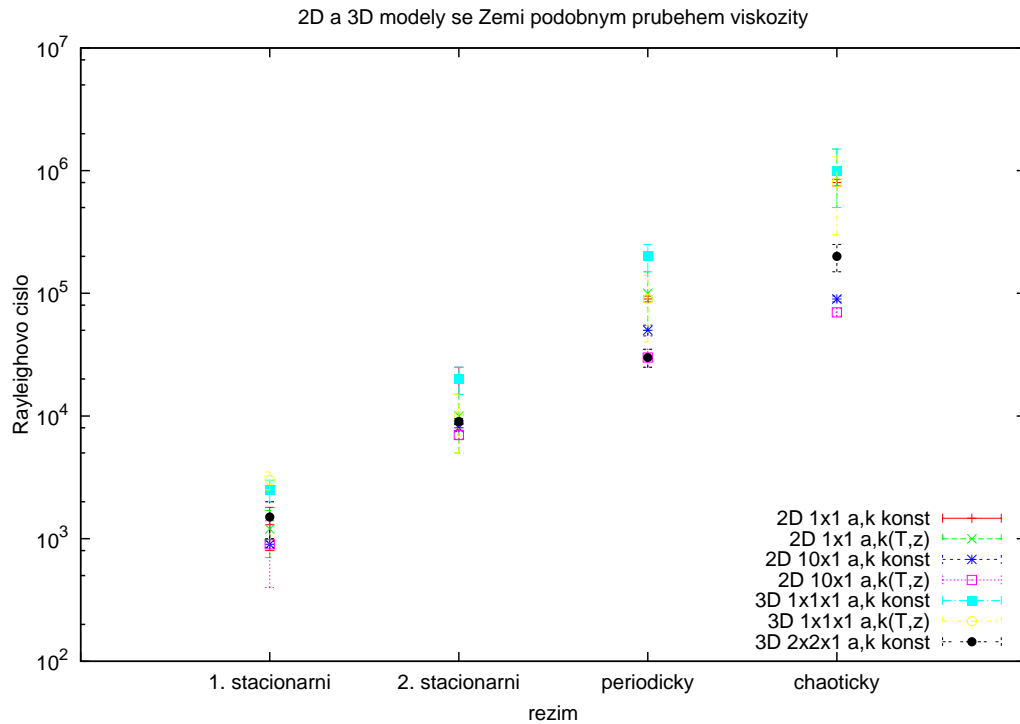
- efekt vlivu viskozity - snížení viskozity umožňuje přechod do vyšších režimů pro nižší Rayleighova čísla, vliv viskozity slábne pro vyšší režimy
- efekt geometrie - horizontálně rozsáhlejší geometrie má více volnosti a přechází tak mezi všemi režimy snadněji
- vliv funkční závislosti parametrů teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti - umožňují snazší přechod mezi jednotlivými režimy, nejvíce se projevuje u vyšších režimů
- vliv hraniční podmínky - u malých modelů (1x1 a 1x1x1) stabilizuje konvekci a navyšuje tak kritická Rayleighova čísla zvláště pak pro vyšší režimy



Obrázek 4.33: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrii 10x1 se Zemi podobným průběhem viskozity.

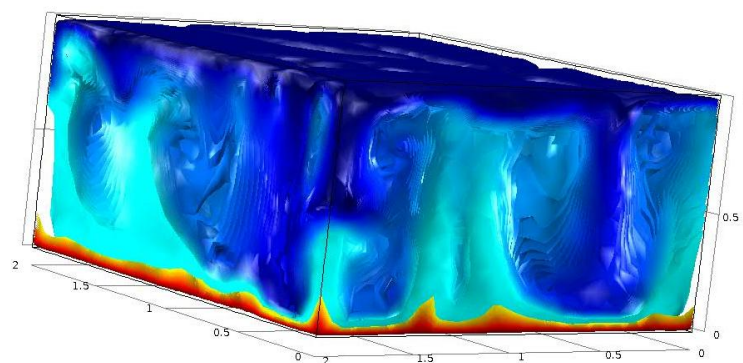


Obrázek 4.34: Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 3D geometrii 1x1x1 se Zemi podobným průběhem viskozity.



Obrázek 4.35: Srovnání závislosti Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi se Zemi podobným průběhem viskozity.

Na závěr uvádím snímek z modelu 3D geometrie 2x2x1 pro model viskozity podobný Zemi a s konstantními parametry α a κ (obr. č. 4.36). Ze snímku je patrná konvekce živější v horní části buňky, v oblasti se sníženou viskozitou, kde se také plummy rozšiřují. Ve spodní oblasti se tvoří vícero širších stoupavých a klesavých proudů konstantní tloušťky, jejichž teplota se ale jen málo odlišuje od teploty průměrné v buňce.



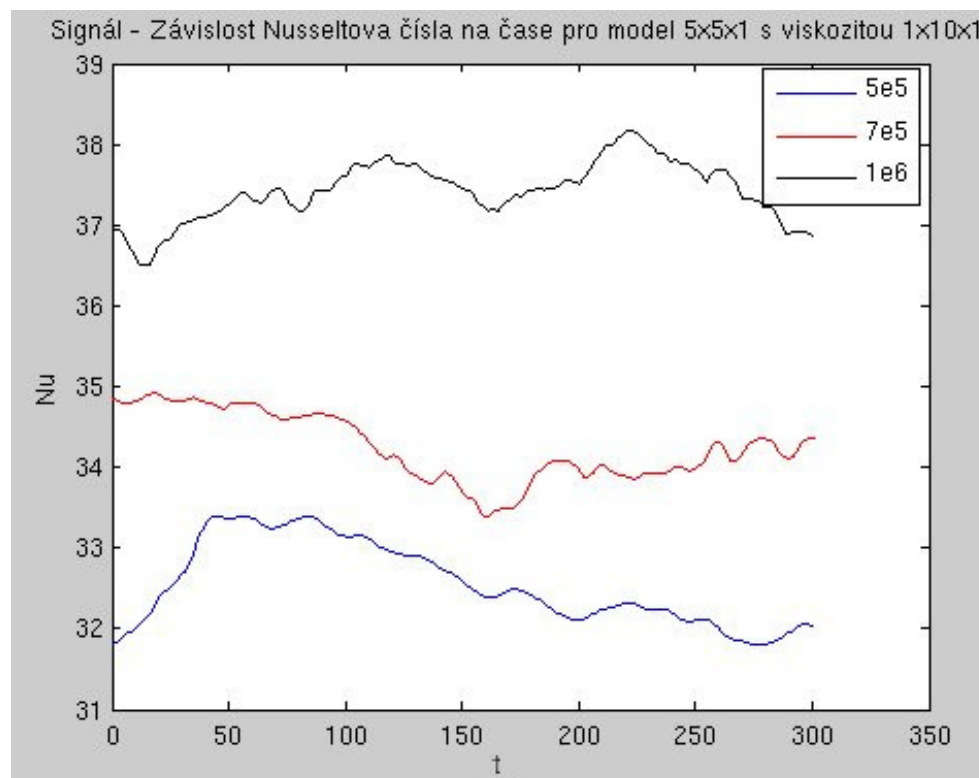
Obrázek 4.36: Model 3D kvádru 2x2x1 se Zemi podobným průběhem viskozity, pro Rayleighovo číslo $Ra = 5 \cdot 10^6$, teplotní pole (červená až žlutá - bezrozměrná teplota 1 - 0.6; modrá až zelená - bezrozměrná teplota 0 - 0.4).

5. Analýza frekvenčního spektra chaotických režimů

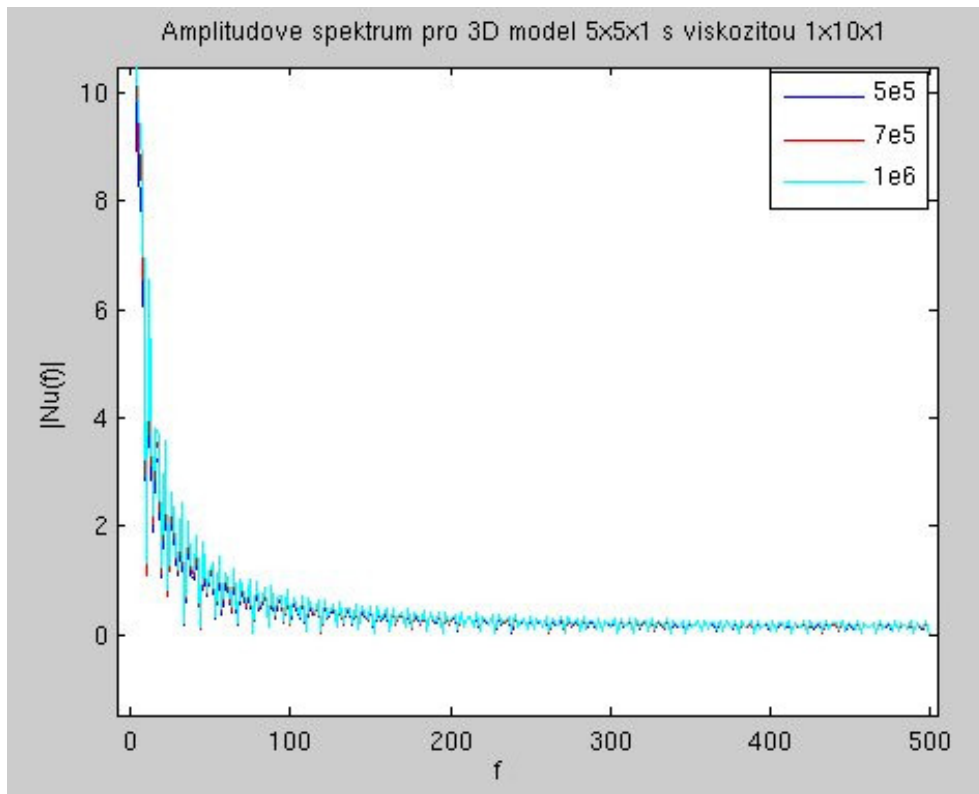
Získaná data závislosti Nusseltových čísel na čase pro jednotlivé modely byla analyzována ve spektrální oblasti. Jak již bylo uvedeno v kapitole 3, vyhodnocení frekvenčního spektra daných časových vývoje Nusseltova čísla bylo jednou ze základních metod stanovení kritických Rayleighových čísel pro jednotlivé modely. V rámci tohoto cíle byla zkoumána zvláště amplitudová spektra signálů.

