

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Michaela Káňová

## **Insolace a povrchová teplota na planetách mimo sluneční soustavu**

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Marie Běhouňková, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2013

Ráda bych poděkovala své školitelce RNDr. Marii Běhounkové, Ph.D. za vlídné vedení. Nebýt její trpělivosti, nesčetných rad a obrovského množství vynaloženého času, nikdy by tato práce nevznikla. Celé Katedře geofyziky pak děkuji za vytvoření přívětivého prostředí.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Insolace a povrchová teplota na planetách mimo sluneční soustavu

Autor: Michaela Káňová

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Marie Běhounková, Ph.D., Katedra geofyziky

Abstrakt: V předkládané práci je představen numerický model popisující změny insolace a vývoj povrchové teploty na idealisované kamenné extrasolární planetě bez atmosféry, uzamčené působením slapů ve spin-orbitální resonanci. Studium tohoto vývoje se zakládá na řešení rovnice vedení tepla v kulové slupce se speciálními okrajovými podmínkami. Diskutujeme zde závislost průběhu povrchové teploty na fyzikálních a geometrických parametrech, jako jsou výstřednost oběžné dráhy, sklon rotační osy, typ resonance, tepelná setrvačnost a hustota zářivého toku při povrchu planety (extrasolární konstanta). Průměrná roční teplota na studované planetě může v nejsilněji ozařovaných bodech dosahovat až tisíce kelvinů a je dle očekávání určena především extrasolární konstantou. Na škále stovek kelvinů ji pak ovlivňuje kombinace excentricity a sklonu rotační osy, v některých případech i tepelná setrvačnost.

Klíčová slova: exoplanety, insolace, povrchová teplota

Title: Insolation pattern and surface temperature on extrasolar planets

Author: Michaela Káňová

Department: Department of Geophysics

Supervisor: RNDr. Marie Běhounková, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: We study evolution and distribution of surface and near-surface temperature on tidally locked extrasolar terrestrial planets without atmosphere. In order to determine the temperature, insolation patterns depending on eccentricity, obliquity and spin-orbit resonance are computed and thermal diffusion equation is solved in a spherical shell. We discuss the dependence of temperature distribution on physical and geometrical parameters including orbit eccentricity, obliquity of rotational axis, type of spin-orbital resonance, thermal inertia and irradiance incident on the planetary surface (the extrasolar constant). The mean annual temperature is driven especially by the extrasolar constant and may rise up to thousand of kelvins in the most irradiated regions. Effect of eccentricity, obliquity and thermal inertia, in some cases, is on the scale of hundreds of kelvins.

Keywords: exoplanets, insolation, surface temperature

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Extrasolární planety</b>	<b>2</b>
1.1 Metody detekce . . . . .	2
1.2 Shrnutí fyzikálních vlastností . . . . .	3
<b>2 Změny povrchové teploty</b>	<b>4</b>
2.1 Insolace a její výpočet . . . . .	4
2.2 Keplerova rovnice . . . . .	5
2.3 Rovnice vedení tepla . . . . .	7
<b>3 Numerické řešení v jedné dimenzi</b>	<b>9</b>
3.1 Stacionární řešení . . . . .	9
3.2 Časově proměnné řešení . . . . .	12
3.3 Testy . . . . .	13
<b>4 Numerické řešení ve třech dimensích</b>	<b>16</b>
4.1 Stacionární řešení . . . . .	16
4.2 Okrajové podmínky . . . . .	18
4.3 Testy . . . . .	19
<b>5 Výsledky</b>	<b>21</b>
5.1 Časový vývoj teploty . . . . .	21
5.2 Vliv modelových parametrů . . . . .	23
5.3 Diskuse . . . . .	27
<b>Závěr</b>	<b>31</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>32</b>

# Úvod

Povrchová teplota na terestrických planetách Sluneční soustavy je silně ovlivňována množstvím zářivé energie přijímané ze Slunce. Vliv průběhu oslunění, neboli insolace, se projevuje zvláště u planet pozbývajících atmosféru, která by teplotu při povrchu stabilizovala. Insolaci Merkuru popisují například [1] a [2]. Současný rychlý rozvoj studia extrasolárních planet a zpřesňující se statistiky jejich parametrů [3] umožňují rozšířit analýzu povrchových teplot i mimo hranice Sluneční soustavy. Obvyklé detekční metody (transitní fotometrie, měření radiálních rychlostí) jsou nejcitlivější na tělesa obíhající v blízkosti své mateřské hvězdy. Většina známých exoplanet terestrického typu proto podléhá silným slapům, které mimo jiné způsobují jejich uzamčení ve spin-orbitální resonanci, nastávající na časové škále milionů let [4]. Dalším důsledkem slapového tření je postupná cirkularizace oběžné dráhy, tedy snižování její výstřednosti a hlavní poloosy. Planety na kruhové dráze se nacházejí převážně ve stavu vázané rotace (spin-orbitální resonance 1:1), při větších excentricitách však bývají pravděpodobnější jiné poměry rotační a oběžné periody, například 3:2, 2:1 nebo 5:2 (viz grafy v [8]). Nerovnoměrné ozáření a s tím související vysoké teplotní gradienty na povrchu planety dále ovlivňují plášťovou konvekci. Porozumění vlivu resonancí a dalších parametrů oběžné dráhy má tedy význam pro zpřesňování modelů termálního vývoje kamenných exoplanet.

Cílem této práce je představit jednoduchý numerický model, který bude popisovat vývoj teploty povrchové vrstvy. V první kapitole se seznámíme s metodami hledání extrasolárních planet a stručně shrneme současné poznatky o jejich statistikách. Druhá kapitola uvádí fyzikální teorii potřebnou ke studiu teplotních změn. Odvozeny jsou vztahy pro výpočet insolace, zmíněna je také rovnice vedení tepla a nelineární hraniční podmínka, vycházející z energetické bilance a Stefanova-Boltzmannova zákona. Třetí a čtvrtá kapitola se věnují samotnému počítačovému modelu, nejprve v jednorozměrné, radiálně symetrické variantě a poté v obecném třírozměrném tvaru. V poslední kapitole jsou popsány výsledky získané použitím tohoto modelu. Nahlédneme vliv výstřednosti dráhy, sklonu rotační osy, zářivého výkonu blízké hvězdy a termomechanických vlastností planetární kůry na maximální a minimální povrchovou teplotu a pro zvolené kombinace parametrů znázorníme její trojrozměrný časový průběh.

# 1. Extrasolární planety

Od objevu prvních planet nacházejících se mimo Sluneční soustavu uplynulo více než dvacet let. S postupným zpřesňováním měřicí techniky, a zvláště se zahájením misí, jejichž primárním úkolem je hledání exoplanet - ať již ze zemského povrchu nebo z vesmírných observatoří - začal počet jejich detekcí strmě narůstat. Internetová databáze [22] uvádí k 30. 7. 2013 celkem 725 potvrzených planet a 3161 kandidátů, které na svou klasifikaci dosud čekají. V následující kapitole bych ráda zmínila obvyklé metody detekce extrasolárních oběžnic a dosavadní poznatky o některých jejich vlastnostech. Údaje čerpám převážně z [5] a [6].

## 1.1 Metody detekce

Nejsnáze představitelným, avšak technologicky značně limitovaným, a tedy spíše okrajovým postupem k nalezení exoplanety je bezpochyby přímé zobrazení. Planeta samotná emituje slabé záření s maximem v infračervené oblasti, její povrch navíc odráží záření mateřské hvězdy. Srovnáním vizuálních jasností obou těles lze odhadnout poměr jejich poloměrů, přičemž odhad je tím přesnější, čím lépe známe orientaci dráhy, fázi a odrazivost planety. Z průběhu tepelného záření pak může být určena její povrchová teplota. Metoda přímého zobrazení vyžaduje vysokou rozlišovací schopnost měřicích přístrojů a je omezená na rozměrné, převážně mladé planety obíhající ve velké vzdálenosti okolo málo jasných hvězd.

Většina planet objevených do zahájení systematických fotometrických měření z kosmu (od roku 2006 mise *CoRoT*, od roku 2009 *Kepler*) byla zaznamenána metodou radiálních rychlostí, která ostatně vedla i k nalezení první oběžnice u hvězdy hlavní posloupnosti (51 Pegasi, viz [7]). Technika spočívá v dlouhodobém spektroskopickém studiu pohybu hvězdy, obíhající kolem společného těžiště s méně jasným (nepozorovatelným) tělesem. Měření jsou polohy význačných absorpčních čar, které se v důsledku tohoto pohybu a Dopplerova jevu periodicky posouvají mezi dvěma extrémními pozicemi, odpovídajícími největší rychlosti přibližování hvězdy k pozorovateli, nebo naopak nejrychlejšímu vzdalování. Zobrazení časového průběhu radiálních rychlostí umožňuje určit periodu  $P$ , výstřednost dráhy exoplanety  $e$  a úhel  $\omega$ , popisující vzdálenost periastra od průsečíku dráhy s rovinou kolmou na spojnici pozorovatele a hvězdy. Tato rovina se označuje jako obloha. Uvážení amplitudy změn radiální rychlosti vede na rovnici

$$\frac{PK^3(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi G} = \frac{m^3 \sin^3 i}{(M + m)^2} \quad (1.1)$$

kde  $M$  je hmotnost hvězdy,  $m$  hmotnost planety,  $i$  sklon její oběžné dráhy vůči obloze a  $G$  Newtonova gravitační konstanta. Spektrum hvězdy podává informaci nejen o jejích pohybech, ale také o teplotě, chemickém složení a tíhovém zrychlení při jejím povrchu. Na základě těchto údajů a teoretických modelů hvězd je tedy možné vypočítat  $M$  a z (1.1) získat spodní odhad hmotnosti exoplanety  $m \sin i$ . Narozdíl od přímého zobrazení zvýhodňuje metoda radiálních rychlostí planety s kratší hlavní poloosou a s dostatečně velkou relativní hmotností vzhledem k mateřské hvězdě.

Nejsilněji zastoupená metoda dneška, transitní fotometrie, využívá měření opako-

vaných poklesů jasnosti hvězdy, před jejímž diskem prochází planetární souputník. Ztlumení detekovaného světla vypovídá o poměru velikostí obou těles a společně s periodou proměnnosti a průběhem světelné křivky umožňuje určit parametr  $b$ , definovaný jako

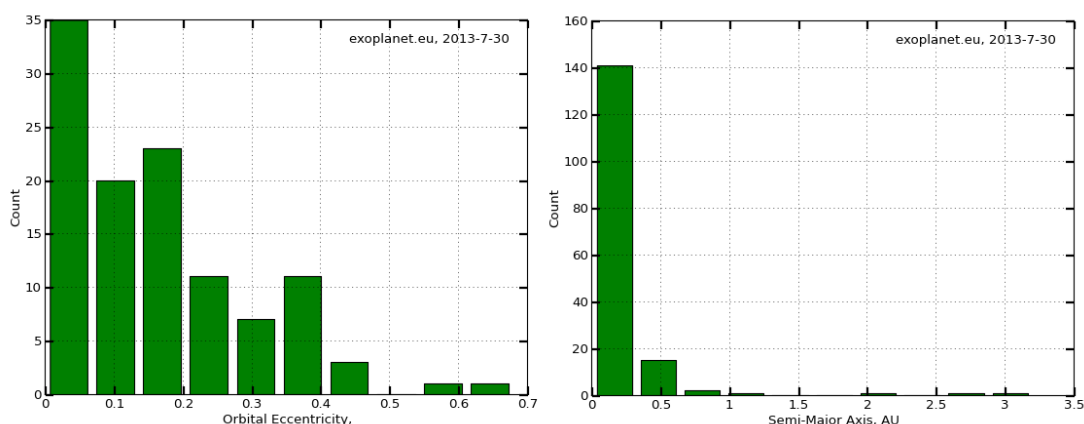
$$b \equiv \frac{a \cos i (1 - e^2)}{R_* (1 + e \sin \omega)} \quad (1.2)$$

kde  $a$  značí hlavní poloosu dráhy a  $R_*$  poloměr hvězdy. Jestliže je transiční fotometrie doplněna o měření radiálních rychlostí - a známe-li teoretické vztahy mezi spektrálním typem, hmotností a poloměrem vybraných hvězd - lze již o fyzikálních vlastnostech exoplanety i o tvaru její dráhy získat alespoň základní přehled. Některé další údaje, například sklon oběžné dráhy vůči rovině rovníku hvězdy nebo dokonce přítomnost a složení atmosféry, pak vyplývají z podrobnějších spektroskopických studií.

## 1.2 Shrnutí fyzikálních vlastností

Většina starších prací zabývajících se vlastnostmi extrasolárních planet studuje převážně plynné obry, které jsou vlivem svých velkých hmotností pro měřicí přístroje nejdostupnější (přehled například v [4]). Díky tomu se u nich tolik neprojevuje zvýhodnění krátkých period, které doposud silně provází terestrické exoplanety, a statistiky nebývají výrazně zkreslené. Hmotnosti známých exoplanet se pohybují v obrovském rozsahu hodnot, sahajícím od hmotností blízkých Zemi až po desetinásobky Jupiteru. Většina oběžnic je ovšem s Jupiterem srovnatelná. Výstřednosti oběžných drah mohou být i zcela extrémní ( $>0,7$ ), což platí zvláště pro velké plynné obry ve větší vzdálenosti od hvězdy.

Ani u kamenných planet nejsou nenulové výstřednosti výjimečné. Přehled excentricit a délek hlavních poloos exoplanet, které by mohly být kamenné (viz [6]) uvádím na obrázku 1.1, vykresleném za pomoci grafického nástroje z internetové encyklopedie [23]. Sklony rotační osy, další z parametrů uvažovaných v této práci, nejsou v současné době měřitelné.



Obrázek 1.1: Distribuce výstředností a délek hlavních poloos planet, jejichž hmotnost je nejvýše dvacetinásobkem hmotnosti Země.



## 2. Změny povrchové teploty

V dalším textu si vyjádříme insolaci jako funkci souřadnic a času a uvedeme teorii potřebnou ke studiu změn povrchové teploty.

