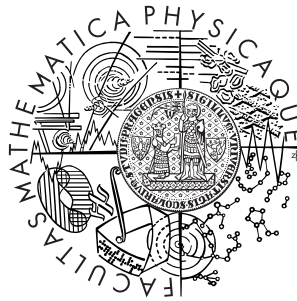


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Vojtěch Patočka

### **Pohyb rotačního pólu jako důsledek termální konvekce v plášti planety**

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika, obor Obecná fyzika

2010

Na tomto místě bych rád poděkoval docentu Čadkovi za ochotu a pomoc při vzniku této práce, především za trpělivost s mou tvrdohlavostí. Díky patří také doktoru Velímskému a přátelské katedře geofyziky. Za toleranci časového vytížení a pomoc s úpravou textu vděčím své přítelkyni.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Vojtěch Patočka

# Obsah

Úvod	6
<b>1 Odvození Liouvilovy rovnice</b>	<b>8</b>
1.1 Liouvillova rovnice	8
1.2 Druhá věta impulzová	9
1.3 Vztah pro derivaci vektoru v pohybující se soustavě	10
1.4 Inerciální soustava	11
1.5 Moment vnějších sil	11
1.6 Výsledný tvar rovnice	12
<b>2 Referenční soustava</b>	<b>14</b>
2.1 Volba referenční soustavy souřadné	14
2.2 Rotační deformace	16
<b>3 Význačná řešení</b>	<b>18</b>
3.1 Členění pohybů rotační osy	18
3.2 Linearizovaná verze Liouvilovy rovnice	20
<b>4 Navržená metoda</b>	<b>22</b>
4.1 Matematický rozbor	22
4.2 Výpočetní program	24
4.3 Korekce metody	25
<b>5 Výsledky počítačového modelování</b>	<b>26</b>
5.1 Tuhá Země a volné setrvačníky	27
5.2 Pohyb hlavních os tenzoru setrvačnosti	29
5.3 Rotace tělesa v inerciální soustavě	32
5.4 Vliv korekce	33
5.5 Změna délky časového kroku	36

Závěr	37
Literatura	38
Kopie výpočetního programu	39

Název práce: Pohyb rotačního pólu jako důsledek termální konvekce v plášti planety

Autor: Vojtěch Patočka

Katedra (ústav): Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

e-mail vedoucího: Ondrej.Cadek@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předkládané práci studujeme, jak termální konvekce ovlivňuje rotační chování těles planetárních rozměrů. Základním vztahem, který při tom využíváme, je Liouvillova rovnice. Odvození vztahu se věnuje první část práce, v níž také shrnujeme některé poznatky o jeho využití v geofyzice. Pro řešení rovnice jsme navrhli metodu, která vychází z jednokrokové numerické metody integrace typu Runge-Kutta. V druhé části práce pak aplikací metody na modelové vývoje tenzoru setrvačnosti sledujeme, jak rotační chování planet závisí na pohybu hlavních os, a testujeme meze použitelnosti zvolené metody. Zkoumáme také, jak se na výsledku projeví rotační deformace a zda jsme se při návržení metody nedopustili neoprávněných aproximací.

Klíčová slova: Rotační pól, Liouvillova rovnice, Termální konvekce

Title: Polar wander due to thermal convection in a planetary mantle

Author: Vojtěch Patočka

Department: Department of Geophysics

Supervisor: doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Supervisor's e-mail address: Ondrej.Cadek@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the effects of mantle convection on movement of the poles of rotation within planet-sized bodies. First part deals with derivation of the Liouville equation, which is a fundamental relation in our work. We also focus on certain aspects of its application in geophysics. In the second part we develop a method of solution of the equation, based on the one step Runge-Kutta method. Thereafter we observe how the poles of rotation follow the movement of axes of figure and we test the limits of the method's applicability. We do so by test run on simple models of mantle convection. The outcome of used approximation and the effects of rotational deformation are also discussed.

Keywords: Poles of rotation, Liouville's equation, Mantle convection

# Úvod

V této práci se zabýváme vlivem deformace na pohyb rotační osy těles ve Sluneční soustavě. Nejdále je v tomto směru přirozeně studium naší planety. Pohyb a změnu velikosti vektoru úhlové rychlosti rotace Země lze velmi přesně měřit (metody měření shrnuje například zde hojně citovaná monografie [1]) a zároveň jsme schopni predikovat, jak tento pohyb ovlivňují některé geofyzikální a geologické procesy. Základní prací v tomto směru je opět [1], existuje ovšem mnoho navazující literatury. Za všechny zmiňme alespoň práce [2] a [3], projevům ledovcového zatížení se v současnosti věnuje [4]. Porovnáním naměřených dat s predikcí tak můžeme posuzovat kvalitu modelů, které byly k predikci použity. Například změření periody tzv. Chandlerova kolébání v minulosti vedlo k vyloučení některých úvah o struktuře Země, jak zmiňuje [5].

Tvar naší planety je blízký ekvipotenciále součtu gravitačního a odstředivého potenciálu a rotace je proto stabilní, pozice rotační osy v Zemi prakticky neměnná (viz diskuze v sekci 5.4, [1]). Z těchto důvodů lze při jejím studiu využít linearizované verze Liouvilovy rovnice. Ne všechny planety ovšem vykazují takové rotační chování. U některých je dynamické zploštění jen těžko odlišitelné od topografie, u dalších pak existují indicie, že rotační osa v nich v minulosti výrazně putovala. Známý je případ Marsu, u nějž lze takový posun odhadovat na základě studia povrchových kráterů (problematice se věnuje [6]). Fyzikální příčina změny rotace planet může být různorodá. Zde se zaměříme na vliv termální konvekce způsobené deformace tělesa. Snažíme se navrhnout metodu řešení nelinearizované Liouvilovy rovnice, abychom lépe objasnili vztah mezi deformací těles planetárních rozměrů a pohybem jejich rotační osy. Mohli bychom tím pomoci i studiu ledového měsíce Jupiteru - Enceladu, u nějž je výrazným zdrojem energie slapové tření, závisující na natočení Enceladu vůči Jupiteru. Informaci o tomto natočení lze získat právě z pozice rotačního pólu, tedy z průsečíku rotační osy Enceladu s jeho povrchem. Problematikou Enceladu se zabývá [7].

První až třetí kapitola mají rešeršní povahu. V první z nich se věnujeme odvození Liouvilovy rovnice, ve druhé pak volbě referenční soustavy, abychom ozřejмили fyzikální význam spočteného. Na tomto místě také diskutujeme rotační deformaci, jejímuž vlivu je třeba se v případném navázání věnovat důkladněji a obecněji. Třetí kapitola shrnuje rysy pohybu volného setrvačnicku, se kterými se

setkáváme v průběhu celé práce. V druhé části popisuje linearizovanou verzi Liouvillovy rovnice a ukazuje některá její řešení. Zároveň zde vysvětlujeme, proč nelze linearizovaného schématu pro sledovaný účel využít. Ve čtvrté kapitole navrhujeme numerickou metodu řešení nelinearizované Liouvillovy rovnice a naznačujeme některá úskalí s ní spojená. Technické detaily výpočetní realizace metody jsou nastíněny v části popisující strukturu výpočetního programu, jehož kopie je v příloze č.1. V poslední kapitole pozorujeme, jak se rotační pól chová pro jednoduché modely termální konvekce.

# Kapitola 1

## Odvození Liouvilovy rovnice

### 1.1 Liouvilova rovnice

Spojením druhé věty impulzové a vztahu pro časovou derivaci vektoru v pohybujících se soustavách  $(\frac{d\vec{u}}{dt})_{fixed} = (\frac{d\vec{u}}{dt})_{mov} + \vec{\omega} \times \vec{u}$  vznikne vektorová rovnice

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{mov} + \vec{\omega} \times \vec{B} = \vec{M}^E, \quad (I)$$

kde  $\vec{B}$  značí moment hybnosti a  $\vec{M}^E$  moment vnějších sil. Vyjádříme-li vztah (I) v soustavě spojené s tělesem a dosadíme-li za vektor momentu hybnosti, získáme Liouvilovu rovnici ([1])

$$\frac{d}{dt}(J_{ij}\Omega_j + h_i) + \epsilon_{ijk}\Omega_j(J_{kl}\Omega_l + h_k) = \mu_i, \quad (II)$$

kde  $J_{ij}$  jsou složky tenzoru setrvačnosti,  $\Omega_i$  složky vektoru úhlové rychlosti rotace,  $h_i$  složky vektoru relativního momentu hybnosti,  $\mu_i$  složky momentu vnějších sil a  $\epsilon_{ijk}$  Levi-Civitův symbol. V práci používáme s výjimkou části 1.2 Einsteinovu sumační konvenci. Významu všech použitých symbolů ve vztazích (I) a (II) se věnujeme podrobněji v dalších částech kapitoly.

Při znalosti rozložení hustoty v planetě, časového vývoje její deformace a momentu vnějších sil na planetu působících spočteme pomocí Liouvilovy rovnice časový vývoj vektoru úhlové rychlosti rotace tělesa. Jak již bylo naznačeno v úvodu, ve fyzikální praxi se rovnice využívá i obráceně. Například lze získat informace o tenzoru setrvačnosti Země, známe-li frekvenci tzv. Chandlerova kolébání, tedy z pohybu rotačního pólu. Pro nás bude (II) základním vztahem pro výpočet časového vývoje vektoru úhlové rychlosti rotace.



Zde naznačený postup odvození Liouvillovy rovnice si zaslouží hlubší rozbor, přestože se rovnice příliš neliší od známého vztahu pro výpočet pohybu setrvačníků z klasické mechaniky. V učebnicích klasické mechaniky se totiž setkáváme převážně se setrvačníky, které jsou tuhými tělesy a mají "bod pevný v prostoru". Ani jednu z těchto vlastností však námi studovaná tělesa nemají; deformují se a konají vůči inerciální soustavě zrychlený pohyb (obíhají kolem Slunce, nebo konají i složitější pohyb). Oba tyto rozdíly mají vliv na odvození Liouvillovy rovnice, avšak v literatuře jim není věnována přílišná pozornost. Proto si jednotlivé kroky odvození projdeme podrobněji. To je také důvod, proč jsme doposud uvedené vztahy lehce odbyli. Neuvedli jsme, vůči jakému bodu se zmíněné momenty uvažují, v jaké soustavě se měří, ani přesný význam vektoru  $\vec{\omega}$ . Budeme se tomu věnovat níže.