5.1 Numerické modely

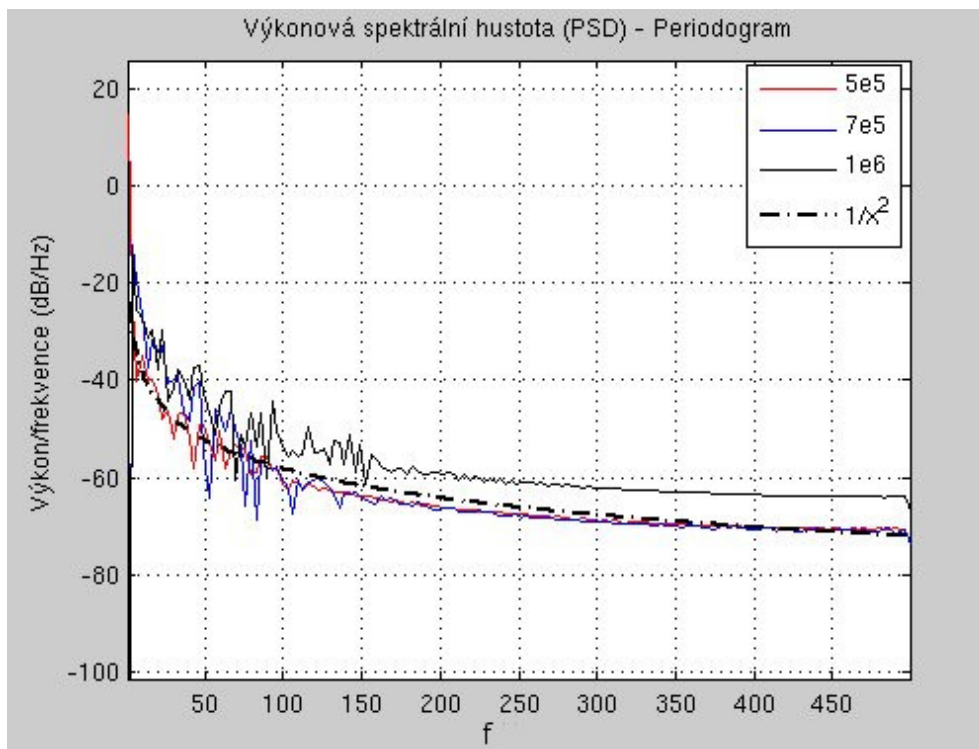
V případě chaotických režimů se ve spektrální oblasti již nevyskytují žádné význačné frekvence a spektrum má charakter šumu. Zajímalo mne, zda lze z tohoto šumu vyčíst povahu probíhajícího děje, a to alespoň přibližně. Z tohoto důvodu jsem si z naměřených dat spočítala také výkonovou frekvenční hustotu (power spectral density - PSD) a pokusila se nalézt křivku, která datům nejvíce odpovídá. Výkonovou hustotou jsem prokládala zvláště křivky odpovídající výkonovým hustotám známých barevných šumů. Z dat jednoznačně plyne, že převládají delší frekvence, a proto je také v amplitudovém spektru zřetelný spád směrem k frekvencím vysokým (viz obr. 5.1 a 5.2).



Obrázek 5.1: Časová závislost Nusseltova čísla pro vybraný 3D model 5x5x1 s modelem viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ a pro Rayleighova čísla $Ra = 5 \cdot 10^5$, $7 \cdot 10^5$ a $6 \cdot 10^6$.



Obrázek 5.2: Frekvenční závislost Nusseltova čísla pro vybraný 3D model 5x5x1 s modelem viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ a pro Rayleighova čísla $Ra = 5 \cdot 10^5$, $7 \cdot 10^5$ a $6 \cdot 10^6$.

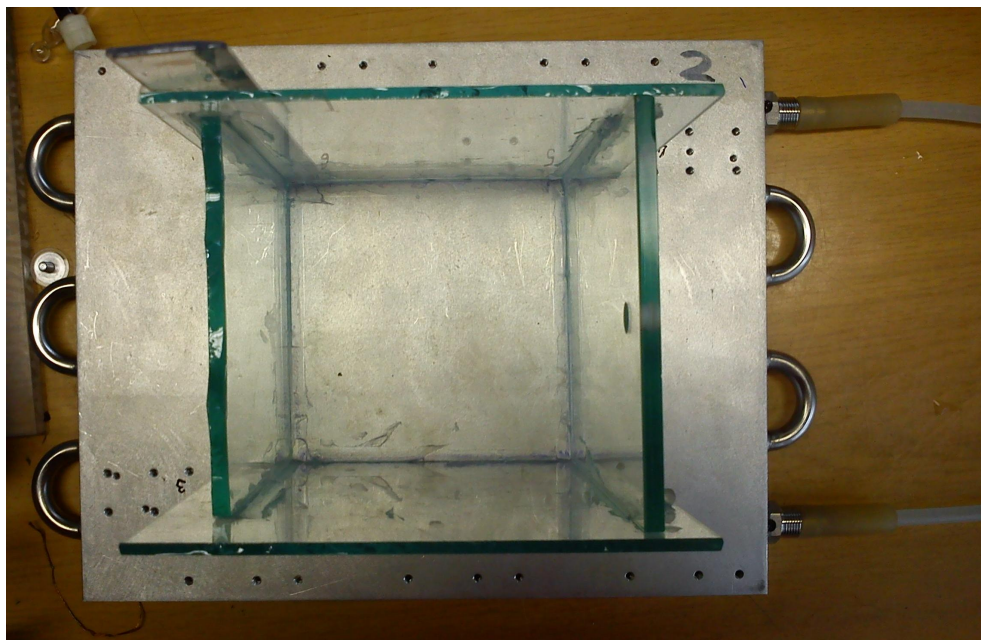


Obrázek 5.3: Výkonová spektrální hustota signálu závislosti Nusseltova čísla na čase pro vybraný 3D model 5x5x1 s modelem viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ a pro Rayleighova čísla $Ra = 5 \cdot 10^5$, $7 \cdot 10^5$ a $6 \cdot 10^6$.

Jednotlivé výkonové frekvenční hustoty byly velmi dobře proložitelné křivkou $y(x) = 1/x^2$, tedy odpovídaly frekvenčnímu obrazu hnědého (Brownova) šumu. Tento výsledek je v souladu s definicí chaotického režimu v konvektujícím systému, odpovídá totiž náhodné procházce či Brownovu pohybu. Výkonové spektrum tak dále potvrzuje výsledky simulací. Ukázka výkonové hustoty proložené funkční závislosti výkonové hustoty na frekvenci jako $y(f) = 1/f^2$ je na snímku č. 5.3.

5.2 Experimentální model

Aby bylo možné výsledky výše považovat za platné, dovolila jsem si navrhnout malý experiment, s nímž by bylo možné data srovnat. Tento experiment spočíval v pozorování skleněné nádoby s vodou o čtvercové podstavě 10 x 10 cm. Dno této nádoby tvořil hliníkový panel, síť dutin plošně temperovaný vodou na konstantní teplotu. Na hliníkový panel byly silikonovým lepidlem přilepeny skleněné desky o kratší hraně 10 cm. Nádoba byla svrchu otevřená (obr. 5.4).



Obrázek 5.4: Skleněná nádoba s temperovanou hliníkovou podložkou

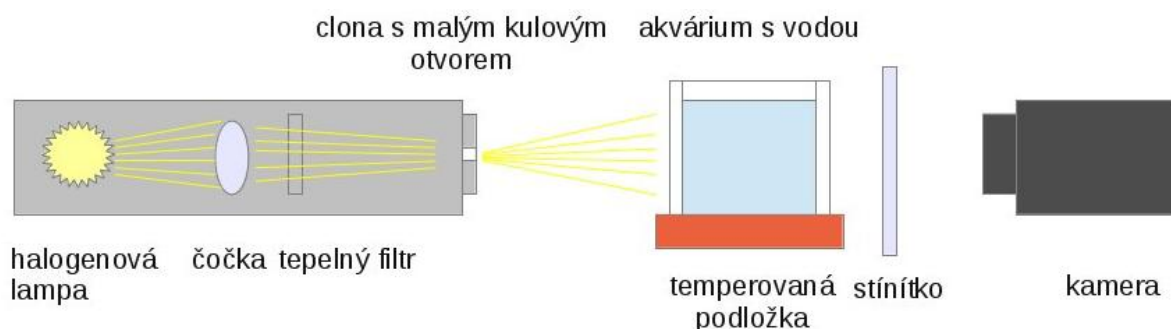
Nádoba byla naplněna vodou do té výše, jakého poměru stran jsem chtěla dosáhnout:

- 2 cm - poměr stran 5x5x1,
- 5 cm - poměr stran 2x2x1,
- 10 cm - poměr stran 1x1x1.

Voda v nádobě tedy do jisté míry odpovídala modelům z této diplomové práce, simulované v prostředí Comsol: pevná teplota na spodní hranici, do jisté míry tepelně izolované stěny (tato izolace ale nebyla příliš dobrá), pevné nepohyblivé stěny a dno. Od modelů se experiment liší především vlným povrchem

a proměnlivou teplotou na horní hranici a také pak výběrem kapaliny jsou tyto modely zásadně odlišné.