### 2.1 Insolace a její výpočet

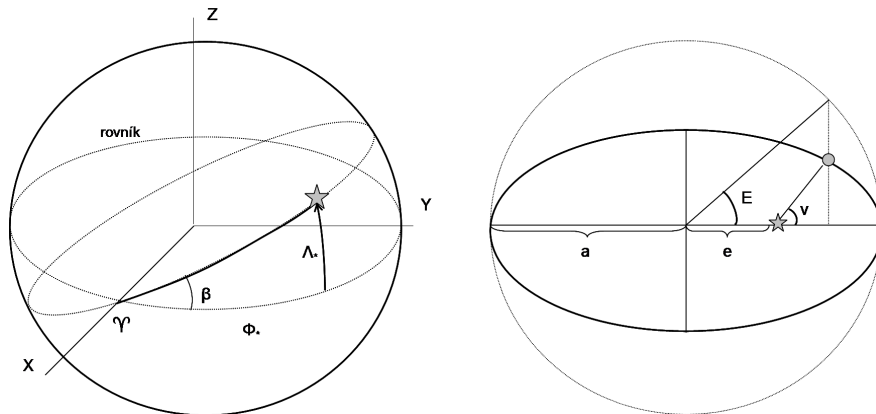
Můžeme-li zcela pominout vliv atmosféry, je povrchová teplota na planetě řízena zářivým výkonem mateřské hvězdy, parametry oběžné dráhy, rychlostí rotace a orientací rotační osy. Zářivý výkon hvězdy  $L_*$  a délku hlavní poloosy  $a$  shrneme do obdoby sluneční konstanty  $S_* = \frac{L_*}{4\pi a^2}$ . Po zavedení příhodné funkce  $\underline{\cos x}$ , definované jako

$$\underline{\cos x} = \begin{cases} \cos x & , \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad (2.1)$$

lze nyní vyjádřit hustotu zářivého toku dopadajícího na libovolné místo na planetě jako

$$S = S_* \left( \frac{a}{r_*} \right)^2 \underline{\cos \zeta} \quad (2.2)$$

kde  $r_*$  značí okamžitou vzdálenost planety od mateřské hvězdy a  $\zeta$  je zenitová vzdálenost hvězdy, závislá na místě a čase pozorování. Pro odvrácenou polokouli bude insolace  $S$  díky definici (2.7) přirozeně nulová. Abychom mohli určit  $\zeta$ , potřebujeme znát souřadnice substelárního bodu, čili umístění pozorovatele, který uvidí hvězdu právě v nadhlavníku. Tyto souřadnice si odvodíme podle [9] za pomoci obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Vlevo souřadnice substelárního bodu na nerotující planetě. Symbol  $\Upsilon$  označuje jarní bod. Vpravo popis pozice planety na oběžné dráze pomocí pravé a excentrické anomálie.

Pro zjednodušení nejprve zanedbejme rotaci planety. Hvězda se bude pohybovat po obloze ve směru „od západu k východu“ v rovině pootočené vůči rovině rovníku o úhel  $\beta$ , značící sklon rotační osy. Úhlová rychlost jejího pohybu podle druhého Keplerova zákona závisí na vzájemné vzdálenosti obou těles a budeme ji dále zahrnovat do výpočtu v podobě pravé anomálie  $v(t)$ , odvozené v následující podkapitole. Označíme-li si v souladu s obrázkem 2.1 nerotující planetocentrické kartézské

souřadnice písmeny  $X, Y, Z$  a vyznačené úhly v jednotkové sféře písmeny  $\Phi$  (s rozsahem  $[-\pi, \pi]$ ) a  $\Lambda$  (s rozsahem  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ), můžeme pro substelární bod  $(X_*, Y_*, Z_*)$  psát následující vztahy

$$\begin{aligned} X_* &= \cos \Lambda_* \cos \Phi_* = \cos[v(t + \tau) - v(\tau)] \\ Y_* &= \cos \Lambda_* \sin \Phi_* = \sin[v(t + \tau) - v(\tau)] \cos \beta \\ Z_* &= \sin \Lambda_* = \sin[v(t + \tau) - v(\tau)] \sin \beta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Čas  $t$  je v tomto případě počítán od okamžiku „jarní rovnodennosti“, nastávající s prodlévou  $\tau$  po průchodu planety periastrum. Na planetě rotující okolo osy  $Z$  úhlovou rychlostí  $\omega$  ve smyslu oběhu se západovýchodní zdánlivý pohyb hvězdy zpomaluje, případně mění svůj směr na východo-západní. V souřadné soustavě rotující s planetou nyní vyjádříme polohu substelárního bodu  $(x_*, y_*, z_*)$  následovně

$$\begin{aligned} x_* &= \cos(\omega t) \cos[v(t + \tau) - v(\tau)] + \sin(\omega t) \sin[v(t + \tau) - v(\tau)] \cos \beta \\ y_* &= -\sin(\omega t) \cos[v(t + \tau) - v(\tau)] + \cos(\omega t) \sin[v(t + \tau) - v(\tau)] \cos \beta \\ z_* &= \sin[v(t + \tau) - v(\tau)] \sin \beta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Konečně, kosinus zenitové vzdálenosti hvězdy pro pozorovatele stojícího v bodě  $(x, y, z)$  je dán skalárním součinem

$$\cos \zeta = xx_* + yy_* + zz_* \quad (2.5)$$

## 2.2 Keplerova rovnice

Ve speciálním případě planety na kruhové dráze zůstává rychlost jejího oběhu i zářivý tok v substelárním bodě konstantní. Obecně však musíme uvažovat eliptickou oběžnou dráhu s nenulovou výstředností  $e$ . Okamžitá rychlost planety v okolí periastra pak převyšuje rychlost v apoastru a popis tohoto pohybu se stává značně složitým.

K určení časových změn pozice planety ve dráze si zavedeme pojem tří anomálií, neboli úhlů. Střední anomálie  $M = nt$  udává úhel vymezený periastrum, hvězdou a oběžnicí pohybující se stálou úhlovou rychlostí  $n$  po kružnici, jejíž poloměr je roven hlavní poloose eliptické dráhy. Excentrická anomálie  $E$  obsahuje přepočtení na nerovnoměrný pohyb způsobený nenulovou výstředností a společně s pravou anomálií  $v$ , skutečnou úhlovou vzdáleností planety od periastra, je znázorněna na obrázku 2.1 vpravo. Vztah mezi prvními dvěma veličinami vyjadřuje Keplerova rovnice (pro odvození viz [14]).

$$E - e \sin E = M \quad (2.6)$$

Po jejím vyřešení lze vypočítat pravou anomálii v čase  $t$  jako

$$v = \begin{cases} \arccos \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} & , E \in [0, \pi] \\ 2\pi - \arccos \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} & , E \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (2.7)$$

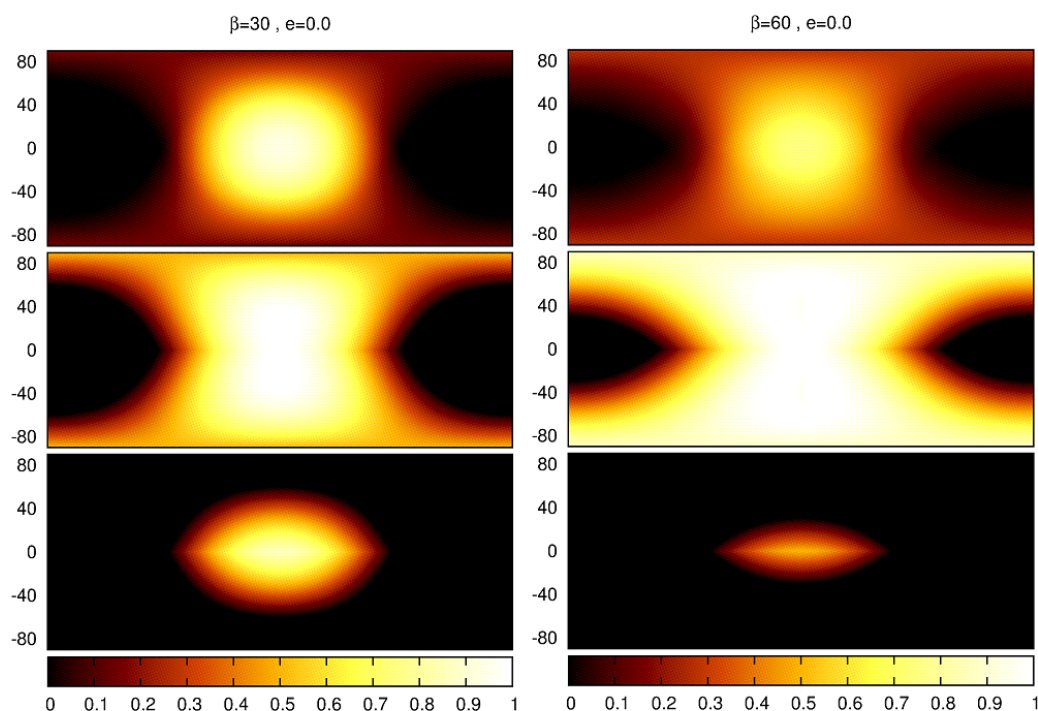
Jelikož je (2.6) transcendentní rovnice, nelze ji pro  $E$  řešit algebraicky a je nutno přikročit k některé z metod postupných aproximací. Zde byla pro jednoduchost použita iterační metoda s následujícím postupem.

$$\begin{aligned}
 E_0 &= M \\
 E_1 &= M + e \sin E_0 \\
 E_2 &= M + e \sin E_1 \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Dosažením pravé anomálie do vztahu (2.4) a následným užitím (2.5) jsme získali zenitovou vzdálenost mateřské hvězdy v okamžiku  $t$ . Jedinou dosud neznámou veličinou na pravé straně (2.2) tak zůstala okamžitá vzdálenost planety od hvězdy  $r_*$ , jež je podle [14] rovna

$$r_* = a(1 - e \cos E) \tag{2.9}$$

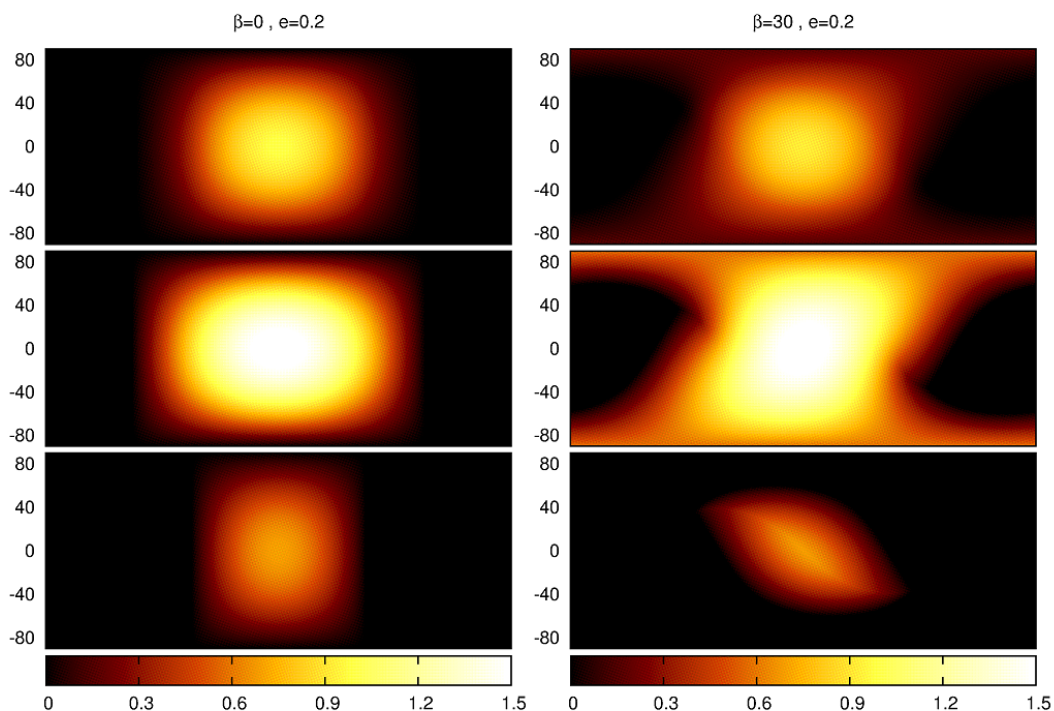
Příklad nejnižších, nejvyšších a průměrných hodnot relativní insolace  $\frac{S}{S_*}$  v průběhu jednoho oběhu je znázorněn na obrázcích 2.2 a 2.3. Uvažovaná planeta se zde nachází ve spin-orbitální resonanci 1:1, perioda její rotace a oběhu se tedy shodují. V případě kruhové dráhy a nulového sklonu rotační osy by resonance 1:1 znamenala, že osvětlena bude vždy jen jedna polokoule planety. Začneme-li ovšem osu naklánět (obrázek 2.2) můžeme vyzorovat postupné změnšování oblastí věčného dne či noci (světlé oblasti na spodním obrázku, respektive tmavé na prostředním). Uvedené průběhy se shodují s ilustracemi v [9].



Obrázek 2.2: *Shora dolů* střední, maximální a minimální insolace na planetě s vázanou rotací - vliv sklonu rotační osy. Na svislé ose je uvedena planetopisná šířka.

Pokud namísto naklonění rotační osy zvětšíme výstřednost dráhy (obrázek 2.3 vlevo), začne se planeta s vázanou rotací v důsledku rozdílné úhlové rychlosti v periastru a apoastru pod substelárním bodem "kolébat", pozorujeme libraci v planetopisné délce. Osvětlovaná oblast planety je tak rozšířena přibližně o úhel  $2 \arcsin e$  [8].

Obrázek 2.3 vpravo ukazuje vliv kombinace nenulové výstřednosti i sklonu rotační osy v jednoduchém případě  $\tau = 0$ , kdy jarní rovnodennost nastává souběžně s průchodem planety periastrum. Parametr  $\tau$  v dalším textu nezohledňuji. Jeho vliv na ozáření povrchu znázorňuje například [10].



Obrázek 2.3: *Shora dolů* střední, maximální a minimální insolace na planetě s vázanou rotací - vliv nenulové výstřednosti.

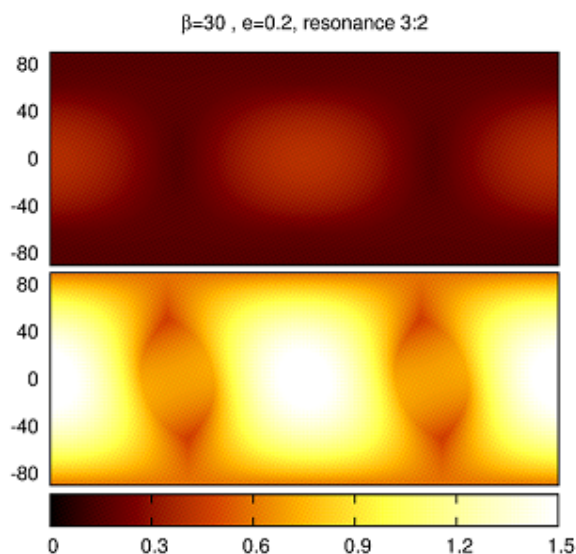
Planeta ve spin-orbitální resonanci jiné než 1:1 ztrácí oblasti věčného dne i noci docela a minimální insolace na ní bude vždy nulová. Ukázka středních a maximálních hodnot je vynesena na obrázku 2.4.