## 1.2 Druhá věta impulzová

Podstatou Liouvillovi rovnice je druhá věta impulzová. Uvedu zde její slovní formulaci z [8]: "Časová derivace celkového momentu hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednému momentu vnějších sil působících na soustavu. Podmínka rovnosti je, že moment hybnosti a moment síly je počítán vzhledem k témuž bodu". Při odvození druhé věty impulzové A. Havránek zavádí inerciální soustavu a využívá toho, že vztažný bod je vůči inerciální soustavě v klidu. V našem případě tomu tak není. Zavedeme sice inerciální soustavu (čemuž se věnuje část 1.4), ale vztažný bod v ní koná zrychlený pohyb. Projdeme si proto odvození druhé věty impulzové z [8] a zkusíme jej upravit, aby platilo i pro náš případ. Jedná se o rovnice 3,33-3,37 a 5,38-5,49 z [8]:

$$\vec{b} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times m \vec{v}_{BA} \quad (III)$$

si definujeme jako moment hybnosti bodu B o hmotnosti  $m$  vůči bodu A. Relativní rychlost  $\vec{v}_{BA} \equiv \vec{v}_B - \vec{v}_A$ . Pro  $\vec{r}_A$  závislé na čase dostáváme:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times m \frac{d\vec{v}_B}{dt} - (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times m \frac{d\vec{v}_A}{dt} \quad (IV)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice se v [8] nevyskytuje. Odpovídá momentu nepravé síly, kterou bychom pozorovali v soustavě spojené s bodem A. Pro soustavu  $N$  hmotných bodů tak obdržíme:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \sum_i^N (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i^E - \left[ \sum_i^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \right] \times \frac{d\vec{v}_A}{dt}, \quad (V)$$

kde druhý člen je zde opět oproti 5,49 [8] nový. Lze jej zapsat jako

$$M(\vec{r}_T - \vec{r}_A) \times \frac{d\vec{v}_A}{dt}, \quad (VI)$$

kde  $\vec{r}_T$  je poloha těžiště. Zvolíme-li tedy za vztažný bod právě (zrychleně se pohybující) těžiště, můžeme psát klasické  $\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^E$ . Těžiště je přirozenou volbou vztažného bodu i z jiného důvodu: vložíme-li těleso do silového pole o homogení intenzitě, kde nábojem je hmotnost, bude moment vnějších sil nulový právě vůči těžišti. Obě tyto vlastnosti spolu sice souvisí (intenzita zmíněné nepravé síly je homogením polem), avšak je třeba je rozlišovat. Zde ukázaná vlastnost těžiště se v [8] neuvádí. My ji využijeme, neboť náš vztažný bod se v inerciální soustavě pohybuje zrychleně.

### 1.3 Vztah pro derivaci vektoru v pohybující se soustavě

Dalším krokem v odvození Liouvilovy rovnice je použití vztahu

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{fixed} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{mov} + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (VII)$$

Vzhledem k tomu, že zde vystupující  $\vec{\omega}$  je vektor úhlové rychlosti, který hraje ústřední roli v celé práci, se i u tohoto vztahu na chvíli zastavíme. Mějme dānu souřadnou soustavu, nemusí být inerciální - označme ji *fixed*, a vůči ní libovolně se pohybující jinou soustavu - označme ji *moving*. Anglické značení je voleno z jazykových důvodů, vyhneme se jím přílišnému opakování některých slov. Pohyb soustavy *moving* (vůči *fixed*) lze charakterizovat pomocí vektoru rychlosti libovolně zvoleného, avšak v soustavě *moving* nehybného bodu A této soustavy:  $\vec{v}_A(t)$  a vektoru úhlové rychlosti rotace  $\vec{\omega}(t)$ , který na volbě bodu A nezávisí. Rychlost libovolného bodu B soustavy *moving* vůči soustavě *fixed* pak dostaneme:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A).$$

Samo odvození vztahu (VII) je jednoduché a pro případ, kdy soustava *moving* konā vůči soustavě *fixed* čistou rotaci - tedy existuje v ní bod A, pro nějž  $\vec{v}_A(t) = 0$  - jej nalezneme např. v [8],[5]. Jeho platnost pro obecný pohyb plyne z vlastností paralelního přenosu vektorů v Euklidovském prostoru, tedy z bezproblémovosti přenosu v tomto prostoru. Za zmínku stojí, že [5] vztah využívā

pro obecný pohyb, ačkoli jej odvozuje pouze pro čistou rotaci soustavy *moving*. Pro nás je vztah důležitý v plné obecnosti, zejména je třeba si zapamatovat výše zmíněný význam vektoru úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$ . Jedná se o vektor charakterizující rotační část pohybu určité soustavy souřadné.

## 1.4 Inerciální soustava

V kapitole 1.2 jsme narazili na koncept inerciální soustavy a druhou větu impulzovou jsme odvodili pouze v takové soustavě. V našem případě použijeme jako inerciální tu soustavu (a budeme ji tak nadále označovat), v jejímž počátku je Slunce a planety v ní konají známý oběžný pohyb. Sluneční soustava sice není inerciální, její pohyb je v základních rysech naznačen v [5], ale pro účel práce je dostačující, že výsledný moment nepravých sil vůči těžišti studovaného tělesa je zanedbatelný.

Mohli jsme postupovat i trochu moderněji, aby náš přístup alespoň vzdáleně připomínal Newtonovskou limitu z obecné teorie relativity. Druhou větu impulzovou jsme mohli odvodit v libovolné soustavě s tím, že na pravé straně rovnice by byl výsledný moment vnějších sil pravých i nepravých. V kapitole 1.5, zabývající se pravou stranou, bychom se pak vypořádali s oběma druhy sil. Ve studovaném případě navíc ani nepotřebujeme, aby nepravé síly byly zanedbatelné. Stačí, když jejich výsledný moment vůči těžišti studovaného tělesa takový je. To je splněno pro každou soustavu, jejíž neinercialita je dána pouze translačním pohybem. Pochopitelně, rotuje-li jedna soustava vůči druhé s úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}$ , rotuje stejně vůči všem soustavám, konajícím vůči druhé zmíněné soustavě čistě translační pohyb (což by se projevilo nejednoznačností fyzikálního významu rovnice  $(II)$ ).

## 1.5 Moment vnějších sil

Máme již zvolenou soustavu, v níž platí  $(I)$ . Na pravé straně rovnice je výsledný moment vnějších sil působících na studované těleso, který položíme roven nule. Nyní se krátce zaměříme na to, za jakých podmínek to lze učinit. Zabývali jsme se vnějšími silami působícími na nějaké těleso ve Sluneční soustavě, bude se jednat především o gravitační působení okolních těles. Z částí 1.2 a 1.4 je zřejmé, že pokud by gravitační pole od okolních těles bylo v místě studovaného tělesa homogenní, dostali bychom  $\vec{M}^E = 0$ . To je jeden způsob, jak na aproximaci  $\vec{M}^E = 0$  nahlížet.

Druhý pohled na věc využívá multipólového rozvoje gravitačního potenciálu studovaného tělesa. Spočteme-li moment síly, kterou studované těleso působí na okolní tělesa (které vzhledem k jejich vzdálenosti můžeme pro tento účel považovat za hmotné body), získáme ze zákona zachování momentu hybnosti zároveň moment síly, kterou okolní tělesa působí na studované těleso. V [5] je ukázáno, jak tento moment, počítáme-li jej vůči těžišti studovaného tělesa, souvisí se členy zmíněného rozvoje. Jsou-li okolní tělesa dostatečně vzdálena, je vliv vedlejších členů rozvoje zanedbatelný a lze položit  $\vec{M}^E = 0$ . Tento případ odpovídá homogenitě gravitačního pole okolních těles z prvního odstavce, která úzce souvisí s jejich vzdáleností od studovaného tělesa. Další možností, jak vynulovat vedlejší členy je ovšem i symetrie tělesa. Máme-li rozložení hustoty ve studovaném tělese sféricky symetrické, lze také položit  $\vec{M}^E = 0$ , a to i když okolní tělesa nejsou tak vzdálena.

Mezi typické momenty vnějších sil, které ovlivňují pohyb rotačních os těles ve Sluneční soustavě, patří moment způsobující precesi rotační osy, jež má základ v rovníkovém vydutí, a moment zpomalující rotaci, jehož základem je slapové tření. Obojí jsme, jak plyne z výše uvedeného, zanedbali.

## 1.6 Výsledný tvar rovnice

Máme tedy vztah  $\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$ , kde  $\vec{B}$  je moment hybnosti studovaného tělesa vůči jeho těžišti, měřený v inerciální soustavě. Pomocí vztahu (VII) z kapitoly 1.3 vyjádříme časovou derivaci  $\vec{B}$  skrze derivaci tohoto vektoru v soustavě konající vůči inerciální soustavě pohyb, jehož rotační část je dána vektorem úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$ . Moment hybnosti  $\vec{B}$  spočteme takto (opět s pomocí vztahu (VII), postup je převzatý z [5]):

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \sum^N (\vec{R}_i - \vec{R}_T) \times m_i \left[ \left( \frac{d\vec{R}_i}{dt} \right)_{fixed} - \left( \frac{d\vec{R}_T}{dt} \right)_{fixed} \right] = \sum^N \vec{r}_i \times m_i \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_{fixed} = \\ &= \sum^N m_i \vec{r}_i \times \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_{mov} + \vec{\omega} \sum^N m_i \vec{r}_i^2 - \sum^N m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) = J\vec{\omega} + \vec{h},\end{aligned}$$

kde  $\vec{R}_i$  značí polohový vektor i-tého bodu v inerciální soustavě,  $\vec{R}_T$  polohový vektor těžiště studovaného tělesa v inerciální soustavě,  $\vec{r}_i \equiv \vec{R}_i - \vec{R}_T$  a pro relativní moment hybnosti  $\vec{h}$  lze po přechodu k spojitému tělesu psát ([5])

$$\vec{h} = \int \rho \vec{r} \times \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{mov} dV.$$

Dostáváme tak vztah

$$\left[\frac{d}{dt}(J\vec{\omega} + \vec{h})\right]_{mov} + \vec{\omega} \times (J\vec{\omega} + \vec{h}) = 0. \quad (VIII)$$

Jedná se, stejně jako u všech dosud uvedených vztahů s výjimkou (II), o vektorovou rovnici a jako takovou ji lze vyjádřit v různých soustavách souřadných. V tomto smyslu lze hovořit o nezávislosti vztahu na volbě soustavy souřadné. Tenzory prvního a druhého řádu v tomto vztahu vystupující, konkrétně vektory  $\vec{\omega}$  a  $\vec{h}$  jsou však přímo závislé na volbě soustavy *moving*. Úhlová rychlost  $\vec{\omega}$  udává rotační pohyb této soustavy vůči soustavě *fixed*, za níž jsme vybrali inerciální soustavu z kapitoly 1.4. Relativní moment hybnosti  $\vec{h}$  na pohyb soustavy *moving* také závisí, neboť popisuje pohyb tělesa vůči této soustavě. Posledním objektem ve vztahu je tenzor setrvačnosti studovaného tělesa, rovněž vztažený k těžišti tohoto tělesa. Je to tenzor druhého řádu, charakterizující rozložení hustoty hmotnosti uvnitř tělesa a jako jediný na volbě soustavy *moving* nezávisí. Označíme-li složky těchto tenzorů v soustavě souřadné *moving*  $J_{ij}, \Omega_i, h_i$ , lze vyjádření vztahu (VIII) v této soustavě souřadné psát

$$\frac{d}{dt}(J_{ij}\Omega_j + h_i) + \epsilon_{ijk}\Omega_j(J_{kl}\Omega_l + h_k) = 0. \quad (IX)$$

Touto soustavou rovnic se budeme v následujících kapitolách zabývat. Složky  $\vec{\omega}$  jsme označili  $\Omega_i$ . Občas budeme v textu pracovat i s vektorem  $\vec{\Omega}$ , který má stejný význam jako  $\vec{\omega}$ . Budeme tak činit, pokud se za symbolem skrývá práce se složkami  $\Omega_i$ . Na soustavu *moving*, kterou si nadále označíme jako referenční soustavu, jsme zatím nekladli žádné požadavky. Její volbě se věnuje kapitola 2.