Experiment byl sestaven dle schéma na obr. 5.5. Teplota povrchu hliníkového bloku a hladiny vody byla kontinuálně měřena pomocí infračerveného snímače. V tomto kroku je patrné, že měření teploty na hliníkové desce je přesnější než na hladině - za prvé teplota bloku je relativně dobře homogenní po celé ploše, za druhé na hliníkový blok bylo možné nanést lokálně nepatrné množství černé barvy, která spolu se snížením odrazivosti materiálu zvýší přesnost snímání teploty.



Obrázek 5.5: Schéma experimentu

5.3 Vyhodnocení experimentu

Na stínítku byly pozorovány pohyby elementů vody s různou hustotou, jež odpovídá aktuální teplotě a tlaku. Se změnou hustoty se mění také index lomu vody, díky čemuž je možné pozorovat různě jasné oblasti na stínítku. Experimenty pro různé teploty hliníkové podložky a různé množství vody byly zaznamenávány na kameru a do počítače. Vzniklá data pak byla zpracována v prostředí software Matlab.

Aproximací závislosti hustoty, viskozity, teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti polynomy bylo možné spočítat přibližná Rayleighova čísla pro dané rozdíly teplot podložky a povrchu kapaliny. K aproximaci byly užity následující funkce dle (Comsol Multiphysics, 2011, [4]):

$$\begin{aligned} \eta_v(T) = & 1,3799566804 - 0,021224019151T + 1,3604562827 \cdot 10^{-4}T^2 \\ & - 4,6454090319 \cdot 10^{-7}T^3 + 8,9042735735 \cdot 10^{-10}T^4 \\ & - 9,0790692686 \cdot 10^{-13}T^5 + 3,8457331488 \cdot 10^{-16}T^6 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\rho_v(T) = 838,466135 + 1,40050603T - 0,0030112376T^2 + 3,71822313 \cdot 10^{-7}T^3 \quad (5.2)$$

$$k_v(T) = -0,869083936 + 0,00894880345T - 1,58366345 \cdot 10^{-5}T^2 + 7,97543259 \cdot 10^{-9}T^3 \quad (5.3)$$

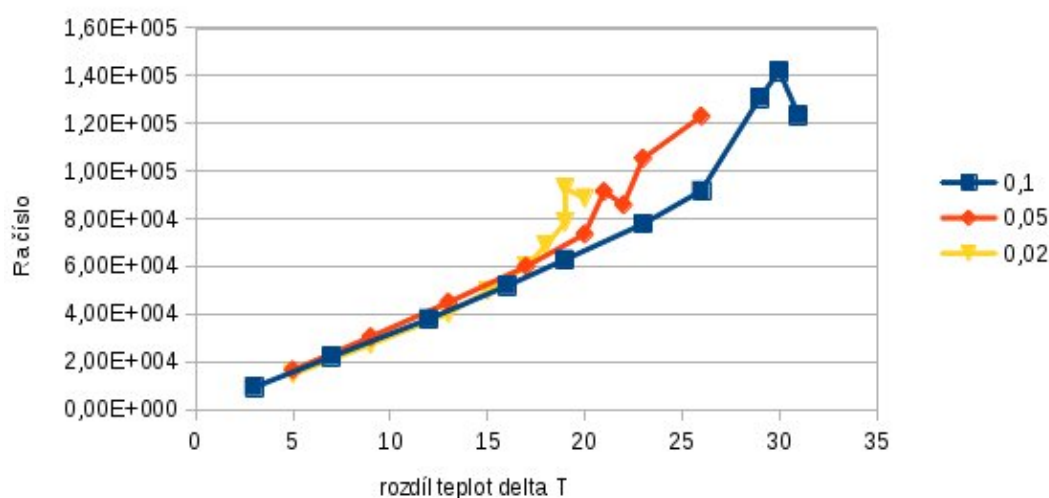
$$\begin{aligned} c_{p_v}(T) = & 12010,1471 - 80,4072879T + 0,309866854T^2 - 5,38186884 \cdot 10^{-4}T^3 \\ & + 3,62536437 \cdot 10^{-7}T^4 \end{aligned} \quad (5.4)$$

a samozřejmě

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_p} \quad (5.5)$$

Na základě těchto přibližných výpočtů vznikl graf závislosti Rayleighova čísla (určeného z povrchové teploty kapaliny) na rozdílu teploty pro vodu v daných třech geometriích. Zajímavým výsledkem je, že tato závislost je zvláště u malých rozdílů teploty prakticky nezávislá na geometrii. Bohužel nebylo možné stanovit kritické Rayleighovo číslo pro počátek konvekce, neboť voda se velmi rychle prohřívá, a tedy není možné dobře reflektovat aktuální teplotu na vrchní hranici. Výsledky jsou zobrazeny na obr. 5.6.

Závislost Ra čísla na rozdílu teplot dna a povrchu kapaliny



Obrázek 5.6: Závislost Rayleighových čísel na rozdílu teploty spodní a horní hranice pro geometrie 1x1x1 (0.1), 2x2x1 (0.05) a 5x5x1 (0.02).

Dále byla zpracována obrazová data. Z nich je možné určit konvekční režim. Vzhledem k nedostatku prostoru v této práci jsem se nakonec věnovala pouze chaotickému režimu. Video časového průběhu konvekce bylo převedeno do stupňů šedi, kde každému pixelu náleží hodnota jasu od 0 do 255. Z videa tak byla extrahována matice, vyjadřující časovou změnu jasu jednotlivých pixelů obrazu. Každá časová řada jednotlivých pixelů obrazu byla pojata jako vstupující signál. Je patrné, že geometrie s nižším obsahem vody (2 cm) nelze bez ochlazování povrchu kapaliny udržet ve stejném konvekčním stavu stejně dlouho jako geometrie s větším množstvím vody (10 cm), proto data geometrie 2x10x10 cm tvoří nejkratší časové řady a i počet pixelů je zcela nejnižší (nejmenší plocha na stínítku). Proto je rozlišení ve spektru u této geometrie nejhorší, nejlepší je pak pro velký objem vody, 10x10x10 cm.

Cílem je porovnání frekvenčního obsahu konvekce experimentální aparatury a numerického experimentu. Sice byl v experimentu a numerické simulaci pozorován a měřen jiný šum: časový vývoj Nusseltova čísla pro dané číslo Rayleighovo versus časový vývoj jasu kapaliny. V obou případech však v chaotickém režimu. Tyto šумы spolu souvisí, neboť pokles či vzrůst jasu souvisí s teplotou v daném místě

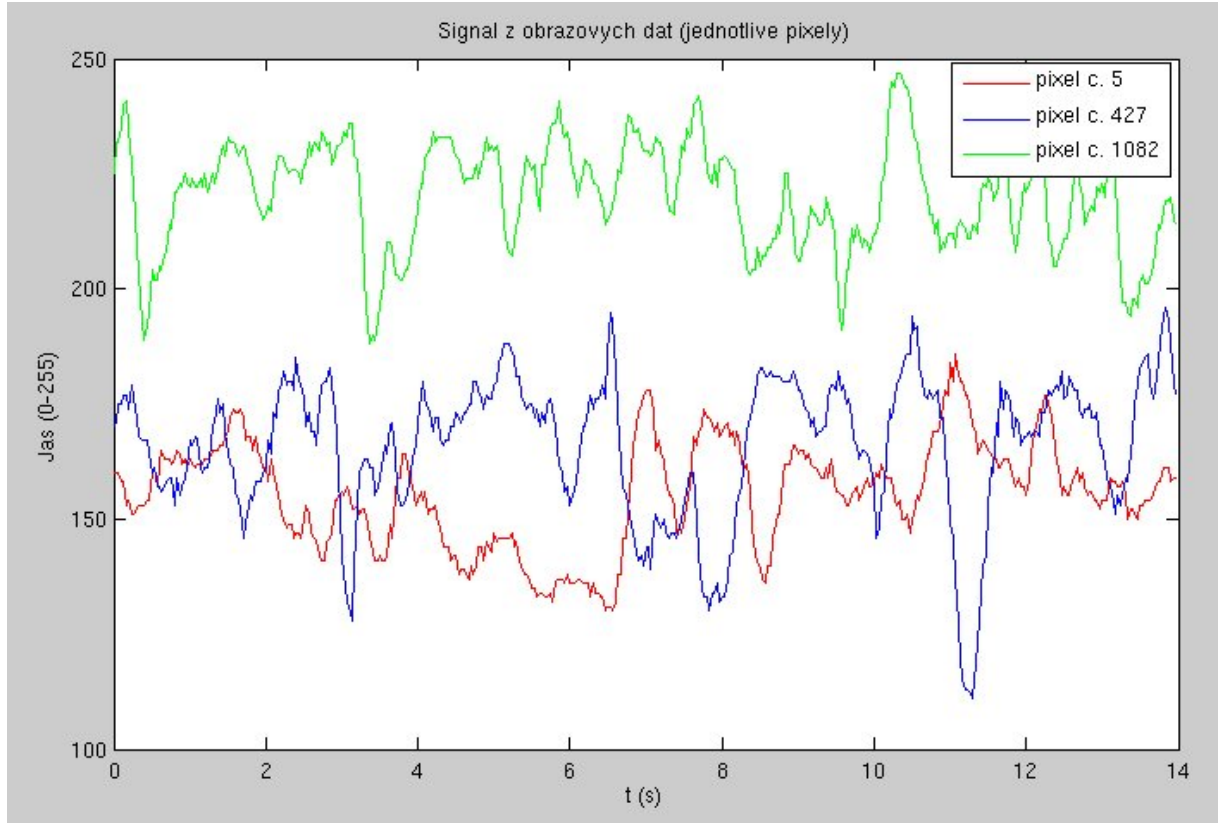
a okamžiku, stejně jako změna Nusseltova čísla souvisí s přenosem tepla díky konvekci v poměru k tepelnému přenosu kondukcí. Na obrázku č. 5.7 je zachycen jeden snímek stínítka pro geometrii 10x10x10 cm.