## 2.3 Rovnice vedení tepla

Konduktivní šíření tepla v pevných látkách je obecně popsáno nehomogenní parciální diferenciální rovnicí parabolického typu

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + H, \quad (2.10)$$

kde  $T$  značí teplotu,  $\rho$  hustotu prostředí,  $c_p$  jeho měrnou tepelnou kapacitu za konstantního tlaku,  $k$  tepelnou vodivost a  $H$  zdroje tepla ve vyšetřovaném objemu. K úplnému zadání úlohy je třeba znát také počáteční teplotu  $T(x, t = 0)$  a pro řešení na konečném objemu  $\Omega$  i hraniční podmínky  $T(x \in \partial\Omega, t)$ . Pokud geometrie úlohy umožňuje nalézt analytické řešení rovnice (2.10), pak bývá vyjádřeno většinou ve formě nekonečné řady. Některá speciální řešení jsou uvedena v [15] a [13].



Obrázek 2.4: *Shora dolů* střední a maximální insolace na planetě ve spin-orbitální resonanci 3:2 s nenulovými parametry  $e$  i  $\beta$ .

Hraniční podmínka na povrchu planety vyplývá ze zákona zachování energie. Insolace je v každém bodě vyrovnávána zářením povrchu, splňujícím Stefanův-Boltzmannův zákon. V neosvětlených oblastech pak získává na významu i povrchový teplotní gradient.

$$S(1 - A) = \varepsilon\sigma T^4 - k\frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.11)$$

Bezrozměrné veličiny  $\varepsilon$  a  $A$ , po řadě emisivita a albedo, popisují vlastnosti materiálu pokrývajícího planetu, jeho schopnost vyzařovat, nebo naopak odrážet dopadající záření. Proměnná  $r$  vyjadřuje vzdálenost od středu a  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  je Stefanova-Boltzmannova konstanta. Kvůli nelinearitě v teplotě se rovnice (2.11) obvykle řeší numericky, k čemuž je výhodné definovat bezrozměrnou charakteristickou délku, čas a teplotu [2]. V dalším textu však bude zmiňována pouze první z uvedených, zavedená jako

$$L_{\text{char}} = \sqrt{\frac{2k}{\Omega\rho c_p}} \quad (2.12)$$

kde  $\Omega$  symbolizuje úhlovou frekvenci změn insolace. Insolační perioda je rovna jednomu oběhu planety pro případ vázané rotace a dvěma oběhům při spin-orbitální resonanci 3:2. Na planetách, jejichž povrch je alespoň zčásti vystavován střídání dne a noci, se k popisu rychlosti chladnutí neosvětlených oblastí definuje také tepelná setrvačnost

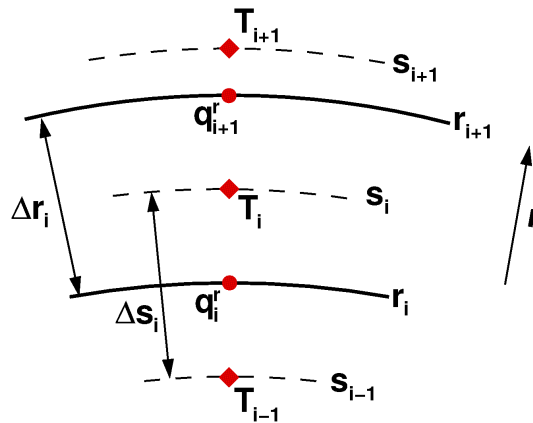
$$I = \sqrt{k\rho c_p} \quad (2.13)$$

### 3. Numerické řešení v jedné dimenzi

V následující kapitole je popsán jednoduchý model periodicky ozařované kulové slupky, jejíž teplota závisí pouze na hloubce. V rovnici (2.10) budeme nadále zanedbávat derivace podle úhlových proměnných  $\vartheta$  a  $\varphi$ . Tepelné zdroje ve slupce  $H$  zde pokládáme nulové.

#### 3.1 Stacionární řešení

K řešení rovnice vedení tepla byla zvolena metoda konečných diferencí s posunutými sítěmi. Studovanou slupku, schematicky znázorněnou na obrázku 3.1, si rozdělíme na  $n$  vrstev s tepelnou vodivostí  $k$  a tokem  $q = -k \frac{\partial T}{\partial r}$  předepisovanými na jejich hranicích a teplotou předepsanou ve středech. Poloměry hranic vrstev značíme  $r_i$ , poloměry jejich středů pak  $s_i$ . Tloušťky jednotlivých vrstev  $\Delta r_i$ , a tedy rozestupy mezi body výpočtu tepelného toku, uvažují obecně rozdílné.



Obrázek 3.1: Posunutá síť.

Postup výpočtu si nejprve přiblížíme na stacionárním řešení, pro které již teplota nezávisí na čase a rovnice (2.10) se redukuje na

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = -\nabla \cdot q = 0 \quad (3.1)$$

Derivaci teploty na spodní hranici  $i$ -té vrstvy je možné vyjádřit jako lineární kombinaci teplot  $T_{i-1}$  a  $T_i$ , zadaných ve dvou přilehlých středech, a lineárně interpolované hodnoty  $T_{i-\frac{1}{2}}$  v bodě výpočtu toku.

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}} = a_i T_{i-1} + b_i T_{i-\frac{1}{2}} + c_i T_i \quad (3.2)$$

$$T_{i-\frac{1}{2}} = w_i T_{i-1} + (1 - w_i) T_i \quad (3.3)$$

$$w_i \equiv 0.5 \frac{\Delta r_i}{\Delta s_i}$$

Použité koeficienty konečných diferencí pro nerovnoměrnou síť jsou

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{2\Delta r_i}{\Delta r_{i-1}(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})} \\ b_i &= \frac{2(\Delta r_i - \Delta r_{i-1})}{\Delta r_{i-1}\Delta r_i} \\ c_i &= \frac{2\Delta r_{i-1}}{\Delta r_i(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Z rovnic (3.2) a (3.3) a z definice tepelného toku vyplývá vyjádření  $q$  na spodní hranici  $i$ -té vrstvy.

$$q_i = k_i[(a_i + w_i b_i)T_{i-1} + (b_i(1 - w_i) + c_i)T_i] \quad (3.5)$$

Divergenci tepelného toku, splňující ve stacionárním případě rovnici (3.1), budeme počítat ve střezech vrstev. Uvažujeme-li radiálně symetrické řešení ve sférických souřadnicích, platí

$$(\nabla \cdot q)_{i+\frac{1}{2}} = \left( \frac{2}{r}q + \frac{dq}{dr} \right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{s_i}(q_i + q_{i+1}) + \frac{1}{\Delta r_i}(q_{i+1} - q_i), \quad (3.6)$$

kde koeficient konečných diferencí obdobný  $b_i$  ve druhém členu na pravé straně vymizel díky lokální rovnoměrnosti sítě. Po dosazení výrazu (3.5) do (3.6) lze pro teplotu napsat lineární rovnici

$$\alpha_i T_{i-1} + \beta_i T_i + \gamma_i T_{i+1} = 0 \quad (3.7)$$

s koeficienty

$$\begin{aligned} \alpha_i &= k_i(a_i + w_i b_i) \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) \\ \beta_i &= k_i(b_i(1 - w_i) + c_i) \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) + k_{i+1}(a_{i+1} + w_{i+1} b_{i+1}) \left( \frac{1}{s_i} + \frac{1}{\Delta r_i} \right) \\ \gamma_i &= k_{i+1}(b_{i+1}(1 - w_{i+1}) + c_{i+1}) \left( \frac{1}{s_i} + \frac{1}{\Delta r_i} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Na spodní i horní hranici slupky je nyní potřeba předepsat okrajové podmínky, a to buď Dirichletovy (stálá teplota), či Neumannovy (stálý tepelný tok). Horní mez by navíc měla připouštět kombinaci obou podmínek, ve speciálním případě splňující rovnici (2.11). Aby bylo možné definovat tepelný tok hranic, doplníme si jednorozměrnou mřížku o další dva body výpočtu teploty:  $T_0$ , zadané ve vzdálenosti  $\frac{\Delta r_1}{2}$  pod spodní vrstvou, a  $T_{n+1}$ , zadané ve vzdálenosti  $\frac{\Delta r_n}{2}$  nad svrchní vrstvou. Takto rozšířené schéma je znázorněno na obrázku 3.2.

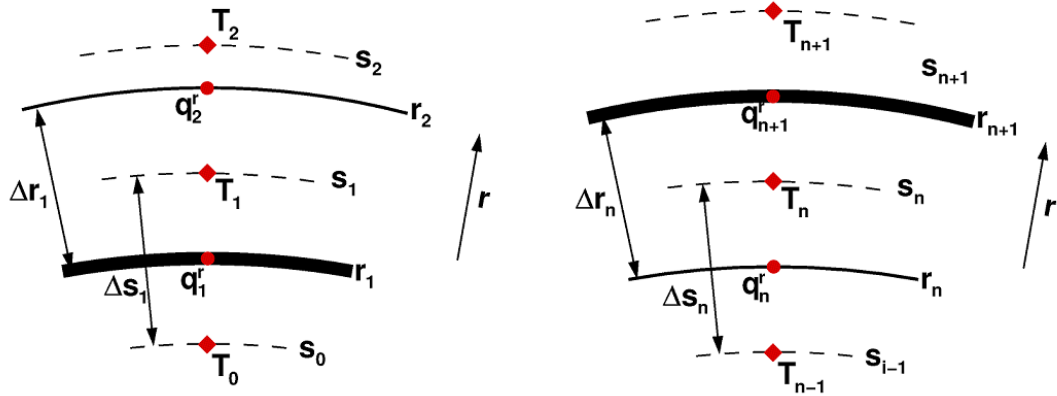
Podmínka na konstantní teplotu  $T_b$  nebo  $T_t$  při spodní, respektive horní hranici je vyjádřena jednoduše.

$$\frac{1}{2}(T_0 + T_1) = T_b \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{2}(T_n + T_{n+1}) = T_t \quad (3.10)$$

Podobně lze napsat podmínku pro tepelný tok  $q_b$  nebo  $q_t$  směřující do slupky.

$$-\frac{k_1}{\Delta r_1}(T_0 - T_1) = -q_b \quad (3.11)$$



Obrázek 3.2: Spodní a horní hranice vrstvy.

$$-\frac{k_{n+1}}{\Delta r_n}(T_n - T_{n+1}) = q_t \quad (3.12)$$

Obecná vážená kombinace konstantní povrchové teploty a tepelného toku, kde první veličina má váhu  $w_S$ , bude tedy

$$\left[\frac{w_S}{2} - (1 - w_S)\frac{k_{n+1}}{\Delta r_n}\right]T_n + \left[\frac{w_S}{2} + (1 - w_S)\frac{k_{n+1}}{\Delta r_n}\right]T_{n+1} = konst. \quad (3.13)$$

Nelineární hraniční podmínka (2.11) kladená na teplotu a tepelný tok u povrchu osvětlované planety si vyžaduje iterativní řešení. Zvoleno bylo schéma využívající implicitně vyjádřeného toku (shodně s (3.12)) a semi-implicitně zadané čtvrté mocniny teploty. Ta je zapsána jako  $T_{\text{pom}}^3 T$ , kde  $T_{\text{pom}}$  může být při velkých hodnotách insolace povrchovou teplotou z předcházejícího iteračního kroku, zde však pro lepší konvergenci zvolíme průměr teplot z několika iteračních kroků. Za počáteční odhad  $T_{\text{pom}}$  poslouží rovnovážná teplota

$$T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\frac{S(1 - A)}{\sigma \varepsilon}} \quad (3.14)$$

případně teplota beroucí v úvahu tok skrze spodní hranici, je-li zadán.

$$T = \sqrt[4]{\frac{S(1 - A) + q_b \frac{k_{n+1}}{k_1}}{\sigma \varepsilon}} \quad (3.15)$$

Odhad (3.15) se uplatní zvláště v neosvětlených oblastech planety. Rovnici (2.11) pro  $\alpha$ -tý iterační krok přepíšeme jako

$$\left[\frac{1}{2}\sigma \varepsilon T_{\text{pom}}^3 - \frac{k_{n+1}}{\Delta r_n}\right]T_n^\alpha + \left[\frac{1}{2}\sigma \varepsilon T_{\text{pom}}^3 + \frac{k_{n+1}}{\Delta r_n}\right]T_{n+1}^\alpha = S(1 - A) \quad (3.16)$$

a výpočet opakujeme, dokud se relativní odchylka  $\frac{1}{2}(T_n + T_{n+1})$  od  $T_{\text{pom}}$  nesníží pod požadovanou mez přesnosti.

Rovnice vedení tepla v podobě (3.7) byla řešena za pomoci podprogramů *bandec* a *banbks* z knihovny Numerických receptů [16], využívajících LU dekompozice pásové matice, zde plněné koeficienty  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  a  $\gamma_i$ . Maticový zápis úlohy má v případě konstantní teploty na obou hranicích slupky následující podobu.



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_b \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_t \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Úlohu pro veškeré zbývající kombinace okrajových podmínek (3.9)-(3.15) nebo (3.16) zapíšeme obdobně.