Kromě snahy o ucelený přístup a položení základů pro interpretaci členů v Liouvillově rovnici vystupujících (případné problémy s tím spojené zmiňuje [1] v sekci 3.2) jsme se jejímu odvození věnovali i z několika dalších důvodů. V první řadě bylo třeba diskutovat předpoklady, které vedly k nule na pravé straně rovnice. Jejich splnění pro některá ze studovaných těles může být problematické. Zároveň jsme však odvozením poukázali na vysokou míru obecnosti a aplikovatelnosti Liouvillovy rovnice. Proto se zaměříme především na charakter a zvláštnosti chování jejího řešení, spíše než na jeho kvantitativní stránku.

# Kapitola 2

## Referenční soustava

### 2.1 Volba referenční soustavy souřadné

Rovnice ( $IX$ ) pro nás má následující význam. Známe-li v nějaké (libovolné), zde označené jako referenční, soustavě souřadné složky tenzoru setrvačnosti a relativního momentu hybnosti studovaného tělesa, obojí vztaženo k jeho těžišti, lze pomocí ( $IX$ ) spočítat složky vektoru úhlové rychlosti, který popisuje rotační pohyb referenční soustavy vůči soustavě inerciální. Když v klasické mechanice provádíme volbu soustavy souřadné, definujeme ji většinou skrze její pohyb. To v našem případě pochopitelně nelze, neboť právě její pohyb se snažíme určit. Referenční soustavu tedy musíme volit na základě jiných vlastností.

Při řešení pohybu setrvačnicků se referenční soustava spojuje s tělesem. Pro tuhá tělesa je spojení soustavy s tělesem bez problémů a definujeme jej tak, že těleso je v referenční soustavě v klidu. Navíc můžeme souřadnicové osy natočit, aby souhlasily s hlavními osami tenzoru setrvačnosti tělesa. Tak lze ovšem volit referenční soustavu i pro libovolně se deformující těleso. Řekneme-li, že souřadnicové osy mají vždy směr hlavních os tenzoru setrvačnosti a počátek leží v těžišti studovaného tělesa, definovali jsme soustavu jednoznačně. Podmínkou je, aby tenzor setrvačnosti měl rozdílné hlavní momenty. Tuto volbu referenční soustavy označuje [1] jako souřadnice hlavních os ('axes of figure', 'the principal axes') a zmiňuje úskalí s takovou volbou spojená. Demonstrujme si je na případu studia rotace Země. Zajímá-li nás rotace Země, zajímá nás ve skutečnosti rotace souřadné soustavy, ať už spojené s konkrétní laboratoří, či s celou sítí laboratoří (geografické souřadnice, [1]). Při deformaci Země dochází k pohybu hlavních os vůči geografickým souřadnicím. Kdybychom tedy ( $IX$ ) vyřešili v soustavě, v níž  $J_{ij} = 0, i \neq j$ , nezískali bychom to, co nás doopravdy zajímá. Při studiu pohybu

těles, kterými se zde zabýváme, se setkáme se stejným problémem a referenční soustavu zvolíme proto jinak (o možnosti obejít problém složením vektoru úhlové rychlosti rotace hlavních os a vektoru úhlové rychlosti rotace spočtené z rovnice  $(IX)$  viz část 2.2)

Jádrem problému je otázka spojení referenční soustavy se studovaným tělesem. Pro obecně se deformující těleso totiž takové spojení není jednoznačné. Z mechaniky kontinua sice umíme lokálně oddělit deformaci, translaci a rotaci hmoty pomocí gradientu rychlostního pole (jeho symetrické a antisymetrické části), jedná se však pouze o lokální rozklad (více viz. [9]). Pro těleso jako celek takové oddělení není možné. V této souvislosti se v literatuře někdy mluví o tzv. Tisserandových souřadnicích. V [4] se volba referenční soustavy, v níž  $\vec{h} = 0$ , spojuje s odstraněním rotace tuhého tělesa. [1] chápe Tisserandovy souřadnice, stejně jako souřadnice hlavních os, spíše jako volbu výhodnou z matematického hlediska (neboť rovnice  $(IX)$  se zjednoduší), jejíž fyzikální význam je, stejně jako u souřadnic hlavních os, snížen výše zmíněným úskalím. S tímto pohledem se ztotožňujeme, neboť když máme v referenční soustavě  $\vec{h}$  konstantní, znamená to, že nulový je výsledný moment pravých i nepravých sil v této soustavě (obojí vztaheno k těžišti). Referenční soustava však koná složitý pohyb vůči inerciální soustavě a fyzikální význam splnění této podmínky je proto nejasný. Známe-li rychlostní pole studovaného tělesa (hmoty jej tvořící), nalezneme vektor úhlové rychlosti rotace Tisserandových souřadnic minimalizací funkcionálu  $F(\vec{\omega}) = \int \rho \|\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}\|^2 dV$  ([1]). Pro tuhé těleso dostaneme soustavu spojenou tělesem v klasickém smyslu.

V této práci se věnujeme rotačnímu chování těles, jejichž deformace je dána termální konvekcí (problematice se věnuje např. [2]). Tenzor setrvačnosti získáme z modelů konvekce v plášti planety a při jejím výpočtu zanedbáme vliv nepravých sil, daných rotací soustavy. O těch předpokládáme, že jsou oproti vztlakovým silám zanedbatelné. Navíc je neznáme dopředu, odstředivý potenciál lze spočítat až při znalosti vektoru úhlové rychlosti rotace, který zde právě počítáme. Za referenční tedy zvolíme tu soustavu, v níž počítáme termální konvekci uvnitř tělesa. Zároveň se však, neboť jsme v pohybových rovnicích látky zanedbali nepravé síly, jedná o Tisserandovy souřadnice. Počítáme-li v inerciální soustavě deformaci zprvu tuhého tělesa danou pouze vnitřními silami, dostaneme ze zákona zachování momentu hybnosti  $\vec{h} = 0$ , pokud do rovnic konvekce nevnášíme moment sil skrze okrajové podmínky.

Rotaci soustavy však i přes výše zmíněné do tenzoru setrvačnosti tělesa přeci jen promítneme. Učiníme tak zavedením rotační deformace, které je věnována následující část. Hovoříme-li někde v textu o rotaci tělesa, máme na mysli rotaci

referenční soustavy.

## 2.2 Rotační deformace

Jedinou zpětnou vazbou mezi rotací tělesa a jeho deformací, kterou zde uvažujeme, je rovníkové vydutí. Provedeme v zásadě to, že těleso v každém okamžiku zploštíme podél rotační osy. Přesnější je hovořit o rotační deformaci, neboť máme na mysli "okamžitou" reakci tělesa na směr a velikost vektoru úhlové rychlosti rotace, zatímco termín rovníkové vydutí je spíše spojován s dlouhodobou deformací Země, která souvisí s nepatrnou amplitudou Chandlerova wobblu (viz diskuze v sekci 5.4, [1]). Při odhadu zploštění využijeme Loveových čísel ([1], sekce 5), předpokladem jejichž zavedení je, aby rychlost odezvy byla řádově rychlejší než změna disturbujícího potenciálu. To je v případě odstředivého potenciálu splněno, nemá-li  $\vec{\Omega}(t)$  výrazně atypický časový vývoj. Použití Loveových čísel představuje v geofyzice tradiční přístup. Reakci tělesa na odstředivý potenciál lze v současnosti modelovat bez použití Loveova čísla a lépe tak reagovat na případné hustotní heterogenity v tělese.

Myšlenka spočívá v tom, že člen  $n=2$  rozvoje  $U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}$  gravitačního potenciálu položíme roven  $kU_2^R$ , kde  $U_2^R$  je druhý člen takového rozvoje pro rotační potenciál  $U^R = \frac{1}{2}(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2)$  a  $k$  Loveovo číslo, pro nějž budeme testovat různé hodnoty. Především se bude jednat o hodnoty  $k = 0, k = 0.29$  a  $k = 0.96$ , jejichž význam je diskutován v [1]. Vzhledem k tomu, že  $U_2$  je přímo závislý na složkách tenzoru setrvačnosti, platí (viz [1], sekce 5.2):

$$J_{ij} = \frac{ka^5}{3G}(\Omega_i \Omega_j - \frac{1}{3}\Omega^2 \delta_{ij}) + \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33})\delta_{ij} \quad (X)$$

kde  $a$  je střední poloměr tělesa,  $G$  gravitační konstanta a  $C_{11}, C_{22}, C_{33}$  hlavní momenty setrvačnosti před vydutím. V případě Země tak lze pro rotační deformaci generované složky  $j_{ij}^{rot}$  po odečtení vlivu trvalého rovníkového vydutí psát:

$$j_{11}^{rot} = j_{22}^{rot} = -\frac{2}{3} \frac{k}{k_f} (C - A) m_3 \quad j_{33}^{rot} = +\frac{4}{3} \frac{k}{k_f} (C - A) m_3$$

$$j_{13}^{rot} = \frac{k}{k_f} (C - A) m_1 \quad j_{23}^{rot} = \frac{k}{k_f} (C - A) m_2 \quad j_{12}^{rot} = 0$$

kde  $k_f$  je Loveovo číslo odpovídající hydrostatické rovnováze (viz 'fluid Love number' v [1]) a  $\Omega_1 = m_1 \Omega$ ;  $\Omega_2 = m_2 \Omega$ ;  $\Omega_3 = (1 + m_3) \Omega$  (více viz část 3.2).



Přičtení těchto složek k tenzoru setrvačnosti způsobí, že hlavní osa tenzoru s největším momentem se natočí směrem k  $\vec{\Omega}$  o úhel  $k\varphi$ , kde  $\varphi$  je úhel, který hlavní osa a  $\vec{\Omega}$  svírají. V této práci zahrneme vliv rotační deformace právě takovým natočením, jehož praktické provedení je diskutováno v kapitole 4. I v tomto postupu je ovšem skryta skutečnost, že při odvození složek  $j_{ij}^{rot}$  byly zanedbány čtverce a součiny  $m_1, m_2, m_3$ . Pro velké vzdálenosti vektoru  $\vec{\Omega}$  a hlavní osy s největším momentem setrvačnosti je proto třeba postupovat jinak. Při zahrnutí rotační deformace natočením hlavních os a nikoli přičtením složek  $j_{ij}^{rot}$  nás zprvu vedla představa, že se jedná o obecnější postup. Také vzájemný vztah mezi dlouhodobým rovňákovým vydutím a okamžitou rotační deformací, který souvisí s elastickými vlastnostmi tělesa, vyžaduje hlubší rozbor. Navíc zanedbáme relativní moment hybnosti  $\vec{h}$  plynoucí z pohybu rovňákového vydutí. Tyto problémy by bylo vhodné vyřešit v případném navázání na tuto práci.

