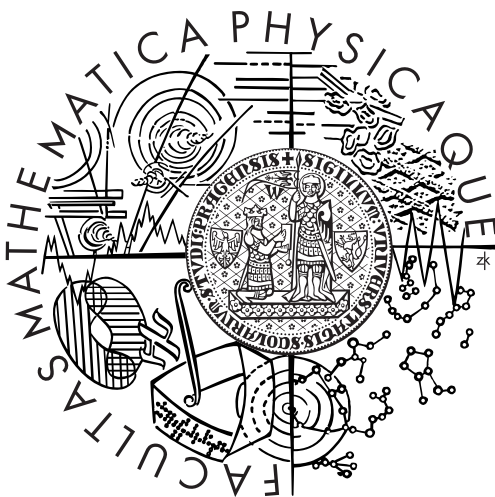


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Klára Kalousová

Studium vnitřní dynamiky Marsu na základě topografie a gravitačního pole

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: geofyzika

2010

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé diplomové práce doc. RNDr. Ondřeji Čadkovi, CSc. za trpělivé vedení a takřka neutuchající nadšení. Můj velký dík patří RNDr. Ondřeji Součkovi za pomoc s FEM softwary, dlouhé diskuze a podnětné připomínky. Zaměstnancům i studentům Katedry geofyziky patří dík za vytvoření přátelského a inspirativního prostředí. V neposlední řadě směřuje dík mé rodině za neustálou podporu a důvěru. Tato práce vznikla za finanční podpory grantu GAUK259099.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 15.4.2010

Klára Kalousová

Obsah

1	Úvod	9
2	Planeta Mars - známá neznámá	11
2.1	Mars jako objekt pozorování	11
2.2	Termální evoluce Marsu	14
2.3	Stratigrafie Marsu	15
2.4	Geologická historie	17
3	Globální model tloušťky elastické litosféry	19
3.1	Tloušťka elastické litosféry jako funkce harmonického stupně j (1. krok) .	19
3.2	Jednotná tloušťka elastické litosféry pro všechny harmonické stupně j (2. krok)	21
3.3	Výsledky globální inverze	21
4	Lokální analýza	23
4.1	Filtrace prostorových polí Gaussovým filtrem, formulace lokální inverze .	23
4.2	Prostorová inverze	27
5	Testy inverze (2D axisymetrický model)	29
5.1	Srovnání Elmeru a Comsolu	29
5.1.1	Slupka o tloušťce 50 km	31
5.1.2	Slupka o tloušťce 10 km	32
5.1.3	Slupka o tloušťce 250 km	34
5.2	Formulace testovací úlohy	34
5.3	Optimální harmonické stupně	36
5.3.1	Citlivost úlohy na tloušťku elastické litosféry	37
5.3.2	Přesnost používané spektrální aproximace	38
5.4	Nejvhodnější parametry filtru (pološířka a krok posunu)	39
5.4.1	Krok posunu filtru	39
5.4.2	Pološířka filtru. Výběr mezi geoidem a posunutím.	40
5.5	Vlnová délka modelu a její vztah k vlnové délce zátěže	43
5.6	Vliv volby stupně j_{min}	50
5.7	Vztah mezi vlnovými délkami modelu, zátěže a filtru	58
6	Princip zamrzlé litosféry	61
6.1	Formulace testovací úlohy	61

7 Model tloušťky elastické litosféry na Marsu	79
7.1 Výpočet a výběr modelu	79
7.2 Srovnání s literaturou	82
8 Závěr	89
A Gravitační potenciál	91
A.1 Rozvoj potenciálu do řad sférických harmonických funkcí	91
A.2 Výkonové spektrum	93
B Kompenzace topografie prohnutím elastické litosféry konstantní tloušťky	95
Literatura	99

Název práce: Studium vnitřní dynamiky Marsu na základě topografie a gravitačního pole

Autor: Klára Kalousová

Katedra (ústav): Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

e-mail vedoucího: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme modelem tloušťky elastické litosféry Marsu. Předpokládáme, že povrchové zatížení planety je kompenzováno pouze prohnutím elastické litosféry, a formulujeme prostorovou inverzi na základě srovnání predikovaného a pozorovaného geoidu. Rozsáhlým testováním inverze v dvoudimenzionální axisymetrické geometrii získáváme nejlepší parametry inverze. Poté invertujeme reálná data a vytváříme modely tloušťky elastické litosféry Marsu pro různě široké filtry. Zaměřujeme se na některé topograficky významné oblasti, určujeme tloušťku elastické litosféry pod nimi a získané hodnoty srovnáváme s publikovanými výsledky. Pro některé oblasti dostáváme shodu. Přiřazením stáří jednotlivým oblastem zjišťujeme nárůst tloušťky elastické litosféry v čase, což je ve shodě s tzv. principem zamrzlé litosféry.

Klíčová slova: Mars, geoid, elastická flexe, zamrzlá litosféra

Title: Internal dynamics of Mars: a study based on gravitational and topographic data

Author: Klára Kalousová

Department: Department of Geophysics

Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Supervisor's e-mail address: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we deal with the model of elastic lithosphere thickness on Mars. We assume that the surface load of the planet is compensated only by elastic lithosphere deflection and formulate the spatial inversion based on the comparison between predicted and observed geoid. Performing very extensive tests on this inversion in the two dimensional axisymmetric geometry we gain its best parameters. Then we invert the real data and construct the models of Martian elastic lithosphere thickness for filters of variable width. We focus on some topographically significant areas, establish the elastic lithosphere thickness below them and compare the obtained values with published results. For some areas we get agreement. Assigning the age to particular areas we find the growth of elastic lithosphere thickness during time, which is in agreement with the so-called principle of frozen lithosphere.

Keywords: Mars, geoid, elastic flexure, frozen lithosphere

Kapitola 1

Úvod

Pozorováním vesmíru se lidstvo zabývá od nepaměti. Již starověké národy měly výborné astronomické znalosti a tehdejší astronomové byli schopni velmi přesně předpovídat rozmanité jevy (např. zatmění Slunce). Příklad středověku bohužel přírodním vědám příliš nepřál, a tak astronomové v pozdější době (přibližně od 16. století) znovu objevovali skutečnosti, které byly známy již jejich předchůdcům. Stále se zdokonalující technika umožňovala lepší pozorování, čím víc se ale o vesmíru vědělo, tím víc bylo i otázek - zodpovězení jedné vyvolalo celou řadu dalších. Postupně byla objevována další a další nebeská tělesa a začaly vznikat i jakési prvotní mapy jejich povrchu. Ty ale bohužel byly až příliš ovlivněny velkou představivostí jejich autorů a také všudypřítomnou touhou nalézt známky extraterestriálního života. Zásadní zlom do problematiky nebeských těles přinesla druhá polovina 20. století a první úspěšné lety do vesmíru. S rychlým rozvojem vesmírné techniky přibývá misí, které jsou cílené ke konkrétním planetám - velký zájem vzbuzují především terestrické planety, mezi nimi pak nejvíce Mars. Z počátku byl úspěchem jediný oblet planety, v současnosti už na Marsu přistávají sondy vybavené celou řadou moderních přístrojů. Jsou schopny provádět měření fyzikálních veličin i chemické a biologické experimenty.

K čemu ale všechna získaná data slouží? Mimo jiné k určení vnitřní struktury Marsu. Na Zemi je nejspolehlivějším zdrojem informací o nitru planety seismologie, především pak seismická tomografie. I na Marsu již byl instalován první seismograf, zatím však šlo především o určení velikosti přírodního šumu a zjištění velikosti seismické aktivity na planetě [1]. Zatím tedy máme o Marsu velice málo informací ze seismologie, a proto zůstává hlavním zdrojem informací o nitru planety topografie a gravitační pole [12].

Mezi planetami Sluneční soustavy je Mars tou nejvíce podobnou naší Zemi [4]. Oproti ní má ale tu velkou výhodu, že na jeho povrchu zůstaly zachovány stopy minulých dějů - to se nedá říci o Zemi, kde eroze a především desková tektonika vymazaly až čtyři pětiny její historie. Porozumět planetě Mars pak v jistém smyslu znamená i porozumět naší vlastní planetě.

V této práci navazujeme na bakalářskou práci [9], kde jsme se podrobně seznámili s možnými mechanismy kompenzace povrchové topografie. Nyní jsme se zaměřili pouze na elastickou flexi (tj. kompenzaci povrchové zátěže prohnutím elastické litosféry). Ta má díky malému poloměru planety a značné tloušťce elastické litosféry (např. [21]) pravděpodobně větší vliv na kompenzaci pozorované topografie než mechanismy izostáze nebo plášťové konvekce. Cílem naší práce je určení modelu tloušťky elastické litosféry na Marsu za použití inverze topografických a gravitačních dat.

Uvedme zde ještě stručnou strukturu textu: V kapitole 2 uvádíme základní informace o Marsu, jeho povrchu a především geologické historii. Ta je silně spjata s jeho vnitřní strukturou (viz část 2.4). V kapitole 3 shrnujeme výsledky bakalářské práce a navazujeme na ně formulací globální inverze. Ta se ukazuje nedostačující pro určení tloušťky elastické litosféry, a proto v kapitole 4 formulujeme lokální inverzi za použití klouzavého Gaussova filtru. Kapitola 5 je věnována rozsáhlému testování této inverze pro dvoudimenzionální axisymetrické modely. Určujeme nejdůležitější vlastnosti filtru a rozpětí harmonických stupňů vhodných k inverzi reálných dat. V kapitole 6 se zabýváme tzv. principem zamrzlé litosféry, jeho popisem a především testováním, zda jsme naší inverzí schopni vystihnout model složený z různých tlouštěk elastické litosféry zatížených v různých dobách. V kapitole 7 sestavujeme model tlouštěk elastické litosféry na Marsu invertovaný z reálných dat, určujeme tloušťku litosféry pod významnými topografickými útvary a tyto hodnoty srovnáváme s publikovanými výsledky. V přílohách uvádíme přehled nejdůležitějších vzorců potřebných pro práci s gravitačním polem užitím spektrální metody (příloha A) a pro kompenzaci povrchové topografie prohnutím elastické litosféry (příloha B).

Kapitola 2

Planeta Mars - známá neznámá

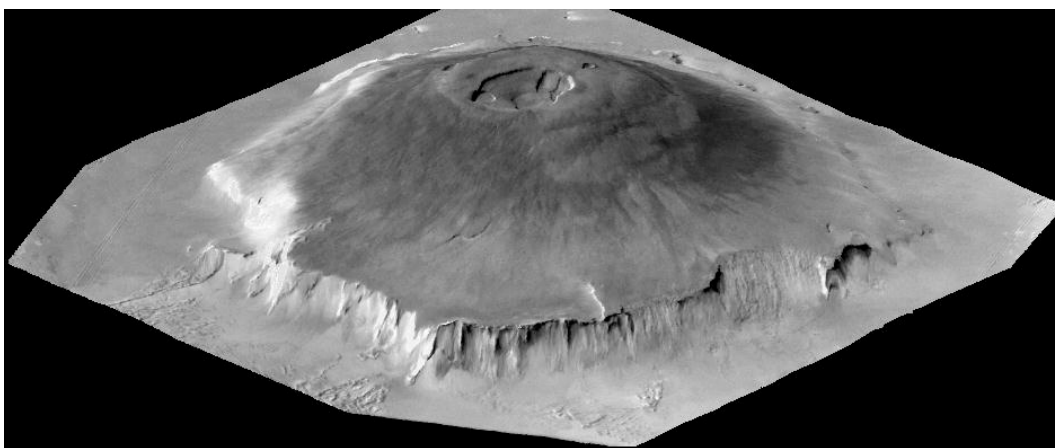
2.1 Mars jako objekt pozorování

Mars, neboli Rudá planeta (obr. 2.1), je druhá nejmenší planeta Sluneční soustavy a kolem Slunce obíhá jako čtvrtá v pořadí [22]. Byla pozorována již starověkými civilizacemi, které jí dávaly jména související právě s onou načervenalou barvou (ta je dána především vysokým obsahem oxidů železa). Jméno Mars dali planetě Římané na počest svého boha války. V minulosti se o Mars hlouběji zajímali např. Tycho Brahe, Galileo Galilei, Christian Huygens nebo Giovanni Cassini. Velmi intenzivní pozorování Marsu začalo v 19. století - Giovanni Schiaparelli vytvořil názvosloví pro některé povrchové útvary, Percival Lowell dokonce ve své knize Mars popsal technicky vyspělou civilizaci, která vytvořila pozorované kanály. V roce 1877 objevil americký astronom Asaph Hall dva měsíce Marsu - **Phobos** (strach) a **Deimos** (zděšení). Mars také vždy byl nejlepším kandidátem pro mimozemský život, a to především díky pozorovaným kanálům (které podle pozorovatelů mohly být vytvořeny inteligentními bytostmi) a také díky pozorovaným sezónním změnám barvy povrchu planety. Biologické experimenty provedené sondou Viking 2 ale svědectví o přítomnosti živých mikroorganismů v půdě neposkytly. První sonda na Mars byla vypuštěna v roce 1960 (Korabl 4), ale nedosáhla ani zemské oběžné dráhy. První úspěšný oblet Marsu zaznamenala v roce 1964 sonda Mariner 4. Od roku 1960 až dodnes bylo k Marsu vysláno téměř 40 sond, z nichž necelá polovina byla úspěšná (přehled úspěšných misí je uveden v tabulce 2.1). Další mise jsou plánovány.

Mars je tzv. jednodesková planeta (*one-plate planet*) - v současnosti nejeví žádné znaky deskové tektoniky [15]. Nitro Marsu je tedy přikryto jednolitou litosférou, která je místy proražena vulkanickými otvory. Nejvýznamnější povrchové útvary jsou **dichotomie** mezi severní a jižní polokoulí, sopečné pohoří **Tharsis** a impaktivá pánev **Hellas**. Zatímco jižní polokoule je krátery přímo poseta, na severní polokouli je kráterů podstatně méně, což značí, že je také o hodně mladší než polokoule jižní. Pohoří **Tharsis**, největší tektonická oblast ve Sluneční soustavě a vulkanické centrum Marsu, vzniklo pravděpodobně poměrně záhy během evoluce planety, jeho činnost ale zřejmě přetrvávala takřka po celou další dobu existence Marsu a ustala teprve nedávno (z pohledu geologických časových škál). Z celého masivu pohoří Tharsis nejvíce zaujmou vulkány **Arsia Mons**, **Pavonis Mons** a **Ascraeus Mons**, které dosahují výšky kolem 17 km. Velmi blízko se nachází samostatný vulkán **Olympus Mons** (obr. 2.2), který je se svou výškou přesahující 20 km nejvyšším útvarem ve Sluneční soustavě. Pozoruhodný je také systém kaňonů **Valles Marineris** (obr. 2.3), který se nachází východně od pohoří Tharsis a



Obrázek 2.1: Snímek planety Mars pořízený Hubbleovým teleskopem [22].



Obrázek 2.2: Olympus Mons - nejvyšší sopka ve Sluneční soustavě [22].

Rok	Jméno	Typ	Stav mise	Výsledek
1964	Mariner 4	oblet	ukončena	21 snímků
1969	Mariner 6	oblet	ukončena	75 snímků
1969	Mariner 7	oblet	ukončena	126 snímků
1971	Mars 3	orbiter / lander	ukončena	~ 8 měsíců dat (orbiter), bezpečné přistání a 20 s dat (lander)
1971	Mariner 9	orbiter	ukončena	7329 snímků
1973	Mars 5	oblet	ukončena	60 snímků, trvání jen 9 dnů
1973	Mars 6	orbiter / lander	ukončena	malé množství dat
1975	Viking 1	orbiter / lander	ukončena	první opravdu úspěšné přistání na Marsu na určeném místě
1975	Viking 2	orbiter / lander	ukončena	16 000 snímků, rozsáhá atmosfé- rická data a půdní experimenty
1996	Mars Global Surveyor	orbiter	ukončena	studium povrchu, atmosféry a vnitřku Marsu, zachycení poměrně pravidelných změn počasí
1996	Mars Pathfinder	lander / rover	ukončena	více než 17 000 snímků, chemické a půdní experimenty
2001	Mars Odyssey	orbiter	běží	snímky Marsu s vysokým roz- lišením, geologická, klimatická a mineralogická data
2003	Mars Express	orbiter	běží	detaillní snímky Marsu, hledání podpovrchové vody
2003	Spirit & Opportunity	rover	běží	více než 100 000 barevných snímků, chemické a mineralogické experimenty
2005	Mars Reconnaissance	orbiter	běží	více než 26 Tbit dat (více než všechny ostatní mise dohromady)
2007	Phoenix Mars	lander	ukončena	více než 25 Gbit dat

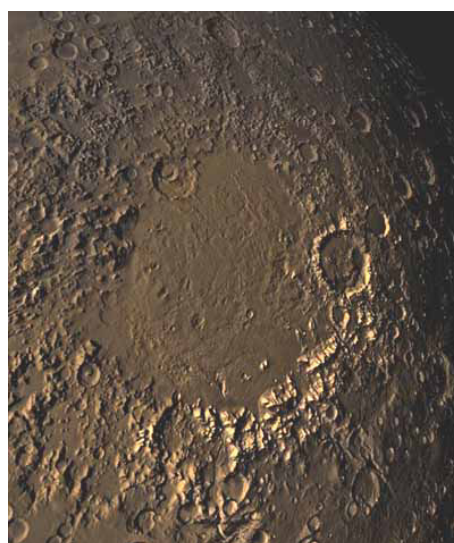
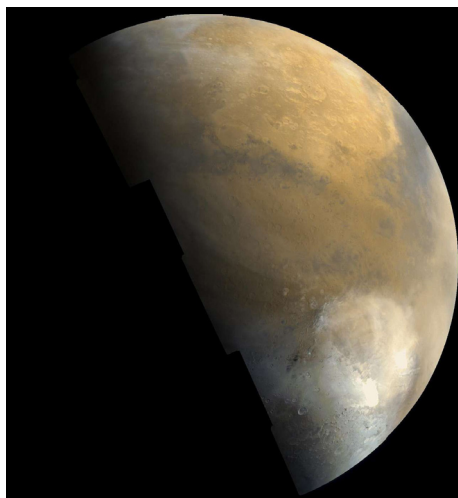
Tabulka 2.1: Přehled úspěšných misí na Mars (podle [25]).

měří přes 4000 km. Jižní polokouli pak dominují především impaktivé pánve - **Hellas** (obr. 2.4 vlevo) a **Argyre** (obr. 2.4 vpravo). Hellas je největší a nejhlubší impaktivá pánve na povrchu Marsu - v současnosti její hloubka přesahuje 8 km, dříve však mohla být ještě hlubší. Významný je i další vulkán **Elysium Mons**. V oblastech Tharsis a Elysium nalezneme lokální maxima gravitačního pole, což naznačuje, že tyto oblasti zřejmě nejsou v izostatické rovnováze.