## 3.2 Časově proměnné řešení

Jsou-li na obou hranicích studované oblasti zadány neměnné okrajové podmínky, vyvíjí se teplota kulové slupky směrem k výše popsánému stacionárnímu řešení. Časovou proměnnost do výpočtu zahrneme převedením diferenciální rovnice (2.10) do podoby s konečnými diferencemi v časové oblasti. K tomu bylo použito stabilní Crankovo-Nicolsonové schéma (viz např.[17]), které změnu teploty  $i$ -té vrstvy vyjadřuje pomocí hodnot pravé strany v novém i předcházejícím okamžiku (značeno indexem  $j$ , respektive  $j - 1$ ).

$$\rho c_p \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} [(\nabla \cdot q)_i^j + (\nabla \cdot q)_i^{j-1}] \quad (3.18)$$

S přihlédnutím k (3.5) a (3.6) lze tuto rovnici přepsat jako

$$\rho c_p \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \alpha_i (T_{i-1}^j + T_{i-1}^{j-1}) + \frac{1}{2} \beta_i (T_i^j + T_i^{j-1}) + \frac{1}{2} \gamma_i (T_{i+1}^j + T_{i+1}^{j-1}) \quad (3.19)$$

a maticový tvar úlohy tak získává například následující podobu

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{\alpha}_1 & 1 - \tilde{\beta}_1 & \tilde{\gamma}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}_2 & 1 - \tilde{\beta}_2 & \tilde{\gamma}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{\alpha}_n & 1 - \tilde{\beta}_n & \tilde{\gamma}_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0^j \\ T_1^j \\ T_2^j \\ \vdots \\ T_n^j \\ T_{n+1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_b \\ T_1^{j-1} \\ T_2^{j-1} \\ \vdots \\ T_n^{j-1} \\ T_t \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{\alpha}_1 & 1 + \tilde{\beta}_1 & \tilde{\gamma}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}_2 & 1 + \tilde{\beta}_2 & \tilde{\gamma}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{\alpha}_n & 1 + \tilde{\beta}_n & \tilde{\gamma}_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_b \\ T_1^{j-1} \\ T_2^{j-1} \\ \vdots \\ T_n^{j-1} \\ T_t \end{pmatrix}$$

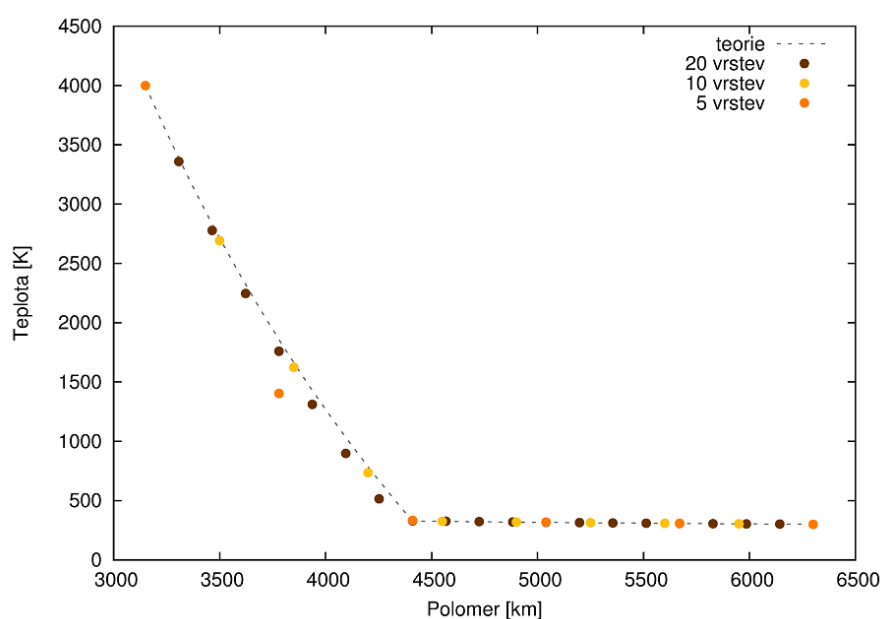
Koeficienty s vlnkou odpovídají (3.8) vynásobeným konstantou  $\frac{\Delta t}{2\rho c_p}$ .

K okrajovým podmínkám uvedeným v předcházející podkapitole je nutné doplnit podmínku počáteční, představovanou teplotním profilem slupky na začátku samotného

výpočtu. Jelikož nás dále bude zajímat vývoj teploty na periodicky osvětlované planetě, zaměříme se na případ nelineární horní okrajové podmínky (3.16) a Neumannovy spodní okrajové podmínky (3.11). Počátečním stavem pak budíž stacionární řešení odpovídající průměrné insolaci. Tato volba umožní lepší analýzu vlivu fyzikálních a orbitálních parametrů na teplotu v povrchových vrstvách.

### 3.3 Testy

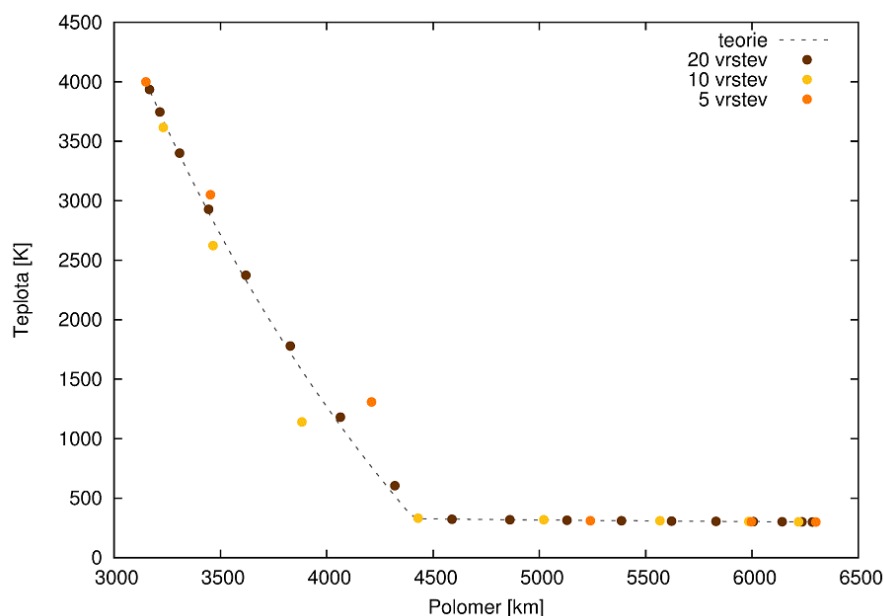
Mezi geometrická uspořádání, pro něž existuje stacionární analytické řešení rovnice vedení tepla, patří radiálně symetrická slupka se zadanými Dirichletovými či Neumannovými okrajovými podmínkami a s parametry  $k$ ,  $c_p$  a  $\rho$  po vrstvách konstantními [15]. Uvnitř této slupky přitom může docházet ke skoku ve vodivosti. Známého analytického řešení bylo využito k ověření správnosti a přesnosti modelu. Obrázky 3.3 a 3.4 znázorňují teplotní průběh v kulové slupce s konstantní teplotou na obou hranicích a stonásobným skokem ve vodivosti, který nastává ve dvou pětinach tloušťky. Se vzrůstajícím počtem vrstev, a tedy jemnější diskretizací slupky, se numerické řešení stále více přibližuje k teoretickému. Zvýšíme-li počet vrstev na sto, nebudou již obě řešení na obrázku rozlišitelná - shodují se na tloušťku čáry.



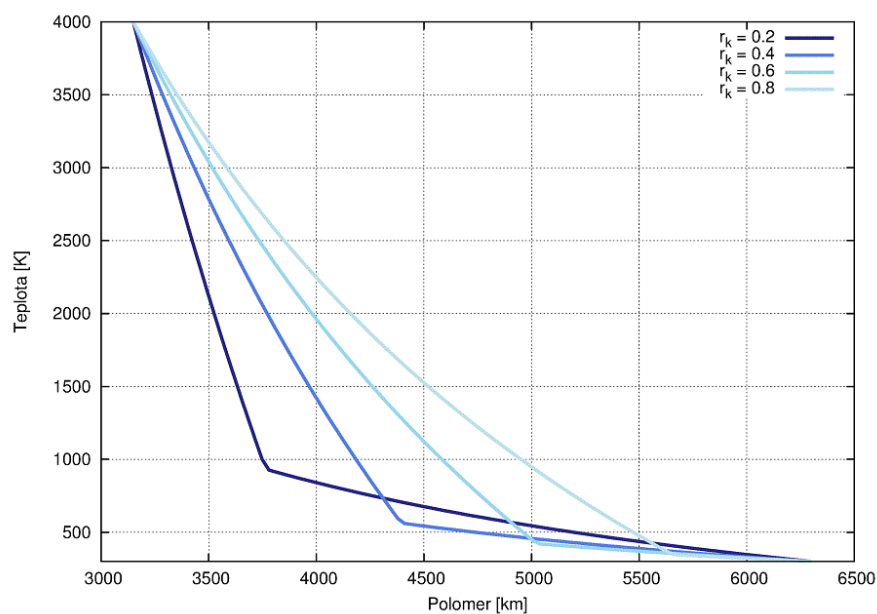
Obrázek 3.3: Srovnání numerického řešení s analytickým pro různé počty vrstev - rovnoměrná síť.

Oproti analytickému řešení byl testován model s rovnoměrnou i nerovnoměrnou sítí, v této práci však nadále používám pouze síť rovnoměrnou. Nestejné rozestupy mezi body výpočtu teploty v různých hloubkách by se uplatnily pouze v případě složitějšího průběhu tepelné vodivosti a budou použity v budoucnu. Obrázky 3.5 a 3.6 ukazují srovnání teplotního profilu slupky s Dirichletovými hraničními podmínkami pro dva různé skoky ve vodivosti, nastávající ve čtyřech různých hloubkách. Numerické a teoretické řešení se i zde shodují na tloušťku čáry. Písmenem  $r_k$  je značena relativní vzdálenost skoku od spodní hranice.

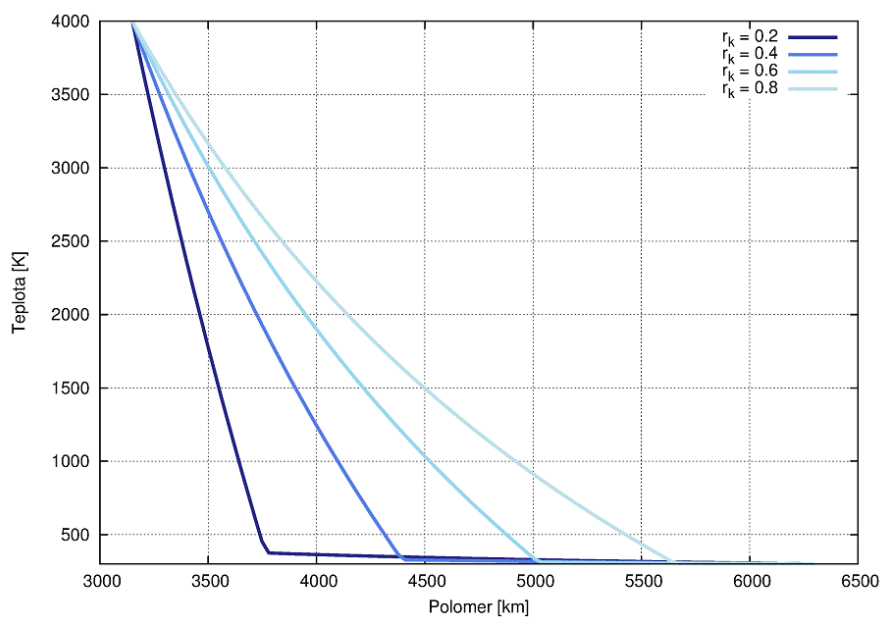
Časově proměnnou rovnici vedení tepla lze analyticky řešit například v případě sinusoidálních změn horní okrajové podmínky (za současné konstantnosti podmínky spodní). Porovnání numerického výpočtu s teoretickým průběhem je zakresleno na obrázku 3.7.



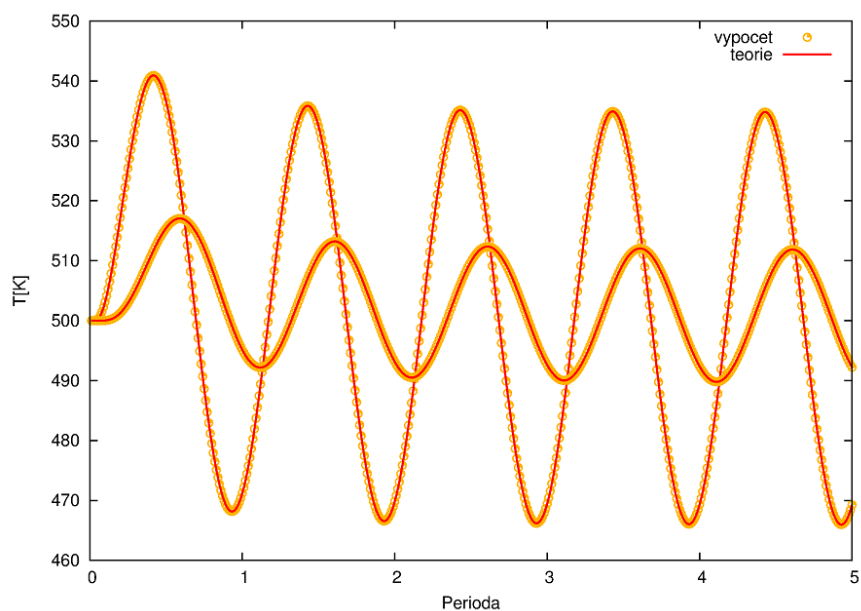
Obrázek 3.4: Srovnání numerického řešení s analytickým pro různé počty vrstev - nerovnoměrná síť s rozestupy generovanými kořeny Čebyševových polynomů.



Obrázek 3.5: Srovnání průběhu teploty ve slupce s různě hlubokým desetinásobným skokem v tepelné vodivosti



Obrázek 3.6: Srovnání průběhu teploty ve slupce s různě hlubokým stonásobným skokem v tepelné vodivosti



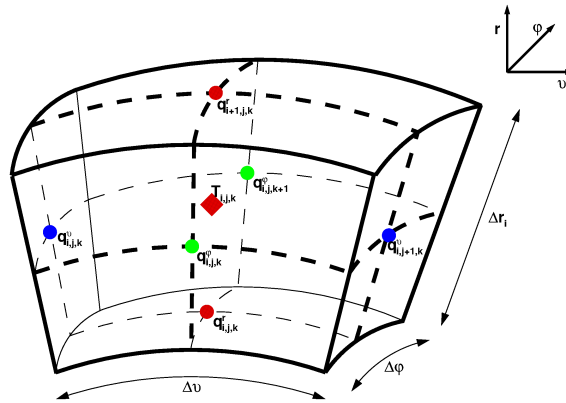
Obrázek 3.7: Srovnání numerického (žluté kroužky) a analytického (červená čára) časově proměnného řešení rovnice vedení tepla pro sinusoidální průběh povrchové teploty. Zobrazeny jsou výsledky v hloubkách  $0,25L_{\text{char}}$  a  $0,5L_{\text{char}}$ .

## 4. Numerické řešení ve třech dimenzích

Globální vývoj teploty na osvětlované planetě může sada jednorozměrných modelů popsat jen omezeně. V dalším textu bude proto představen obecný trojrozměrný model popisující kulovou slupku s nezanedbatelným přenosem tepla v horizontálním směru. Tepelné zdroje  $H$  uvnitř slupky dosud pokládám rovné nule.

### 4.1 Stacionární řešení

Stejně jako v minulé kapitole, omezíme se zpočátku na popis stacionárního řešení rovnice vedení tepla, splňujícího vztah (3.1). Metodu konečných diferencí s posunutými sítěmi přitom rozšíříme do tří rozměrů podle schématu 4.1. Rozestupy mezi body výpočtu tepelného toku v radiálním směru  $\Delta r_i$  zůstávají obecně různé, v obou zbývajících, úhlových směrech  $\vartheta$  (rozsah  $[0, \pi]$ ) a  $\varphi$  (rozsah  $[0, 2\pi]$ ) však pro jednoduchost volím rovnoměrnou síť. Délky  $\Delta\vartheta$  a  $\Delta\varphi$  jsou zadávány v úhlové míře.



Obrázek 4.1: Posunutá síť ve 3D. Body výpočtu teploty se nacházejí ve středech buněk, tepelný tok je počítán na stěnách.