V kapitole 2.1 jsme narazili na možnost řešit úlohu v souřadnicích hlavních os. Známe-li vektor úhlové rychlosti rotace hlavních os vůči soustavě, o jejíž pohyb se zajímáme, získáme její rotaci vůči inerciální soustavě jeho složením s vektorem úhlové rychlosti rotace spočteného z  $(IX)$ , kde  $J_{ij}, i \neq j$  bude nulové. Postupu při skládání vektorů úhlových rychlostí se věnuje například [10]. Tato metoda vyžaduje, abychom dopředu znali pohyb hlavních os vůči naší soustavě, tedy měli k dispozici  $J_{ij}(t)$ . Uvažujeme-li rotační deformaci, pracujeme s tenzorem setrvačnosti  $J_{ij}(t, \vec{\Omega})$ .

# Kapitola 3

## Význačná řešení

### 3.1 Členění pohybů rotační osy

Máme tedy rovnici (IX), kterou v dalších kapitolách vyřešíme pro neznámé funkce  $\Omega_i(t), i = 1, 2, 3$ . Abychom mohli o výsledku něco říci, podíváme se nejprve ve stručnosti, jak se rotační osa tělesa chová v některých základních situacích. Pohybu volného a těžkého setrvačnicku se věnuje většina učebnic klasické mechaniky, např. [8]: "Pohyb volného symetrického setrvačnicku lze názorně popsat jako odvalování v tělese pevného polodiového kužele po herpolidiovém kuželi pevném v prostoru". Chandlerovské kolébání rotační osy Země (V [1] označené jako 'free wobble' - tedy řešení pro nulovou excitační funkci, více v části 3.2) je právě takovým pohybem. Průsečík polodiového kužele s povrchem Země tvoří kružnici o poloměru cca 10m a rotační osa Země tuto kružnici (ve skutečnosti jde spíše o elipsu, [5]) oběhne za přibližně 14 měsíců. V této souvislosti považujeme za vhodné upozornit na nepřesnost členění pohybů rotační osy na precesi, nutaci a wobble (kolébání). [1] wobble charakterizuje následovně: "...A stake is driven in the ground somewhere near the center the ellipse. It marks the pole of reference. The axis of reference extends from the center of the Earth through this pole. The pole of rotation revolves about the pole of reference. With respect to an observer on a fixed star, the rotation axis remains fixed, and the reference pole (averaged for diurnal motion) revolves about the rotation pole." Tento popis platí pouze v limitě, kdy vrcholový úhel herpolidiového kužele je nulový. To je v případě Země dobře splněno a je proto z didaktických důvodů (pro odlišení wobblu a precese) pohyb rotační osy po herpolidiovém kuželi zamlčen ([1] se mu věnuje později, v sekci 6.6 pod označením 'sway').

Precese rotační osy je důsledkem gyroskopického efektu, tedy specifické reakce

setrvačnicku na moment vnějších sil. Nejlépe se popisuje na případu těžkých setrvačnicků v limitě  $\|\vec{\omega}\| \gg \|\vec{\Omega}_{precese}\|$ , u nichž se položí  $\vec{\omega} = k\vec{B}$  (a zároveň  $\vec{\omega}$  leží ve směru hlavní osy s největším momentem setrvačnosti) a precese je dána precesí momentu hybnosti  $\vec{B}$  tělesa.

Nutace rotační osy se v řešení těžkého setrvačnicku objeví, nepracujeme-li ve výše zmíněné limitě. Je dána promítnutím řešení volného setrvačnicku do řešení setrvačnicku těžkého. Když v každém okamžiku spojíme s vektorem  $\vec{B}$  herpolodiový kužel, získáme oběhem rotační osy po jeho plášti právě nutaci. Jejím zdrojem může být i proměnný moment vnějších sil ([5]). Z výsledku našeho výpočtu, tedy funkcí  $\Omega_i(t)$  však precese a nutace rotační osy nelze přímo vyčíst, neboť se jedná o složky  $\vec{\omega}$  v referenční soustavě souřadné. K určení precese a nutace bychom museli ještě vyřešit Eulerovy kinematické rovnice:

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi$$

$$\Omega_2 = \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \sin\psi$$

$$\Omega_3 = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}$$

kde  $\varphi, \vartheta, \psi$  jsou tzv. Eulerovy úhly - precesní, nutační a rotační (viz [10]). Jedná se o soustavu tří nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic (stejně jako (IX)), kterou ovšem řešit nebudeme. Zajímá-li nás pozice studovaných těles v inerciální soustavě (tedy například natočení Enceladu vůči Jupiteru), využijeme toho, že jejich rotační osa je blízko v prostoru neměnného vektoru  $\vec{B}$ . Aby tomu tak nebylo, muselo by rozložení jejich hustoty být podstatně odlišné od sféricky symetrického, což pro tělesa planetárních rozměrů, jejichž tvar a rozložení hustoty určuje především gravitace, neplatí.

Informaci o tom, co se děje v inerciální soustavě budeme udržovat také numericky. Využijeme přitom relativity rotačního pohybu: inerciální soustava rotuje vůči referenční s úhlovou rychlostí  $-\vec{\omega}$ . V každém kroku tedy otočíme  $\vec{e}_i^n$  podle  $-\vec{\Omega}$  o úhel  $\|\vec{\Omega}\|dt$ , přičemž  $\vec{e}_i^n$  je  $i$ -tý básový vektor inerciální soustavy.

Na závěr této části, věnované obecnému členění pohybu rotační osy, se krátce zastavíme u zdánlivého paradoxu, který se objevuje u řešení těžkého setrvačnicku v limitě  $\|\vec{\omega}\| \gg \|\vec{\Omega}_{precese}\|$ . Rotační osa se v tomto případě v referenční soustavě vůbec nehýbe, zatímco v soustavě pevné v prostoru koná precesi. Aplikací vztahu z kapitoly 1.3 na vektor  $\vec{\omega}$  přitom dostáváme  $(\frac{d\vec{\omega}}{dt})_{fixed} = (\frac{d\vec{\omega}}{dt})_{ref}$ . Je to dáno tím, že zatímco vyjádření této rovnosti v inerciální soustavě dá na časové škále jedné otočky tělesa téměř konstantní vektor a složky  $\vec{\omega}$  se tak v této soustavě pozvolna mění (na časové škále jedné otočky lineárně rostou), v referenční

soustavě se  $(\frac{d\vec{\omega}}{dt})$  otočí jednou dokola a složky  $\vec{\omega}$  se tak na časové škále mnoha otáček nemění.

## 3.2 Linearizovaná verze Liouvilovy rovnice

V geofyzice se pohyb rotační osy tradičně počítá pomocí linearizované verze Liouvillových rovnic (např. [1], [4]). V geografické soustavě souřadné totiž platí, že rotační osa a hlavní osa s největším momentem setrvačnosti se vzdalují jen nepatrně od referenčního pólu, tedy od třetí souřadnicové osy této soustavy.

V pertubačním schématu z [1]:

$$\begin{aligned} J_{11} &= A + j_{11} & J_{22} &= A + j_{22} & J_{33} &= C + j_{33} \\ J_{12} &= j_{12} & J_{13} &= j_{13} & J_{23} &= j_{23} \\ \Omega_1 &= \Omega m_1 & \Omega_2 &= \Omega m_2 & \Omega_3 &= (1 + m_3)\Omega, \end{aligned}$$

kde  $A, A, C$  jsou hlavní momety setrvačnosti a  $\Omega$  je střední úhlová rychlost rotace Země, se výše zmíněné podmínky dají vyjádřit tak, že  $\frac{j_{ij}}{C}, m_i, h_i$  nabývají malých hodnot a jejich čtverce a součiny tak lze v  $(IX)$  zanedbat. Dostaneme tím linearizovanou Liouvillovu rovnici:

$$\frac{\dot{m}_1}{\sigma_r} + m_2 = \phi_2, \quad \frac{\dot{m}_2}{\sigma_r} - m_1 = \phi_1, \quad \dot{m}_3 = \phi_3, \quad \sigma_r = \frac{C - A}{A}\Omega.$$

Excitační funkce  $\phi_i$  závisí na  $\Omega, j_{ij}, \dot{j}_{ij}, h_i, \dot{h}_i$  a nebudeme ji zde vypisovat. Pro naše účely je důležité, že [1] diskutuje řešení linearizované rovnice pro různé excitační funkce, odpovídající určitým geologickým a geofyzikálním procesům. V této práci ovšem Liouvillovu rovnici linearizovat nebudeme. Důvodem je vzdálenost rotační osy od hlavní osy tenzoru setrvačnosti s největším momentem. Budou nás totiž zajímat případy, kdy osy jsou vzdáleny i několik desítek stupňů a rovnici  $(IX)$  proto linearizovat nelze.

Hlavní výhodou linearizované verze je existence analytického řešení. V [4] je např. ukázáno, že integrací analytického řešení přes periodu Chandlerova wobblu (a tedy jeho odstraněním) lze pro excitační funkci odpovídající dlouhodobým a pomalým geologickým procesům psát  $\bar{m}(t) = \Xi(t)$ , kde  $m(t) = m(t)_1 + im(t)_2$  a  $\Xi(t)$  je úhlové excitační funkce, sledující natočení hlavní osy tenzoru setrvačnosti.  $\bar{m}(t)$  je získáno integrací  $m(t)$  přes periodu wobblu. Tím, jak rotační osa sleduje hlavní osy tenzoru setrvačnosti se zabýváme v jednotlivých studiích v kapitole 5.

Někteří autoři se zabývají i nelinearizovanou verzí Liouvillových rovnic. G.Spada v [3] nalézá analytické řešení pro geologické procesy, jež lze popsat jednoduchým tenzorem setrvačnosti.

# Kapitola 4

## Navržená metoda

### 4.1 Matematický rozbor

Nyní navrhne metodu řešení rovnic

$$\frac{d}{dt}(J_{ij}\Omega_j) + \epsilon_{ijk}\Omega_j J_{kl}\Omega_l = 0, \quad (XI)$$

tedy soustavy tří nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámé funkce  $\Omega_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , známe-li počáteční podmínku  $\vec{\Omega}_0 = \vec{\Omega}(0)$  a časový vývoj tenzoru setrvačnosti  $J^{konv}(t)$ , získaného z výpočtu termální konvekce.  $J_{ij}(\vec{\Omega}, t)$  značí složky výsledného tenzoru setrvačnosti, který dostaneme započtením rotační deformace:  $J_{ij}(\vec{\Omega}, t) = J_{ij}^{konv}(t) + j_{ij}^{rot}(\vec{\Omega})$ . Tensor setrvačnosti  $J_{ij}(\vec{\Omega}, t)$  však z důvodu diskutovaného v části 2.2 v použitém výpočetním programu počítáme následovně:

$$J_{ij}(\vec{\Omega}, t) = U_{ik}(t, \vec{\Omega}) D_{kl}(t) U_{lj}^T(t, \vec{\Omega}), \quad (XII)$$

kde

$$U_{ij}(t, \vec{\Omega}) = B_{ik}(t, \vec{\Omega}) R_{kl}(t, \vec{\Omega}) B_{lm}^T(t, \vec{\Omega}) V_{mj}(t) \quad (XIII)$$