Další neznámou Marsu je jeho magnetické pole. V roce 1997 měření provedená sondou MGS potvrdila, že Mars v současné době nemá magnetické pole vnitřního původu [15]. Zároveň ale bylo detekováno zbytkové magnetické pole, a to především nad jižní polokoulí, kde jsou nejstarší horniny na Marsu. Maximální amplitudy zbytkového pole Marsu dosahují hodnot ~ 250 nT, což je přibližně desetinásobek maximálních hodnot



Obrázek 2.3: Rozsáhlý systém kaňonů Valles Marineris [22].



Obrázek 2.4: Hellas - největší impaktová pánev na Marsu (vlevo) a impaktová pánev Argyre (vpravo) [22].

magnetických anomálií na Zemi změřených poblíž Kursku (Rusko) [4]. Nejlépe lze toto velmi silné zbytkové pole vysvětlit za předpokladu, že na Marsu bylo aktivní dynamo hnané termální konvekcí v jádře, a to zřejmě v nejstarším období Noachian (viz část 2.2). Pravděpodobně ale díky rychlému ochlazení planety (poloměr Marsu je takřka poloviční oproti poloměru Země) došlo k zastavení dynama a vymizení vnitřního magnetického pole, po němž zůstalo jen pozorované remanentní pole.

2.2 Termální evoluce Marsu

Na planety lze pohlížet jako na tepelné stroje, které přeměňují termální energii na mechanickou práci a na energii magnetického pole [15]. Z tohoto hlediska je pak jejich evoluce velice silně spjata s jejich termální historií. Termální evoluci planety Mars můžeme přibližně rozdělit do čtyř částí [19]:

1. **Formace jádra a diferenciace kůry** (tato část začíná vznikem planety a trvá přibližně 1 miliardu let). Během ní velmi rychle roste teplota uvnitř planety, materiály jádra tají a začíná separace jádra. Předpokládá se, že formace jádra proběhla na Marsu velmi rychle (během několika prvních desítek miliónů let) [7, 15]. Zároveň se diferencuje prvotní kůra. Zatímco teploty uvnitř planety nadále rostou, začíná formace litosféry postupným ochlazováním povrchu. Stále pokračuje tavení materiálů a vulkanismus.
2. **Ohřívání, rozpínání a diferenciace pláště** (tato část začíná po vyčlenění jádra a trvá přibližně 2 miliardy let). Dochází k ohřívání vnitřku planety, začíná rozsáhlé tavení a diferenciace materiálů pláště, při které z pláště unikají plyny. Roste poloměr planety i tlaky v litosféře a pravděpodobně vznikají rozsáhlé povrchové útvary, které pozorujeme i v dnešní době. Díky rozsáhlé diferenciaci a úniku plynů mohla v této době vzniknout i velmi hustá atmosféra Marsu.
3. **Vrcholná fáze** (po 3 miliardách let je planeta na vrcholném stupni vývoje). Pomalu pokračuje evoluce planety, díky účinné konvekci začíná plášť pomalu chladnout. Zóny tání materiálu se zužují a prohlubují, tloušťka litosféry roste až na přibližně 200 km. Hlavní zdroj magmatu v oblasti Tharsis se pomalu přesouvá do hloubky větší než 200 km. Poloměr planety je v tomto období takřka neměnný.
4. **Chladnutí** (poslední fáze vývoje Marsu). Planeta pomalu chladne, termální energie a planetární poloměr se zmenšují. Tloušťka litosféry nadále roste, zdroj magmatu (jestli ještě nějaký je) se zřejmě přesouvá do hloubky kolem 300 km, pomalá konvekce pravděpodobně zůstává aktivní v plášti pod hloubkou 300 km. K tání materiálu dochází jen lokálně v místech, kde jsou koncentrovány radioaktivní prvky. Tektonická aktivita je v dnešních dnech pravděpodobně velmi nízká (díky tlusté litosféře a velmi pomalé konvekci).

2.3 Stratigrafie Marsu

Stratigrafie se zabývá prostorovým uspořádáním vrstev na planetárním povrchu v závislosti na čase. Největší pokroky v definici a dokumentaci stratigrafie a geologie Marsu byly udělány v poměrně nedávné době [17]. Jako základ k prvnímu globálnímu geologickému mapování sloužily snímky sondy Mariner 9. Toto mapování vedlo k poznání nejdůležitějších geologických procesů, které formovaly planetu, a zároveň k definici hlavních chronostratigrafických systémů. Ty jsou založeny na časové návaznosti jednotlivých druhů terénů a reprezentují hlavní období geologické aktivity na Marsu. Nové snímky s vysokým rozlišením pořízené sondou Viking Orbiter umožnily definici dalších geologických jednotek.

Horniny na povrchu planety byly na základě snímků sondy Mariner 9 rozděleny do pěti hlavních kategorií

1. materiály nížin (*plains materials*)
2. stavební vulkanické materiály (*constructional volcanic materials*)
3. materiály kanálů a kaňonů (*channel and canyon materials*)

4. materiály hrubého terénu (*rough terrain materials*)

5. polární materiály (*polar materials*)

a následně byly zařazeny do tří základních časových epoch pojmenovaných podle oblastí, ve kterých se podle snímků nacházely terény typické pro danou epochu: **Noachian** (Noachis Terra), **Hesperian** (Hesperia Planum) a **Amazonian** (Amazonis Planitia). Tyto epochy byly dále rozděleny na základě podrobnějších snímků sondy Viking Orbiter [16] na

- Raný Noachian (*Early Noachian*)
- Střední Noachian (*Middle Noachian*)
- Pozdní Noachian (*Late Noachian*)
- Raný Hesperian (*Early Hesperian*)
- Pozdní Hesperian (*Late Hesperian*)
- Raný Amazonian (*Early Amazonian*)
- Střední Amazonian (*Middle Amazonian*)
- Pozdní Amazonian (*Late Amazonian*)

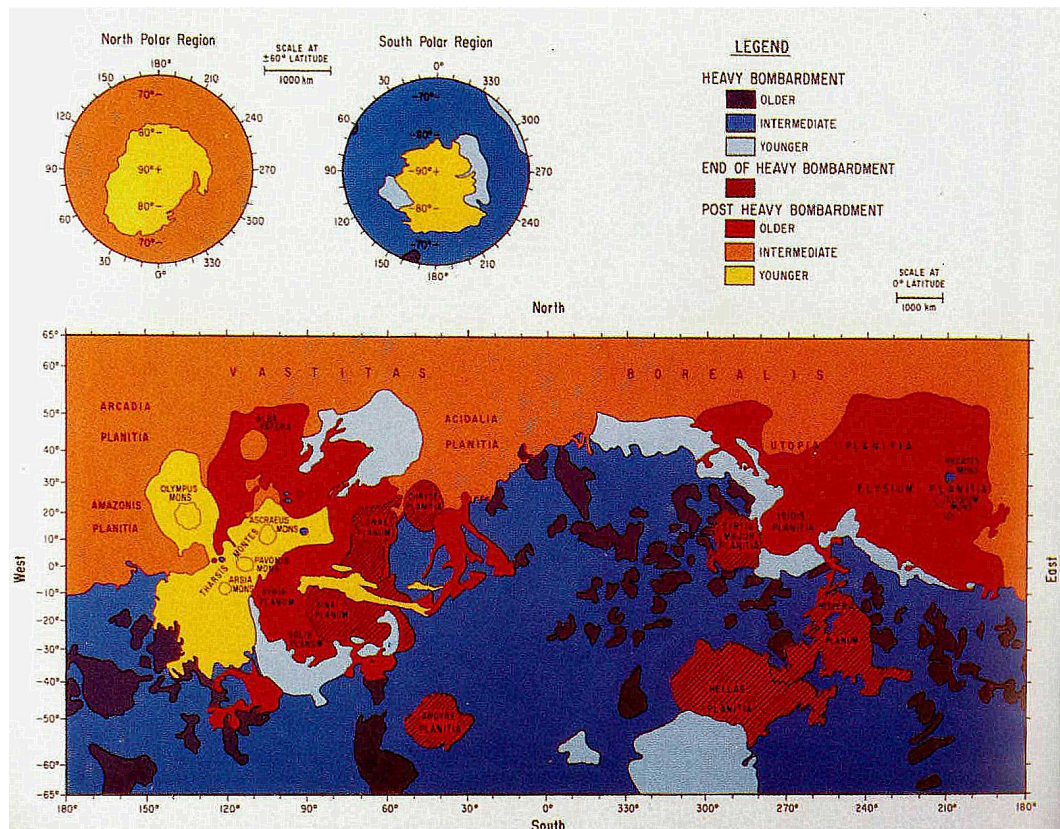
K určení relativního stáří jednotlivých oblastí planety (obr. 2.5) a tedy i jednotlivých epoch se používá metoda založená na srovnání tvarů a počtu kráterů různých průměrů v daných epochách - viz tabulka 2.2.

Epocha	N(1)	N(2)	N(5)	N(16)	N(4 - 10)
Pozdní Amazonian	< 160	< 40			
Střední Amazonian	160 - 600	40 - 150	< 25		< 33
Raný Amazonian	600 - 1600	150 - 400	25 - 67		33 - 88
Pozdní Hesperian	1600 - 3000	400 - 750	67 - 125		88 - 165
Raný Hesperian	3000 - 4800	75 - 1200	125 - 200	< 25	165 - 260
Pozdní Noachian			200 - 400	25 - 100	> 260
Střední Noachian			> 400	100 - 200	
Raný Noachian				> 200	

Tabulka 2.2: Hustoty kráterů pro jednotlivá období (podle [16]). $N(x)$ je počet kráterů větších než (x) km / 10^6 km², kde x je průměr kráteru.

Absolutní stáří jednotlivých epoch (obr. 2.6) se pak určuje na základě předpokladů o množství dopadajících impaktů v různých obdobích (*impact flux*) a srovnání těchto množství např. s údaji pro Měsíc, jejichž datace je zřejmější díky přivezeným vzorkům hornin. Více v [6].

Stratigrafie Marsu nám dává základ k posouzení historie jednotlivých částí stejně jako geologické evoluce celé planety. Poskytuje také kontext k popisu jednotlivých procesů, jako jsou rychlosti dopadu impaktů, epizody vulkanismu nebo klimatické změny. Její důležitost by se měla projevit při plánování budoucích misí na Mars, a to především při výběru míst, která by mohla být vhodná k odběru vzorků [17].

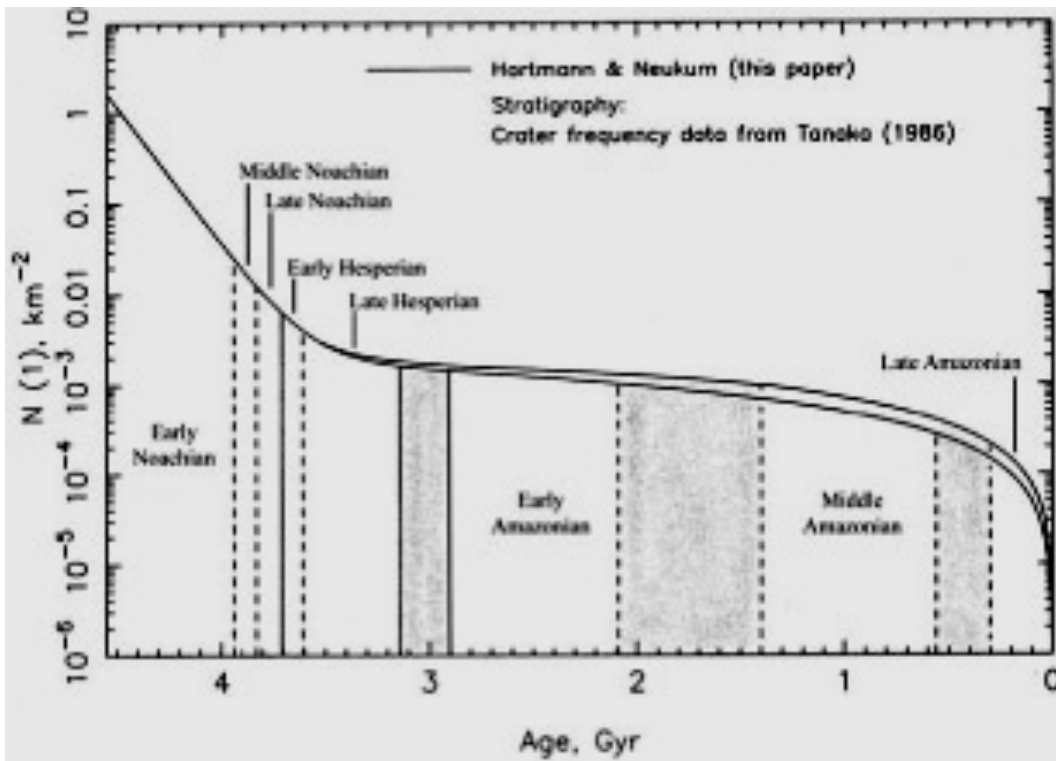


Obrázek 2.5: Mapa ukazující relativní stáří jednotlivých oblastí na povrchu Marsu vztažená ke konci období, kdy byl Mars velmi těžce bombardován impakty z vesmíru. Modré oblasti odpovídají období těžkého bombardování (nejstarší oblasti jsou nejtmašší, nejmladší nejsvětlejší), červené, oranžové a žluté oblasti období, kdy se bombardování impakty z vesmíru zmírnilo (nejstarší oblasti jsou červené, nejmladší žluté) [17].

2.4 Geologická historie

Po počáteční fázi vzniku planety, zahřívání a diferenciaci materiálu začíná perioda **Noachian**. Hned na počátku této epochy dochází díky početnému bombardování impakty z vesmíru k rychlé degradaci prvotní kůry. Formuje se kopcovitý a velmi členitý (*cratered*) povrch planety, vznikají hornaté pásy lemující velké impaktové pánve. Začíná také výzdvih oblasti Tharsis. Ke konci Noachianu zaplavují velkou část hornatých terénů bazaltické lávy - i přes velké množství láv ale byly zaplaveny především mezikráterové oblasti a zhlazeny byly pouze nejmenší krátery, zatímco střední a velké krátery byly překryty jen zčásti. Mnoho útvarů z období Noachianu je protkáno řadou úzkých kanálů, které poukazují na přítomnost povrchové vody a na klimatické podmínky velmi odlišné od těch současných.

S příchodem **Hesperianu** se mění druh vulkanismu a erupce jsou lokalizovány především v oblasti velkých vulkanických konstrukcí jako Tyrrhena Patera nebo Elysium Mons, i když rozsáhlé usazeniny z období Hesperianu mohou být pohřbeny i na severu pod mladšími horninami. Na počátku období se tvoří především hrboлатé pláne, pozdější hesperianské povrchy jsou charakteristické hladšími a valivými terény - ty také tvoří hranici mezi nížinatými planinami a vysočinami, které jsou hustě pokryty krátery. Během



Obrázek 2.6: Absolutní data geologických období Marsu podle [6]. Zleva: Early Noachian, Middle Noachian, Late Noachian, Early Hesperian, Late Hesperian, Early Amazonian, Middle Amazonian, Late Amazonian.

Hesperianu zřejmě dochází i k prvním vodním záplavám, které způsobuje pravděpodobně tání povrchového ledu, a to díky vulkanické činnosti, dopadu impaktů a změnám klimatu. Nadále pokračuje vznik sítí úzkých kanálů.

Během **Amazonianu** se velmi snížil počet dopadajících impaktů, toto období je charakteristické především vysokou vulkanickou aktivitou. Vulkanismus vrcholí vznikem kolosálních sopek v oblasti Tharsis a vytvořením ohromných okolních plání. Zřejmě pokračuje i vodní eroze, ale ve značně menší míře než v Hesperianu. Naopak větrná eroze vrcholí právě v Amazonianu a i v současnosti způsobují velmi prudké větrné bouře povrchové změny viditelné několik dní [14].

Evoluce Marsu je (stejně jako u ostatních planet) do velké míry určena jeho vnitřní stavbou a složením a také materiálovými vlastnostmi hornin [15]. Proto je důležité snažit se poznat vnitřní strukturu planety co nejlépe.