Divergence tepelného toku  $q = q(r, \vartheta, \varphi)$  ve sférických souřadnicích splňuje

$$\nabla \cdot q = \frac{\partial q^r}{\partial r} + \frac{2}{r} q^r + \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} q^\vartheta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial q^\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial q^\varphi}{\partial \varphi} \quad (4.1)$$

kde používám následující značení

$$q^r = k^r \frac{\partial T}{\partial r} \quad q^\vartheta = k^\vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \quad q^\varphi = k^\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (4.2)$$

Tepelné vodivosti  $k$  jsou definovány ve vrcholech hlavní sítě, zakreslené na 4.1 silně, a symboly  $k^r$ ,  $k^\vartheta$ ,  $k^\varphi$  se vztahují k průměrným hodnotám počítaným uprostřed stěn.

V třírozměrné rovnici vedení tepla je třeba ošetřit singularitu na pólech planety, kde platí  $\sin \vartheta = 0$ . Toho docílíme přenásobením (4.1) výrazem  $\sin^2 \vartheta$ . Singularitu ve

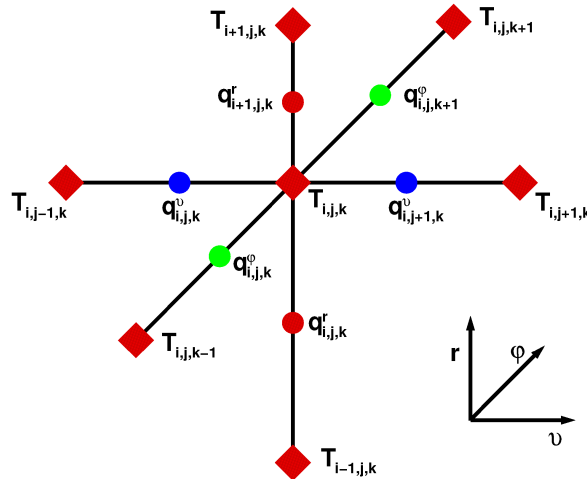
středu koule ( $r = 0$ ) neuvažujeme, neboť do této hloubky studovaná vrstva nezasahuje. Ve shodě se zápisem (3.6) z předcházející kapitoly lze parciální derivace v (4.1) vyjádřit pomocí konečných diferencí,

$$\begin{aligned} \sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}} (\nabla \cdot q)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} &= \sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}} \frac{q_{i+1, j, k}^r - q_{i, j, k}^r}{\Delta r_i} + \\ &+ \frac{\sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{s_i} (q_{i+1, j, k}^r + q_{i, j, k}^r) + \frac{\cos \vartheta_{j+\frac{1}{2}} \sin \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{2s_i^2} (q_{i, j+1, k}^\vartheta + q_{i, j, k}^\vartheta) + \\ &+ \frac{\sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{s_i^2} \frac{q_{i, j+1, k}^\vartheta - q_{i, j, k}^\vartheta}{\Delta \vartheta} + \frac{1}{s_i^2} \frac{q_{i, j, k+1}^\varphi - q_{i, j, k}^\varphi}{\Delta \varphi} \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde v radiálním směru platí pro tepelný tok  $q^r$  přímo (3.5). V obou horizontálních směrech se vyjádření díky rovnoměrnosti sítě zjednodušuje.

$$\begin{aligned} q_{i, j, k}^r &= k_i^r [(a_i + w_i b_i) T_{i-1, j, k} + (b_i (1 - w_i) + c_i) T_{i, j, k}] \\ q_{i, j, k}^\vartheta &= k_j^\vartheta \frac{T_{i, j, k} - T_{i, j-1, k}}{\Delta \vartheta} \\ q_{i, j, k}^\varphi &= k_k^\varphi \frac{T_{i, j, k} - T_{i, j, k-1}}{\Delta \varphi} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Indexace veličin je znázorněná na obrázku 4.2. Písmenem  $i$  značím pořadí vrstvy ve slupce, počínaje spodní hranicí a konče povrchem planety, písmena  $j$  a  $k$  popisují po řadě postup ve směru  $\vartheta$  a  $\varphi$ .



Obrázek 4.2: Indexace bodů výpočtu teploty a tepelného toku.

Dosazením (4.4) do (4.3) dospějeme k lineární rovnici pro teplotu

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{i,j,k} T_{i-1,j,k} + \mathbb{B}_{i,j,k} T_{i,j-1,k} + \mathbb{C}_{i,j,k} T_{i,j,k-1} + \mathbb{D}_{i,j,k} T_{i,j,k} + \\ + \mathbb{E}_{i,j,k} T_{i,j,k+1} + \mathbb{F}_{i,j,k} T_{i,j+1,k} + \mathbb{G}_{i,j,k} T_{i+1,j,k} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

s koeficienty

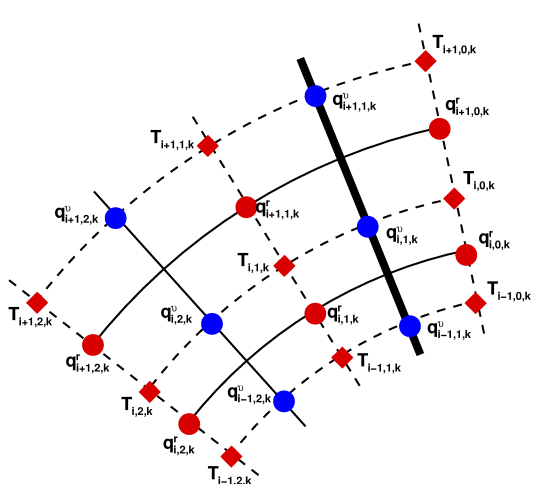
$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{i,j,k} &= k_i^r (a_i + w_i b_i) \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) \sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}} \\
 \mathbb{B}_{i,j,k} &= -\frac{\cos \vartheta_{j+\frac{1}{2}} \sin \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{2s_i^2 \Delta \vartheta} k_j^\vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{s_i^2 \Delta \vartheta^2} k_j^\vartheta \\
 \mathbb{C}_{i,j,k} &= \frac{1}{s_i^2 \Delta \varphi^2} k_k^\varphi \\
 \mathbb{D}_{i,j,k} &= k_i^r (b_i(1 - w_i) + c_i) \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) \sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}} + \\
 &+ k_{i+1}^r (a_{i+1} + w_{i+1} b_{i+1}) \left( \frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) \sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}} + \\
 &+ \frac{\cos \vartheta_{j+\frac{1}{2}} \sin \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{2s_i^2 \Delta \vartheta} (k_j^\vartheta - k_{j+1}^\vartheta) - \frac{\sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{s_i^2 \Delta \vartheta^2} (k_j^\vartheta + k_{j+1}^\vartheta) - \\
 &- \frac{1}{s_i^2 \Delta \varphi^2} (k_k^\varphi + k_{k+1}^\varphi) \\
 \mathbb{E}_{i,j,k} &= \frac{1}{s_i^2 \Delta \varphi^2} k_{k+1}^\varphi \\
 \mathbb{F}_{i,j,k} &= \frac{\cos \vartheta_{j+\frac{1}{2}} \sin \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{2s_i^2 \Delta \vartheta} k_{j+1}^\vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}}}{s_i^2 \Delta \vartheta^2} k_{j+1}^\vartheta \\
 \mathbb{G}_{i,j,k} &= k_{i+1}^r (b_{i+1}(1 - w_{i+1}) + c_{i+1}) \left( \frac{1}{s_i} + \frac{1}{\Delta r_i} \right) \sin^2 \vartheta_{j+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Rozšířením modelu do tří rozměrů velmi výrazně narostl počet neznámých, čímž se zvýšila výpočetní náročnost úlohy. K inverzi řídké matice naplněné výše uvedenými koeficienty jsem proto využila balíčku *PARDISO*, umožňujícího paralelisaci řešení. Podrobnosti o jeho funkcích lze nalézt v [18],[19],[20] a [21]. Od známého stacionárního řešení můžeme k časově proměnnému postoupit stejně, jako v jednorozměrném případě. I zde bylo zvoleno Crankovo-Nicolsonové schéma, vztah (3.19) je nutné pouze doplnit o zbývající čtyři body výpočtu teploty a o koeficienty (4.6).

## 4.2 Okrajové podmínky

Kromě fyzikálních okrajových podmínek na teplotu při spodní a horní hranici studované oblasti musíme zadat formální podmínky pro obě úhlové proměnné. Podmínkou kladenou na planetopisnou délku  $\varphi$  je její cykličnost. Planetopisná šířka  $\vartheta$  vyžaduje z praktických důvodů omezení svého definičního oboru. Schéma znázorněné na obrázku 4.1 a blíže popsané v předcházejícím textu předpokládá rozdělení kulové slupky na množství šestistěnných buněk, ty jsou ovšem blízko obou pólů planety stále deformovanější. V krajním případě, kdy stěna buňky dosahující k pólu zdegeneruje na hranu, lze již metodu konečných diferencí použít jen obtížně. Třírozměrná síť je proto v okolí pólů uměle oříznuta a teploty v pomocných bodech za nově vzniklou hranicí

se lineárně extrapolují. Situaci na jižním pólu, kde platí  $T_{i,0,k} = 2T_{i,1,k} - T_{i,2,k}$ , vyobrazuje schéma 4.3, obdobně na severním pólu musíme do rovnice (4.5) pro krajní bod (indexovaný  $j = n_j$ ) dosadit  $T_{i,n_j+1,k} = 2T_{i,n_j,k} - T_{i,n_j-1,k}$ .

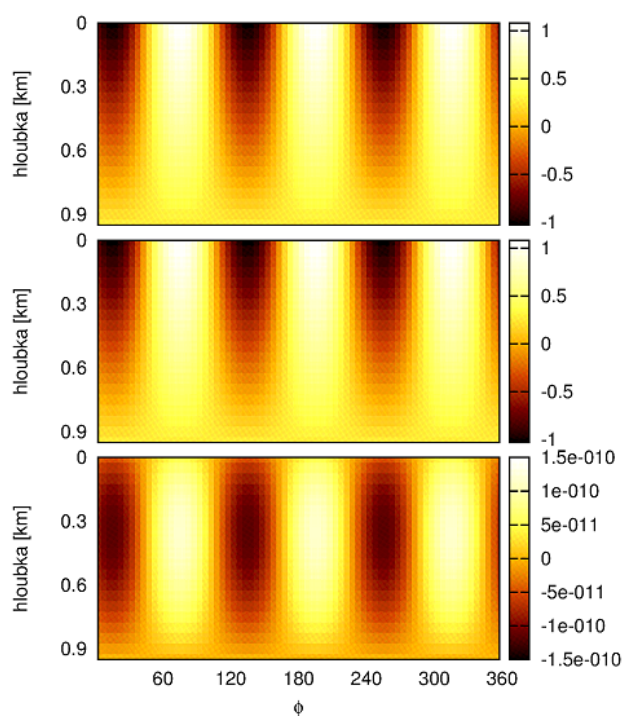


Obrázek 4.3: Pomocné body výpočtu teploty a tepelného toku za umělou hranicí na jižním pólu planety.

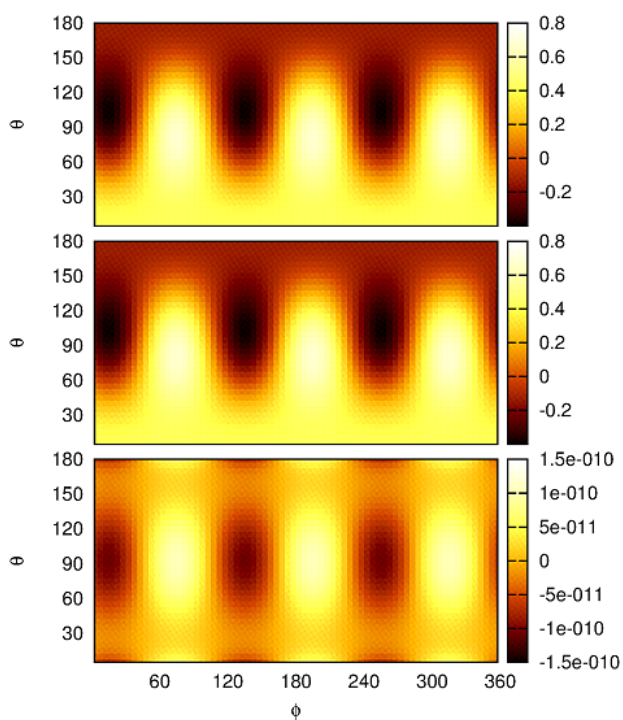
### 4.3 Testy

Stacionární i časově proměnné numerické řešení rovnice vedení tepla ve třech dimensích se zanedbatelným tepelným tokem v horizontálním směru bylo porovnáno s jednodimensionálním modelem. Oba výsledky se shodují na tloušťku čáry. Obecně nesymetrické analytické řešení v kulové slupce s konstantními parametry  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $k$  a vhodnými okrajovými podmínkami lze nalézt pomocí separace proměnných (viz např. [15]). Třírozměrný numerický model byl testován pro případ hraničních teplot vyjádřených v podobě sférického harmonického rozvoje až do stupně 10. Jeden z testů je uveden na obrázcích 4.4 a 4.5. Podprogram počítající teoretické řešení poskytla dr. Marie Běhounková.





Obrázek 4.4: *Shora dolů* Radiální průběh numerického a analytického řešení rovnice vedení tepla ve slupce, na jejíchž hranicích jsou zadány okrajové podmínky v podobě sférických harmonických funkcí  $Y_3^3$  a  $Y_1^0$ . Spodní obrázek znázorňuje rozdíl obou řešení.



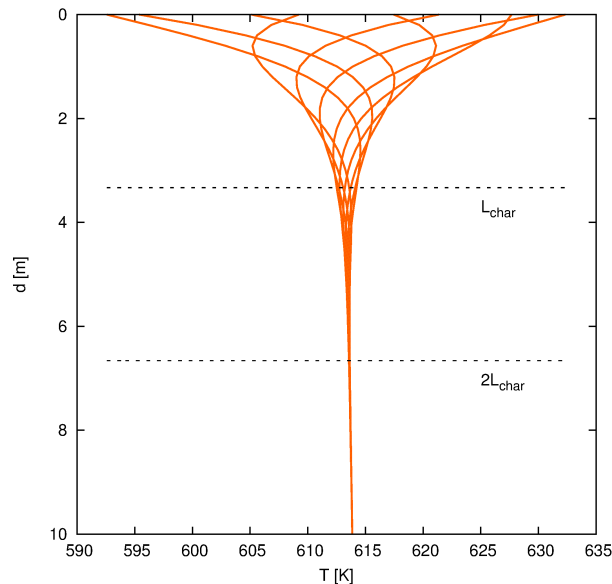
Obrázek 4.5: *Shora dolů* Numerické a analytické řešení rovnice vedení tepla ve středu slupky, na jejíchž hranicích jsou zadány okrajové podmínky v podobě sférických harmonických funkcí  $Y_3^3$  a  $Y_1^0$ . Spodní obrázek znázorňuje rozdíl obou řešení.