a

$$D_{ij} = V_{ik}^T(t) J_{kl}^{konv}(t) V_{lj}(t) \quad (XIV)$$

$J_{ij}^{konv}(t) = V_{ik}(t) D_{kl}(t) V_{lj}^T(t)$  značí Jordanův rozklad tenzoru  $J_{ij}^{konv}(t)$ .  $U_{ij}(t, \vec{\Omega})$  je matice, jejíž sloupce tvoří vlastní vektory tenzoru setrvačnosti po započtení rotační deformace, tedy po natočení hlavních os tenzoru  $J^{konv}$  o úhel  $k\varphi$  směrem

k  $\vec{\Omega}$ . Úhel, který  $\vec{\Omega}$  svírá s hlavní osou s největším momentem setrvačnosti značíme  $\varphi$ . Právě tuto osu směrem k  $\vec{\Omega}$  natáčíme, přičemž matice  $B_{ij}(t, \vec{\Omega})$  a  $R_{ij}(t, \vec{\Omega})$  natočení realizují (jejich tvar lze vyčíst z přílohy č.1). Konstanta  $k$  je Loveovo číslo diskutované v kapitole 2. Rovnici (XI) upravíme do tvaru

$$J_{ij} \frac{d\Omega_j}{dt} = E_{ik} \Omega_k,$$

kde

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} J_{21}\Omega_3 - J_{31}\Omega_2 - \dot{J}_{11} & J_{22}\Omega_3 - J_{32}\Omega_2 - \dot{J}_{12} & J_{23}\Omega_3 - J_{33}\Omega_2 - \dot{J}_{13} \\ J_{31}\Omega_1 - J_{11}\Omega_3 - \dot{J}_{21} & J_{32}\Omega_1 - J_{12}\Omega_3 - \dot{J}_{22} & J_{33}\Omega_1 - J_{13}\Omega_3 - \dot{J}_{23} \\ J_{11}\Omega_2 - J_{21}\Omega_1 - \dot{J}_{31} & J_{12}\Omega_2 - J_{22}\Omega_1 - \dot{J}_{32} & J_{13}\Omega_2 - J_{23}\Omega_1 - \dot{J}_{33} \end{bmatrix}$$

Za  $\dot{J}_{ij}$  dosadíme  $\dot{J}_{ij}^{konv}$  a zanedbáme tak časovou derivaci složek  $\dot{J}_{ij}^{rot}$  z kapitoly 2. Zda se jedná o rozumnou aproximaci lze jednoduše ověřit. Stačí pro studovaný model (tedy pro  $J^{konv}(t)$ ) jednou nastavit Loveovo číslo  $k = 0$ , což odpovídá nulovým  $\dot{J}_{ij}^{rot}$  a tedy žádnou aproximaci neděláme, a porovnat s výstupem pro hodnotou  $k$  nastovenou například  $k = 0.29$ . Pokud se změna Loveova čísla projevuje pouze tak, jak předpokládáme, jedná se zřejmě o rozumnou aproximaci. Z výsledků prezentovaných v kapitole 5 plyne, že pro studované modely tomu tak je. Vzhledem k tomu, že tenzor setrvačnosti je symetrický s nenulovými vlastními čísly, můžeme psát:

$$\frac{d\Omega_i}{dt} = J_{ij}^{-1} E_{jk} \Omega_k = U_{ij} D_{jk}^{-1} U_{km}^T E_{mn} \Omega_n,$$

což je klasický tvar pro soustavu ODR, v tomto případě evolučních rovnic s počáteční podmínkou. Pro její řešení jsme zvolili metodu typu Runge-Kutta pátého řádu s adaptativní kontrolou délky kroku. Jedná se o klasickou metodu, která "bývá pro svou jednoduchost často první volbou při řešení ODR. Pro řadu problémů ve fyzice je však tato první volba i volbou poslední, tedy nejefektivnější metodou pro daný problém" ([11]).

Nejprve se zaměříme na to, jak metoda Runge-Kutta pracuje v situacích, jejichž analytické řešení známe. Zjistíme, že vzhledem ke specifičnosti pravé strany studované soustavy ODR má metoda tendenci se od analytického řešení odchýlovat. Proto navrhne určitou modifikaci, která vychází z podmínky  $\|J\vec{\Omega}\| = konst$ , tedy z integrálu pohybu. Vedlejší cíl výpočtů diskutovaných v kapitole 5 je pak pomoci k případnému hledání efektivnější metody (hlavním cílem je sledování rotačního pólu).

Základním úskalím při řešení úlohy je diametrálně odlišná časová škála deformačních změn tenzoru setrvačnosti ve srovnání s frekvencí tzv. wobblu. Termální konvekce je proces odehrávající se na škále desítek milionů až miliard let, zatímco perioda kolébání osy je řádově rok.

## 4.2 Výpočetní program

V této části se seznámíme s některými detaily použité numerické metody a strukturou výpočetního programu, jehož kopie je uvedena v příloze č.1. Základem je algoritmus DRKCK, který jsme spolu s podprogramy DRKQS, DJACOBI a ODEINT převzali z [11]. Tento algoritmus nalezne hodnotu

$$\vec{\Omega}_{n+1} = \vec{\Omega}_n + h\phi(t_n, \vec{\Omega}_n, h)$$

pomocí šesti evaluací pravé strany

$$f_i(\vec{\Omega}, t) = J_{ij}^{-1}(\vec{\Omega}, t)E_{jk}(\vec{\Omega}, t)\vec{\Omega}_k,$$

přičemž platí  $\vec{\Omega}(t_{n+1}) = \vec{\Omega}_{n+1} + O(h^6)$ .  $\phi(t, \vec{\Omega}, h)$  zde značí přírůstkovou funkci,  $h$  je délka časového kroku. Zároveň spočte  $\Delta \equiv y_{n+1} - y_{n+1}^*$ , kde  $y_{n+1}^*$  bychom získali použitím Runge-Kuttovy metody řádu čtvrtého. Využívá přitom pouze evaluace pravé strany, které jsme potřebovali pro nalezení  $y_{n+1}$ , a je proto rychlejší než známý step doubling. Hodnotu  $\Delta$  využijeme při adaptativní kontrole délky kroku. Položíme  $\Delta_0 = eps \cdot (|\vec{\Omega}_n| + |h \cdot f(t_n, \vec{\Omega}_n)|)$  a povolíme pouze kroky, pro něž  $\Delta < \Delta_0$ . Zde vystupující *eps* budeme nastavovat v závislosti na požadované přesnosti výpočtu, jeho hodnotu uvádíme v kapitole 5 vždy pod obrázkem. Pro odhad délky dalšího kroku využijeme vztahu  $\Delta = O(h^5)$  a položíme

$$h_{next} = Sh \left| \frac{\Delta_0}{\Delta} \right|^{0,2}, \quad \Delta_0 \geq \Delta_1 \quad h_{next} = Sh \left| \frac{\Delta_0}{\Delta} \right|^{0,25}, \quad \Delta_0 < \Delta_1$$

$S$  je tzv. bezpečnostní faktor, zabraňující tomu, abychom často dostali  $\Delta$  jen nepatrně větší než  $\Delta_0$  (neboť  $\Delta = O(h^5)$  neznamená  $\Delta = Kh^5$ ). Hodnota exponentu souvisí s tím, že jsme položili  $\Delta_0$  závislé na  $h$ . To jsme učinili proto, že zkracujeme-li krok, potřebujeme více kroků na dosažení času, do něž integrujeme. Tím pádem se nám může paradoxně zvýšit relativní chyba výsledku při nastavení menší hodnoty  $\Delta_0$ . Tento jev odstraníme právě skrze závislost  $\Delta_0$  na délce kroku  $h$ . Volba  $\Delta_0 = eps \cdot (|\vec{\Omega}_n| + |h \cdot f(\vec{\Omega}_n, t)|)$  je spolu s ostatními zde uvedenými vztahy důkladněji diskutována v [11].



Délku kroku řídí podprogram DRKQS a o ukládání výsledků se stará podprogram FINALNI, což je modifikace programu ODEINT, vycházející z potřeb studované úlohy. K získání pravé strany rovnic jsme využili symetričnost tenzoru setrvačnosti a podprogram DJACOBI, který na výstupu vrací vlastní čísla a vlastní vektory matice  $J^{konv}$ . Následně vlastní vektory natočíme způsobem diskutovaným v kapitole 4 pomocí podprogramu OTOC. Inverzi matice  $J_{ij}$  tak dostáváme  $U_{ik}D_{kl}^{-1}U_{lj}^T$ .

### 4.3 Korekce metody

V úloze se vyskytuje integrál pohybu, kterým je absolutní hodnota momentu hybnosti tělesa v inerciální soustavě. Tu spočteme pomocí tenzoru setrvačnosti  $J$  a vektoru úhlové rychlosti rotace  $\vec{\omega}$  jednoduše:  $\|\vec{B}\| = \|J\vec{\Omega}\|$ , kde  $\|\cdot\|$  značí euklidovskou normu a oba tenzory jsme pro její výpočet vyjádřili v referenční soustavě. Integrály pohybu často slouží ke kontrole chování numerického řešení. Navíc jej lze využít k modifikaci výpočetního programu.

Hodnoty  $\vec{\Omega}_n$  budeme korigovat podle toho, jak se  $\|J\vec{\Omega}_n\|$  mění v čase. Vycházíme přitom z chování výpočtu Chandlerova wobblu pro tuhou Zemi, tedy pro diagonální  $J^{konv}$  s hlavními momenty setrvačnosti A,A,C, za něž jsme dosadili reálné parametry. Složka  $\Omega_3$  se zachovávala, jak je patrné z obrázku 5.4, zatímco  $\Omega_1^2 + \Omega_2^2$  se postupně zvětšovalo. Proto  $\vec{\Omega}_n$  v každém kroku přenásobíme faktorem  $\frac{\|J_0\vec{\Omega}_0\|}{\|J_n\vec{\Omega}_n\|}$  a natočíme tak, aby průmět do hlavní osy s největším momentem setrvačnosti zůstal nezměněn. Natočení provádíme v rovině dané vektorem  $\vec{\Omega}_n$  a příslušnou hlavní osou podprogramu OTOC. Po korekci sice nedostaneme  $\|J_n\vec{\Omega}_n\| = \|J_0\vec{\Omega}_0\|$ , avšak hodnotě  $\|J_0\vec{\Omega}_0\|$  se přiblížíme (jak ukazuje např. obrázek 5.11).

Při jejím odvození jsme vyšli z chování modelu v situaci, kdy  $\vec{\Omega}$  obtáčí hlavní osu s největším momentem setrvačnosti. Je tedy otázkou, nakolik se jedná o postup vhodný pro obecný vývoj  $J^{konv}(t)$ . Detailněji se vlivu korekce věnuje část 4 následující kapitoly.

## Kapitola 5

# Výsledky počítačového modelování

V této kapitole představíme výstup výpočetního programu pro testované vývoje  $J^{konv}(t)$  a počáteční podmínky  $\vec{\Omega}_0$ . Nejprve ukážeme, že pro tuhou Zemi predikujeme správnou frekvenci Chandlerova wobblu, a také jak frekvence závisí na hodnotě Loveova čísla  $k$ . Zároveň ukážeme, že program správně modeluje chování volných symetrických setrvačnicků i pro velké úhly mezi  $\vec{\Omega}_0$  a hlavní osou s největším momentem setrvačnosti. Nastavením rozmezí integrace na 100 000 let pak demonstrujeme postupné zvětšování vrcholového úhlu polodiového kužele, jež je v rozporu s analytickým řešením úlohy a které vedlo k navržení korekce.