Kapitola 3

Globální model tloušťky elastické litosféry

Ve své bakalářské práci jsem se věnovala především shrnutí poznatků o práci s gravitačním polem a seznámení se se silami, které udržují povrchovou topografii v rovnováze, tzv. **kompensačními mechanismy**. Dále jsem provedla předběžnou analýzu v prostorové oblasti - na základě srovnání topografie a gravitačního pole jsem určovala, které kompenzační mechanismy by mohly fungovat v jednotlivých oblastech. V závěru práce jsem počítala globální inverzi založenou na mechanismu izostáze a elastické flexe.

V diplomové práci navazujeme na práci bakalářskou. Začínáme globální inverzí, ale zaměřili jsme se jen na kompenzaci mechanismem elastické flexe. Ta má na Marsu pravděpodobně větší uplatnění než izostáze, a to především díky malému poloměru planety¹ a značné tloušťce elastické litosféry. Používáme dvoukrokovou inverzi - v 1. kroku určujeme optimální tloušťku elastické litosféry v závislosti na harmonickém stupni j a v 2. kroku jednotnou tloušťku elastické litosféry pro všechny harmonické stupně j .

3.1 Tloušťka elastické litosféry jako funkce harmonického stupně j (1. krok)

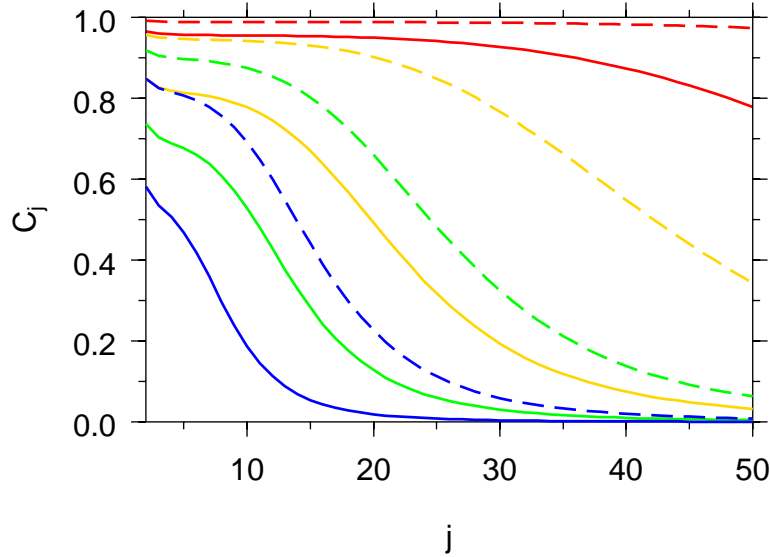
Pro každý harmonický stupeň j minimalizujeme rozdílovou funkci

$$S_1^j(T_e^j, T_c) = \sum_{m=-j}^j \|h_{jm}^{pred}(T_e^j, T_c) - h_{jm}^{obs}\|^2 \quad (3.1)$$

vzhledem k tloušťce elastické litosféry T_e . Zde $h_{jm}^{pred}(T_e^j, T_c)$ jsou predikované koeficienty geoidu vypočtené podle (B.26) a h_{jm}^{obs} jsou koeficienty geoidu pozorovaného. Dostáváme tak pro každý harmonický stupeň j odpovídající tloušťku elastické litosféry T_e^j v závislosti na volném parametru, kterým je tloušťka kůry T_c .

Chyby takto formulované inverze počítáme aposteriorně. Varianci dat pro každý harmonický stupeň j vypočteme podle vzorce pro nevychýlený rozptyl náhodného výběru

¹Kompensační koeficient, který určuje, do jaké míry se na kompenzaci podílí izostáze a do jaké míry elastická flexe (pro případ izostatické kompenzace je kompenzační koeficient roven 1), silně závisí na poloměru planety (viz obr. 3.1). Pro planety o menším poloměru s rostoucím stupněm rychleji klesá, což značí, že se více uplatňuje právě kompenzace prohnutím elastické litosféry než kompenzace izostází.



Obrázek 3.1: Kompenzační koeficient C_j v závislosti na harmonickém stupni j pro různé tloušťky elastické litosféry - $T_e = 10$ km (červená barva), $T_e = 50$ km (oranžová barva), $T_e = 100$ km (zelená barva) a $T_e = 200$ km (modrá barva). Plně pro planetu o poloměru Marsu ($R_1 = 3389,5$ km), přerušovaně pro planetu o stejných reologických parametrech, stejné hustotě a dvojnásobném poloměru ($R_2 = 6779$ km).

(např. [27])

$$(\sigma_{1D}^j)^2 = \frac{1}{2j} \sum_{m=-j}^j [h_{jm}^{pred}(T_e^j, T_c) - h_{jm}^{obs}]^2 \quad (3.2)$$

Takto vypočtenou varianci uspořádáme do kovarianční datové matice

$$\mathbf{C}_{1D}^j = (\sigma_{1D}^j)^2 \mathbf{I} \quad (3.3)$$

Tato matice je diagonální a připomeňme, že pro každý stupeň j máme jinou matici \mathbf{C}_{1D}^j s rozměrem $j \times j$. K výpočtu chyb modelových parametrů z 1. kroku počítáme kovarianční modelovou matici [18]

$$\mathbf{C}_{1M}^j \cong \left((\mathbf{G}_1^j)^T (\mathbf{C}_{1D}^j)^{-1} \mathbf{G}_1^j \right)^{-1} \quad (3.4)$$

Zde \mathbf{G}_1^j je vektor derivací teoretického vztahu pro predikované koeficienty geoidu (B.26) vzhledem k modelovému parametru T_e v bodě $T_e = T_e^j$

$$(\mathbf{G}_1^j)_m = \left(\frac{\partial h_{jm}^{pred}(T_e^j, T_c)}{\partial T_e} \right)_{T_e=T_e^j} \quad (3.5)$$

Kovarianční modelová matice \mathbf{C}_{1M}^j obsahuje pouze jeden prvek, který je variancí hodnoty modelového parametru získaného v 1. kroku

$$\mathbf{C}_{1M}^j = (\sigma_{1M}^j)^2 \quad (3.6)$$

Celkem tedy po 1. kroku máme

$$T_e^j \pm \sigma_{1M}^j \quad \forall j \quad (3.7)$$

3.2 Jednotná tloušťka elastické litosféry pro všechny harmonické stupně j (2. krok)

Ve 2. kroku opět minimalizujeme rozdílovou funkci, tentokrát ve tvaru

$$S_2(T_e, T_c) = \sum_{j=jmin}^{jmax} \frac{(T_e^j - T_c)^2}{(\sigma_{2D}^j)^2} H^j \quad (3.8)$$

kde T_e je hledaná tloušťka elastické litosféry a H^j je normované výkonové spektrum koeficientů pozorovaného geoidu vypočtené podle (A.21). Tuto dodatečnou váhu jsme do vzorce přidali, abychom ocenili různý vliv harmonických stupňů. Výsledky 1. kroku ($T_e^j \pm \sigma_{1M}^j$) jsou teď daty, která dosazujeme do 2. kroku, tedy platí $(\sigma_{2D}^j)^2 = (\sigma_{1M}^j)^2$, resp. $\mathbf{C}_{2D} = \mathbf{C}_{1M}$. Chybu 2. kroku vypočteme pomocí kovarianční modelové matice

$$\mathbf{C}_{2M} \cong (\mathbf{G}_2^T \mathbf{C}_{2D}^{-1} \mathbf{G}_2)^{-1} \quad (3.9)$$

\mathbf{G}_2 je opět vektorem derivací teoretického vztahu (zde je to číslo 1, neboť teoretický vztah, který derivujeme, je tvaru $T_e = T_e^j$). Řešení vztahů (3.8) a (3.9) lze psát analyticky

$$T_e = \frac{\sum_{j=jmin}^{jmax} \frac{T_e^j}{(\sigma_{2D}^j)^2} H^j}{\sum_{j=jmin}^{jmax} \frac{1}{(\sigma_{2D}^j)^2} H^j} = \frac{\sum_{j=jmin}^{jmax} \frac{T_e^j}{(\sigma_{1M}^j)^2} H^j}{\sum_{j=jmin}^{jmax} \frac{1}{(\sigma_{1M}^j)^2} H^j} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{2M}^2 = \frac{1}{\sum_{j=jmin}^{jmax} \frac{1}{(\sigma_{2D}^j)^2} H^j} = \frac{1}{\sum_{j=jmin}^{jmax} \frac{1}{(\sigma_{1M}^j)^2} H^j} \quad (3.11)$$

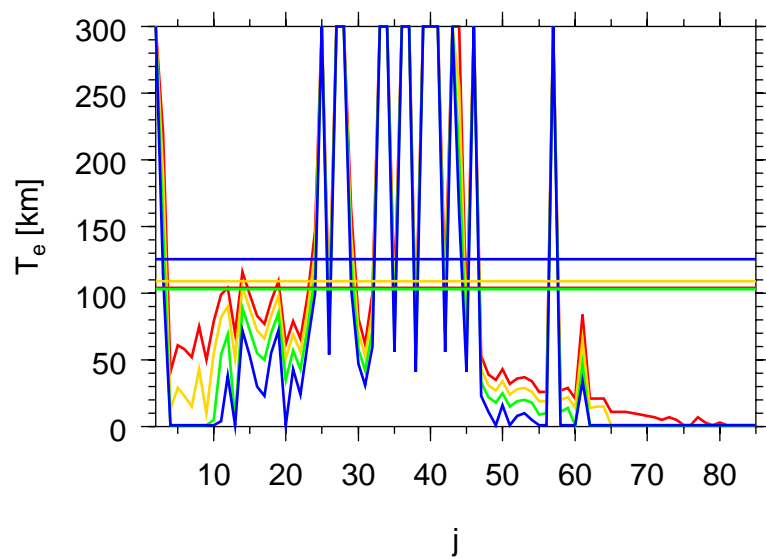
Celkem po 2. kroku inverze máme

$$T_e \pm \sigma_{2M} \quad (3.12)$$

tedy tloušťku elastické litosféry a odhad její chyby.

3.3 Výsledky globální inverze

Použili jsme výše formulovanou dvoukrokovou inverzi pro výpočet jednotné tloušťky elastické litosféry na Marsu. Počítali jsme se čtyřmi různými tloušťkami kůry ($T_c = 10, 50, 100, 150$ km) - výsledek je na obr. 3.2. Nejprve jsme určili optimální tloušťky elastické litosféry pro různé harmonické stupně j (1. krok inverze). Těmito výsledky jsme proložili vážený průměr (výsledek 2. kroku) - ten je vynesena vodorovnou čarou, různé barvy odpovídají různým tloušťkám kůry T_c . Při pohledu na graf je zřejmé, že jednotná konstantní tloušťka elastické litosféry nestačí k vystižení pozorovaného gravitačního pole. Podařilo se nám sice vypočítat optimální hodnotu (váženou chybami pro jednotlivé stupně a normovaným výkonovým spektrem), ale té nepřikládáme příliš velký význam, a to hned ze dvou důvodů. Především, původní tloušťky pro různé stupně (výsledek 1. kroku) značně oscilují, a proto ani nějaká reprezentativní hodnota, která by celé spektrum vhodně charakterizovala, není viditelná na první pohled. I když už ale nějakou takovou hodnotu najdeme, nelze jí přikládat příliš velký význam, neboť vypočtené chyby 2. kroku dosahují velmi vysokých hodnot (odpovídající relativní chyba je přibližně 50%). Soudíme tedy, že na Marsu nelze hledat jednotnou tloušťku elastické litosféry, a proto pokračujeme inverzí lokální.



Obrázek 3.2: Výsledky globální inverze pro různé tloušťky kůry - $T_c = 10$ km (červená barva), $T_c = 50$ km (žlutá barva), $T_c = 100$ km (zelená barva) a $T_c = 150$ km (modrá barva).

Kapitola 4

Lokální analýza

Jak jsme ukázali v předchozí kapitole, na Marsu nelze hledat jednotnou tloušťku elastické litosféry (tento závěr je potvrzením předběžných hypotéz o možných mechanismech kompenzace, které jsme formulovali v bakalářské práci). Proto je potřeba provést lokální analýzu - Mars rozdělíme užitím filtru na menší oblasti, ve kterých budeme řešit stejné inverze jako v předchozí kapitole.

4.1 Filtrace prostorových polí Gaussovým filtrem, formulace lokální inverze

K filtraci v prostorové oblasti použijeme Gaussův filtr ve tvaru

$$g(\theta, \varphi, \delta, \sigma) = \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.1)$$

kde δ je úhlová vzdálenost mezi bodem daným souřadnicemi θ a φ a středem filtru (θ_0, φ_0) a σ je pološířka filtru. Pole, která napočteme na sféře o poloměru Marsu, násobíme bod po bodu hodnotami filtru o daném středu a dané pološířce

$$\begin{aligned} h^f(\theta, \varphi) &= h(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi, \delta, \sigma) \\ t^f(\theta, \varphi) &= t(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi, \delta, \sigma) \end{aligned} \quad (4.2)$$

(index f značí filtrované pole (geoid h , resp. topografii t)). Filtr po sféře posouváme, čímž dostáváme přefiltrované oblasti Marsu v závislosti na pološířce filtru a na kroku, s jakým filtr posouváme (obr. 4.1).

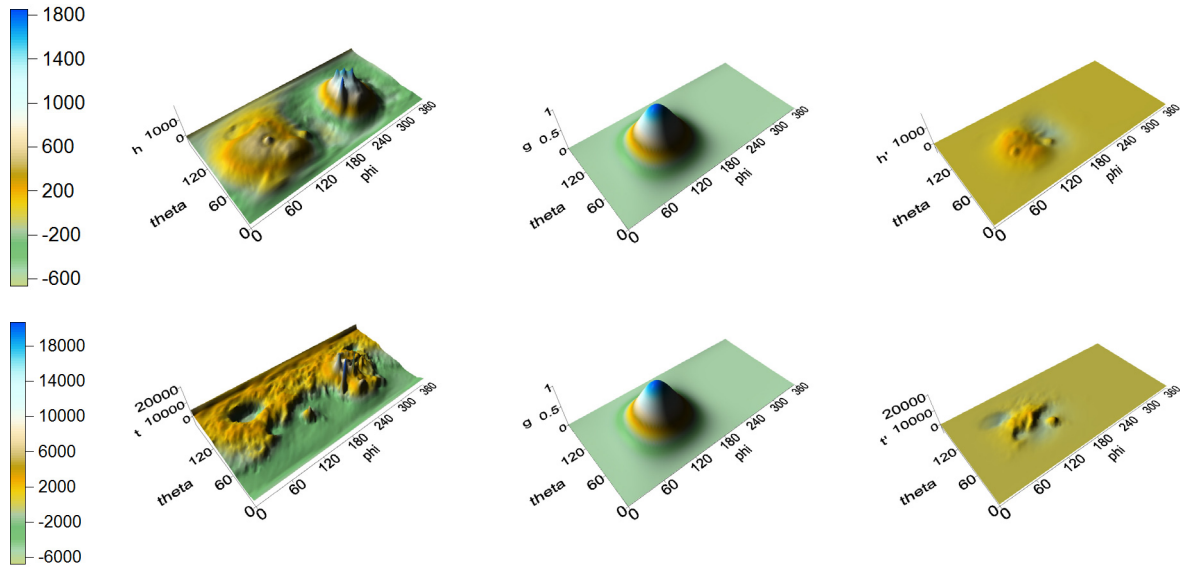
Spojíme výše formulovanou dvoukrokovou inverzi a filtrování Gaussovým filtrem s cílem určit model tlouštěk elastické litosféry.

Jako první nás napadá následující postup:

1. Výpočet skutečných polí (topografie a geoidu) na sféře ze známých harmonických koeficientů [26] podle vztahu (A.9)

$$h_{jm}^{obs} \rightarrow h^{obs}(\theta, \varphi)$$

$$t_{jm}^{obs} \rightarrow t^{obs}(\theta, \varphi)$$



Obrázek 4.1: Filtrace geoidu (horní řádek) a topografie (spodní řádek) v prostoru - původní pole (levý sloupec), Gaussův filtr (prostřední sloupec) a přefiltrovaná pole (pravý sloupec). Výšky geoidu a topografie jsou uvedeny v metrech.