## 5. Výsledky

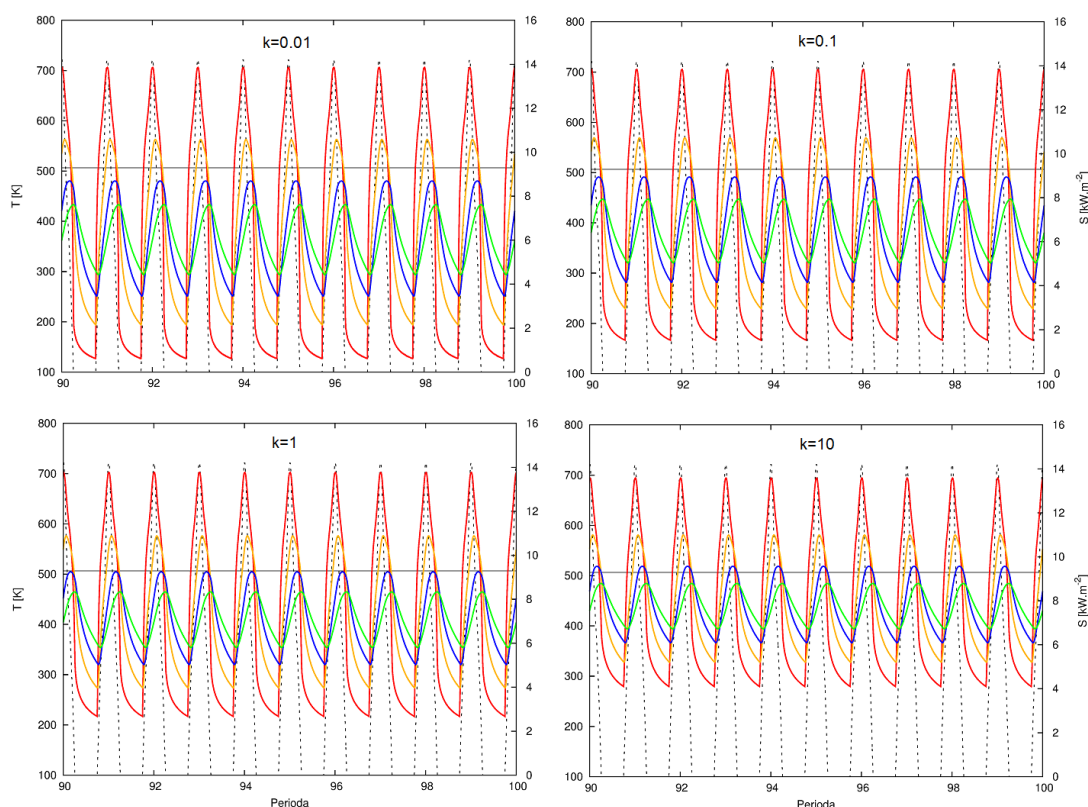
Pro studium vlivu insolace a dalších fyzikálních parametrů na průběh povrchové teploty byl použit model exozemě nacházející se na oběžné dráze Merkuru u hvězdy podobné Slunci. Poloměr modelové planety je 6370 km, albedo  $A = 0,1$ , emisivita  $\varepsilon = 0,9$ , extrasolární konstanta  $S_* = 9089 \text{ Wm}^{-2}$ , tepelný tok z nitra  $q_b = 0,075 \text{ Wm}^{-2}$ , hustota kůry  $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$  a měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku  $c_p = 800 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$  (viz [2]). Povrchovou vrstvu planety považují za homogenní a prostou vlastních tepelných zdrojů. Charakteristická hloubka odpovídající uvedeným parametrům a tepelným vodivostem  $k = 0,01 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  až  $k = 10 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  je nejvýše deset metrů.

### 5.1 Časový vývoj teploty

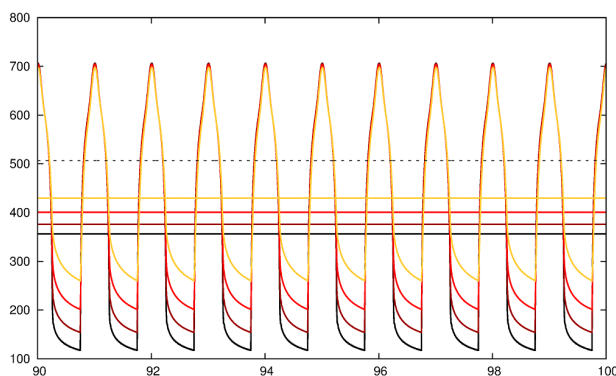
Podobu časově proměnného řešení rovnice vedení tepla ovlivňuje během několika prvních insolačních period počáteční podmínka kladená na teplotu. Aby byl dopad jejího výběru minimální, uvádím pouze výsledky získané po dostatečně dlouhém výpočtu, představujícím v 1D modelu sto period a v početně náročnějším 3D modelu deset period. Teplotní profil planetární kůry se pak díky insolaci mění pouze ve slabé svrchní vrstvě, zatímco teplota ve hloubce pod  $2L_{\text{char}}$  zůstává takřka konstantní (viz obrázek 5.1).



Obrázek 5.1: Ilustrace změn podpovrchové teploty během jedné insolační periody na planetě s vázanou rotací, avšak nenulovým sklonem rotační osy. Prerušovanou čarou jsou vyznačeny násobky charakteristické délky  $L_{\text{char}}$ .



Obrázek 5.2: Vývoj teploty na povrchu planety (červeně) a v hloubkách  $0,5L_{char}$  (žlutě),  $L_{char}$  (modře),  $1,5L_{char}$  (zeleně) v závislosti na vodivosti studované slupky. Přerušovaná čára vyznačuje průběh insolace, černá přímková značí rovnovážnou povrchovou teplotu příslušející průměrné insolaci. Planeta obíhá po dráze s výstředností  $e = 0,2$  ve spin-orbitální resonanci 3:2 a sklon její rotační osy je  $\beta = 30^\circ$ .

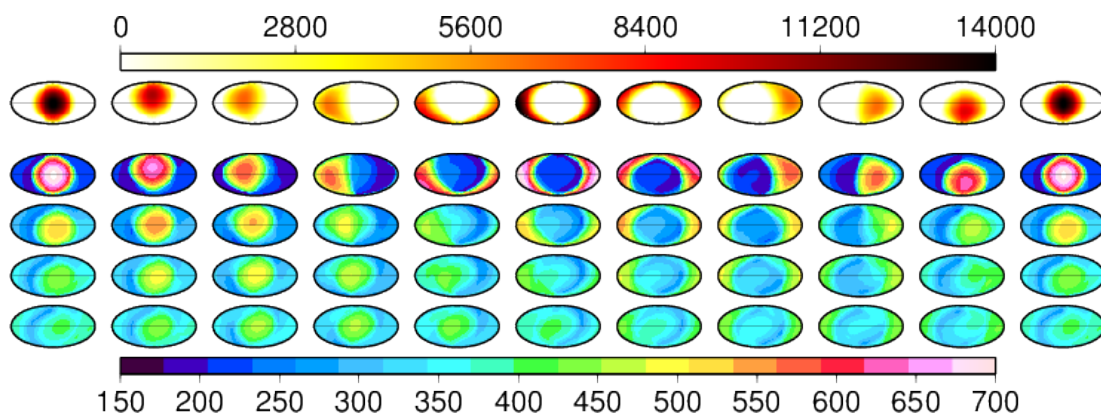


Obrázek 5.3: Porovnání povrchových teplot a jejich průměrů pro různé tepelné vodivosti svrchní části kůry:  $k = 0,01 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  (černě),  $k = 0,1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  (hnědě),  $k = 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  (červeně) a  $k = 10 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  (žlutě). Přerušovanou čarou je vyznačena povrchová teplota stacionárního řešení při průměrné insolaci.

Grafy 5.2 znázorňují příklad časového průběhu povrchové a podpovrchové teploty pro čtyři řádově odlišné tepelné vodivosti  $k$ . Modelová planeta má zde rotační osu

skloněnou o  $30^\circ$ , obíhá po dráze s výstředností  $e = 0,2$  a je uzamčena ve spin-orbitální resonanci 3:2. Teploty se vykreslují v bodě ležícím na rovníku a přivráceném ke hvězdě během průchodu planety periastrum. Kromě zmíněného poklesu amplitudy oscilací se vzrůstající hloubkou lze z obrázků vysledovat nesoulad mezi povrchovou teplotou stacionárního řešení při střední insolaci a skutečnou průměrnou teplotou, odpovídající proměnné insolaci. Druhá z uvedených je vždy nižší. Tento rozdíl, zobrazený v detailu na obrázku 5.3, se zvláště projevuje při spin-orbitálních resonancích jiných než 1:1, kdy na planetě neexistují oblasti věčného dne a celý povrch je tak během roku vystavován různě rychlému chladnutí. Rozdíl zcela vymizí pouze pro planetu s nulovým sklonem rotační osy, podléhající vázané rotaci a obíhající po kruhové dráze.

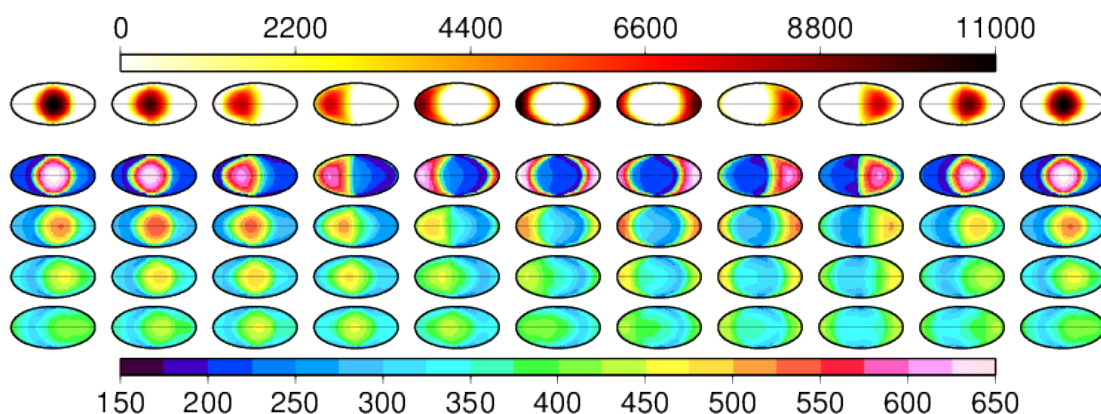
Průběh povrchové a podpovrchové teploty v závislosti na změnách osvětlení během jedné insolační periody byl studován také v třírozměrném modelu. Obrázek 5.4 vykresluje situaci na planetě se stejnými parametry oběžné dráhy, jaké byly použity výše, avšak pouze s vodivostí  $k = 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Názorně je vidět postupné prohřívání podpovrchových oblastí. Následující obrázky 5.5 a 5.6 nastiňují teplotní vývoj planety s nulovým sklonem rotační osy, ve spin-orbitální resonanci 3:2 nebo 1:1. Výstřednost dráhy volím v obou případech  $e = 0,1$ . Odvrácená strana planety s vázanou rotací je zahřívána téměř výhradně teplem z nitra, kde  $q_b = 0,075 \text{ Wm}^{-2}$ .



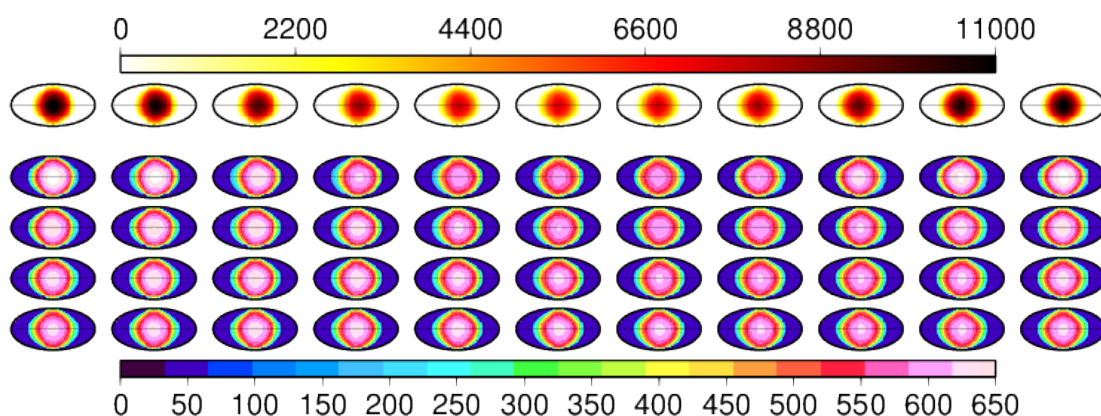
Obrázek 5.4: Vývoj povrchové teploty na planetě s parametry  $e = 0,2$  a  $\beta = 30^\circ$  ve spin-orbitální resonanci 3:2 v průběhu jedné insolační periody. Horní barevná škála náleží insolaci v jednotkách  $\text{Wm}^{-2}$ , spodní škála uvádí teplotu v kelvinech. Shora dolů jsou v řádcích vyobrazeny insolace, povrchová teplota a dále teploty ve třech hloubkách škálovaných charakteristickou délkou ( $0,5L_{char}$ ,  $L_{char}$ ,  $1,5L_{char}$ ).

## 5.2 Vliv modelových parametrů

Zbývající sada obrázků představuje závislosti průměrné roční (nebo dvouleté) teploty v nejozařovanějším či nejméně ozařovaném místě planety na různých dvojicích parametrů. K výpočtu jsem kvůli velkému množství proměnných použila jednorozměrný model. Nejozařovanějším místem je rozuměn bod s nejvyšší průměrnou insolací, kterou lze pro některá uspořádání nalézt na ilustracích v první kapitole. Parametry, jimiž se budeme dále zabývat, jsou výstřednost  $e$ , sklon rotační osy  $\beta$ , extrasolární konstanta  $S_*$ , tepelný tok z nitra  $q_b$  a tepelná setrvačnost  $I = \sqrt{k\rho c_p}$ . Studován bude



Obrázek 5.5: Dvouletý průběh insolace a povrchové teploty na planetě s parametry  $e = 0,1$  a  $\beta = 0^\circ$  ve spin-orbitální resonanci 3:2 v průběhu jedné insolační periody.