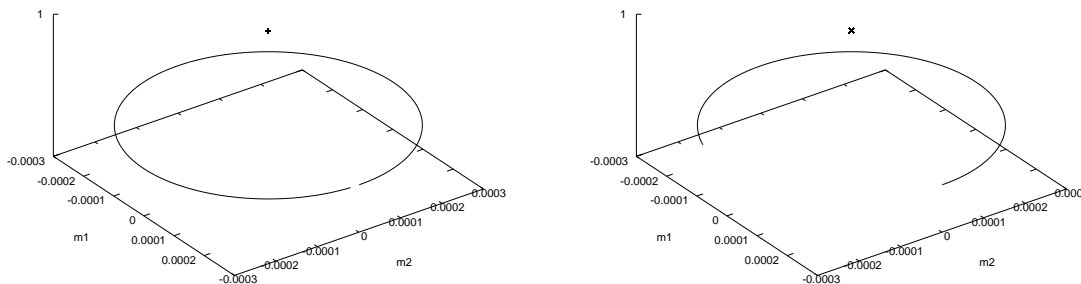
V druhé části této kapitoly necháme v tělese putovat hlavní osy tenzoru setrvačnosti a budeme pozorovat, jak rotační pól sleduje pohyb hlavní osy s největším momentem setrvačnosti. Následně se podíváme do inerciální soustavy, zda-li jsme i tam schopni sledovat pohyb rotační osy tělesa. Ve čtvrté části modelujeme některé situace znovu, avšak s použitím korekce. Ukážeme, že její aktivace má podobný efekt jako nastavení řádově menší hodnoty  $eps$ , a korekce je tedy užitečná.

V závěru kapitoly se zabýváme tím, zda-li lze prodloužením časového kroku až na interval srovnatelný s periodou wobblu dostat podobné výsledky, jako když pohyb rotační osy sledujeme s časovým krokem řádově menším. Zjišťujeme, že tomu tak není. Pokud bychom tedy navrženou metodou chtěli sledovat pohyb rotační osy na časové škále miliard let, museli bychom stále integrovat s krokem o délce v řádu setin roku.

## 5.1 Tuhá Země a volné setrvačníky

Nejprve jsme výpočetní program testovali pro  $J^{konv}$  diagonální s hlavními momenty setrvačnosti A,A,C, za něž jsme dosadili hodnoty z [5]. Na obrázku 5.1 je vidět, že pro Loveovo číslo  $k$  nastavené  $k = 0$  dostáváme přibližně desetiměsíční periodu, zatímco pro  $k = 0,3$  již vychází známá perioda čtrnáctiměsíční ([1]). V celé kapitole vykreslujeme vždy polohu rotačního pólu na jednotkové sféře a průsečík hlavní osy s touto sférou. Máme na mysli hlavní osu tenzoru setrvačnosti, k níž přísluší největší moment setrvačnosti.

V této části je pohyb rotačního pólu znázorněn plnou čarou a průsečík hlavní osy se sférou je označen křížkem. V popisech obrázků využíváme perturbačního schématu z kapitoly 3, přičemž  $m_3$  se po nastavení  $m_1$  a  $m_2$  dopočte, aby  $\|\vec{\Omega}_0\| = \Omega$ , kde  $\vec{\Omega}_0$  je počáteční hodnota vektoru úhlové rychlosti rotace,  $\Omega$  střední úhlová rychlost rotace Země. Čas  $t_2$  značí dobu integrace.

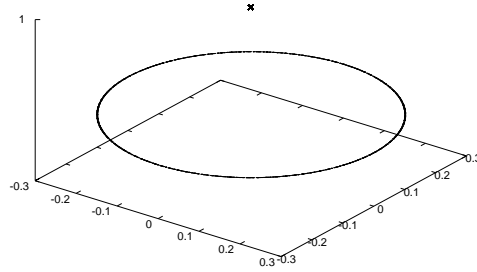


Obrázek 5.1:

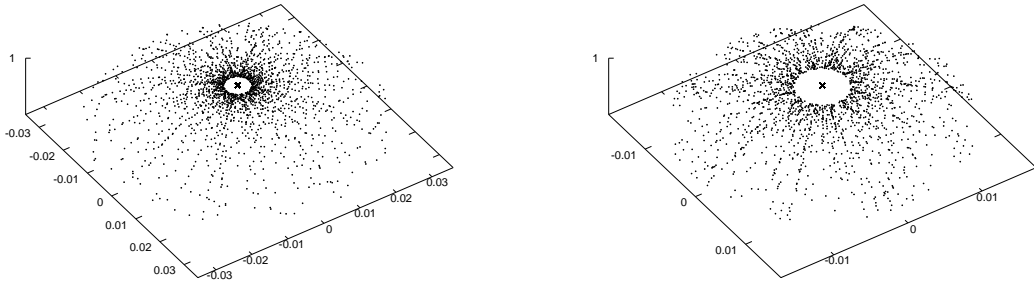
vlevo:  $\Omega_0 = (0.0003, 0, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0$ ,  $eps = 10^{-15}$ ,  $t_2 = 10$  měsíců  
 vpravo:  $\Omega_0 = (0.0003, 0, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-15}$ ,  $t_2 = 10$  měsíců

Na obr. 5.2 je nastaven čas integrace na 1000 let a úhel mezi  $\vec{\Omega}_0$  a hlavní osou s momentem setrvačnosti C je přibližně  $20^\circ$ . Ověřujeme tím, že program správně modeluje chování volného setrvačníku. Na obrázku 5.3 pak demonstrujeme zvětšování vrcholového úhlu polodiového kužele, diskutované v kapitole 4, které vedlo k návržení korekce metody. Čas integrace byl nastaven na 100 000 let. Pohyb rotačního pólu již není znázorněn čarou, jako je tomu na obr. 5.1, ale body. Kdybychom bodů vykreslili více a spojili je čarou, pozorovali bychom zvětšující se kružnice.

Opět uvádíme výstup pro  $k = 0$  i  $k = 0.3$ . Změna  $k$  se projeví tím, že pro  $k = 0$  stihne  $\vec{\Omega}$  přibližně 1,4 krát více otáček, na jejichž počtu je pozorovaný jev závislý.



Obrázek 5.2:  $\Omega_0 = (0.3, 0, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-15}$ ,  $t_2 = 10^3$  let

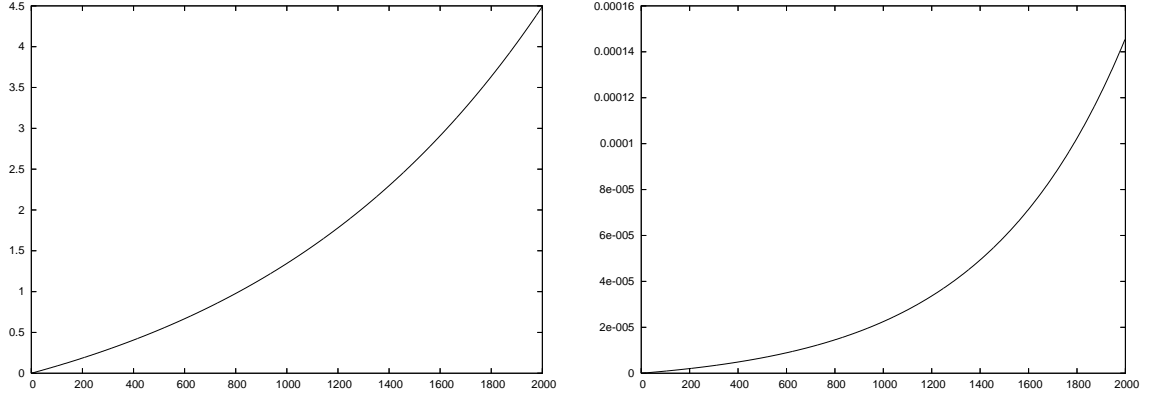


Obrázek 5.3:

vlevo:  $\Omega_0 = (0.003, 0.001, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0$ ,  $eps = 10^{-5}$ ,  $t_2 = 10^5$  let

vpravo:  $\Omega_0 = (0.003, 0.001, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-5}$ ,  $t_2 = 10^5$  let

Z obrázku 5.3 by se mohlo zdát, že  $\Omega_3$  se podstatně zmenšuje, zatímco v kapitole 4 jsme uvedli, že se nemění. Proto na obr.5.4 uvádíme relativní změnu  $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$  v porovnání s relativní změnou  $\|\vec{\Omega}\|$ . Relativní změna  $\Omega_3$  je pak ještě o několik řádů nižší než změna  $\|\vec{\Omega}\|$ . Na x-ové ose je znázorněn počet ukládaných dat, 2000 odpovídá sto tisícům let.



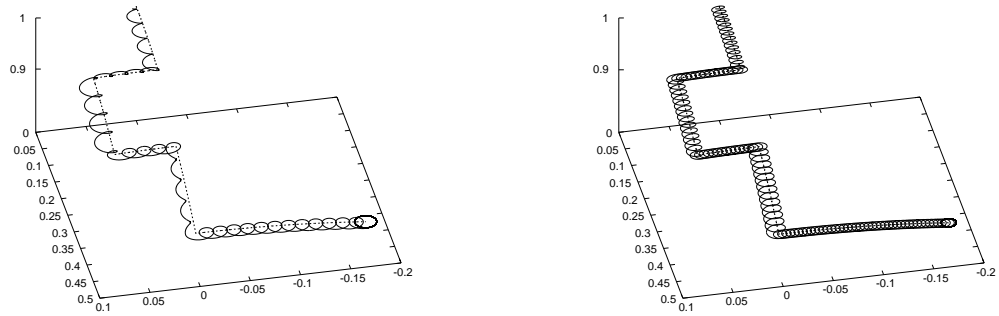
Obrázek 5.4:

vlevo: relativní změna  $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$ , na ose x je počet ukládaných dat.  
 vpravo: relativní změna  $\|\Omega\|$ , na ose x je počet ukládaných dat.

## 5.2 Pohyb hlavních os tenzoru setrvačnosti

V této části pracujeme s tenzorem setrvačnosti, který dostaneme pomalým natáčením hlavních os tenzoru  $J^{konv}$  z části 5.1. Snažíme se tím simulovat vývoj tenzoru setrvačnosti reálných, deformujících se těles. Velikosti hlavních momentů neměníme, neboť v rozsahu této práce bychom se vlivu takových změn již nemohli věnovat komplexně. Testovaný pohyb hlavních os je na obrázcích znázorněn přerušovanou čarou, proto není třeba jej explicitně popisovat. Důležitý je časový průběh simulované deformace, který již z výkresů přímo vyčíst nelze. Na obrázku 5.5 vlevo a na obrázku 5.6 se hlavní osy vychýlí o přibližně  $30^\circ$  za pouhých 40 let. Vpravo na obr. 5.5 pak stejná deformace probíhá let 150. Pozorujeme, že při pomalejší deformaci rotační osa již stíhá obíhat kolem hlavní osy a blížíme se tak situaci, kdy se model na časové škále řádově rok chová jako volný symetrický setrvačnick.