2. Filtrace polí v prostoru podle (4.2)

$$h^{obs}(\theta, \varphi) \rightarrow h^{obs,f}(\theta, \varphi)$$

$$t^{obs}(\theta, \varphi) \rightarrow t^{obs,f}(\theta, \varphi)$$

3. Výpočet harmonických koeficientů přefiltrovaných polí podle (A.10)

$$h^{obs,f}(\theta, \varphi) \rightarrow h_{jm}^{obs,f}$$

$$t^{obs,f}(\theta, \varphi) \rightarrow t_{jm}^{obs,f}$$

4. Výpočet predikovaných koeficientů geoidu z koeficientů přefiltrované topografie podle vzorce (B.26)

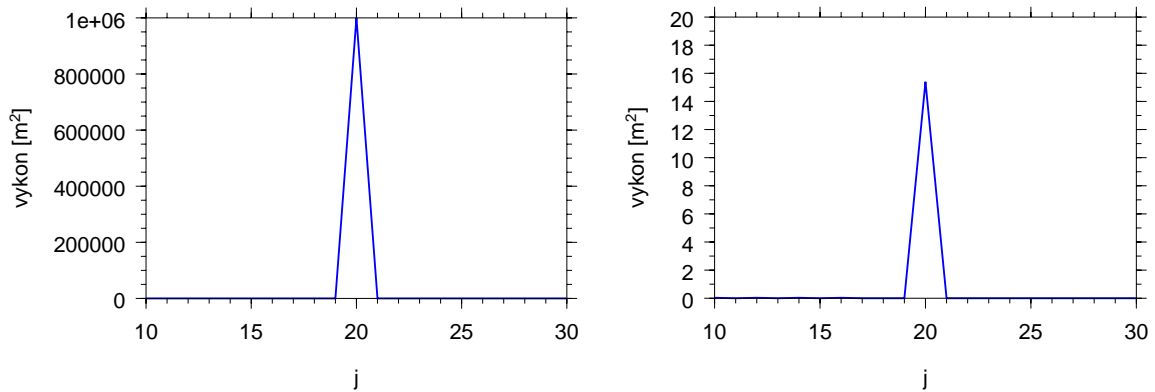
$$t_{jm}^{obs,f} \rightarrow h_{jm}^{pred,f}$$

5. Minimalizace rozdílové funkce (3.1), do které dosadíme koeficienty $h_{jm}^{obs,f}$ a $h_{jm}^{pred,f}$

6. Minimalizace rozdílové funkce (3.8), resp. řešení rovnic (3.10) a (3.11)

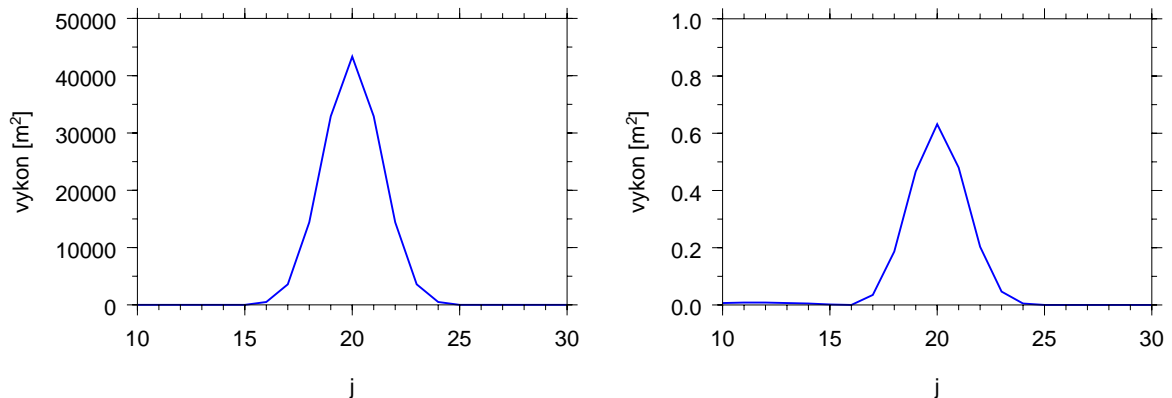
Tímto postupem dostaneme pro každou polohu filtru jednu hodnotu tloušťky elastické litosféry a odpovídající chybu. Podívejme se ale důkladněji, co se při filtraci přesně děje. Pro názornost zvolme jednoduchý případ:

- topografie s nenulovým koeficientem jen na jednom harmonickém stupni $j = 20$
- konstantní tloušťka elastické litosféry $T_e = 100$ km - díky tomu má i geoid nenulové koeficienty také jen na harmonickém stupni $j = 20$



Obrázek 4.2: Výkonové spektrum topografie, která má nenulové koeficienty jen na stupni $j = 20$ (vlevo) a odpovídajícího geoidu (vpravo).

Ve výkonovém spektru (vztah (A.21)) má potom topografie i geoid δ -funkci (obr. 4.2). Filtrací na sféře, tedy přenásobením polí na síti, dostaneme ve spektru složenou funkci signálu od geoidu, resp. topografie, a od Gaussova filtru¹. Výkonové spektrum přefiltrovaného geoidu a topografie má tvar Gaussovy funkce (obr. 4.3). Z koeficientů to-

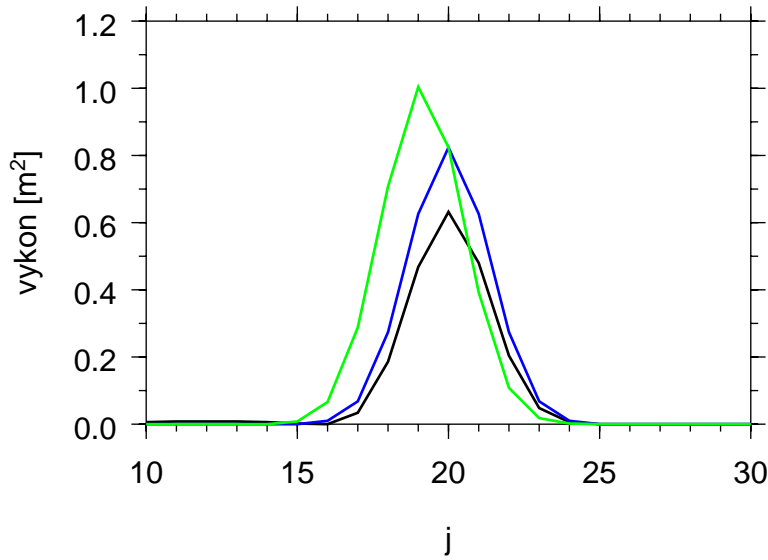


Obrázek 4.3: Výkonové spektrum přefiltrované topografie (vlevo) a přefiltrovaného geoidu (vpravo).

pografie vypočteme koeficienty predikovaného geoidu (vzorec (B.26)) - koeficienty topografie zde přenásobujeme výrazem, který je závislý na harmonickém stupni j (faktor ve jmenovateli $(2j + 1)$, kompenzační koeficient C_j). Z Gaussovy funkce tak dostaneme deformovanou Gaussovou funkci, kterou se při minimalizaci snažíme vystihnout Gaussovou funkci (koeficienty přefiltrovaného pozorovaného geoidu). Zřejmě ale nedosáhneme dobré shody, a proto takto formulovaná inverze nemůže správně fungovat - srovnajme

¹Kdybychom rozvíjeli funkce do exponenciální báze v každé proměnné (θ , φ) zvlášť, dostali bychom ve spektru konvoluci signálů od geoidu, resp. topografie, a Gaussova filtru. V případě rozvoje do sférických harmonických funkcí je situace složitější, neboť index m odpovídající řádu harmonické funkce se objevuje jak v přidruženém Legendreově polynomu proměnné θ ($P_{jm}(\cos \theta)$), tak v exponenciální funkci proměnné φ ($e^{im\varphi}$) a závislost na obou proměnných je tak provázána. Odvození vzorce pro spektrální koeficienty součinu dvou polí by vyžadovalo více pozornosti, my se jím ale dále nezabýváme, neboť to není cílem této práce.

spektrum koeficientů takto predikovaného geoidů (zelená barva) a spektrum koeficientů pozorovaného geoidu (černá barva) na obr. 4.4.



Obrázek 4.4: Výkonové spektrum přefiltrovaného pozorovaného geoidu (černá barva), predikovaného geoidu podle postupu 1 (zelená barva) a podle postupu 2 (modrá barva). Predikovaný geoid je v obou případech počítán pro tloušťku elastické litosféry 100 km, což odpovídá pozorovanému geoidu. Tloušťka kůry je ve všech případech (pozorovaný i oba predikované geoidy) volena 100 km.

Pokusme se formulovat úlohu jinak:

1. Výpočet predikovaných koeficientů geoidu z koeficientů pozorované topografie podle vztahu (B.26)

$$t_{jm}^{obs} \rightarrow h_{jm}^{pred}$$

2. Výpočet pozorovaného a predikovaného geoidu na sféře podle (A.9)

$$h_{jm}^{obs} \rightarrow h^{obs}(\theta, \varphi)$$

$$h_{jm}^{pred} \rightarrow h^{pred}(\theta, \varphi)$$

3. Filtrace polí v prostoru podle (4.2)

$$h^{obs}(\theta, \varphi) \rightarrow h^{obs,f}(\theta, \varphi)$$

$$h^{pred}(\theta, \varphi) \rightarrow h^{pred,f}(\theta, \varphi)$$

4. Výpočet harmonických koeficientů přefiltrovaných polí podle (A.10)

$$h^{obs,f}(\theta, \varphi) \rightarrow h_{jm}^{obs,f}$$

$$h^{pred,f}(\theta, \varphi) \rightarrow h_{jm}^{pred,f}$$

5. Minimalizace rozdílové funkce (3.1), do které dosadíme koeficienty $h_{jm}^{obs,f}$ a $h_{jm}^{pred,f}$

6. Minimalizace rozdílové funkce (3.8), resp. řešení rovnic (3.10) a (3.11)

Použijme tento druhý postup na výše uvedený ilustrativní příklad. Ve výkonovém spektru geoidu a topografie je opět δ -funkce. Spočteme-li koeficienty predikovaného geoidu a jejich výkonové spektrum, dostaneme opět δ -funkci. Predikované koeficienty geoidu se sice počítají stejně jako v první formulaci, tedy přenásobením výrazem, který závisí na stupni j , ale přenásobením δ -funkce dostáváme znovu δ -funkci. Následná filtrace v prostoru opět přetransformuje δ -funkci ve spektru na Gaussovou funkci, tentokrát už ale máme jak pozorovaný, tak predikovaný geoid s výkonovým spektrem ve tvaru Gaussovy funkce. Snažíme se tedy vystihnout Gaussovou funkci (koeficienty pozorovaného geoidu) Gaussovou funkcí (koeficienty predikovaného geoidu) a zřejmě bychom měli dostat lepší shodu než podle prvního postupu, viz obr. 4.4. Koeficienty geoidu predikovaného podle postupu 2 (modrá barva) zjevně lépe vystihují koeficienty pozorovaného geoidu (černá barva) než koeficienty geoidu predikovaného podle postupu 1 (zelená barva) - maximum výkonového spektra je v případě postupu 1 dokonce posunuto na harmonický stupeň $j = 19$.

Oba postupy mají nevýhodu především v tom, že se přechází ze spektrální oblasti do prostorové, a pak zase zpět do spektrální. Tento přechod je časově náročný a vnáší do výpočtu numerické nepřesnosti. Navíc přicházíme o původní výhodu spektrální metody, tedy o práci výhradně ve spektru. Druhý navržený postup, který se jeví lepší než první postup, má navíc další nevýhodu v tom, že počítáme na sféře, filtrujeme a znovu převádíme do spektra všechny predikované geoidy. Vzhledem k tomu, že následná minimalizace probíhá metodou přebírání parametrů, je potřeba celý postup (výpočet na sféře, filtrace, převod do spektra) provést tolikrát, kolik tloušťek elastické litosféry testujeme. Přechod ze spektra do prostoru, filtrace a přechod zpátky do spektra je tak prováděn celkem 301-krát (300-krát pro predikované geoidy a jednou pro geoid pozorovaný), na rozdíl od 1. přístupu, kde byl proveden jen 2-krát (jednou pro pozorovanou topografii a jednou pro pozorovaný geoid). Tím je výpočet také zpomalen.

Pokud bychom chtěli zachovat výpočet pouze ve spektru, potřebovali bychom znát spektrum přefiltrovaných polí, tedy spektrum součinu dvou řad, aniž bychom tyto řady museli sčítat (viz poznámka v této části). Tím bychom zůstali ve spektru a nezdržovali bychom se s přechodem do prostoru a zase zpět. Problém součinu dvou řad se ale velmi často řeší právě sečtením obou řad a pronásobením jejich součtů, což v našem případě odpovídá přechodu do prostoru a filtraci v prostorové oblasti. Proto opustíme původní představu o práci výhradně ve spektru a formulujeme inverzi přímo v prostorové oblasti.

4.2 Prostorová inverze

Formulujme úlohu v prostorové oblasti:

1. Výpočet predikovaných koeficientů geoidu z koeficientů pozorované topografie podle vztahu (B.26)

$$t_{jm}^{obs} \rightarrow h_{jm}^{pred}$$

2. Výpočet pozorovaného a predikovaného geoidu na sféře podle (A.9)

$$h_{jm}^{obs} \rightarrow h^{obs}(\theta, \varphi)$$

$$h_{jm}^{pred} \rightarrow h^{pred}(\theta, \varphi)$$

3. Minimalizace rozdílové funkce v prostorové oblasti (filtrujeme přímo při výpočtu přenásobením rozdílu geoidů odpovídající hodnotou filtru)

$$S(T_e, T_c) = \int_0^{2\pi} \int_o^\pi [(h^{pred}(T_e, T_c) - h^{obs}) g(\delta, \sigma)]^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.3)$$

Takto formulovaná inverze už pracuje na podobném principu jako druhý postup spektrální inverze (je zde tedy lepší šance na vystižení pozorovaných polí než v případě inverze podle prvního postupu). Její výhodou je především názornost. Navíc si ušetříme několik časově náročných kroků oproti výše uvedené opravené spektrální inverzi (filtrace probíhá přímo při počítání rozdílové funkce a není potřeba počítat celá přefiltrovaná pole, navíc nepřecházíme zpět do spektra). Nadále tedy budeme používat výhradně tuto metodu.

Kapitola 5

Testy inverze (2D axisymetrický model)

V této kapitole se zaměříme na testování vlastností prostorové inverze formulované v předchozí kapitole. Na výsledky inverze má vliv mnoho faktorů, my se pokusíme zodpovědět několik základních otázek, abychom dostali co nejlepší výsledky inverze:

- Které harmonické stupně jsou optimální pro výpočet inverze? (část 5.3)
- Jaký krok posunu filtru je nejvhodnější? (část 5.4)
- Jaká pološířka filtru je nejvhodnější? (část 5.4)
- Pro jakou veličinu formulovat inverzi (geoid nebo posunutí)? (část 5.4)
- Jakou roli hraje vztah mezi vlnovou délkou zátěže a modelu? (část 5.5)
- Jakou roli hraje volba stupně j_{min} při zatížení reálnou topografií? (část 5.6)

K testování použijeme dva softwary používající pro výpočet deformace elastické litosféry metody konečných elementů - **Elmer** [24] a **Cmsol** [23]. Jejich výsledky je nejprve potřeba sjednotit, abychom si mohli být jisti jejich správností.

5.1 Srovnání Elmeru a Cmsolu

Řešíme následující úlohu:

- geometrie - axisymetrická tenká slupka ve smyslu $\frac{d}{R} \ll 1$, kde d je tloušťka slupky a R je její poloměr (obr. 5.1)
- rovnice - rovnováha elastického materiálu

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{f} &= 0 \\ \boldsymbol{\tau} &= \lambda(\nabla \cdot \vec{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\tag{5.1}$$

$\boldsymbol{\tau}$ značí tenzor napětí, $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenzor malých deformací, λ a μ jsou Lamého elastické parametry. My místo nich používáme ekvivalentní elastické parametry Youngův modul E a Poissonův poměr ν

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\tag{5.2}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (5.3)$$

\vec{u} je hledané posunutí a \mathbf{I} jednotkový tenzor. Objemová síla \vec{f} je v naší úloze nulová.

- hraniční podmínka na horní hranici

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_r = \rho_s t \vec{g} \quad (5.4)$$

Zde ρ_s je hustota na povrchu, \vec{g} střední gravitační zrychlení a t povrchová topografie

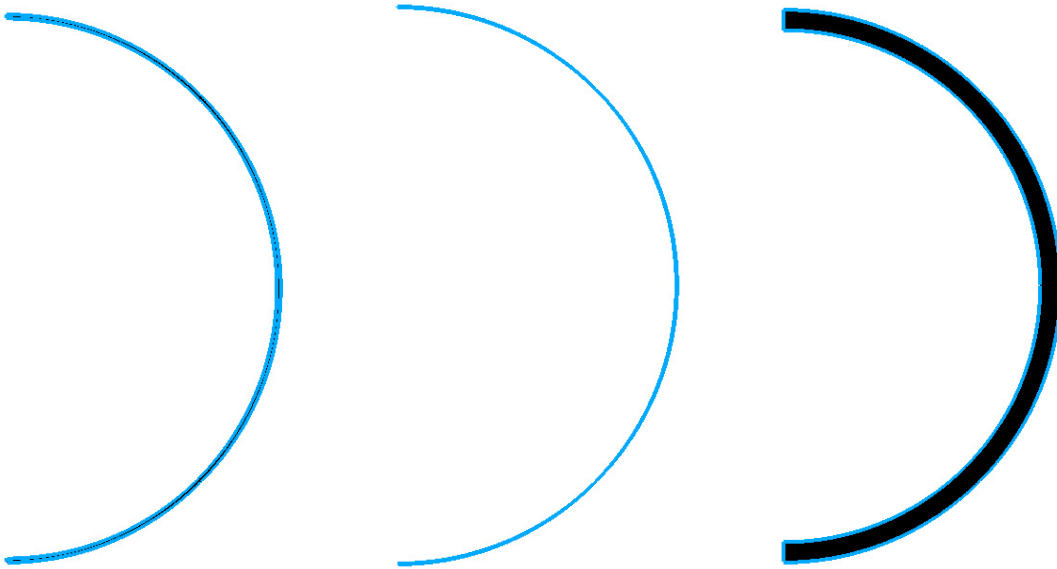
$$t = 1000 \sin(50\theta) \quad (5.5)$$

- hraniční podmínka na spodní hranici

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{e}_r = -\Delta\rho u_r \vec{g} \quad (5.6)$$

$\Delta\rho$ je hustotní skok v elastické litosféře (viz příloha B) a u_r je velikost radiálního posunutí na spodní hranici (měřeno kladně směrem od středu).