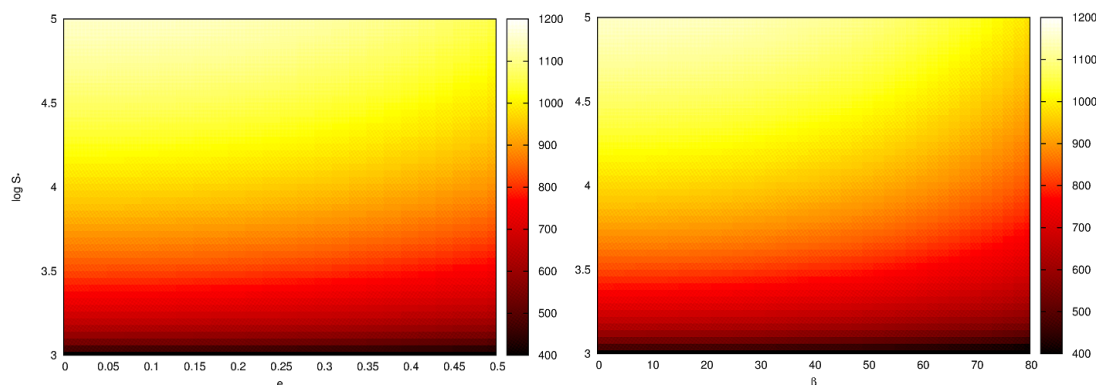
Obrázek 5.6: Roční průběh insolace a povrchové teploty na planetě s vázanou rotací a parametry  $e = 0,1$  a  $\beta = 0^\circ$ .

také vliv spin-orbitální resonance 1:1 nebo 3:2. Není-li uvedeno jinak, ponechávám parametry stejné jako v úvodu k této kapitole, doplňuji k nim pouze tepelnou vodivost  $k = 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Pro případ sledování závislosti na samotném  $e$  nebo  $\beta$  pokládám druhou z veličin rovnou nule.

Zaměřme se nejprve na případ vázané rotace, ve kterém grafy zobrazují nejen nejvyšší průměrnou teplotu, ale také nejvyšší střední teplotní rozdíl mezi body na planetárním povrchu. Až na některé extrémní případy (sklon rotační osy blízký  $90^\circ$ ) totiž zůstává část planety zahalena do věčného stínu a tepelným tokem z nitra se prohřívá pouze na desítky kelvinů. V osvětlených oblastech je příspěvek  $q_b$  v porovnání s ostatními parametry zanedbatelný. Jak znázorňuje obrázek 5.7, závisí maximální povrchová teplota, dle očekávání, především na řádové velikosti extrasolární konstanty, tedy na vzdálenosti planety od mateřské hvězdy a na jejím zářivém výkonu. Vliv výstřednosti dráhy nebo sklonu rotační osy bývá mírnější. Se zvětšováním  $e$  nebo  $\beta$  maximální teplota pozvolna klesá v rozsahu 100 K, což je v obou případech způsobeno rovnoměrnějším rozprostřením střední insolace po planetárním povrchu, ať již díky libraci v planetopisné délce nebo v šířce (viz obrázky 2.2 a 2.3). Na výstředných drahách má vliv také velký rozdíl mezi insolací v periastru a apoastru. Přestože se povrch planety během přiblížení k hvězdě ohřeje na vyšší teplotu, než jaká by odpoví-

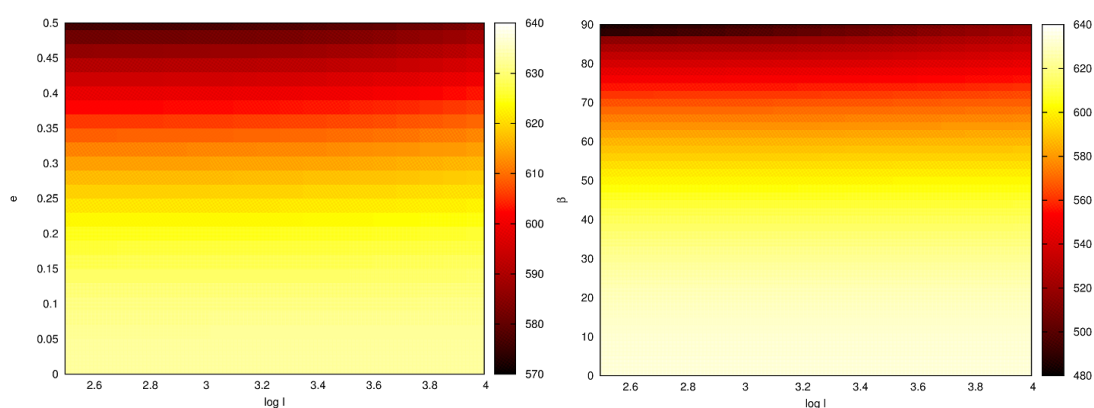


dala téměř kruhové dráze o téže hlavní poloose, setrvává planeta po většinu svého oběhu v okolí apoastra, kde kvůli slabému ozáření dlouho chladne. Průměrná teplota se tedy nezvyšuje.



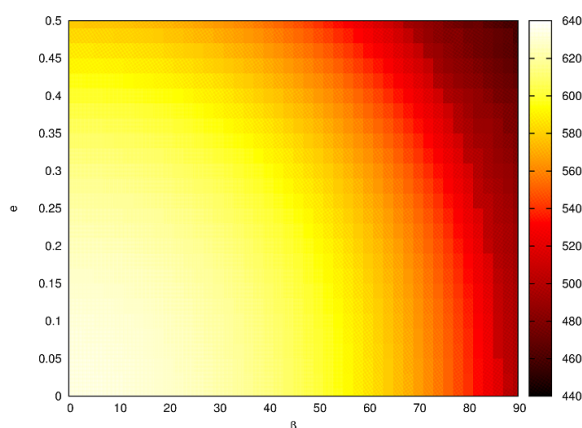
Obrázek 5.7: Vliv extrasolární konstanty  $S_*$  a parametrů dráhy ( $e$  nebo  $\beta$ ) na průměrnou teplotu v místě s nejvyšší střední insolací. Planeta ve spin-orbitální resonanci 1:1.

Podrobnější pohled na uvedenou závislost pro konkrétní extrasolární konstantu  $S_* = 9089 \text{ Wm}^{-2}$  poskytuje obrázek 5.8, znázorňující roční průměr z maximálních povrchových teplot jako funkci výstřednosti či sklonu rotační osy při různých tepelných setrvačnostech. Vyšší tepelná setrvačnost zabraňuje rychlému chladnutí neosvětleného povrchu, její vliv je proto nejvýraznější na planetě s velkým  $\beta$  nebo  $e$ . Zvyšování tepelné setrvačnosti působí nárůst průměrné teploty v řádu jednotek až desítek kelvinů. Hodnotu maximální průměrné teploty na planetách s nenulovou výstředností i sklonem rotační osy (při zachování ostatních parametrů konstantních) znázorňuje obrázek 5.9.



Obrázek 5.8: Vliv tepelné setrvačnosti  $I$  a parametrů dráhy ( $e$  nebo  $\beta$ ) na průměrnou teplotu v místě s nejvyšší střední insolací. Planeta ve spin-orbitální resonanci 1:1.

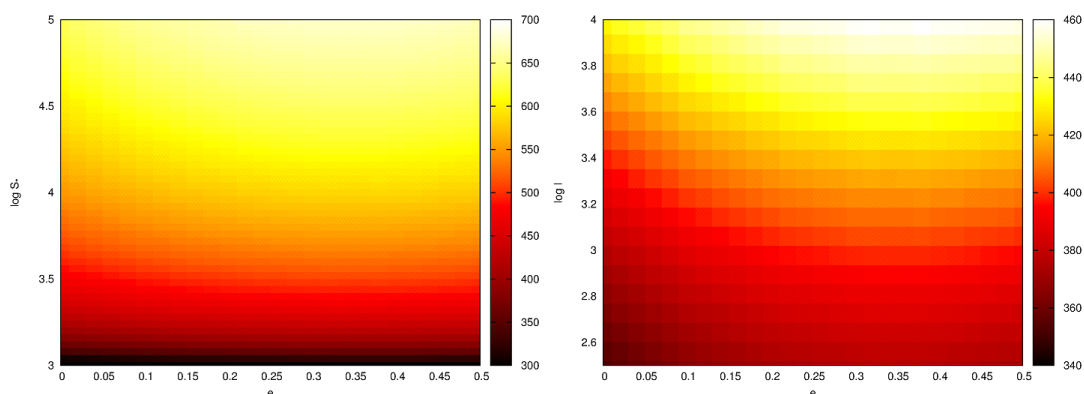
Jak již bylo zmíněno, vyskytují se na planetách s vázanou rotací oblasti věčné noci a rozdíly mezi povrchovou teplotou na přivrácené a odvrácené straně tak mohou činit i tisíce kelvinů. Budeme-li naopak nadále uvažovat planety ve spin-orbitální



Obrázek 5.9: Vliv sklonu rotační osy  $\beta$  a výstřednosti dráhy  $e$  na průměrnou teplotu v místě s nejvyšší střední insolací. Planeta ve spin-orbitální resonanci 1:1.

resonanci 3:2, setkáme se s neosvětlovanými místy pouze v případě  $\beta = 0^\circ$ , kdy se nalézají na pólech. Při nenulových sklonech rotační osy je teplota na celém povrchu určována především insolací a tepelný tok z nitra svůj význam ztrácí zcela. V závislosti na parametrech dráhy a povrchové slupky se nově mění také teplota v místě s nejnižším středním ozářením.

Na obrázku 5.10 jsou vykresleny dvouleté průměry maximální povrchové teploty pro planety s různě výstřednými drahami a různou extrasolární konstantou či tepelnou setrvačností. Vliv výstřednosti je v jistém rozsahu hodnot díky spin-orbitální resonanci 3:2 zcela opačný, nežli u planet s vázanou rotací. Teplota se s rostoucím  $e$  nejprve postupně zvyšuje, maxima dosahuje pro  $e = 0,35$  a při vyšších excentricitách začíná stejně pozvolna klesat. Oproti resonanci 1:1 podstatně narostl význam tepelné setrvačnosti, která může ovlivňovat povrchovou teplotu v rozsahu stovky kelvinů, jak je ostatně znázorněno i na obrázku 5.3.



Obrázek 5.10: Vliv výstřednosti dráhy  $e$ , extrasolární konstanty  $S_*$  a tepelné setrvačnosti  $I$  na průměrnou teplotu v místě s nejvyšší střední insolací. Planeta ve spin-orbitální resonanci 3:2.

Začneme-li měnit sklon rotační osy modelové planety, zjistíme, že průměrná teplota

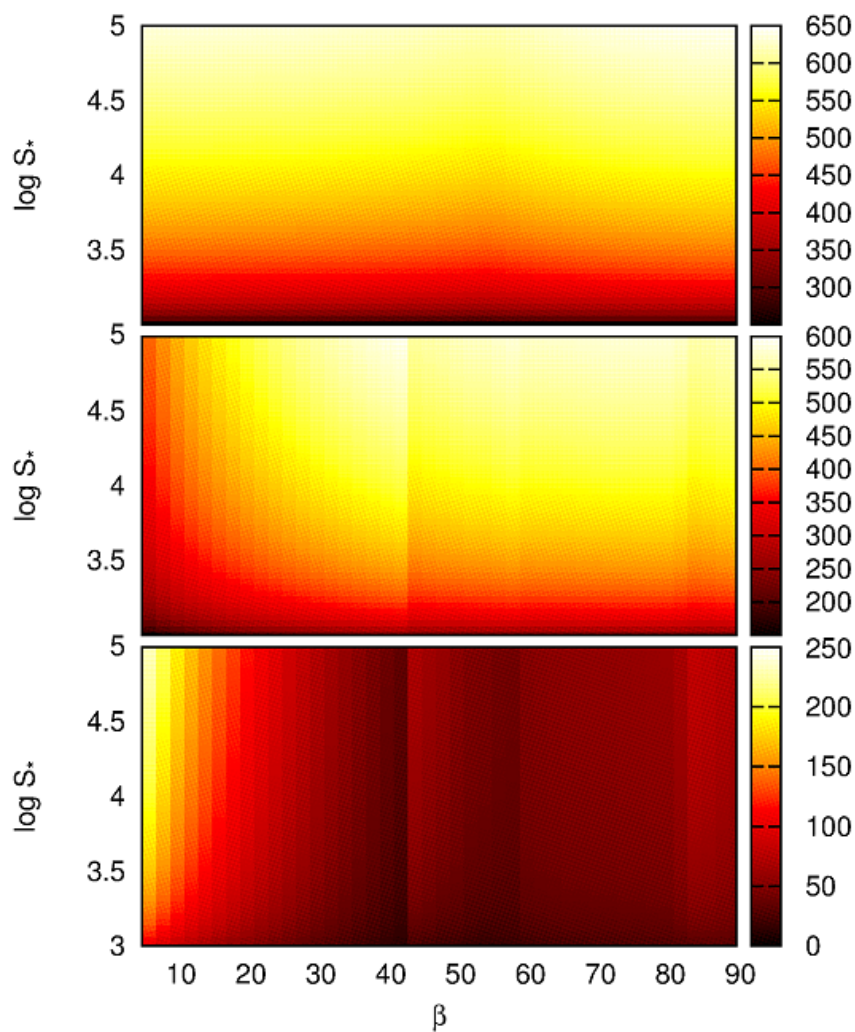
v bodě s nejvyšší i nejnižší střední insolací vykazuje poměrně nečekané chování. Jak ukazují obrázky 5.11 a 5.12, jsou některé hodnoty  $\beta$  pro spin-orbitální resonanci 3:2 význačné, a to nezávisle na tepelné setrvačnosti povrchu nebo na extrasolární konstantě. Se zvyšujícím se sklonem rotační osy dochází nejprve k nárůstu minimální povrchové teploty za současného pozvolného poklesu teploty maximální. Při  $\beta = 42^\circ$  je povrch planety prohříván velmi rovnoměrně a teplotní rozdíly dosahují pro některá  $S_*$  a  $I$  pouhých deseti kelvinů. Po překročení této hranice minimální povrchová teplota prudce poklesne, ale při dalším zvětšování sklonu začíná znova růst. Nadále dochází i k pomalému snižování maximální teploty, které pokračuje až po  $\beta = 54^\circ$ . Také v tomto případě je povrch zahříván rovnoměrně, zvláště při malých hodnotách extrasolární konstanty a velkých tepelných setrvačnostech. Změna oproti podobným sklonům rotační osy však není natolik výrazná, jako na předcházející hranici. Posledním z mezních sklonů ve studovaném rozsahu je  $\beta = 86^\circ$ , charakterisovaný slabým minimem teploty v bodě s nejnižší průměrnou insolací.

Jestliže je kromě nenulového sklonu rotační osy uvážena také nenulová výstřednost dráhy, začnou se polohy výše popsaných hranic posouvat a na grafech minimálních a maximálních teplot vznikají celé význačné oblasti. Vůbec nejvyšší povrchové teploty - a také největších teplotních rozdílů - tak dosahuje planeta s excentricitou  $e = 0,38$  a malým sklonem rotační osy. Maximální povrchové teploty planet s extrémní oběžnou dráhou ( $\beta$  blízké  $90^\circ$  a výstřednost nad 0,4) bývají naopak nízké a jejich závislost na  $e$  a  $\beta$  je bez numerických výpočtů těžko předvídatelná. Vliv obou parametrů znázorňuje obrázek 5.13.