Bylo by proto zajímavé zjistit, jak vývoj  $\vec{\Omega}(t)$  reaguje na proměnnou velikost hlavních momentů setrvačnosti. Zajména z obr. 5.6 vpravo je patrné, že pro rychlou deformaci a vysokou míru elasticity tělesa by  $\vec{\Omega}(t)$  konalo složitější pohyb. V této práci ovšem testujeme pouze takové vývoje  $J^{konv}(t)$ , které na časové škále řádově let vedou k chování volného symetrického setrvačnicku.

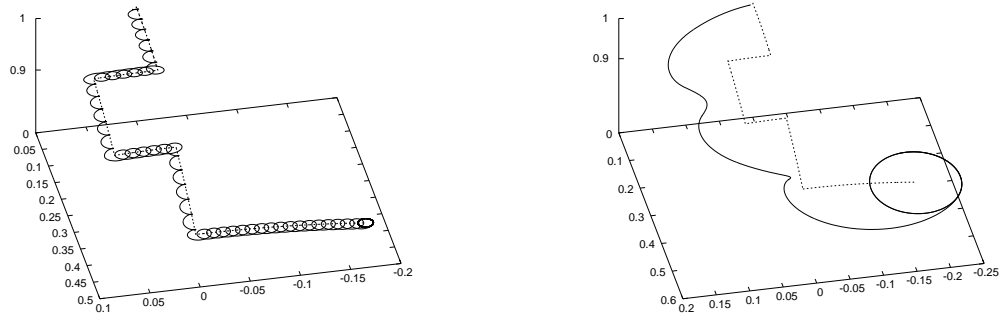


Obrázek 5.5:

vlevo:  $\Omega_0 = (0.005, 0.006, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-12}$ ,  $t_2 = 90$  let

vpravo:  $\Omega_0 = (0.005, 0.006, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-12}$ ,  $t_2 = 200$  let

Na obrázku 5.6 je stejná situace jako na obrázku 5.5 vlevo, pouze měníme hodnotu  $k$  nejprve na  $k = 0$  a poté na  $k = 0,96$ .



Obrázek 5.6:

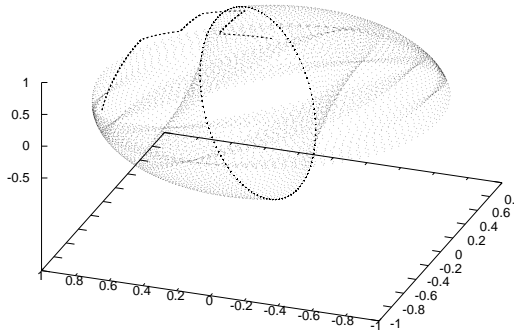
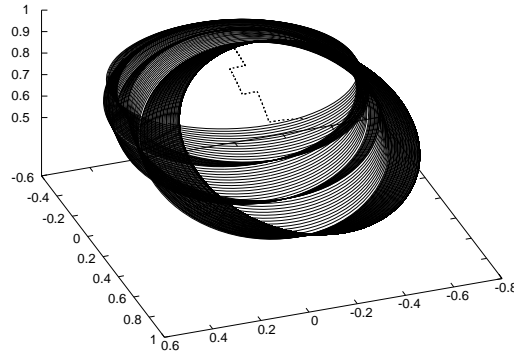
vlevo:  $\Omega_0 = (0.005, 0.006, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0$ ,  $eps = 10^{-12}$ ,  $t_2 = 90$  let

vpravo:  $\Omega_0 = (0.005, 0.006, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.96$ ,  $eps = 10^{-12}$ ,  $t_2 = 90$  let

Vidíme tedy, že pro malý počáteční odklon  $\vec{\Omega}_0$  od hlavní osy s největším momentem setrvačnosti vektor úhlové rychlosti rotace  $\vec{\Omega}$  tuto osu neustále sleduje. Hovoří-li se v [8] o tom, že vlivem náhodných momentů vnějších sil se rotační osa vždy přiblíží hlavní ose s největším momentem setrvačnosti, pak simulovaná deformace tělesa na tom již nic nezmění. Pro tělesa planetárních rozměrů, dalece

vzdálených od okolních těles, ovšem nemusí být počáteční odklon vektoru  $\vec{\Omega}_0$  od hlavní osy s největším momentem setrvačnosti malý (viz Úvod).

Výše popsané chování  $\vec{\Omega}$  při pomalé deformaci, kdy vektor koná na časové škále řádu periody wobblu stejný pohyb jako známe z řešení volného symetrického setrvačnicku, se však ani pro takový odklon  $\vec{\Omega}_0$  od hlavní osy nemění. Demonstruje to obrázek 5.7. Nahoře natáčíme hlavní osu stejně jako vpravo na obr. 5.5, dole na obr. 5.7 se pak hlavní osa vychýlí o přibližně  $100^\circ$  za 150 let. 2D projekce obrázku již není příliš přehledná, pohyb rotačního pólu jsme museli znázornit body. Z 3D manipulace s obrázkem je však zmíněné chování zřejmé.



Obrázek 5.7:

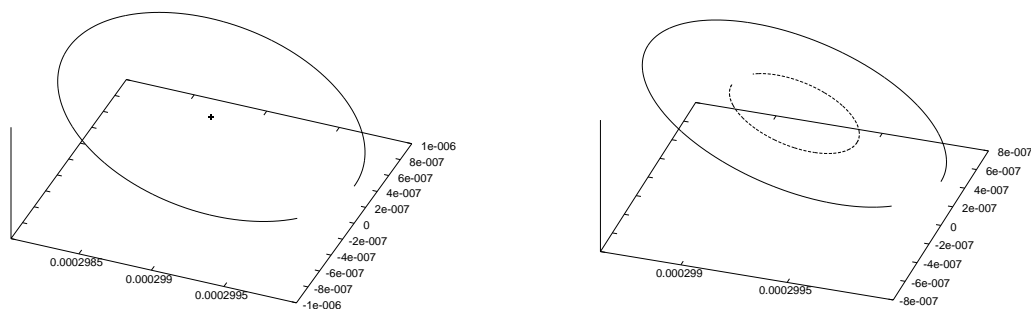
nahoře:  $\Omega_0 = (0.4, 0.3, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-12}$ ,  $t_2 = 300$  let

dole:  $\Omega_0 = (0.1, 0.99, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-12}$ ,  $t_2 = 300$  let

## 5.3 Rotace tělesa v inerciální soustavě

V této části se zaměříme na pohyb vektoru úhlové rychlosti rotace tělesa v inerciální soustavě, který získáme způsobem uvedeným v kapitole 3 (znám-li v referenční soustavě složky bazových vektorů inerciální soustavy a složky  $\Omega_i$ , snadno již spočtu složky  $\omega_i$  vektoru  $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$  v inerciální soustavě). Vektor úhlové rychlosti rotace  $\vec{\omega}$  se otáčí kolem vektoru momentu hybnosti  $\vec{B}$  přibližně jednou za den (jak plyne z 6,89 v [8]) a je proto třeba řádově vyšší přesnosti, abychom dostali výsledky nezátížené přílišnou numerickou chybou. V inerciální soustavě bychom měli zaznamenat samozřejmě nulovou změnu vektoru momentu hybnosti  $\vec{B}$  a vektor  $\vec{\omega}$  by jej měl s periodou přibližně den velmi těsně obtáčet. Pro většinu modelů, jejichž výstup prezentujeme v částech 5.1, 5.2 a zdá se být rozumný, se sledování vektorů  $\vec{\omega}$  a  $\vec{B}$  v inerciální soustavě již setkalo s neúspěchem. Oba vektory se sice drží blízko sebe, avšak 'cestují' v prostoru.

Pohyb  $\vec{\omega}$  kolem  $\vec{B}$ , tedy tzv. 'sway' ze sekce 6.6 v [1], je zobrazen vlevo na obr. 5.8. Čas integrace je nastaven na  $\frac{1}{400}$  roku. Vpravo na témže je jediný zaznamenaný projev zanedbání časové derivace složek  $\dot{j}_{ij}^{rot}$ , diskutovaného v kapitole 4. Zanedbání hýbe s vektorem  $\vec{B}$ , jak znázorňuje přerušovaná čára. Stejně jako v předešlých částech zobrazujeme vždy průsečík vektorů s jednotkovou sférou.



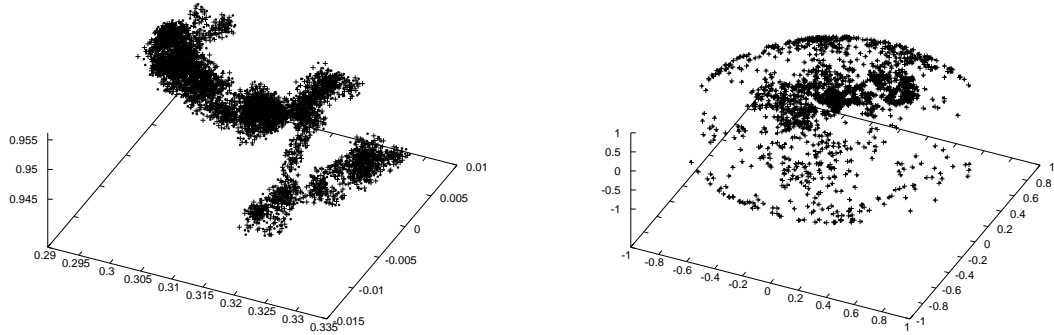
Obrázek 5.8:

vlevo:  $\Omega_0 = (0.0003, 0, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0$ ,  $eps = 10^{-18}$ ,  $t_2 = 1/400$  roku

vpravo:  $\Omega_0 = (0.0003, 0, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-18}$ ,  $t_2 = 1/400$  roku



Pro rozmezí integrace 1000 let a 100 000 let je pohyb  $\vec{\omega}$  a  $\vec{B}$  vykreslen na obrázku 5.9. Jedná se o situace z obrázku 5.2 a 5.3 vpravo. Průsečík  $\vec{B}$  s jednotkovou sférou je označen křížkem, průsečík  $\vec{\omega}$  se sférou značí tečka. Obrázek 5.9 demonstruje nechtěný pohyb vektorů v prostoru. Sledování  $\vec{\omega}$  a  $\vec{B}$  ovšem nebylo hlavním cílem této práce. Obrázky 5.9, 5.12 a 5.13 prezentují pouze vedlejší výsledky použité metody a mají za cíl především ukázat, že numerické obejití Eulerových kinematických rovnic z části 3.1 se neseťkalo s úspěchem.