V Elmeru používáme Linear Elasticity Solver, v Comsolu Modul Structural Mechanics (Axial Symmetry, Stress-Strain, Static Analysis). Více informací o solverech viz dokumentace na internetových stránkách [24] (Elmer) a [23] (Comsol).



Obrázek 5.1: Slupka o tloušťce 50 km (vlevo), 10 km (uprostřed) a 250 km (vpravo). Hraniční elementy (modrá barva), elementy uvnitř (černá barva).

Úlohu budeme řešit na několika sítích různých tlouštěk (obr. 5.1), které vytváříme softwarem Comsol. Síť lze z Comsolu i exportovat a použít ji v Elmeru. Výpočty obou softwarů tak probíhají na identických sítích. Pro výpočet v Elmeru navíc můžeme síť modifikovat (pomocí vlastního programu napsaného v jazyce Fortran 90). V této kapitole tedy budeme počítat nejen na sítích vytvořených přímo v Comsolu (zde je označujeme jako původní), ale také na sítích, které z těchto původních sítí vznikly (ty označujeme jako síť modifikované). Číselné hodnoty parametrů úlohy jsou uvedeny v tabulce 5.1.

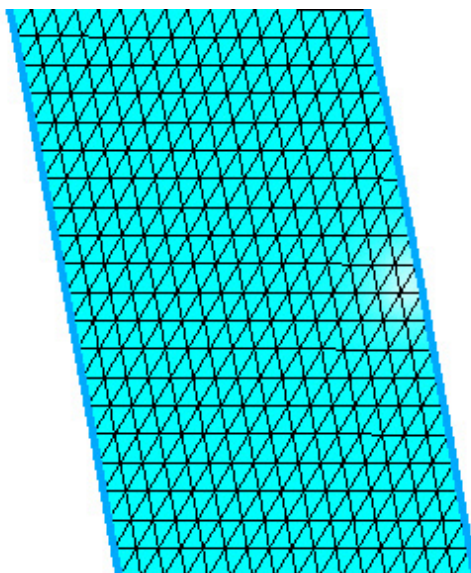
poloměr	R	3395	km
gravitační zrychlení	g	3.8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Youngův modul	E	$6.5 \cdot 10^{10}$	Pa
Poissonův poměr	ν	0.25	
povrchová hustota	ρ_s	2900	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
hustotní skok v litosféře	$\Delta\rho$	500	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Tabulka 5.1: Hodnoty fyzikálních veličin použité pro výpočet v Elmeru a v Comsolu podle [20].

5.1.1 Slupka o tloušťce 50 km

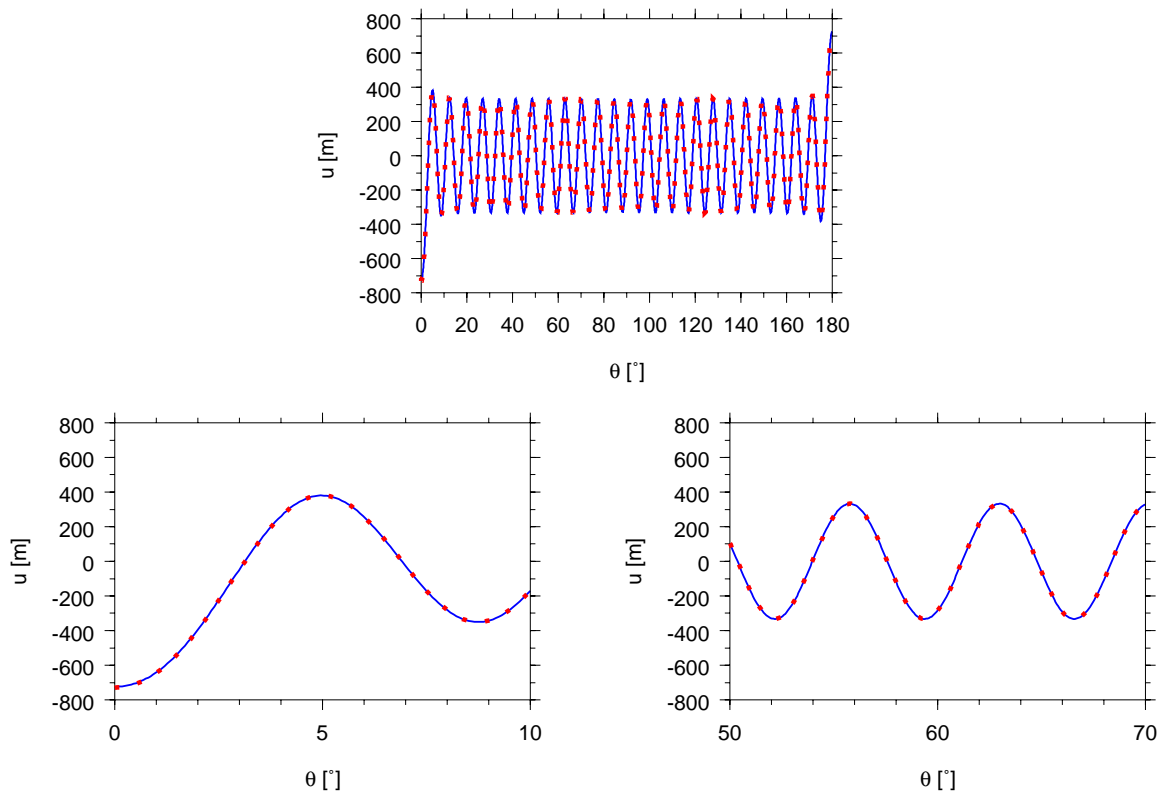
Nejdříve budeme počítat deformaci původní slupky o tloušťce 50 km (obr. 5.1 vlevo a detail na obr. 5.2). Parametry slupky:

- vnější poloměr slupky - 3 395 km (poloměr Marsu)
- vnitřní poloměr slupky - 3 345 km (tloušťka 50 km)
- typ elementů - Lagrangeovy lineární na 2D simplex
- počet elementů - 86 016



Obrázek 5.2: Detail slupky o tloušťce 50 km.

Výsledek výpočtu je na obr. 5.3. Z obrázků je zřejmé, že oba softwary dávají pro tuto slupku shodná posunutí.



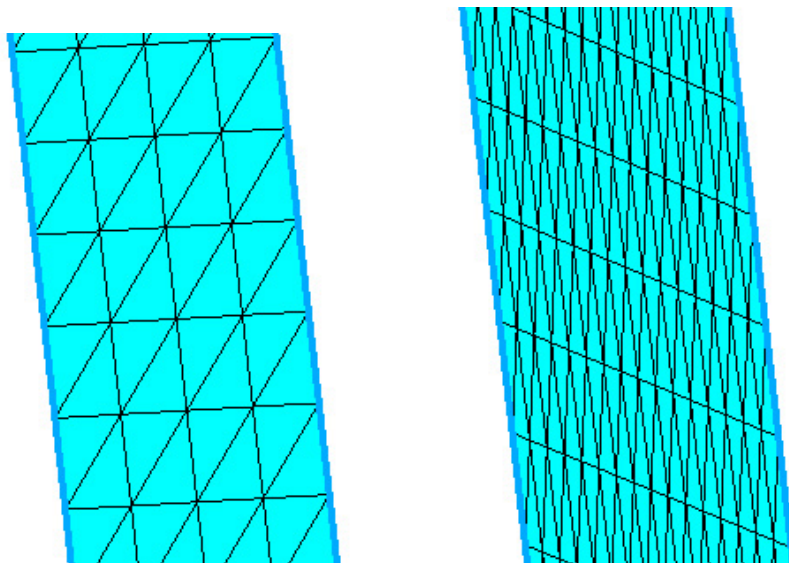
Obrázek 5.3: Slupka o tloušťce 50 km - posunutí v závislosti na úhlu θ (nahore), detail pro $\theta = 0^\circ - 10^\circ$ (vlevo dole) a pro $\theta = 50^\circ - 70^\circ$ (vpravo dole). Elmer (červená barva), Cmsol (modrá barva).

5.1.2 Slupka o tloušťce 10 km

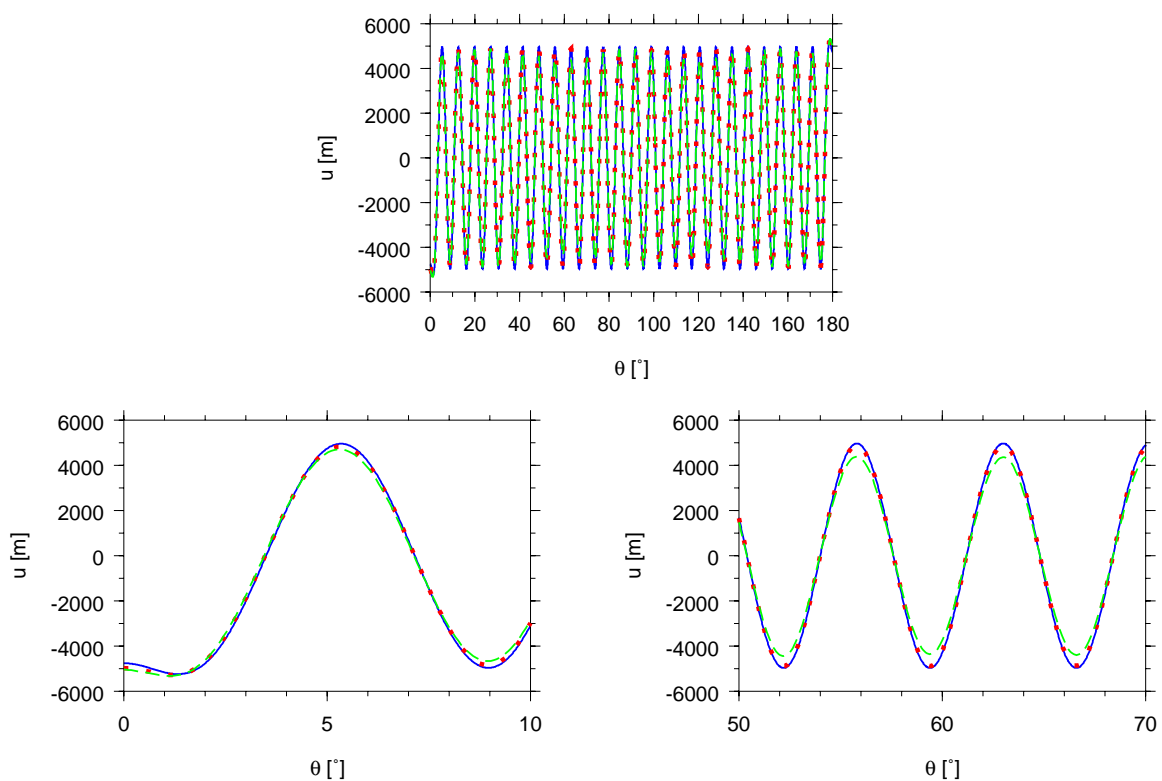
Dále budeme počítat deformaci původní i modifikované slupky o tloušťce 10 km (obr. 5.1 uprostřed a detaily na obr. 5.4). Parametry slupky:

- vnější poloměr slupky - 3 395 km (poloměr Marsu)
- vnitřní poloměr slupky - 3 385 km (tloušťka 10 km)
- typ elementů - Lagrangeovy lineární na 2D simplex
- počet elementů - 24 800 (původní síť vytvořená přímo v tloušťce 10 km)
- počet elementů - 86 016 (síť modifikovaná ze sítě o tloušťce 50 km - viz část 5.1.1)

Deformaci původní slupky jsme řešili v Elmeru a v Cmsolu, deformaci modifikované slupky v Elmeru. Výsledek výpočtu je na obr. 5.5. Oba softwary dávají takřka stejná posunutí pro původní slupku. Výsledek pro modifikovanou slupku je o něco horší, ale rozdíl je tak malý, že je zřetelný pouze na detailních obrázcích (obr. 5.5 dole).



Obrázek 5.4: Detail původní slupky o tloušťce 10 km (vlevo) a detail modifikované slupky o tloušťce 10 km (vpravo). Je zřejmé, že elementy modifikované sítě jsou oproti elementům původní sítě stlačené.

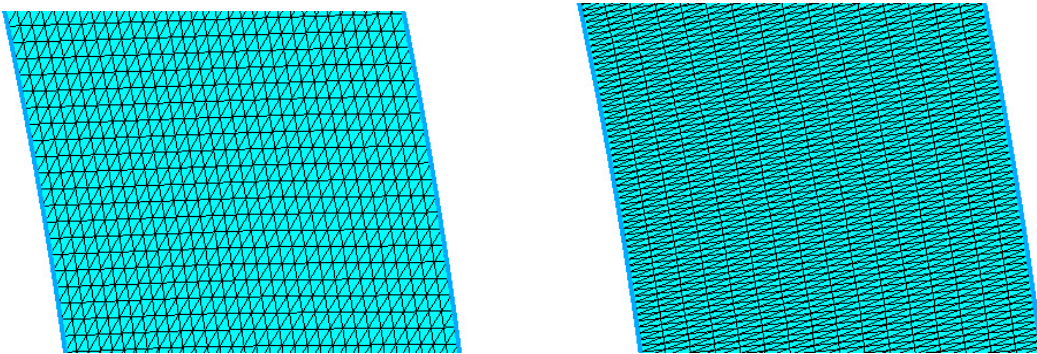


Obrázek 5.5: Slupka o tloušťce 10 km - posunutí v závislosti na úhlu θ (nahore), detail pro $\theta = 0^\circ - 10^\circ$ (vlevo dole) a pro $\theta = 50^\circ - 70^\circ$ (vpravo dole). Elmer na původní slupce (červená barva), Comsol na původní slupce (modrá barva), Elmer na modifikované slupce (zelená barva).

5.1.3 Slupka o tloušťce 250 km

Nakonec budeme počítat deformaci původní i modifikované slupky o tloušťce 250 km (obr. 5.1 vpravo a detaily na obr. 5.6). Parametry slupky:

- vnější poloměr slupky - 3 395 km (poloměr Marsu)
- vnitřní poloměr slupky - 3 145 km (tloušťka 250 km)
- typ elementů - Lagrangeovy lineární na 2D simplex
- počet elementů - 67 584 (původní síť vytvořená přímo v tloušťce 250 km)
- počet elementů - 86 016 (síť modifikovaná ze sítě o tloušťce 50 km - viz část 5.1.1)



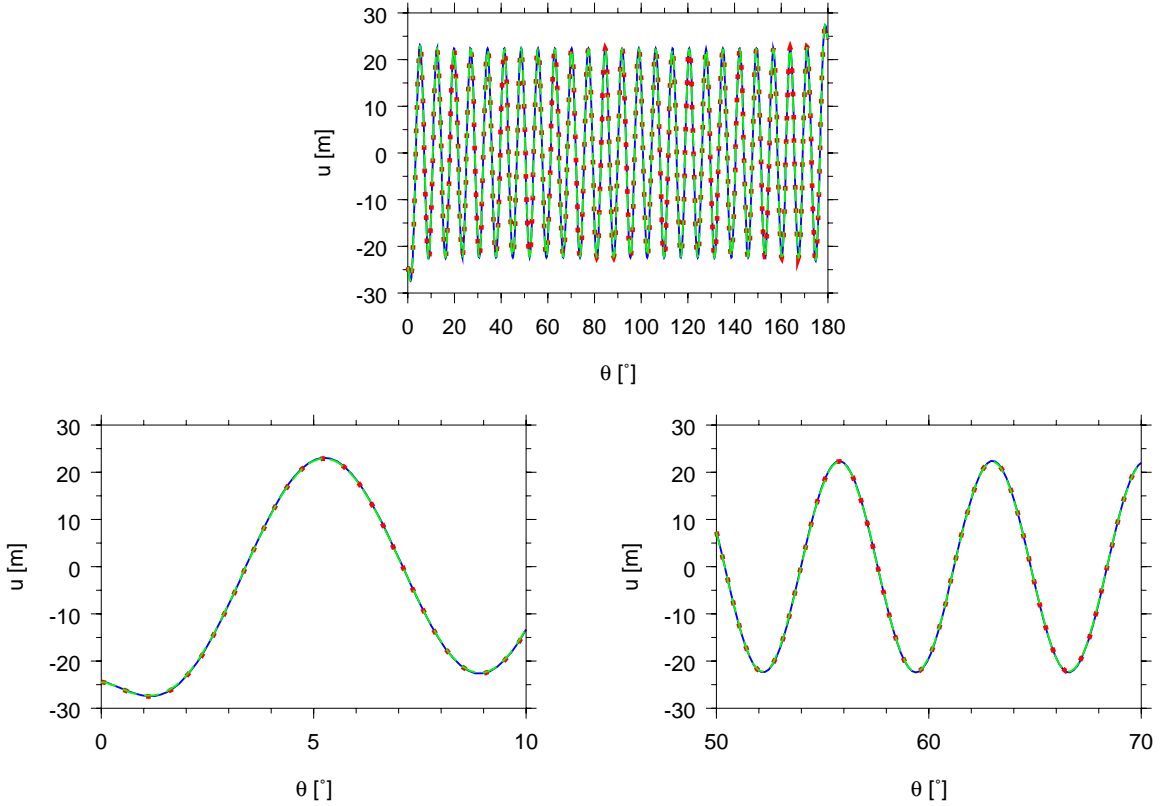
Obrázek 5.6: Detail původní slupky o tloušťce 250 km (vlevo) a detail modifikované slupky o tloušťce 250 km (vpravo). Je zřejmé, že elementy modifikované sítě jsou oproti elementům původní sítě roztažené.