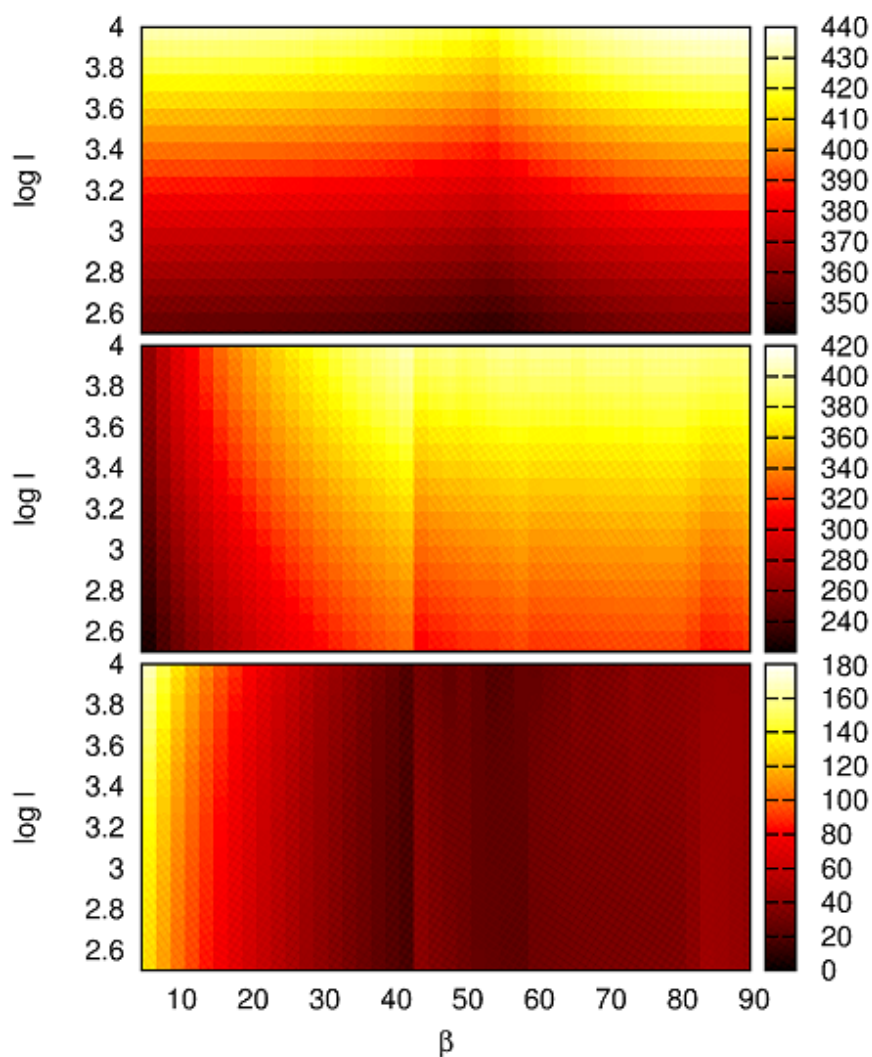
### 5.3 Diskuse

V následující podkapitole bych ráda zmínila některá zjednodušení a zanedbání, kterých jsem se při studiu insolace a povrchové teploty dopustila. Práce se zaměřuje na terestrické planety vystavené kvůli nepřítomnosti atmosféry obrovským teplotním rozdílům, pohybujícím se v řádu stovek až tisíců kelvinů. Fyzikální vlastnosti kůry, jako jsou hustota a tepelná vodivost, přesto považuji za konstantní (v čase i prostoru) a nezabývám se jejich teplotní závislostí. Ve druhé kapitole je zmíněna role časového rozestupu mezi jarní rovnodenností a průchodem planety periastronem, tento parametr však do analýzy nezahrnuji a pro jednoduchost předpokládám, že oba okamžiky nastávají současně. Konečně, veškeré uvažované modelové parametry zadávám jako vzájemně nezávislé, ačkoliv takovými zdaleka nejsou. Jak bylo řečeno již v úvodu práce, pravděpodobnost zachycení planety v konkrétní spin-orbitální resonanci se odvíjí od výstřednosti dráhy a při velkých excentricitách se studovaná resonance 1:1 prakticky nevyskytuje. Dráhy krátkoperiodických terestrických planet se v průběhu miliard let stávají kruhovými, přičemž větší výstřednosti mohou být udržovány jedině působením dalších těles (Kozaiův mechanismus, zmíněný například v [4]). Sklon rotační osy klesá působením slapů k nule a nenulové hodnoty ke svému ustálení rovněž vyžadují buď multiplanetární systém nebo zploštění mateřské hvězdy (Cassiniho stav, stručně uvedené například v [9]). Na časových škálách, které v této práci sleduji, jsem však perturbace od případných dalších planetárních souputníků považovala za nevýznamné.

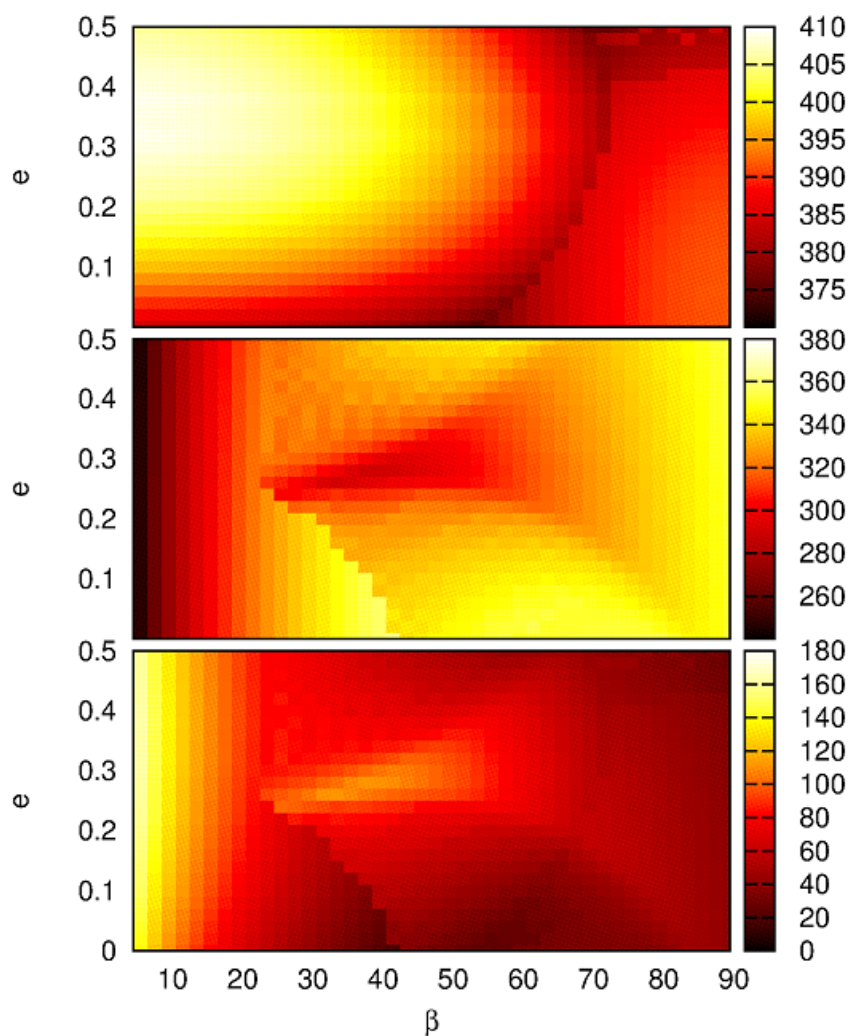




Obrázek 5.11: *Shora dolů* Průměrná teplota v bodě s nejvyšší a nejnižší střední insolací a jejich rozdíl v závislosti na extrasolární konstantě  $S_*$  a sklonu rotační osy  $\beta$ . Planeta je ve spin-orbitální resonanci 3:2. Pro lepší vyniknutí detailů grafu volím rozsah vodorovné osy záměrně  $[5^\circ, 90^\circ]$ . Minimální teploty na planetách s nižším sklonem rotační osy strmě klesají k nule.



Obrázek 5.12: *Shora dolu* Průměrná teplota v bodě s nejvyšší a nejnižší střední insolací a jejich rozdíl v závislosti na tepelné setrvačnosti  $I$  a sklonu rotační osy  $\beta$  nabývajícím hodnot z intervalu  $[5^\circ, 90^\circ]$ . Planeta ve spin-orbitální resonanci 3:2.



Obrázek 5.13: *Shora dolů* Průměrná teplota v bodě s nejvyšší a nejnižší střední insolací a jejich rozdíl v závislosti na výstřednosti dráhy  $e$  a sklonu rotační osy  $\beta$  nabývajícím hodnot z intervalu  $[5^\circ, 90^\circ]$ . Planeta ve spin-orbitální resonanci 3:2.

## Závěr

V rámci bakalářské práce byl vytvořen počítačový program popisující změny insolace a povrchové teploty idealisované terestrické exoplanety v závislosti na fyzikálních vlastnostech svrchní části její kůry, tvaru oběžné dráhy a zářivém výkonu mateřské hvězdy. Tento program jsem poté využila k analýze vlivu jednotlivých parametrů na průměrné teploty a maximální teplotní kontrast při povrchu modelového tělesa.

Vlastnosti nelineární horní okrajové podmínky způsobují, že průměrná teplota na planetě je vždy menší nebo rovna rovnovážné teplotě, která by odpovídala střední roční či dvouleté insolaci. Vyšších vzájemných rozdílů přitom obě hodnoty dosahují při spin-orbitální resonanci 3:2, zatímco na planetě s vázanou rotací, nulovým sklonem rotační osy a zanedbatelnou výstředností nerovnost zcela mizí. Ke vzniku rozdílu přispívá silný vliv období noci. Teplota, na kterou planetární povrch vychladne, je kromě periody závislá na tepelné setrvačnosti svrchní vrstvy a chladnutí se pro spin-orbitální resonance 3:2 může pohybovat i na škále stovky kelvinů.

Z výsledků dále vyplývá, že nejvýraznější vliv na planetě bez atmosféry má v celém studovaném rozsahu hodnot dle očekávání extrasolární konstanta, tedy zářivý výkon hvězdy a délka hlavní poloosy oběžné dráhy. Na škálách o řád menších pak povrchovou teplotu ovlivňuje kombinace excentricity a sklonu rotační osy. Zahřívání planety teplem z nitra má větší význam pouze v oblastech věčné noci, na osvětlených částech povrchu je jeho příspěvek ve srovnání s insolací mizivý, a to jak při tepelných tocích obdobných Zemi, tak na planetách se silným slapovým třením [11]. Povrchová teplota může být vnitřními dynamickými procesy výrazně ovlivněna například v případě silné vulkanické či tektonické činnosti, kdy již nelze použít rovnici (2.10) a je třeba uvážit podrobnější teorii.

Představený výpočetní program bude v budoucnu doplněn o některá zpřesnění, jako je například teplotní a hloubková závislost parametrů povrchové vrstvy nebo vliv časového rozestupu mezi jarní rovnodenností a průchodem planety periastrum. Po těchto úpravách může být využit k předepisování vhodných okrajových podmínek v modelech plášťové konvekce a k dalšímu studiu termálního vývoje krátkoperiodických kamenných exoplanet [12].

## Seznam použité literatury

- [1] VAN HEMELRIJCK, E. a VERCHEVAL, J. Some Aspects of the Solar Radiation Incident at the Top of the Atmospheres of Mercury and Venus. *Icarus* 48 (1981) 167-179.
- [2] MITCHELL, D.L. a DE PATER, I. Microwave imaging of Mercury's thermal emission at wavelenghts from 0.3 to 20.5 cm. *Icarus* 110 (1994) 2-32.
- [3] BATALHA, N., et al. Planetary candidates observed by KEPLER. III. analysis of the first 16 months of data. *The Astrophysical Journal Supplement Series.*, 204:24, February 2013.
- [4] BARNES, R. (ed.), *Formation and evolution of exoplanets*. WILEY-VCH, 2010. ISBN 978-3-527-40896-2
- [5] WRIGHT, J.T. a GAUDI, B.S. Exoplanet detection methods. 2012. K publikaci v OSWALT, T. (hl. ed.) KALAS, P. (ed. dílu), *Planets, Stars and Stellar Systems*. arXiv:1210.2471v2 [astro-ph.EP]
- [6] UDRY, S. a SANTOS, N.C. Statistical properties of exoplanets. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 2007. 397-439.
- [7] MAYOR, M. a QUELOZ, D. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature* 378 (November 1995) 355-359.
- [8] DOBROVOLSKIS, A.R. Spin states and climates of eccentric exoplanets. *Icarus* 192 (2007) 1-23.
- [9] DOBROVOLSKIS, A.R. Insolation patterns on synchronous exoplanets with obliquity. *Icarus* 204 (2009) 1-10.
- [10] DOBROVOLSKIS, A.R. Insolation on exoplanets with eccentricity and obliquity. Přijato k publikaci. *Icarus* (2013).
- [11] BĚHOUNKOVÁ, M., et al. Tidally induced thermal runaways on extrasolar Earths: Impact on habitability *The Astrophysical Journal*, 728:89, February 2011.
- [12] BĚHOUNKOVÁ, M., et al. Coupling mantle convection and tidal dissipation: Applications to Enceladus and Earth-like planets *Journal of Geophysical Research*, vol. 115. 2011.
- [13] MATYSKA, C. *Mathematical Introduction to Geothermics and Geodynamics*. Učební text. MFF UK, 2005.
- [14] ANDRLE, P. *Základy nebeské mechaniky*. Academia, 1971.
- [15] CARSLAW, H.S. a JAEGER, J.C. *Conduction of heat in solids*. 2. vydání. Oxford University Press, 1959. ISBN 978-0198533689
- [16] PRESS, W.H., et al. *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*. 2. vydání. Cambridge University Press, 1999. ISBN 0-521-43064-X

- [17] ISMAIL-ZADEH, A. a TACKLEY, P. *Computational methods for geodynamics*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-0-521-86767-2
- [18] SCHENK, O. a GÄRTNER, K. Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO. *Journal of Future Generation Computer Systems*. 20(3):475–487, 2004.
- [19] SCHENK, O. a GÄRTNER, K. On fast factorization pivoting methods for symmetric indefinite systems. *Elec. Trans. Numer. Anal.*. 23:158–179, 2006.
- [20] SCHENK, O., BOLLHOEFER, M., ROEMER, R. On large-scale diagonalization techniques for the Anderson model of localization. *SIAM Review* 50 (2008) 91–112.
- [21] SCHENK, O., WAECHTER, A., HAGEMANN, M. Matching-based Preprocessing Algorithms to the Solution of Saddle-Point Problems in Large-Scale Nonconvex Interior-Point Optimization. *Journal of Computational Optimization and Applications*. 321-341, Volume 36, Numbers 2-3. April, 2007.

**Internetové zdroje:**

- [22] *The Exoplanet Orbit Database & The Exoplanet Data Explorer*  
exoplanets.org
- [23] *The Extrasolar Planets Encyclopaedia*  
exoplanet.eu