Obrázek 5.7: Snímek stínítka pro krychli vody 10x10x10 cm, jejíž dno bylo temperováno na 60°C, povrch vody činil 30°C.

Na obrázku 5.8 je pak zobrazen výsek z časové řady pro náhodně zvolené pixely v oblasti hranic a uprostřed oblasti. Jedná se o geometrii 5x5x1, tedy o nádobu naplněnou 2 cm vody. Datové řady byly před zpracováním normalizovány odečtením průměrné hodnoty jasu řady, tedy místo absolutní hodnoty byla analyzována pouze změna jasu. Tím jsem chtěla umožnit srovnávání mezi jednotlivými experimenty, neboť světelné podmínky nemusely být stejné. Při analýze absolutních hodnot jasu by pak nebylo možné porovnávat absolutní výkony jednotlivých frekvencí napříč geometriemi.

Z časových řad pak byla za pomoci rychlé Fourierovy transformace vypočítána amplitudová spektra a výkonové spektrální hustoty.



Obrázek 5.8: Ukázka časových řad - zde z experimentu geometrie 5x5x1, teplota 60/41°C.

5.4 Porovnání numerických modelů s experimentem

Očekávána jsou spektra obdobná obr. 5.2. Experimentální spektra se ale liší: i v chaotickém režimu se objevují jisté diskrétní frekvence. Tyto frekvence souvisí s volným povrchem kapaliny a šířícími se gravitačními vlnami. Kapilární vlny nepovažují za relevantní vzhledem k hloubce nádoby. Navíc frekvence, která by jim odpovídala, se ve spektru neobjevuje. Je však pravděpodobné, že v případě nízkých geometrií (2 cm - 5x5x1) se jedná o efekt gravitačně-kapilárních vln, neboť hloubka nádoby byla již srovnatelná s vlnovými délkami základních period. Vliv na výslednou frekvenci vlny je však tak malý, že jej nelze v měření odlišit.

Fázovou rychlost gravitačních vln v_{f_g} , kapilárních vln v_{f_k} a gravitačně-kapilárních vln $v_{f_{g-k}}$ jsem počítala dle (Gill, 1982, [10]) a (Rizzoli, 2008, [12]):

$$v_{f_g} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)} \quad (5.6)$$

$$v_{f_k} = \sqrt{2\pi \frac{\sigma}{\rho\lambda}} \quad (5.7)$$

$$v_{f_{g-k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) + 2\pi \frac{\sigma}{\rho\lambda}} \quad (5.8)$$

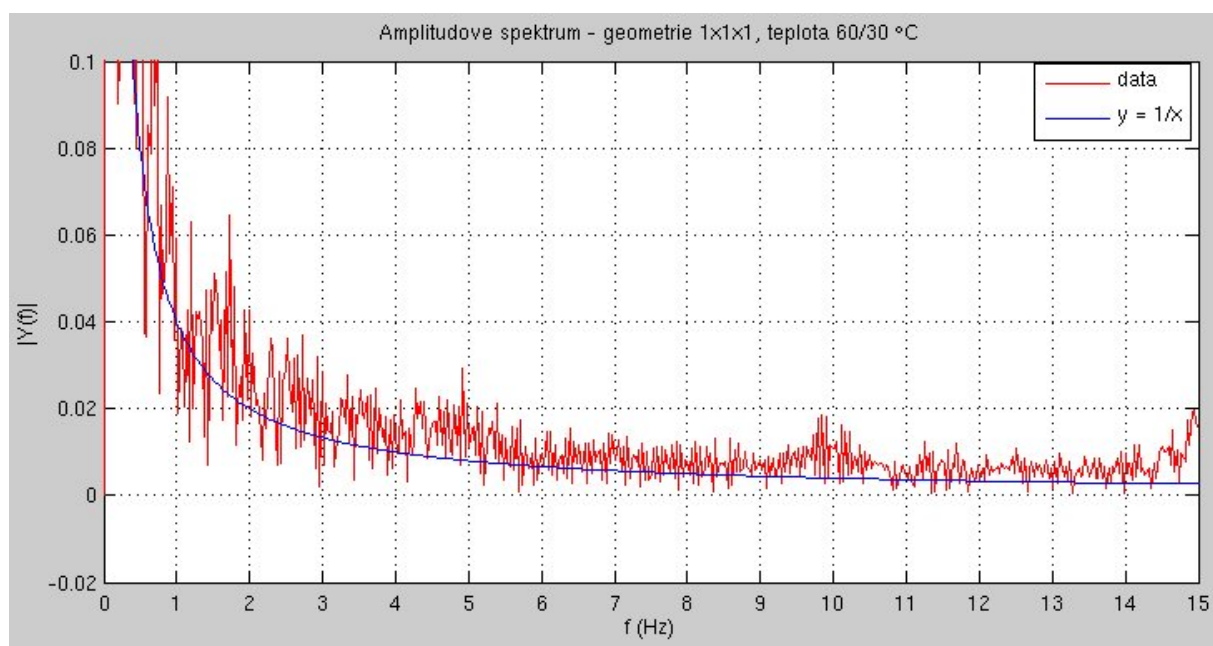
kde g představuje tíhové zrychlení Země, λ vlnovou délku vlny, l hloubku nádoby, σ povrchové napětí kapaliny a ρ hustotu kapaliny.

Těmto teoretickým vztahům odpovídají pro základní vlnu délky 20 cm (půlvlna v nádobě) a vyšší harmonické vlny následující frekvence:

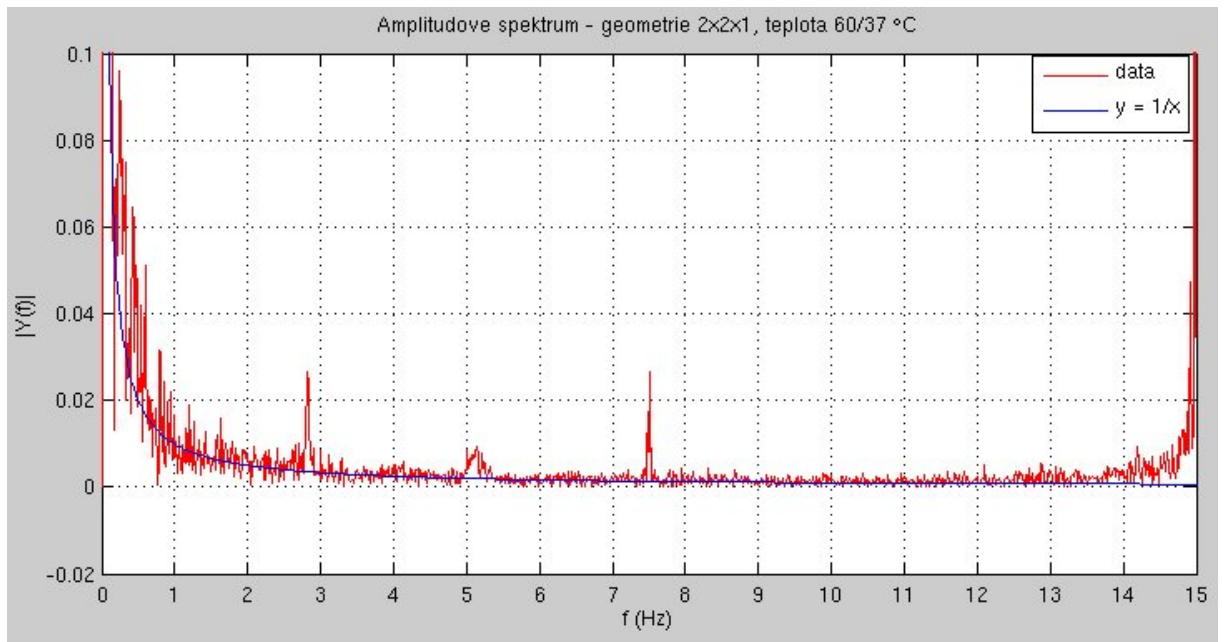
hloubka [cm]	v_{f_g} [ms ⁻¹]	f_0 [Hz]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
2	0.42	2.09	4.17	6.26	8.34
5	0.54	2.68	5.35	8.03	10.70
10	0.56	2.79	5.58	8.37	11.16

Tabulka 5.1: Fázové rychlosti a frekvence pro dané geometrie o podstavě 10x10 cm, s hloubkou 2, 5 a 10 cm.