Deformaci původní slupky jsme řešili v Elmeru a v Comsolu, deformaci modifikované slupky v Elmeru. Výsledek výpočtu je na obr. 5.7. Oba softwary dávají stejná posunutí pro původní i modifikovanou slupku.

Celkem lze provedené výpočty považovat za velmi konzistentní, a to jak pro původní slupky, tak i pro slupky modifikované. Případy testované v částech 5.1.1, 5.1.2 a 5.1.3 jsou extrémní, a to co se týká tloušťky elastické litosféry (v dalších částech používáme hodnoty tloušťky elastické litosféry v rozpětí pouze 50 - 250 km) i stupně zátěže ($\sin(50\theta)$ odpovídá Legendreovu polynomu na stupni $j = 50$, námi používaná zátěž v následujících částech je vždy nejvýše do harmonického stupně $j = 50$, pro nižší harmonické stupně je výpočet přesnější). V dalším budeme pracovat již výhradně s Elmerem, neboť snadno umožňuje práci s deformovanými slupkami.

5.2 Formulace testovací úlohy

V této části formulujeme úlohu, kterou použijeme k testování parametrů používaných v inverzi. Budeme nadále pracovat ve 2D axisymetrické geometrii a použijeme různé modely tloušťky elastické litosféry a různé zátěže. Pomocí Elmeru vypočteme posunutí odpovídající konkrétnímu modelu tloušťky elastické litosféry a konkrétní topografii. Toto



Obrázek 5.7: Slupka o tloušťce 250 km - posunutí v závislosti na úhlu θ (nahore), detail pro $\theta = 0^\circ - 10^\circ$ (vlevo dole) a pro $\theta = 50^\circ - 70^\circ$ (vpravo dole). Elmer na původní slupce (červená barva), Comsol na původní slupce (modrá barva), Elmer na modifikované slupce (zelená barva).

posunutí a také z něho vypočtený geoid poté použijeme jako syntetická data, která budeme invertovat.

Shrňme celý postup:

1. Zvolení modelu tloušťky elastické litosféry
2. Zatížení vybraného modelu topografií a výpočet posunutí $u^{synt}(\theta, \varphi)$ v Elmeru¹
3. Výpočet koeficientů posunutí u_{jm}^{synt} , koeficientů geoidu h_{jm}^{synt} a geoidu na sféře $h^{synt}(\theta, \varphi)$

$$u^{synt}(\theta, \varphi) \rightarrow u_{jm}^{synt}$$

$$h_{jm}^{synt} = \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g} \left[t_{jm} \varrho_s + u_{jm}^{synt} \Delta \varrho \left(\frac{R - T_c}{R} \right)^{(j+2)} \right] \quad (5.7)$$

(kladné znaménko, které odlišuje vzorce (5.7) a (B.17) je dáno opačnou orientací posunutí u - v této kapitole uvažujeme posunutí kladné směrem od středu, zatímco v příloze B je zavedeno posunutí kladné směrem do středu)

$$h_{jm}^{synt} \rightarrow h^{synt}(\theta, \varphi)$$

¹Výpočet v Elmeru je opravdu 2D, posunutí pak ale převádíme do 3D prostoru, abychom mohli jednoduše přecházet ze spektra do prostoru a naopak podle vztahů v příloze A. Závislost na sférické souřadnici φ je tedy pouze formální.

4. Výpočet h_{jm}^{pred} , resp. u_{jm}^{pred} , podle vztahů (B.26), resp. (B.21), pro celý uvažovaný interval tlouštěk elastické litosféry ($T_e = 1 - 300$ km) a odpovídajících polí na sféře

$$h_{jm}^{pred} \rightarrow h^{pred}(\theta, \varphi)$$

$$u_{jm}^{pred} \rightarrow u^{pred}(\theta, \varphi)$$

5. Minimalizace rozdílových funkcí formulovaných v geoidech, resp. v posunutích,

$$S_h(T_e, T_c) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[(h^{pred}(T_e, T_c) - h^{synt}) g(\theta_0, \sigma) \right]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (5.8)$$

resp.

$$S_u(T_e, T_c) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[(u^{pred}(T_e, T_c) - u^{synt}) g(\theta_0, \sigma) \right]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (5.9)$$

kde $g(\theta_0, \sigma)$ je Gaussův filtr závislý jen na souřadnici θ se středem v bodě θ_0 a pološířkou σ

$$g(\theta_0, \sigma) = \exp\left(-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.10)$$

6. Sestavení modelu (pro každé θ_0 máme odpovídající hodnotu T_e)

Číselné hodnoty fyzikálních parametrů používaných v následujících testech jsou uvedeny v tabulce 5.2.

poloměr	R	3395	km
gravitační zrychlení	g	3.8	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Youngův modul	E	$6.5 \cdot 10^{10}$	Pa
Poissonův poměr	ν	0.25	
povrchová hustota	ρ_s	2900	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
hustota pláště	ρ_m	3500	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
průměrná hustota planety	$\bar{\rho}$	3930	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
hustotní skok v litosféře	$\Delta\rho$	500	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
tloušťka kůry	T_c	50	km

Tabulka 5.2: Hodnoty fyzikálních veličin použité pro testování inverze podle [20].

5.3 Optimální harmonické stupně

V této kapitole hledáme nejvhodnější rozpětí harmonických stupňů j pro výpočet inverze. Minimalizace sice probíhá v prostoru, ale rozpětí použitých harmonických stupňů ovlivňuje i tvar pole v prostoru. Volba nejvhodnějšího rozpětí harmonických stupňů j závisí v prvé řadě na dvou faktorech

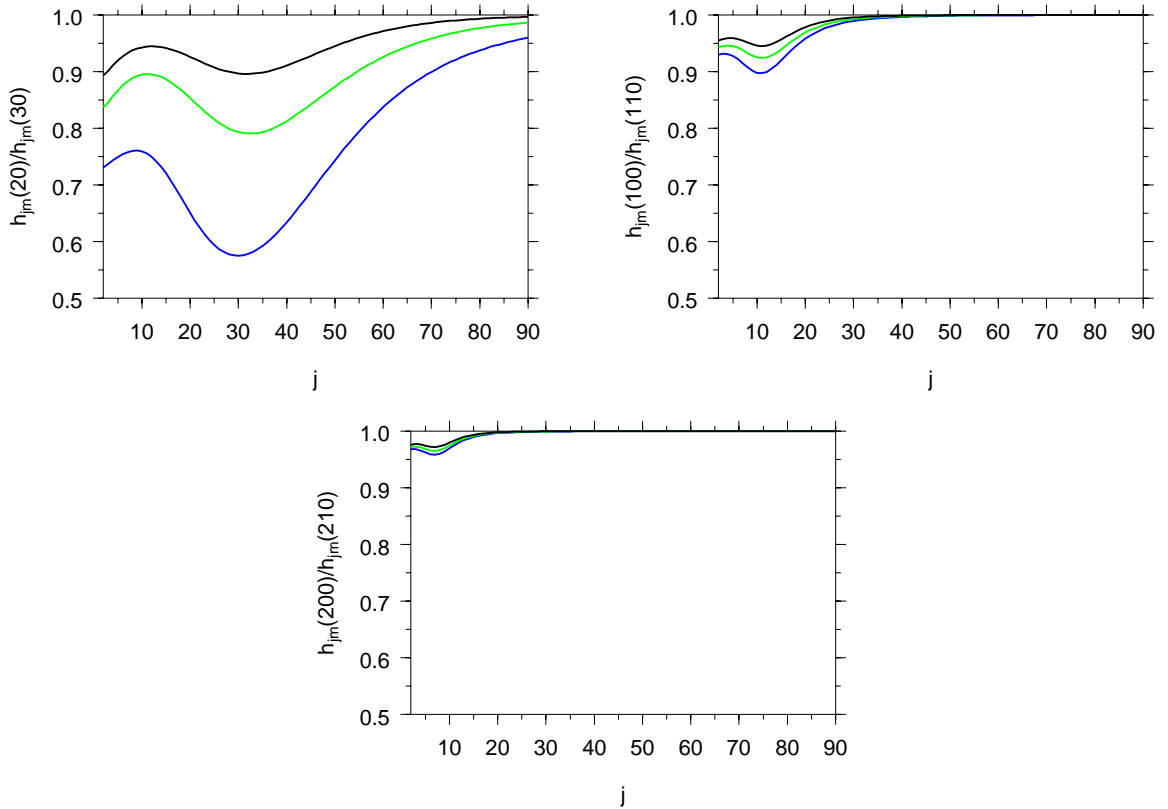
- citlivosti úlohy na tloušťku elastické litosféry,
- přesnosti používané spektrální aproximace.

5.3.1 Citlivost úlohy na tloušťku elastické litosféry

Citlivostí úlohy rozumíme citlivost predikovaných koeficientů geoidu na změnu tloušťky elastické litosféry. Počítáme koeficienty geoidu podle vztahu (B.26) pro různé stupně zátěže, různé tloušťky elastické litosféry a také pro různé tloušťky kůry. Na obr. 5.8 jsou vyneseny podíly koeficientů geoidu pro různé tloušťky elastické litosféry

$$\frac{h_{jm}^{pred}(T_e^1)}{h_{jm}^{pred}(T_e^2)}$$

v závislosti na stupni koeficientu topografie, kterým zatěžujeme elastickou vrstvu (koeficienty topografie t_{jm} pro daný stupeň j mají amplitudu 1000 m).



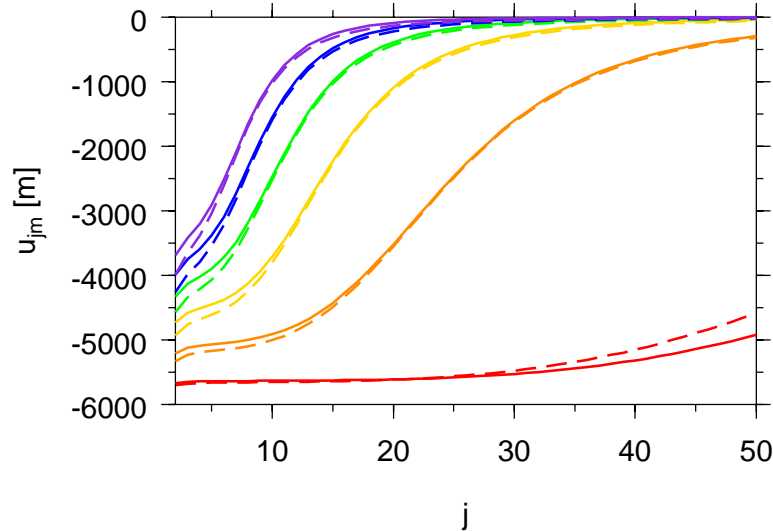
Obrázek 5.8: Podíl koeficientů geoidu pro zátěž na daném stupni a tloušťku elastické litosféry $T_e^1 = 20$ km a $T_e^2 = 30$ km (vlevo nahoře), $T_e^1 = 100$ km a $T_e^2 = 110$ km (vpravo nahoře), $T_e^1 = 200$ km a $T_e^2 = 210$ km (dole). $T_c = 10$ km (modrá barva), $T_c = 50$ km (zelená barva) a $T_c = 100$ km (černá barva).

Jak je vidět z obrázku, pro malé tloušťky elastické litosféry ($T_e \sim 20$ km, obr. 5.8 vlevo nahoře) se koeficienty predikovaného geoidu nejvíce liší pro stupně přibližně $j = 30$ (zde je tedy pro malé tloušťky elastické litosféry úloha nejcitlivější), rozumná citlivost ale zůstává i pro rozpětí harmonických stupňů $j = 2 - 50$ (v případě menších tlouštěk kůry $T_c = 10$ km a $T_c = 50$ km zůstává úloha dobře citlivá i pro vyšší stupně). S rostoucí tloušťkou elastické litosféry ($T_e \sim 100$ km, obr. 5.8 vpravo nahoře) se citlivost podstatně zhoršuje, nejvíce citlivé jsou koeficienty okolo stupně $j = 10$. Všimněme si minima citlivostní křivky pro tloušťky $T_e \sim 100$ km (~ 0.9 pro $T_c = 10$ km) a srovnajme ho

s minimem této křivky pro tloušťky $T_e \sim 20$ km (~ 0.55 pro $T_c = 10$ km). V případě tenčí elastické litosféry se koeficienty liší o hodně víc (jsou citlivější ke změně tloušťky elastické litosféry) než v případě tlustší elastické litosféry. Nejméně citlivá je úloha pro velmi tlustou litosféru ($T_e \sim 200$ km, obr. 5.8 dole). Zde citlivostní křivka dosahuje minima okolo stupně $j = 8$, minimum má ale hodnotu > 0.95 - predikované koeficienty geoidu v podstatě nejsou citlivé na malé změny tloušťky velmi tlusté elastické litosféry. Nezanedbatelný rozdíl ve výsledcích navíc přináší použití různých tloušťek kůry. Jelikož pro velké tloušťky elastické litosféry se zdá, že optimální rozpětí harmonických stupňů neexistuje, neboť úloha není dostatečně citlivá na žádném harmonickém stupni, vezmeme jako nejvhodnější pro inverzi stupně $j = 2 - 50$, na nichž by měla být úloha dostatečně citlivá alespoň pro menší tloušťky elastické vrstvy.

5.3.2 Přesnost používané spektrální aproximace

Abychom zjistili, zda je používaná spektrální aproximace (B.26) dostatečně přesná na harmonických stupních vybraných v předchozí části 5.3.1 a zda tedy vhodně aproximuje geoid generovaný povrchovou topografií a prohnutím elastické vrstvy konstantní tloušťky, počítáme koeficienty posunutí odpovídající zatížení na konkrétním stupni j (amplituda koeficientu topografie pro daný stupeň je opět 1000 m, tloušťku elastické litosféry volíme postupně $T_e = 10, 50, 100, 150, 200, 250$ km). Počítáme v Elmeru na slupkách modifikovaných z původní slupky o tloušťce 50 km (viz část 5.1.1) a také podle vzorce pro koeficienty posunutí (B.21). Vypočtené spektrální koeficienty porovnáváme na obr. 5.9. Z obrázku je zřejmé, že velmi dobrou shodu dostáváme na středních stupních.



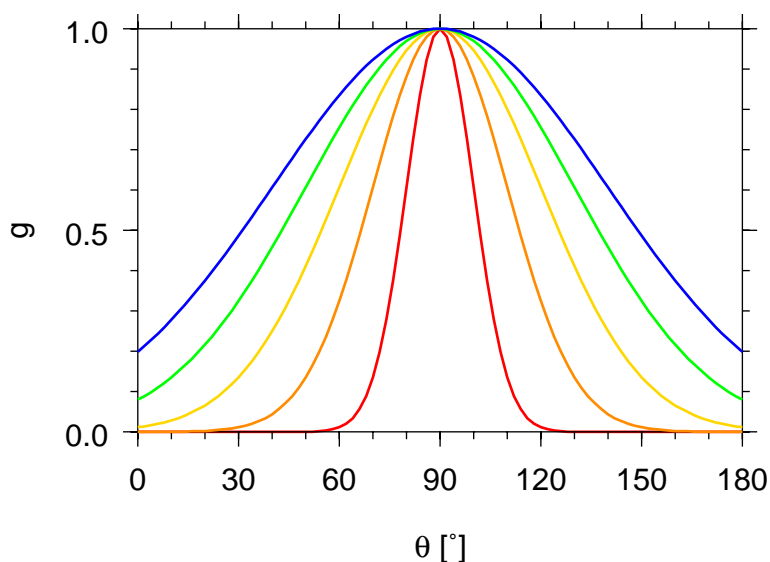
Obrázek 5.9: Koeficienty posunutí u_{jm} v závislosti na stupni zátěže j . $T_e = 10$ km (červená), $T_e = 50$ km (oranžová), $T_e = 100$ km (žlutá), $T_e = 150$ km (zelená), $T_e = 200$ km (modrá), $T_e = 250$ km (fialová). Elmer (čárkovaně), spektrální aproximace (plně).

Naopak na nižších stupních není spektrální aproximace tak přesná (zde předpokládáme, že výpočet v Elmeru pro nižší stupně je přesný), ale shoda je i tak dobrá. Odchylka křivek pro $T_e = 10$ km je dána nepřesným výpočtem v Elmeru na tenké modifikované slupce pro vyšší harmonické stupně (viz předchozí srovnání Elmer - Comsol v části

5.1.2). Prozatím tedy pro nás zůstávají vhodnými harmonické stupně $j = 2 - 50$, neboť používaná spektrální aproximace na těchto stupních funguje dobře a úloha je na tomto rozpětí nejvíce citlivá.