Obrázek 5.9:

vlevo:  $\Omega_0 = (0.3, 0, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-15}$ ,  $t_2 = 1000$  let

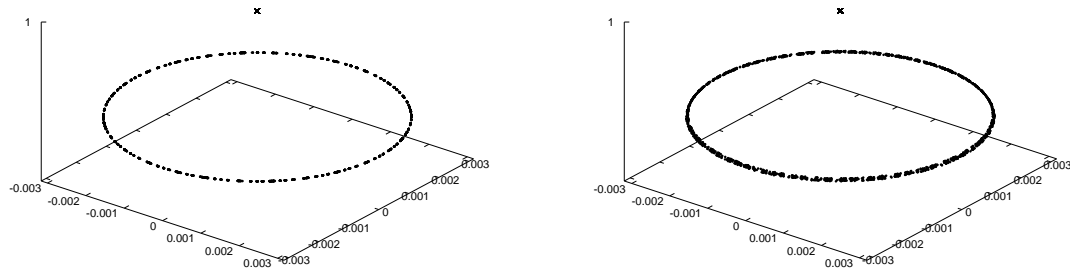
vpravo:  $\Omega_0 = (0.003, 0.001, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0$ ,  $eps = 10^{-5}$ ,  $t_2 = 10^5$  let

## 5.4 Vliv korekce

Nyní ukážeme, že korekce metody navržená v kapitole 4 má smysl a funguje podobně jako nastavení hodnoty  $eps$  o několik řádů menší. Počet řádů závisí na studovaném modelu, z testování metody pro různé počáteční podmínky a pohyby hlavních os lze usuzovat, že většinou se jedná o dva až tři řády.

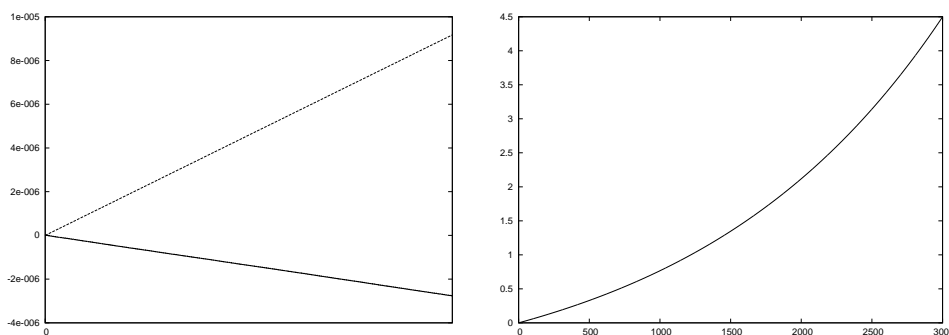
Nejprve zopakujeme situaci, která k jejímu vzniku vedla. Na obrázku 5.10 vlevo řešíme stejný  $J^{konv}$  jako na obr.5.3 vlevo, avšak aktivujeme korekci. Vpravo na obr 5.10 jsme rovněž řešili  $J^{konv}$  z obr.5.3, ale nastavili jsme menší hodnotu  $eps$  a korekci nepoužili.

Na obr. 5.11 vlevo porovnáváme relativní změnu  $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$  situací z obr. 5.10. Přerušovaná čára odpovídá obr. 5.10 vpravo, plná čára situaci z obr. 5.10 vlevo.



Obrázek 5.10:

vlevo:  $\Omega_0 = (0.003, 0.001, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-5}$ ,  $t_2 = 10^5$  let, s korekcí  
 vpravo:  $\Omega_0 = (0.003, 0.001, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-7}$ ,  $t_2 = 10^5$  let



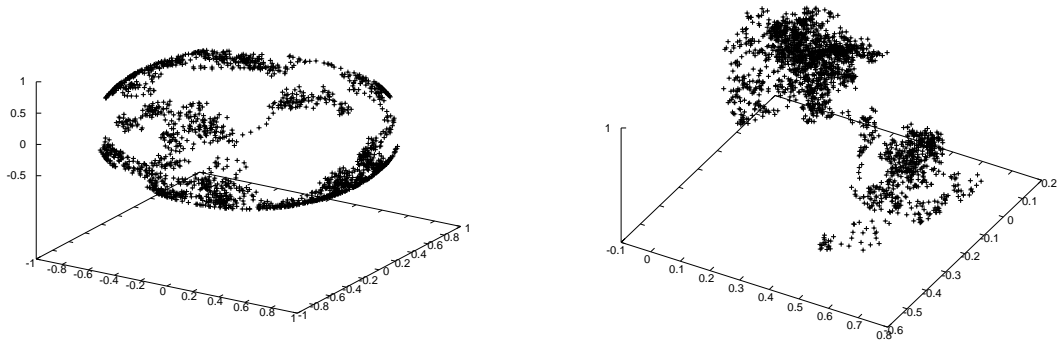
Obrázek 5.11:

vlevo: relativní změna  $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$  situací z obr. 5.10

vpravo: relativní změna  $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$  situace z obr. 5.3 vlevo, na ose x je vyznačen počet uložených dat

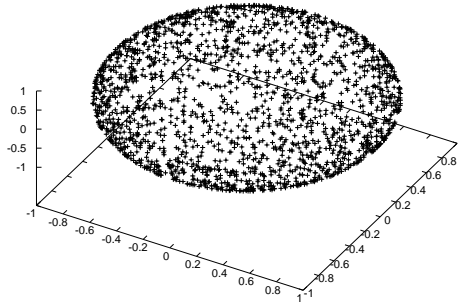
Z obr. 5.11 bychom mohli vyvodit, že aktivace korekce má účinek srovnatelný se snížením  $eps$  o více jak pět řádů. Zmíněný obrázek je ovšem poněkud zavádějící. Například sledování  $\vec{\omega}$  a  $\vec{B}$  v inerciální soustavě je lepší pro situaci z pravé části obr. 5.10, přestože relativní změna  $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$  je vpravo na obr. 5.10 řádově vyšší než na obr. 5.10 vlevo.

Sledování  $\vec{\omega}$  a  $\vec{B}$  také závisí na počátečním odklonu  $\vec{\omega}$  od hlavní osy, jak ukazuje obr. 5.13.



Obrázek 5.12:

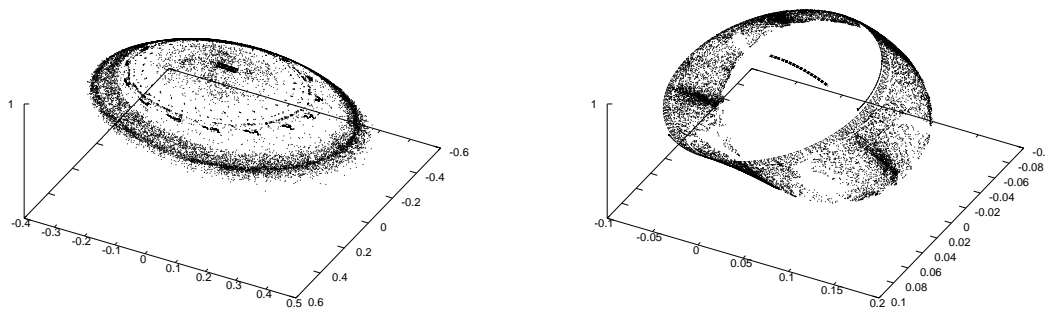
vlevo:  $\Omega_0 = (0.003, 0.001, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-5}$ ,  $t_2 = 10^5$  let, s korekcí  
vpravo:  $\Omega_0 = (0.003, 0.001, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-7}$ ,  $t_2 = 10^5$  let



Obrázek 5.13:  $\Omega_0 = (0.3, 0, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-7}$ ,  $t_2 = 10^5$  let

## 5.5 Změna délky časového kroku

Výrazná deformace těles planetárních rozměrů, způsobená termální konvekci, se může odehrávat na časové škále až miliard let. Při takovém rozmezí integrace je metoda pro hodnoty  $eps < 10^{-5}$  příliš pomalá. Zkusili jsme proto, jak metoda pracuje pro hodnoty  $eps > 1$ , kdy program začne integrovat s délkou kroku srovnatelnou s periodou wobblu. Při použití korekce jsme obdrželi výstup znázorněný na obrázku 5.14 vlevo. Nejedná se ale o věrohodný výstup, jak ukazuje obrázek 5.14 vpravo, který odpovídá stejnému  $J^{konv}(t)$  a počáteční podmínce, ale  $eps$  bylo nastaveno na  $10^{-3}$ . Bez použití korekce se pro  $eps > 1$  setkáme s chybou 'stepsize underflow', kdy řešení zřejmě diverguje natolik, že brzy není schopno dodržet požadovanou přesnost ani pro délku kroku takovou, že běžný počítač již není schopen rozlišit  $t_{n+1}$  od  $t_n$ . To ovšem neznamená, že bychom z výsledků této práce nemohli usuzovat na chování rotační osy na velké časové škále. Vliv časového průběhu deformace na takové chování je patrný např. ze srovnání obr. 5.5 a 5.6. Pro deformaci trvající řádově miliardu let bychom zřejmě dostali podobný pohyb  $\vec{\Omega}(t)$  jako na obrázku 5.5 vpravo (případně 5.7, v závislosti na počáteční podmínce). Můžeme tak usuzovat ale pouze pro deformace, jež lze simulovat pohybem hlavních os tenzoru setrvačnosti.



Obrázek 5.14:

vlevo:  $\Omega_0 = (0.09, 0.03, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 2$ ,  $t_2 = 10^6$  let, s korekcí  
vpravo:  $\Omega_0 = (0.09, 0.03, 1 + m_3)\Omega$ ,  $k = 0.3$ ,  $eps = 10^{-3}$ ,  $t_2 = 10^6$  let

## Závěr

V rešeršní části jsme se věnovali některým aspektům odvození Liouvillovy rovnice. Především jsme diskutovali fyzikální význam jednotlivých členů v ní vystupujících a podmínkami, za nichž lze za pravou stranu rovnice dosadit nulu. Zabývali jsme se i linearizovanou verzí rovnice, s níž se typicky setkáme při studiu rotace Země. Zdůvodnili jsme, proč v této práci vztah linearizovat nelze.

Navrhli jsme numerickou metodu řešení nelinearizované Liouvillovy rovnice a testovali jsme ji na jednoduchých modelech vývoje tenzoru setrvačnosti. Pozorovali jsme, jak rotační osa tělesa sleduje hlavní osu tenzoru setrvačnosti s největším momentem a jak toto chování závisí na rychlosti deformace.

# Literatura

- [1] Munk W., MacDonald G.J.F.: *The rotation of the Earth: A Geophysical Discussion*, Cambridge University Press, 1960.
- [2] Moser J., Matyska C., Yuen D.A., Malevsky A. and Harder H.: *Mantle rheology, convection and rotational dynamics*, Phys. Earth Planet. Inter., **79** (1993) 367-381.
- [3] Spada G., Sabadini R., Ricard Y.: *On a particular solution of the nonlinear Liouville equation*, Geophys. J. Int., **114** (1993) 399-404.
- [4] Martinec Z., Hagedoorn J.: *Time-domain approach to linearized rotational response of a three-dimensional viscoelastic earth model induced by glacial-isostatic adjustment: I. Inertia-tensor perturbations*, Geophys. J. Int., **163** (2005) 443-462.
- [5] Novotný O.: *Motions, Gravity Field and Figure of the Earth*, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 1998.
- [6] Zhong S.J.: *Migration of Tharsis volcanism on Mars caused by differential rotation of the lithosphere*, Nature Geoscience **1** (2009) 19-23.
- [7] Tobie G., Čadek O., Sotin C.: *Solid tidal friction above a liquid water reservoir as the origin of the south pole hotspot on Enceladus*, Icarus **196** (2008) 642-652.
- [8] Havránek A.: *Klasická mechanika I.*, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 2002.
- [9] Gurtin M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1989.

- [10] Langer J., Podolský J.: *Studijní text k tuhému tělesu*, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2000.
- [11] Press H.W., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.: *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.