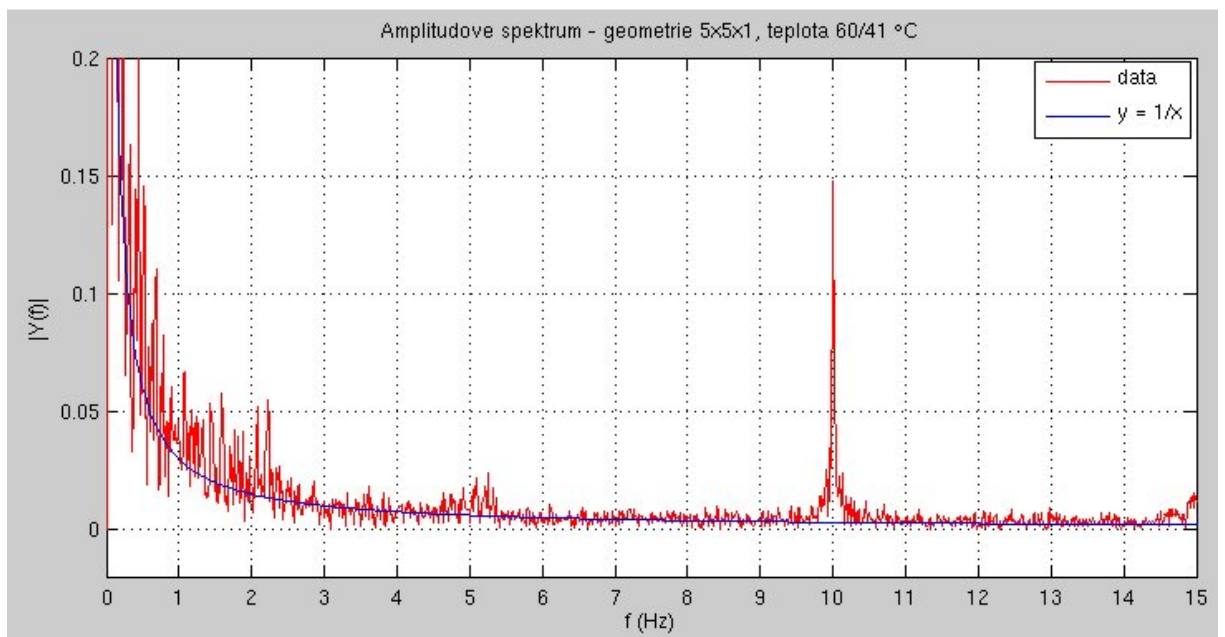
Jak je vidět, ve spektru velkého objemu vody (10x10x10 cm - geometrie 1x1x1) se povrchové vlny spíše neobjevují, ve spektru jsou patrné pouze náznaky (viz obr. 5.9). Je možné je sledovat jen lokálně, pro spektrum spočítané z pixelů blízko povrchu. V amplitudových spektrech menších geometrií jsou však již tyto povrchové efekty dostatečně silné a objeví se i ve spektru spočítaného z celé plochy stínítka (viz obr. 5.10). Frekvence se mírně liší od frekvencí spočítaných výše v tabulce, což je ale způsobeno nedokonalou znalostí všech parametrů (např. nebyla zohledněna teplota vody). Pro geometrii velmi nízkou (2x10x10 cm - geometrie 5x5x1) nebylo přesvědčivé množství dat, lokálně se objevuje pík u 2.2 Hz, který by odpovídal základní frekvenci povrchové vlny, globálně se však v datech objevila velmi diskrétní frekvence 10 Hz, která vznikla nejspíš mimo experiment. Podobné je to s diskrétní frekvencí 15 Hz u geometrie 2x2x1 (5x10x10 cm). Vysvětlení těchto frekvencí, jež leží na takto specifických hodnotách, se zdá být mimo experiment - nejspíše se jedná o rušení ze sítě, které je přenášeno elektrickým zdrojem projektoru.



Obrázek 5.9: Amplitudové spektrum geometrie 1x1x1 (10x10x10 cm)



Obrázek 5.10: Amplitudové spektrum geometrie 2x2x1 (5x10x10 cm)

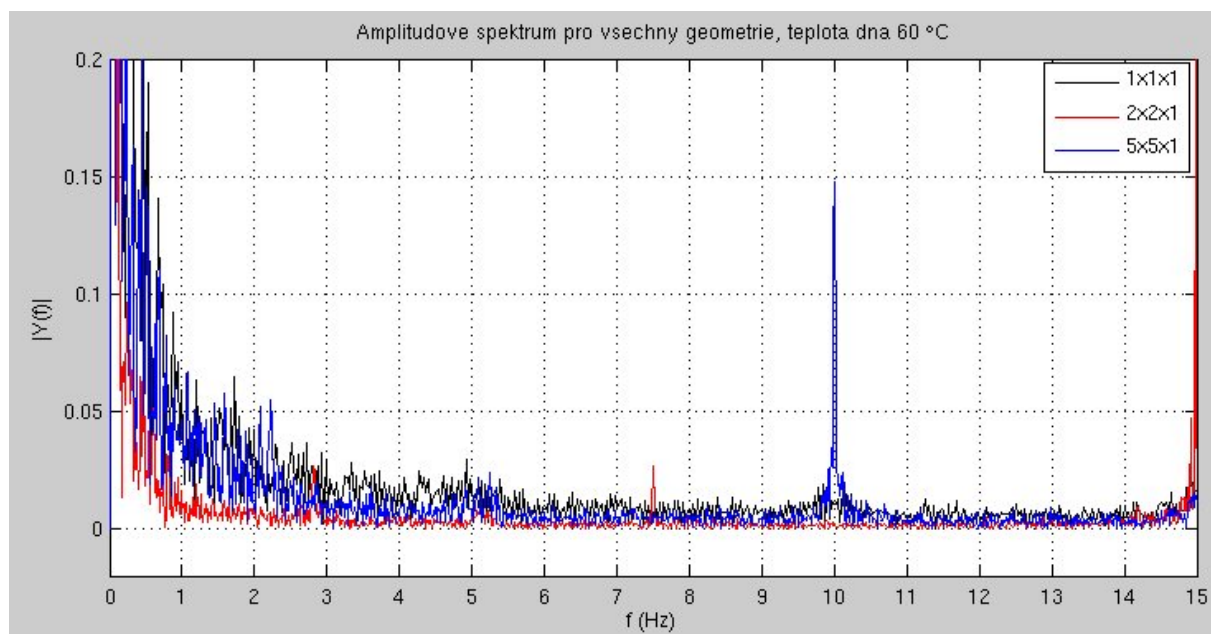


Obrázek 5.11: Amplitudové spektrum geometrie 5x5x1 (2x10x10 cm)

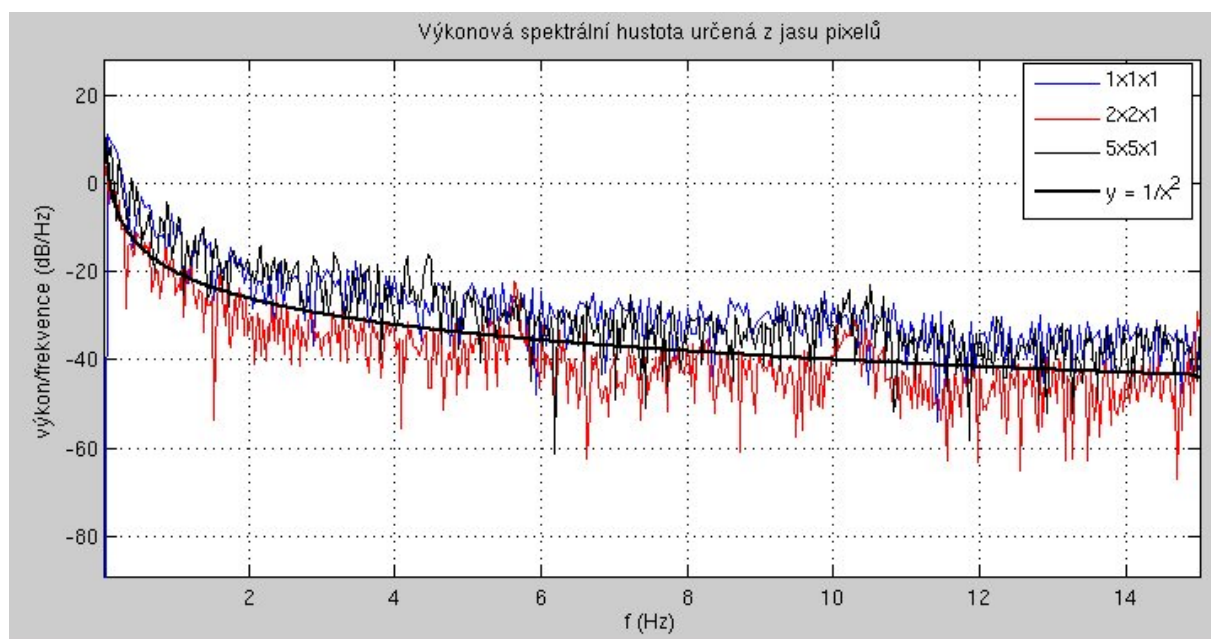
Zvláště zajímavé však je: pozorujeme anomální chování geometrie 2x2x1, stejně jako u numerických modelů v kapitole 4, v nichž geometrie 2x2x1 vykazovala nejnižší kritická Rayleighova čísla pro chaotické režimy a obdobně se chovala i v závislosti Nusseltova čísla na čísle Rayleighově. Obdobně zde, na obr. 5.12, je patrný posun spektra této geometrie, který nejspíše souvisí s velikostí jedné konvekční buňky - v geometrii 2x2x1 je poměr šířky a hloubky právě jen o něco vyšší než poměr, pro nějž může vzniknout již jedna konvekční buňka.

Dále je amplitudové spektrum dobře vystihnuteľné funkcí $y = 1/x$, tedy stejně jako data získaná z časového vývoje Nusseltova čísla numericky modelovaných ge-

ometrií. Ve výkonové spektrální hustotě totiž pak lze očekávat spektrální spád jako $y(f) = 1/f^2$, což odpovídá, stejně jako v numerickém případě, spektru hnědého (Brownova) šumu. Obrázek výkonové spektrální hustoty nese číslo 5.13.



Obrázek 5.12: Porovnání amplitudových spekter geometrií 1x1x1, 2x2x1 a 5x5x1



Obrázek 5.13: Výkonová spektrální hustota (PSD) pro experiment geometrií 1x1x1, 2x2x1 a 5x5x1, porovnána s funkcí $y = 1/x^2$

Lze tedy shrnout, že v rámci numerických modelů představených v této práci a tohoto experimentu je možné sledovat jisté podobnosti, a tím do jisté míry ověřit i správnost numerických modelů. Za prvé byla ukázána numerická i experimentální odlišnost modelů 2x2x1, související se vznikem právě jedné kon-

vekční buňky. Dále byl ukázán charakter šumu v chaotickém režimu, v numerickém případě demonstrován na časovém vývoji Nusseltova čísla, v experimentu demonstrován na změně jasnosti jednotlivých bodů v průmětu kapaliny. Tento šum odpovídá charakteristice hnědého šumu, a je tak pravděpodobně generován principem náhodné procházky. To odpovídá definici chaotického režimu, čímž je dosažení tohoto režimu i v numerickém případě potvrzeno.