5.4 Nejvhodnější parametry filtru (pološířka a krok posunu)

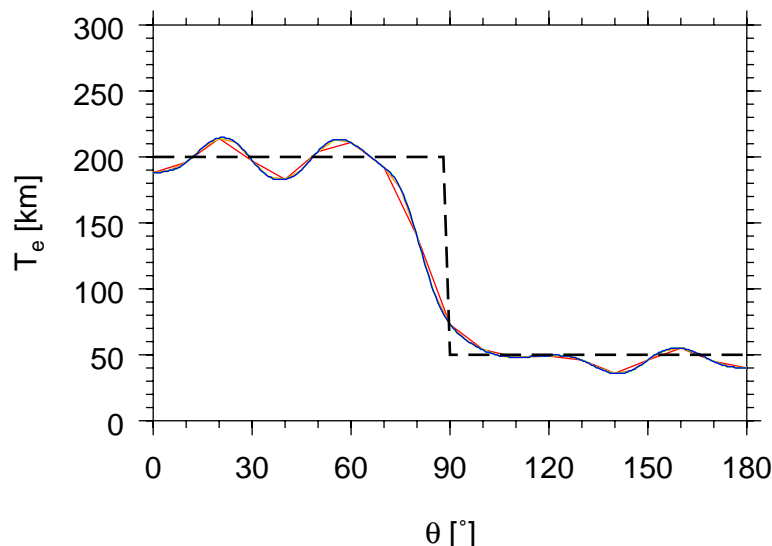
V této části se zaměříme na získání nejvhodnějších parametrů používaného Gaussova filtru, a to na pološířku filtru a na velikost kroku, s jakým filtr posouváme. V části 5.2 jsme inverzi formulovali pro geoid i pro posunutí, zde se také pokusíme zjistit, zda jedna z těchto formulací dává lepší výsledky než druhá. Pro tento účel jsme vybrali několik modelů tloušťky elastické litosféry (model 2, 3 a 6, obr. 5.15b, 5.15c a 5.16f) a několik harmonických zátěží (na stupních $j = 5, 10, 20$, obr. 5.17 červená, oranžová, žlutá). V inverzi používáme několik různých pološířek filtru ($\sigma = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$, obr. 5.10) a několik různých kroků posunu filtru ($\Delta\theta = 0.5^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 5^\circ, 10^\circ$).



Obrázek 5.10: Filtry používané v inverzi s pološířkou $\sigma = 10^\circ$ (červená barva), $\sigma = 20^\circ$ (oranžová barva), $\sigma = 30^\circ$ (žlutá barva), $\sigma = 40^\circ$ (zelená barva) a $\sigma = 50^\circ$ (modrá barva).

5.4.1 Krok posunu filtru

Nejprve testujeme vliv velikosti kroku, se kterým filtr posouváme. Na obr. 5.11 jsou vyneseny výsledky inverze počítané s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$ a s různě velikými kroky posunu filtru - $\Delta\theta = 0.5^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 5^\circ, 10^\circ$. Tato inverze je počítaná minimalizací rozdílu geoidů a počítali jsme jen pro model 2, který jsme zatížili harmonickou topografií na stupni $j = 10$. Je vidět, že krok, s jakým filtr posouváme, má zanedbatelný vliv na výsledky inverze (počítali jsme stejnou úlohu i pro širší filtry s pološířkami $\sigma = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$, s rostoucí velikostí filtru byl ale vliv kroku posunu filtru ještě zanedbatelnější než pro filtr s pološířkou $\sigma = 10^\circ$). V dalších testech v kapitole 5 budeme



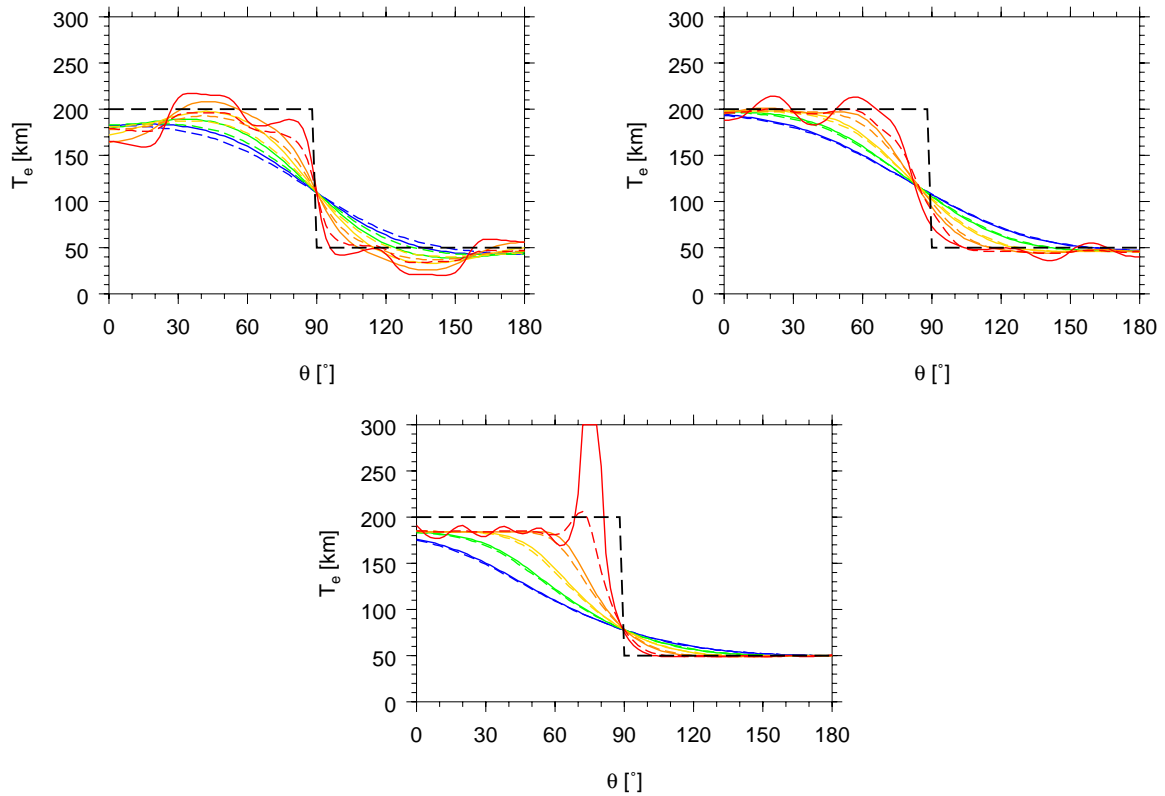
Obrázek 5.11: Model 2 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu geoidů pro harmonickou zátěž na stupni $j = 10$, pološířku filtru $\sigma = 10^\circ$ a kroky posunu filtru $\Delta\theta = 0.5^\circ$ (modrá barva), $\Delta\theta = 1^\circ$ (zelená barva), $\Delta\theta = 2^\circ$ (žlutá barva), $\Delta\theta = 5^\circ$ (oranžová barva) a $\Delta\theta = 10^\circ$ (červená barva).

tedy počítat výhradně s krokem $\Delta\theta = 2^\circ$, který je dostatečně malý pro získání hladkého výsledku (na obrázku nelze odlišit výsledky získané pro kroky $\Delta\theta = 0.5^\circ, 1^\circ, 2^\circ$), a zároveň výpočty s tímto posunem ušetří výpočetní čas oproti výpočtům s menšími kroky.

5.4.2 Pološířka filtru. Výběr mezi geoidem a posunutím.

Teď se budeme zabývat výběrem vhodné pološířky filtru. Vyzkoušíme všechny vybrané modely a zátěže a také všechny vybrané pološířky filtru. Navíc budeme úlohu řešit pro geoid i pro posunutí. Krok posunu filtru již držíme pevný $\Delta\theta = 2^\circ$.

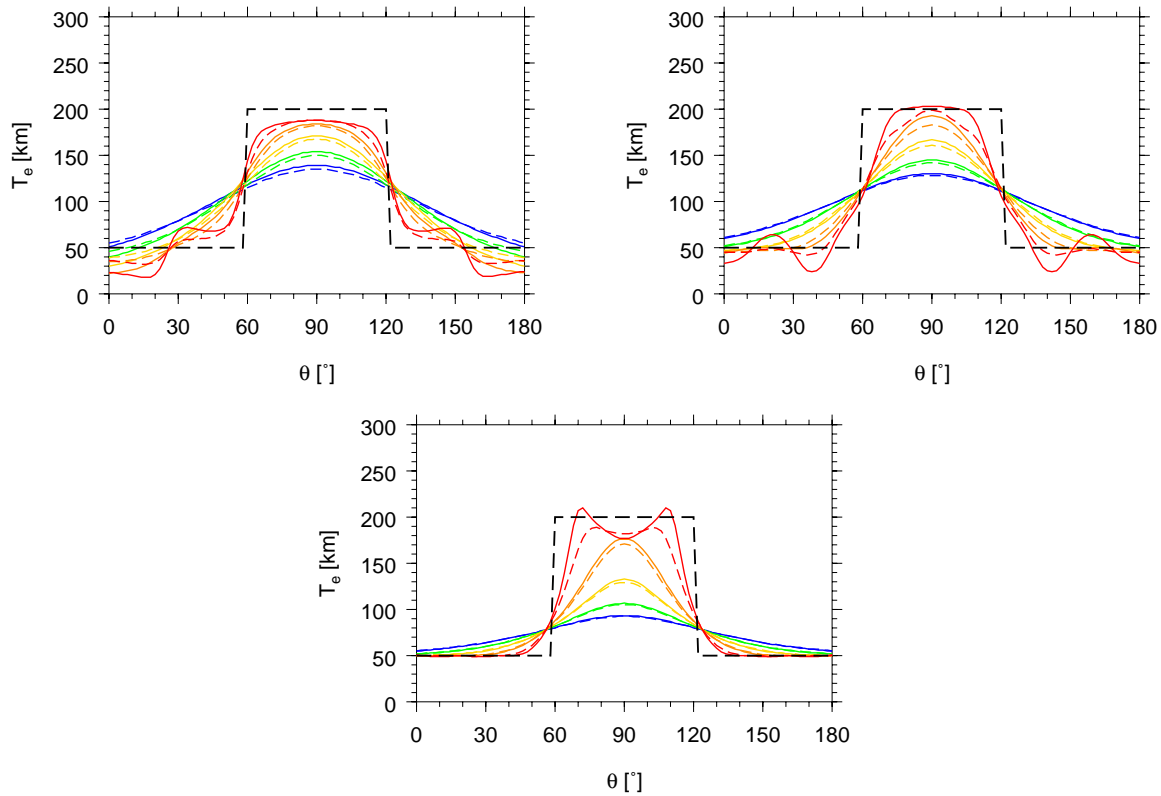
Na obr. 5.12 jsou vykresleny výsledky pro model 2. Pro filtry s větší pološířkou ($\sigma = 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$) vidíme minimální rozdíl mezi tím, jestli minimalizujeme rozdíl geoidů nebo rozdíl posunutí. Dále je zřejmé, že se zmenšující se pološířkou filtru dostáváme lepší výsledky. Pro filtr s pološířkou $\sigma = 20^\circ$ dostáváme o něco málo lepší výsledky v případě minimalizace rozdílu geoidů. Naopak pro nejužší filtr o pološířce $\sigma = 10^\circ$ se výsledky získané minimalizací rozdílu geoidů a minimalizací rozdílu posunutí dost významně liší. Výsledky získané minimalizací rozdílu geoidů hodně oscilují, a to pro všechny vybrané stupně zátěže. Výsledky získané minimalizací rozdílu posunutí sice také slabě oscilují, nicméně tyto oscilace jsou takřka zanedbatelné oproti oscilacím v případě minimalizace rozdílu geoidů (nejlépe je to patrné pro zátěž na stupni $j = 20$ na obr. 5.12 dole). Nejlepší výsledky tak získáváme pro filtr s pološířkou $\sigma = 10^\circ$ a minimalizací rozdílu posunutí.



Obrázek 5.12: Model 2 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu geoidů (plná čára) a rozdílu posunutí (přerušovaná čára) pro zátěž na stupni $j = 5$ (vlevo nahoře), $j = 10$ (vpravo nahoře) a $j = 20$ (dole) a pološířku filtru $\sigma = 10^\circ$ (červená barva), $\sigma = 20^\circ$ (oranžová barva), $\sigma = 30^\circ$ (žlutá barva), $\sigma = 40^\circ$ (zelená barva) a $\sigma = 50^\circ$ (modrá barva).

Na obr. 5.13 jsou vykresleny výsledky pro model 3. Jejich charakter je velmi podobný výsledkům pro model 2. Pro široké filtry dostáváme horší výsledky než pro úzké filtry. Nejlepší výsledky dává nejužší filtr s pološířkou $\sigma = 10^\circ$, pro inverzi počítanou pomocí minimalizace geoidů ale dosti oscilují. Naopak minimalizace rozdílu posunutí dává i pro tento model nejlepší výsledky - oproti širším filtrům nejlépe vystihuje tvar modelu a zároveň (na rozdíl od minimalizace rozdílu geoidů) nedává oscilující výsledek.

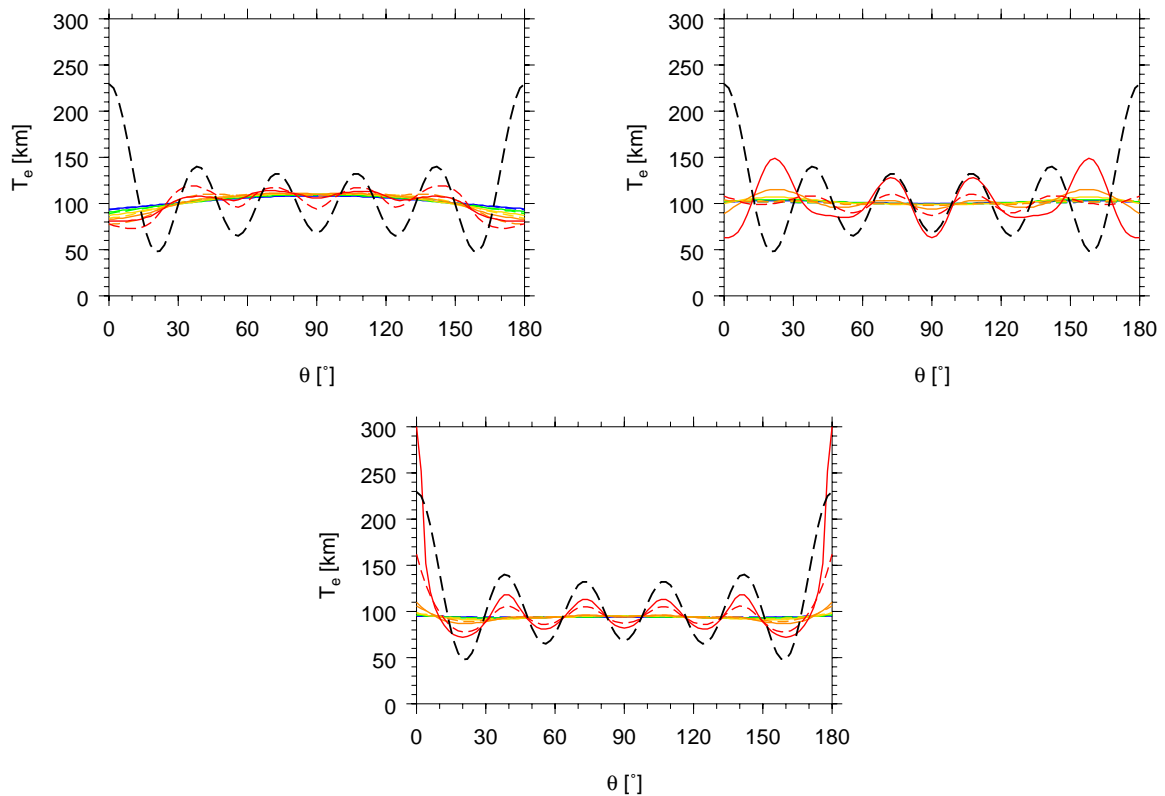
Na obr. 5.14 jsou vykresleny výsledky pro model 6. I zde je situace velmi podobná předchozím dvěma případům, do hry ale navíc vstupuje poměrně malá vlnová délka modelu (více se vztahu vlnové délky modelu a zátěže věnujeme v části 5.5). Tento hodně oscilující model nejsme pomocí inverze schopni tak dobře vystihnout jako předchozí dva, ale i zde můžeme říci, že nejlepší výsledky dostáváme pro inverzi s nejužším filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$ a s minimalizací rozdílu posunutí. Dlouhovlnnější filtry nemají samozřejmě šanci zachytit krátkovlnnější variace. Minimalizace rozdílu geoidů sice dává o něco lepší výsledky v případě zátěže na harmonickém stupni $j = 20$ (obr. 5.14 dole), ale pro zátěž na stupni $j = 10$ dává pro 50-tistupňový interval u obou pólů dokonce opačné znaménko vzhledem k průměrné tloušťce elastické litosféry, než má původní model. Vybereme tedy raději tu formulaci, která v případě zátěže na stupni $j = 20$ sice dává o něco horší výsledky, ale v případě zátěže na stupni $j = 10$ je o mnoho lepší.



Obrázek 5.13: Model 3 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu geoidů (plná čára) a rozdílu posunutí (přerušovaná čára) pro zátěž na stupni $j = 5$ (vlevo nahoře), $j = 10$ (vpravo nahoře) a $j = 20$ (dole) a pološířku filtru $\sigma = 10^\circ$ (červená barva), $\sigma = 20^\circ$ (oranžová barva), $\sigma = 30^\circ$ (žlutá barva), $\sigma = 40^\circ$ (zelená barva) a $\sigma = 50^\circ$ (modrá barva).