Závěr

Diplomová práce se zaměřila na systematické prozkoumání kritických Rayleighových čísel kartézských modelů ve dvou a třech dimenzích s podmínkou nulové rychlosti na hranicích, pevně předepsanou teplotou na spodní a svrchní hranici a nulovým tepelným tokem na svislých hranicích. V modelech byla uvažována vrstevnatá viskozita a konstantní, nebo teplotně a s hloubkou závislé parametry teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti. Systém byl popsán bezrozměrnou klasickou Boussinesqovou aproximací.

V rámci diplomové práce byla představena metoda pro výpočet obdobného problému popsaného výše. Pro řešení Stokesovy úlohy (rovnice 1.5 a 1.6) byla navržena maticová metoda a pro řešení termální rovnice (1.7) byla navržena metoda Eulerova.

Samotné výpočty pak byly prováděny v prostředí komerčního software Comsol, a tedy pomocí konečných prvků.

Sestavený model v softwaru Comsol byl otestován dle článku Blankenbacha a kol. (Blankenbach et al., 1989), (viz tabulka 3.17). Následně byly spočítány časové vývoje termální konvekce pro 2D modely poměrů stran 1x1, 2x1, 5x1 a 10x1 a pro 3D modely poměrů stran 1x1x1 a 5x5x1, v jednom případě také 2x2x1. V těchto modelech byla pozorována citlivost kritických Rayleighových čísel na vrstevnatý model viskozity (viskozita byla buď konstantní, nebo v poměru 1x10x1, 1x10x100, nebo byla nastavena dle modelu podobného podmínkám v Zemi, viz tabulka 3.4). Dále byla studována citlivost na přítomnost/nepřítomnost teplotní a hloubkové závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti. V popředí zájmu stál také vliv geometrie jednotlivých struktur. Na závěr byly výsledky numerických modelů ve spektrální oblasti porovnány s experimentem.

Na základě provedených numerických simulací je možné formulovat tyto závěry:

- Největší vliv na hodnoty kritických Rayleighových čísel má model viskozity. Rozdíl hodnoty Rayleighových čísel mezi jednotlivými modely viskozity může být i více než řádový, a to i pro první kritické Rayleighovo číslo. Model viskozity se nejvíce projevuje u nižších Rayleighových čísel, pro vysoká Rayleighova čísla vliv viskozity klesá.
S rostoucí průměrnou viskozitou vzrůstají i hodnoty kritických Rayleighových čísel. Tento jev je v souladu s fyzikální úvahou, v níž viskozita stabilizuje jednotlivé režimy.
Kontrastní modely viskozity vedou k tvorbě vrstev odlišných teplot a výrazných gradientů teploty na hranicích těchto vrstev.
Modely se Zemi podobným průběhem viskozity vykazovaly obdobné chování jako modely s kontrastními modely viskozity výše. Byla pozorována vrstva snížené viskozity a její vliv na tvar a rychlost konvekce.
- Geometrie systému dále ovlivňuje v největší míře Rayleighova čísla pro nejvyšší režimy, poměr změny kritického Rayleighova čísla pro počátek konvekce vlivem geometrie se pohyboval v řádu jednotek, zatímco pro chaotický režim již mohl rozdíl těchto čísel činit i více než řád. Geometrie tak více ovlivňuje přechod do vyšších režimů než samotný počátek konvekce.
S rostoucí horizontální rozsáhlostí modelů (tedy s větším poměrem stran)

kritická Rayleighova čísla jednotlivých režimů klesají. I tento jev odpovídá vstupní představě. Horizontálně rozsáhlejší modely mají více prostoru a méně vlivu hranice. Vliv geometrie posouvá všechna kritická Rayleighova čísla obdobně, nemění tvar křivky.

- Velmi výrazný vliv na modely má hraniční podmínka, která systémy stabilizuje, a vede tak k navýšení kritických Rayleighových čísel, a to zvláště pro periodický a chaotický režim. Vliv hranice je velmi patrný u modelů 2D 1x1 a 3D 1x1x1, u ostatních modelů vliv rychle slábne.
- Funkční závislost teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti ovlivila jinak modely s malými poměry stran (např. 2D geometrie 1x1) a jinak modely s poměry stran většími (např. 2D geometrie 10x1). V případě modelů s malými poměry stran hodnota kritických Rayleighových čísel pro periodický či chaotický režim v modelech s konstantní viskozitou vzrůstala, v ostatních modelech hodnoty poklesly. Teplotní roztažnost v některých případech neměla na změnu kritických Rayleighových čísel vliv, tepelná vodivost se projevovala více a ve většině případů kritická Rayleighova čísla jejím účinkem poklesla. Působení obou funkčních závislostí najednou ve většině případů vedlo k snazšímu dosažení vyšších režimů (pro nižší Rayleighova čísla) než v případě, kdy měla teplotní roztažnost a tepelná vodivost konstantní hodnotu. Přítomnost funkční závislosti teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti dále vede ke tvorbě širších čel stoupajících/klesajících plum a k napřímení proudů, dále sledujících vertikálu.
Na základě otázky z úvodu práce: Přítomnost funkčních závislostí vede ke snížení kritických Rayleighových čísel, již méně ovlivňuje křivky závislosti Nusseltova čísla na Rayleighově čísle.
- Závislost Nusseltových čísel na Rayleighových číslech byla velmi citlivá na model viskozity a dále na geometrii, spíše necitlivá byla k funkčně závislým parametrům teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti.
- Časový vývoj Nusseltova čísla pro chaotické režimy odpovídá charakteristice hnědého (Brownova) šumu, výkonová spektrální hustota spadá dle funkce $y = 1/f^2$. Tento poznatek byl ověřen i experimentálně.

Závěrem bych chtěla vymezit další možnosti zkoumání tohoto tématu a jeho rozšiřování. V první řadě by bylo třeba zvýšit počet geometrií a zaměřit měření zvláště na ty horizontálně rozsáhlé (v mé diplomové práci byla horizontálně nejrozsáhlejší oblastí ve 2D s poměrem stran 10x1 a ve 3D s poměrem stran 5x5x1) a také rozšířit výsledky o sférické modely. Dále by bylo možné prozkoumat více viskózních modelů. Je také možné měnit funkční závislost parametrů či rovnice přepsat z bezrozměrných na rozměrné a dané modely srovnat s experimentem.

Považovala bych za velmi přínosné k těmto cílům (zvláště co se rozlehlosti modelů týče) použít mojí navržené numerické metody, neboť stávající modelování pomocí Comsolu je velmi časově náročné. Stejně tak výpočty spekter v experimentální části byly extrémně časově náročné, a to vzhledem k velikému nárůstu počítaných matic, a proto i zde by byla metoda paralelizované sady FFT počítaných na grafické kartě velkým přínosem.

Literatura

- [1] Blankenbach, B., Busse, F., Christensen, U., Cserepes, L., Gunkel, D., Hansent, B., Harderg, H., Jarvis, G., Koch, M., Marquartfly, G., Moore, D., Olson, P., Schmelting, H., and Schnaubelt, T. A benchmark comparison for mantle convection codes in *Geophys. J. Int.* 98 (1989), 23-38.
- [2] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B. *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000, 2. vyd.
- [3] Busse, F. H. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below in *J. Math. Phys.* 46 (1967), 140-150.
- [4] Comsol Multiphysics. Material Library User's Guide, Comsol 2011
- [5] Dziewonski, A.M., Anderson, D.L. Preliminary reference Earth model in *Phys. Earth Plan. Int.* 25 (1981), 297-356.
- [6] Evans, S.A. *Constraints on the viscosity of the Earth's mantle beneath the South Pacific*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1994.
- [7] Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. *Feynmanovy přednášky z fyziky I*. Praha: Fragment, 2000.
- [8] Forte, A.M. Constraints on Seismic Models from Other Disciplines – Implications for Mantle Dynamics and Composition in *Treatise on Geophysics*, 2007, 805 - 858.
- [9] Gerya, T.V., Yuen, D.A. Characteristics-based marker-in-cell method with conservative finite-differences schemes for modeling geological flows with strongly variable transport properties in *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 140 (2003), 293–318.
- [10] Gill, A.E. *Atmosphere–Ocean Dynamics*, Volume 30 de International geophysics series. Academic Press, 1982
- [11] Korenaga, V., Jordan, T.H. Effects of vertical boundaries on infinite Prandtl number thermal convection in *Geophys. J. Int.* 147 (2001), 639–659.
- [12] Rizzoli, P. Surface gravity waves in *Wave Motion in the Ocean and the Atmosphere* Massachusetts (2008), 1-13.
- [13] Stacey, F.D. *Physics of the Earth*, Stacey, Wiley, New York, 2. vyd.
- [14] Tosi, N., Yuen, D.A., de Koker, N., Wentzcovitch, R.M. Mantle dynamics with pressure- and temperature-dependent thermal expansivity and conductivity in *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 217 (2013), 48–58.
- [15] Venturi D., Salvigni, S. Stochastic natural convection in square enclosures with horizontal isothermal walls in *XXV Congresso Nazionale UIT sulla Trasmissione del Calore* (2007), 1-6.

Přehled naměřených kritických Rayleighových čísel

A. Geometrie 2D čtverec 1x1

konstantní parametry $\alpha, \kappa = konst.$

viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	2,65E+3	8,15E+3	3,70E+4
2. stacionární	2,73E+4	2,90E+4	8,00E+5
periodický	1,55E+5	3,00E+5	2,00E+6
chaotický	1,75E+6	2,00E+6	7,00E+6

funkčně závislý parametr $\alpha = \alpha(T, z), \kappa = konst.$

viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	3,00E+3	6,00E+3	9,00E+4
2. stacionární	2,00E+4	1,00E+4	7,50E+5
periodický	2,00E+5	2,00E+5	2,00E+6
chaotický	3,00E+6	3,00E+6	1,50E+7

funkčně závislý parametr $\kappa = \kappa(T, z), \alpha = konst.$

viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	3,00E+3	7,00E+3	4,00E+4
2. stacionární	2,00E+4	2,00E+4	6,00E+5
periodický	4,00E+5	3,00E+5	9,00E+5
chaotický	2,00E+6	3,00E+6	2,00E+7

funkčně závislé parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$

viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	2,50E+3	6,00E+3	3,40E+4
2. stacionární	2,00E+4	3,00E+4	6,00E+5
periodický	2,00E+5	1,00E+5	1,00E+6
chaotický	3,00E+6	2,00E+6	1,00E+7

Zemi podobný průběh viskozity dle tabulky č. 3.4

režim daného Ra_c	$\alpha, \kappa = konst.$	$\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z).$
1. stacionární	1.30E+3	1.20E+3
2, stacionární	2.00E+4	1.00E+4
periodický	9.00E+4	1.00E+5
chaotický	8.00E+5	1.00E+6

B. Geometrie 2D obdélník 2x1

konstantní parametry $\alpha, \kappa = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	2,50E+3	4,50E+3	2,50E+4
2, stacionární	4,00E+4	3,50E+5	1,50E+5
periodický	1,10E+5	4,00E+5	7,00E+5
chaotický	1,20E+5	5,00E+5	2,00E+6

funkčně závislý parametr $\alpha = \alpha(T, z), \kappa = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	2,00E+3	5,50E+3	2,00E+4
2, stacionární	3,00E+4	1,00E+5	1,00E+5
periodický	1,50E+5	9,00E+5	7,50E+5
chaotický	2,00E+5	1,00E+6	2,00E+6

funkčně závislý parametr $\kappa = \kappa(T, z), \alpha = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	6,00E+3	6,00E+3	2,00E+4
2, stacionární	2,00E+4	8,00E+4	2,00E+5
periodický	9,00E+5	2,00E+6	7,00E+5
chaotický	1,00E+6	3,00E+6	3,00E+6

funkčně závislé parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	3,00E+3	4,50E+3	1,00E+4
2, stacionární	1,00E+4	1,00E+5	1,00E+5
periodický	2,00E+5	9,50E+5	7,00E+5
chaotický	1,00E+6	1,00E+6	2,00E+6

C. Geometrie 2D obdélník 5x1

konstantní parametry $\alpha, \kappa = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	1,50E+3	6,00E+3	3,00E+4
2, stacionární	2,00E+4	2,00E+4	1,00E+5
periodický	5,00E+4	2,00E+5	9,00E+5
chaotický	4,00E+5	5,00E+5	9,00E+6

funkčně závislý parametr $\alpha = \alpha(T, z), \kappa = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	2,00E+3	4,00E+3	2,00E+4
2, stacionární	1,00E+4	-	1,00E+5
periodický	4,00E+5	3,00E+5	9,00E+5
chaotický	7,00E+5	4,00E+5	2,00E+6

funkčně závislý parametr $\kappa = \kappa(T, z), \alpha = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	1,00E+3	6,00E+3	2,00E+4
2, stacionární	2,00E+4	1,50E+4	9,00E+4
periodický	3,00E+5	1,00E+5	8,00E+5
chaotický	7,00E+5	4,00E+5	3,00E+6

funkčně závislé parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	1,00E+3	6,00E+3	2,00E+4
2, stacionární	2,00E+4	1,00E+4	1,00E+5
periodický	3,00E+5	2,00E+5	9,00E+5
chaotický	7,00E+5	3,00E+5	2,00E+6

D. Geometrie 2D obdélník 10x1

konstantní parametry $\alpha, \kappa = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	1,50E+3	5,00E+3	2,00E+4
2, stacionární	1,00E+4	2,00E+4	8,00E+4
periodický	8,00E+4	9,00E+4	3,00E+5
chaotický	2,00E+5	3,00E+5	4,00E+6

funkčně závislý parametr $\alpha = \alpha(T, z), \kappa = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	1,00E+3	5,00E+3	2,00E+4
2, stacionární	2,00E+4	4,00E+4	8,00E+4
periodický	7,00E+4	8,00E+4	3,00E+5
chaotický	1,00E+5	3,50E+5	4,00E+6

funkčně závislý parametr $\kappa = \kappa(T, z), \alpha = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	1,00E+3	4,00E+3	1,00E+4
2, stacionární	1,00E+4	3,00E+4	7,00E+4
periodický	7,00E+4	7,00E+4	4,00E+5
chaotický	2,00E+5	2,00E+5	1,00E+6

funkčně závislé parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	1,00E+3	4,00E+3	1,00E+4
2, stacionární	9,00E+3	3,00E+4	2,00E+5
periodický	6,00E+4	7,00E+4	9,00E+5
chaotický	2,00E+5	2,00E+5	2,00E+6

Zemi podobný průběh viskozity dle tabulky č. 3.4

režim daného Ra_c	$\alpha, \kappa = konst.$	$\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z).$
1. stacionární	9,00E+2	9,00E+2
2, stacionární	8,00E+3	7,00E+3
periodický	5,00E+4	3,00E+4
chaotický	9,00E+4	7,00E+4

E. Geometrie 3D krychle 1x1x1

konstantní parametry $\alpha, \kappa = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	3,25E+3	1,00E+4	1,00E+4
2, stacionární	6,00E+4	1,00E+5	7,00E+4
periodický	1,50E+5	4,00E+5	6,00E+5
chaotický	2,00E+5	9,00E+5	2,00E+6

funkčně závislý parametr $\alpha = \alpha(T, z), \kappa = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	4,00E+3	8,00E+4	2,00E+4
2, stacionární	2,00E+4	1,00E+5	7,00E+4
periodický	2,00E+5	1,00E+6	5,00E+5
chaotický	5,00E+5	2,00E+6	2,00E+6

funkčně závislý parametr $\kappa = \kappa(T, z), \alpha = konst.$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	4,00E+3	8,00E+4	2,00E+4
2, stacionární	2,00E+4	1,00E+5	7,00E+4
periodický	2,00E+5	2,00E+6	4,00E+5
chaotický	1,00E+6	3,00E+6	5,00E+6

funkčně závislé parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$

	viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$		
režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	2,00E+3	9,00E+3	1,00E+4
2, stacionární	3,00E+4	2,00E+5	6,00E+5
periodický	6,00E+5	1,00E+6	3,00E+6
chaotický	2,00E+6	2,00E+6	6,00E+6

Zemi podobný průběh viskozity dle tabulky č. 3.4

režim daného Ra_c	$\alpha, \kappa = konst.$	$\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z).$
1. stacionární	2,50E+3	3,00E+3
2, stacionární	2,00E+4	1,00E+4
periodický	2,00E+5	9,00E+4
chaotický	1,00E+6	8,00E+5

F. Geometrie 3D kvádr 2x2x1

Zemi podobný průběh viskozity dle tabulky č. 3.4

režim daného Ra_c $\alpha, \kappa = konst.$ $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z).$

1. stacionární	1,50E+3
2, stacionární	9,00E+3
periodický	3,00E+4
chaotický	2,00E+5

G. Geometrie 3D kvádr 5x5x1

konstantní parametry $\alpha, \kappa = konst.$

viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

režim daného Ra_c	1x1x1	1x10x1	1x10x100
1. stacionární	3,00E+3	1,00E+4	2,00E+4
2, stacionární	8,00E+3	-	-
periodický	3,00E+4	2,00E+5	3,00E+5
chaotický	1,00E+6	3,00E+5	9,00E+5

funkčně závislé parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$

viskozita $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

režim daného Ra_c	1x1x1
1. stacionární	3,00E+3
2, stacionární	8,00E+3
periodický	3,00E+4
chaotický	1,00E+5

Seznam použitých symbolů

α	[K ⁻¹]	součinitel teplotní roztažnosti
η	[Pa.s]	dynamická viskozita
κ	[Wm ⁻¹ K ⁻¹]	součinitel tepelné vodivosti
p	[Pa]	tlak
Nu	bezrozměrné	Nusseltovo číslo
Ra	bezrozměrné	Rayleighovo číslo
T	[K]	teplota
v	[ms ⁻¹]	rychlost

Seznam tabulek

3.1	Vlastnosti konvekce boxu 1x1 s konstantními parametry	34
3.2	Koeficienty pro funkci tepelné roztažnosti	36
3.3	Koeficienty pro funkci tepelné vodivosti	37
3.4	Průběh viskozity ve zvoleném modelu	39
5.1	Fázové rychlosti a frekvence pro dané geometrie o podstavě 10x10 cm, s hloubkou 2, 5 a 10 cm.	73

Seznam obrázků

1.1	Vrstevnatý model	6
3.1	Ukázka nasíťované oblasti ve 2D (vlevo) a ve 3D (vpravo)	14
3.2	Kondukční režim	18
3.3	Konvekční režim - 1. stacionární režim (2. stacionární režim vypadá kvalitativně stejně)	18
3.4	Konvekční režim - periodický režim	19
3.5	Konvekční režim - chaotický režim (zeleně) v porovnání se stacionárním režimem (červeně)	19
3.6	Podkritické Ra číslo pouze indukční režim ($Ra = 1 \cdot 10^2$)	20
3.7	První nadkritické Ra číslo: stacionární režim ($Ra = 5 \cdot 10^3$)	21
3.8	Druhé nadkritické Ra číslo: druhý stacionární režim ($Ra = 5 \cdot 10^4$)	22
3.9	Třetí nadkritické Ra číslo: periodický režim ($Ra = 5 \cdot 10^5$)	23
3.10	Čtvrté nadkritické Ra číslo: chaotický režim ($Ra = 5 \cdot 10^6$)	24
3.11	Nusseltovo číslo pro model s konstantní viskozitou geometrie 1x1 - přechod mezi indukčním a konvekčním režimem	25
3.12	Teplota průměrovaná v horizontální rovině pro model s konstantní viskozitou geometrie 1x1 - přechod mezi indukčním a konvekčním režimem	26
3.13	Nusseltovo číslo pro model s vrstevnatou viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$ geometrie 10x1 - přechod mezi prvním a druhým stacionárním režimem	27
3.14	Nusseltovo číslo pro model s vrstevnatou viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$ geometrie 10x1 - přechod mezi periodickým a chaotickým režimem	28
3.15	Nusseltovo číslo pro model s vrstevnatou viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$ geometrie 10x1 - přechod mezi druhým stacionárním a periodickým režimem	29
3.16	Nusseltovo číslo pro model s konstantní viskozitou geometrie 1x1 - přechod mezi periodickým a chaotickým režimem	30
3.17	Srovnání hodnot Nu , V_{max} , V_{aver} , q_1 a q_2 z článku (Blankenbach et al., 1989) a hodnot získaných pomocí simulace v Comsolu	31
3.18	Nusseltova čísla Nu v testovaných modelech	32
3.19	Tepelný tok q_1 v testovaných modelech	32
3.20	Tepelný tok q_2 v testovaných modelech	33
3.21	Testovací model pro $Ra = 10^4$ dle článku (Blankenbach et al., 1989)	33
3.22	Testovací model pro $Ra = 10^5$ dle článku (Blankenbach et al., 1989)	34
3.23	Testovací model pro $Ra = 10^6$ dle článku (Blankenbach et al., 1989)	34
3.24	modelované oblasti ve 3D (výše) a ve 2D (níže)	35
3.25	Funkce teplotní roztažnosti dle rovnice (3.2)	36
3.26	Funkce tepelné vodivosti dle rovnice (3.3)	37
3.27	Funkce teplotní roztažnosti a tepelné vodivosti dle rovnic (3.2) a (3.3), a to pro model geotermie Země dle (Stacey, 1977).	38
3.28	Funkce po částech konstantní viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ a $\eta_i = (1, 10, 100)$	39
3.29	Funkce po částech konstantní viskozity užitý pro simulace	40

4.1	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrii 10x1 s konstantní viskozitou.	41
4.2	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 3D geometrii 1x1x1 s konstantní viskozitou.	42
4.3	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrie s vrstevnatými modely viskozity.	43
4.4	Rychlostní a teplotní pole v bezrozměrných jednotkách v modelovém čtverci 1x1 s průběhem viskozity $\eta_i = (1, 10, 100)$, Rayleighovo číslo je $Ra = 5 \cdot 10^6$	43
4.5	Nusseltovo číslo pro model čtverce 1x1 s průběhem viskozity $\eta_i = (1, 10, 100)$ (obr. 4.4), Rayleighovo číslo je $Ra = 5 \cdot 10^6$	44
4.6	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrie s konstantní viskozitou.	45
4.7	Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číselch pro 2D geometrie s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ a s konstantní viskozitou	45
4.8	Srovnání kritických Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi s konstantní viskozitou.	46
4.9	Srovnání kritických Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi s různými modely viskozity.	47
4.10	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrie s viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$	48
4.11	Srovnání kritických Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi s viskozitou $\eta_i = (1, 10, 1)$	48
4.12	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrie s viskozitou $\eta_i = (1, 10, 100)$	49
4.13	Srovnání kritických Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi s viskozitou $\eta_i = (1, 10, 100)$	49
4.14	Horizontálně průměrovaná teplota v buňce 1x1 pro model s konstantní viskozitou funkčně závislou teplotní roztažností a tepelnou vodivostí (zeleně) v porovnání s geotermou Země dle (Stacey, 1977).	50
4.15	Průběh funkce teplotní roztažnosti (nahore) a tepelné vodivosti (dole) v modelu 1x1 s konstantní viskozitou (výpočet na základě horizontálně průměrované teploty dle obr. 4.14). Průběh funkce je porovnán s jejím průběhem na základě geotermy Země dle (Stacey, 1977, obr. 3.27).	51
4.16	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrii 1x1 s konstantní viskozitou.	52
4.17	Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číselch pro 2D čtverec 1x1 s konstantní viskozitou s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ (modře) a s funkčně závislými parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$ (červeně)	53
4.18	Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číselch pro 3D krychli 1x1x1 konstantní viskozity s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ a s funkčně závislými parametry konstantními parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$	53

4.19	Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 2D modely 1x1 a 10x1 konstantní viskozity s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ (modrá a zelená) a s funkčně závislými parametry konstantními parametry $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$ (červená a hnědá). . . .	54
4.20	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrie s konstantní viskozitou.	55
4.21	Srovnání kritických Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi s konstantní viskozitou.	55
4.22	Model 2D geometrie 1x1 s konstantní viskozitou, Rayleighovo číslo $Ra = 5 \cdot 10^6$, teplotní pole (červená je teplota 1, modrá je teplota 0). Vlevo nahoře teplotní pole pro $\alpha, \kappa = konst.$, vpravo nahoře $\alpha = \alpha(T, z), \kappa = konst.$, vlevo dole $\alpha = konst., \kappa = \kappa(T, z)$ a vpravo dole funkčně závislé oba parametry, $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$	56
4.23	Model 3D krychle 1x1x1 s konstantní viskozitou, pro Rayleighovo číslo $Ra = 2 \cdot 10^6$, teplotní pole (červená až žlutá - bezrozměrná teplota 1 - 0.6; modrá až zelená - bezrozměrná teplota 0 - 0.4). Vlevo model s konstantními hodnotami $\alpha, \kappa = konst.$, vpravo funkčně závislé $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$	57
4.24	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrii 10x1 s různými modely viskozity.	58
4.25	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 3D geometrii 1x1x1 s různými modely viskozity.	58
4.26	Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 3D krychli 1x1x1 s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ s Zemi podobným průběhem viskozity (modře) a s konstantní viskozitou (červeně)	59
4.27	Model 3D kvádrů 5x5x1 s konstantní viskozitou, pro Rayleighovo číslo $Ra = 5 \cdot 10^6$, teplotní pole (červená až žlutá - bezrozměrná teplota 1 - 0.6; modrá až zelená - bezrozměrná teplota 0 - 0.4). Nahoře model s konstantními hodnotami $\alpha, \kappa = konst.$, dole funkčně závislé $\alpha, \kappa = \alpha, \kappa(T, z)$	60
4.28	Kritická Rayleighova čísla pro 2D a 3D geometrie se Zemi podobným průběhem viskozity a s konstantní viskozitou.	61
4.29	Teplotní pole pro model 2D 1x1 pro průběh viskozity podobný Zemi, s funkčně závislými parametry α a κ , pro $Ra = 9 \cdot 10^4$	61
4.30	Teplotní pole pro model 2D 10x1 pro průběh viskozity podobný Zemi, s funkčně závislými parametry α a κ , pro $Ra = 2 \cdot 10^5$ (nahore) a $Ra = 2 \cdot 10^6$ (dole).	62
4.31	Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro 3D krychli 1x1x1 s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ s Zemi podobným průběhem viskozity (modře) a s konstantní viskozitou (červeně)	62
4.32	Srovnání závislosti Nusseltových čísel na Rayleighových číslech pro modely s konstantními parametry $\alpha, \kappa = konst.$ a se Zemi podobným průběhem viskozity.	63
4.33	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 2D geometrii 10x1 se Zemi podobným průběhem viskozity.	64

4.34	Srovnání kritických Rayleighových čísel pro 3D geometrii 1x1x1 se Zemi podobným průběhem viskozity.	64
4.35	Srovnání závislosti Rayleighových čísel mezi 2D a 3D geometriemi se Zemi podobným průběhem viskozity.	65
4.36	Model 3D kvádrů 2x2x1 se Zemi podobným průběhem viskozity, pro Rayleighovo číslo $Ra = 5 \cdot 10^6$, teplotní pole (červená až žlutá - bezrozměrná teplota 1 - 0.6; modrá až zelená - bezrozměrná teplota 0 - 0.4).	65
5.1	Časová závislost Nusseltova čísla pro vybraný 3D model 5x5x1 s modelem viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ a pro Rayleighova čísla $Ra = 5 \cdot 10^5, 7 \cdot 10^5$ a $6 \cdot 10^6$	66
5.2	Frekvenční závislost Nusseltova čísla pro vybraný 3D model 5x5x1 s modelem viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ a pro Rayleighova čísla $Ra = 5 \cdot 10^5, 7 \cdot 10^5$ a $6 \cdot 10^6$	67
5.3	Výkonová spektrální hustota signálu závislosti Nusseltova čísla na čase pro vybraný 3D model 5x5x1 s modelem viskozity $\eta_i = (1, 10, 1)$ a pro Rayleighova čísla $Ra = 5 \cdot 10^5, 7 \cdot 10^5$ a $6 \cdot 10^6$	67
5.4	Skleněná nádoba s temperovanou hliníkovou podložkou	68
5.5	Schéma experimentu	69
5.6	Závislost Rayleighových čísel na rozdílu teploty spodní a horní hranice pro geometrie 1x1x1 (0.1), 2x2x1 (0.05) a 5x5x1 (0.02).	70
5.7	Snímek stínítka pro krychli vody 10x10x10 cm, jejíž dno bylo temperováno na 60°C, povrch vody činil 30°C.	71
5.8	Ukázka časových řad - zde z experimentu geometrie 5x5x1, teplota 60/41°C.	72
5.9	Ampitudové spektrum geometrie 1x1x1 (10x10x10 cm)	73
5.10	Ampitudové spektrum geometrie 2x2x1 (5x10x10 cm)	74
5.11	Ampitudové spektrum geometrie 5x5x1 (2x10x10 cm)	74
5.12	Porovnání amplitudových spekter geometrií 1x1x1, 2x2x1 a 5x5x1	75
5.13	Výkonová spektrální hustota (PSD) pro experiment geometrií 1x1x1, 2x2x1 a 5x5x1, porovnána s funkcí $y = 1/x^2$	75