Pokusme se ještě vysvětlit, proč výsledky vycházejí lépe pro minimalizaci rozdílu posunutí, i když vzorce (B.21) a (B.26) používají stejnou spektrální aproximaci. Výpočet v Elmeru probíhá s hustotním skokem na spodní hranici výpočetní oblasti a nezahrnuje závislost na tloušťce kůry. Ve vzorci (B.21) pro koeficient posunutí se žádná závislost na tloušťce kůry také nevyskytuje, naopak ve vzorci (B.26) pro koeficient geoidu je explicitní závislost na tloušťce kůry. I když tento malý rozdíl formulací nezpůsobuje větší odchylky, dá se říci, že formulace v posunutích je více vnitřně konzistentní s výpočtem v Elmeru než formulace v geoidech. Proto také formulace v posunutích dává o něco lepší výsledky, a to především pro nejúžší filtr, kde výrazně tlumí oscilace. V dalších testech proto budeme pracovat především s úlohou formulovanou v posunutí a s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$, který budeme posouvat s krokem $\Delta\theta = 2^\circ$.

²V inverzi počítané s reálnými daty je již potřeba závislost na tloušťce kůry zahrnout do výpočtu, a proto budeme ve výpočtech s reálnými daty používat formulaci v geoidech, neboť našimi daty jsou koeficienty topografie a právě geoidu, nikoliv koeficienty posunutí, které by bylo potřeba počítat navíc (v tomto výpočtu by totiž už závislost na tloušťce kůry byla zahrnuta, a tím by zmizel rozdíl, který teď vznikl mezi formulací v geoidech nebo v posunutích).



Obrázek 5.14: Model 6 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu geoidů (plná čára) a rozdílu posunutí (přerušovaná čára) pro zátěž na stupni $j = 5$ (vlevo nahoře), $j = 10$ (vpravo nahoře) a $j = 20$ (dole) a pološířku filtru $\sigma = 10^\circ$ (červená barva), $\sigma = 20^\circ$ (oranžová barva), $\sigma = 30^\circ$ (žlutá barva), $\sigma = 40^\circ$ (zelená barva) a $\sigma = 50^\circ$ (modrá barva).

5.5 Vlnová délka modelu a její vztah k vlnové délce zátěže

V této části se zaměříme na vztah přibližné vlnové délky modelu a zátěže. Chceme především zjistit, zda používaná spektrální aproximace má šanci dobře vystihnout data. A jelikož tato aproximace počítá s konstantní tloušťkou elastické litosféry, a tím zanedbává vliv daleké zóny, zajímá nás, zda pro danou zátěž se model elastické litosféry jeví jako konstantní. Zjevně mohou nastat 2 situace

- a) vlnová délka modelu \gg vlnová délka zátěže

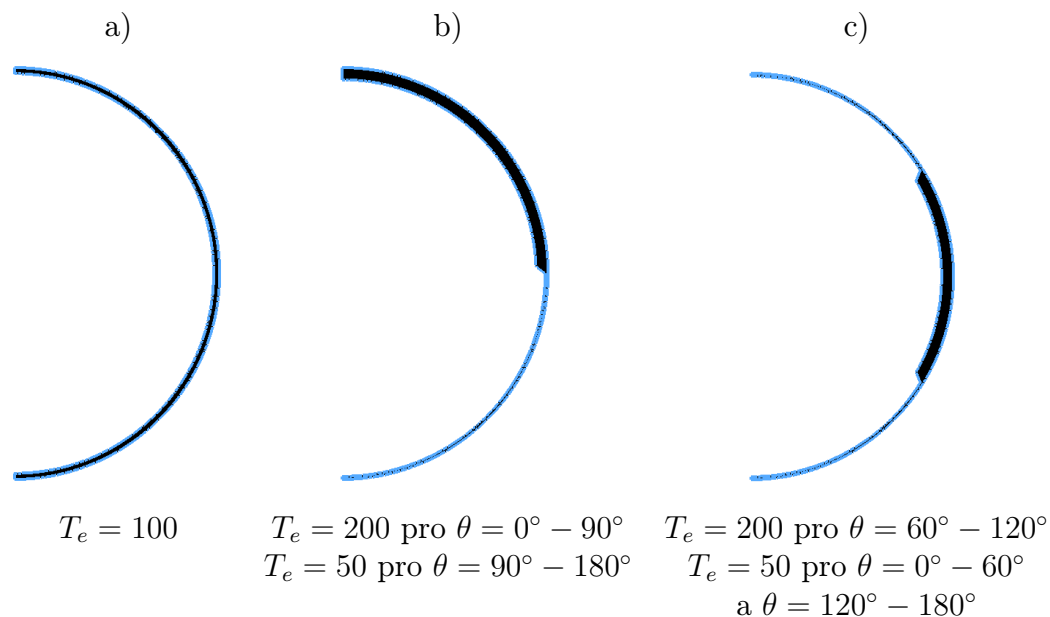
Vezměme model, který má přibližnou vlnovou délku odpovídající harmonickému stupni 1 (model 2 na obr. 5.15b). Zatížíme-li takový dlouhovlnný model krátkovlnnou topografií na vysokém harmonickém stupni, pak lze předpokládat, že vybraný model se lokálně (vzhledem k topografii) jeví jako model s konstantní tloušťkou a vliv daleké zóny je zanedbatelný (kromě oblastí, kde se tloušťka litosféry rychle mění). Spektrální aproximace by měla dobře fungovat.

- b) vlnová délka modelu \leq vlnová délka zátěže

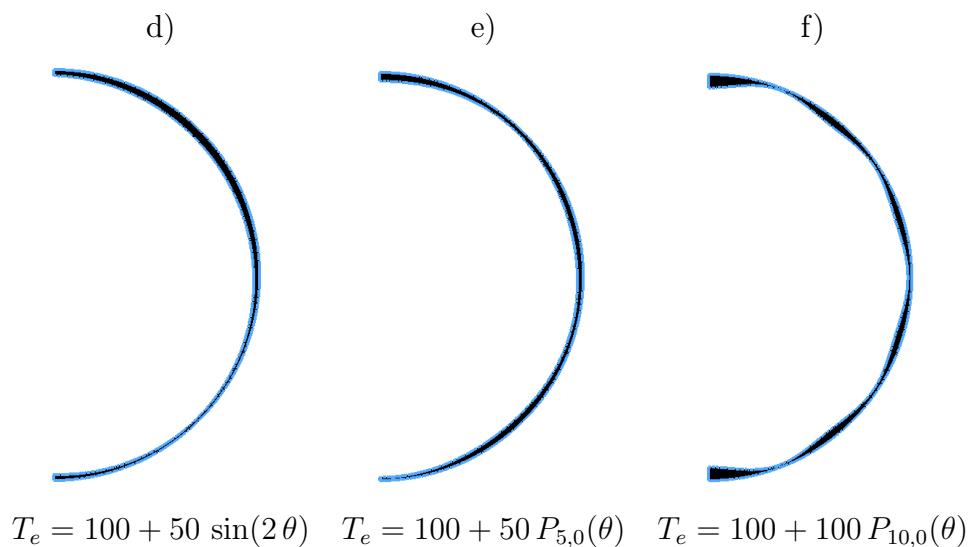
Vezměme ten samý model, ale zatěžme ho topografií na nízkém harmonickém

stupni (třeba $j = 1$). V tomto případě není vybraný model vzhledem k topografii konstantní, stejně jako když ho zatížíme topografií na harmonickém stupni $j = 0$ (konstanta). Vliv daleké zóny nemůžeme zanedbat a spektrální aproximace nebude fungovat.

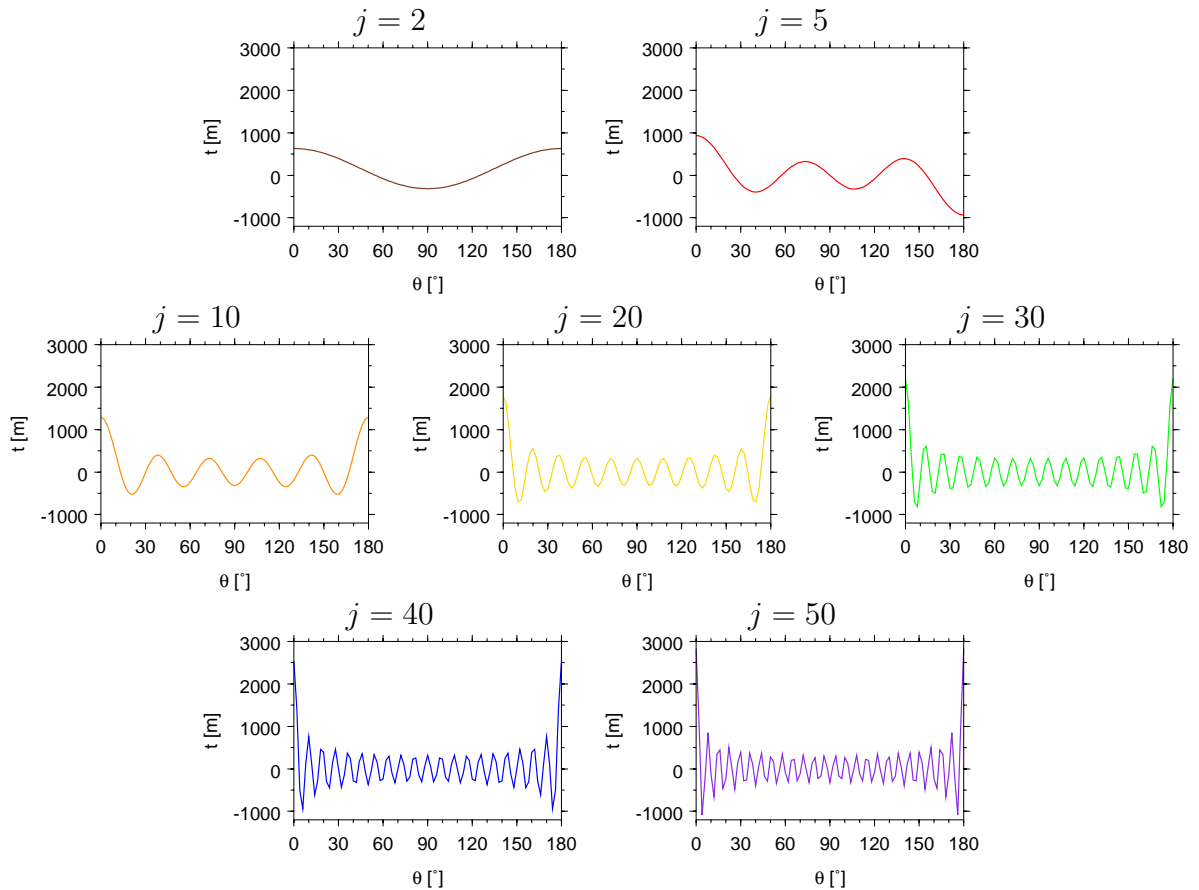
Pro ilustraci uvedme několik různých modelů (obr. 5.15 a 5.16), které modifikujeme z původní otestované slupky o tloušťce 50 km (viz část 5.1.1).



Obrázek 5.15: Modely tlouštěk elastické litosféry pro syntetické testy, zleva: model 1 (a), model 2 (b), model 3 (c). Všechny tloušťky jsou v km.



Obrázek 5.16: Modely tlouštěk elastické litosféry pro syntetické testy, zleva: model 4 (d), model 5 (e), model 6 (f). Všechny tloušťky jsou v km.

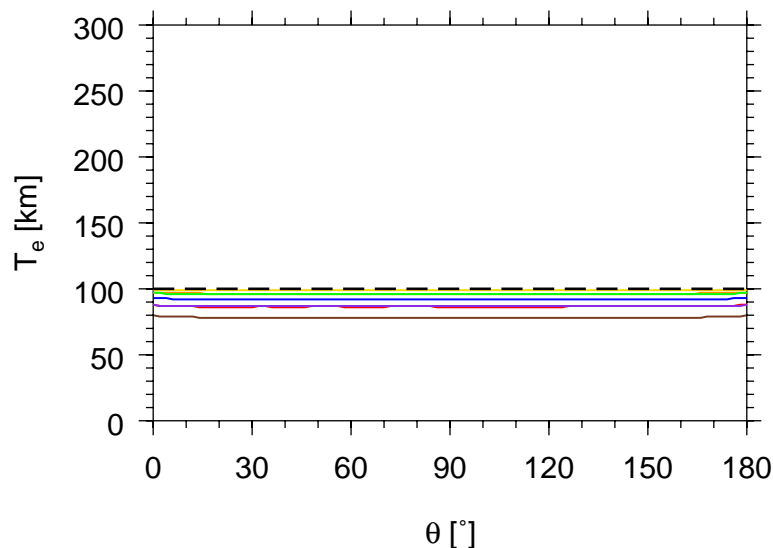


Obrázek 5.17: Harmonické topografie, kterými zatěžujeme modely, na stupních $j = 2$ (hnědá barva), $j = 5$ (červená barva), $j = 10$ (oranžová barva), $j = 20$ (žlutá barva), $j = 30$ (zelená barva), $j = 40$ (modrá barva) a $j = 50$ (fialová barva).

Tyto modely zatížíme různými topografiemi a pomocí Elmeru spočteme odpovídající posunutí. Tato data dosadíme do inverze, spočteme model tloušťky elastické litosféry a porovnáme ho s původním modelem (viz formulaci testovací úlohy v části 5.2). Zatěžovat budeme harmonickou topografií, která má ve spektru δ -funkci, a to pro harmonické stupně $j = 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50$ (obr. 5.17). Inverzi počítáme s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$, s krokem posunu filtru $\Delta\theta = 2^\circ$ a minimalizací posunutí.

Model 1

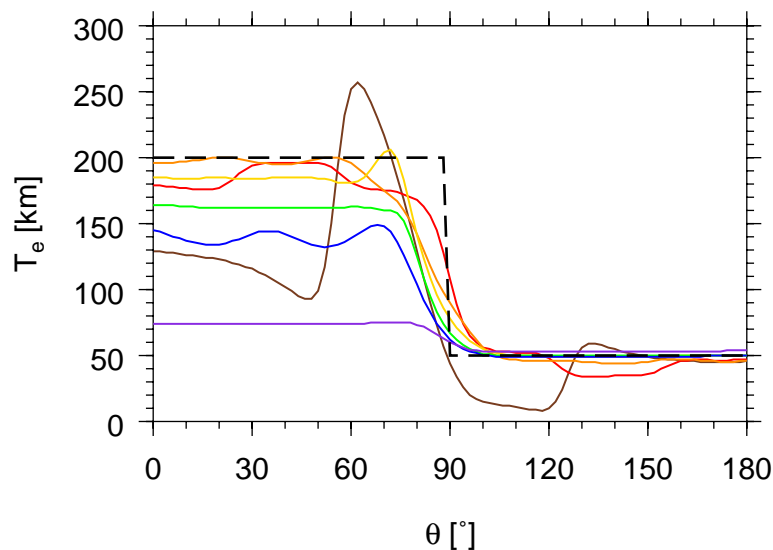
Jako první jsme zvolili nejjednodušší možný model - konstantní tloušťku elastické litosféry $T_e = 100$ km (obr. 5.15 a). Tento model odpovídá harmonickému stupni $j = 0$. Výsledky inverze jsou na obr. 5.18. Nejhorší výsledek dostáváme pro inverzi se zátěží na stupni $j = 2$. S rostoucím stupněm zátěže j se výsledek zlepšuje (spektrální aproximace je přesnější pro vyšší stupně) a nejlepší výsledek dostáváme pro inverzi se zátěží na stupni $j = 20$. S dále rostoucím stupněm zátěže se výsledek opět zhoršuje (na vyšších stupních velmi klesá citlivost úlohy, spektrální koeficienty pro různé tloušťky T_e se příliš neliší). Celkem lze říci, že inverze odpovídající zátěžím na všech uvažovaných stupních dávají rozumné výsledky (pro všechny zátěže je model tloušťky elastické litosféry konstantní, jde tedy o případ a) z počátku části 5.5).



Obrázek 5.18: Model 1 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$ pro zátěž na stupni $j = 2$ (hnědá barva), $j = 5$ (červená barva), $j = 10$ (oranžová barva), $j = 20$ (žlutá barva), $j = 30$ (zelená barva), $j = 40$ (modrá barva) a $j = 50$ (fialová barva).

Model 2

Druhý model již není konstantní a obsahuje skokovou změnu v hodnotě tloušťky elasticke litosféry (obr. 5.15 b). Tento model odpovídá harmonickému stupni $j = 1$. Výsledky inverze jsou na obr. 5.19.

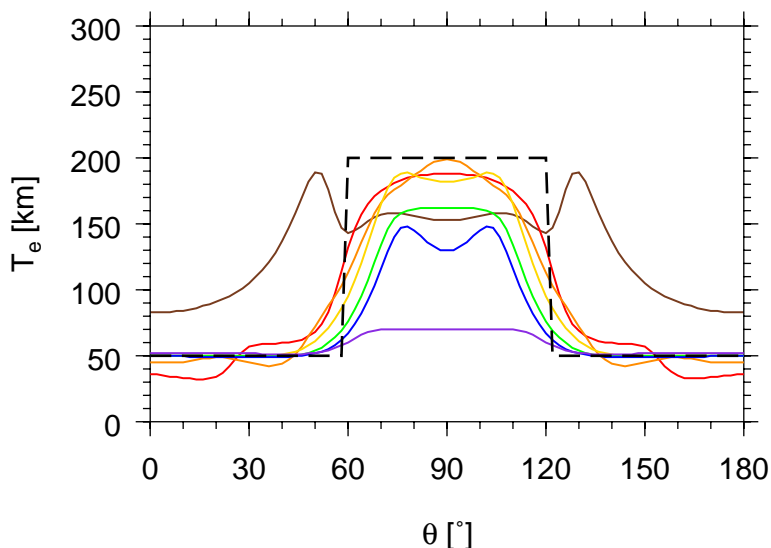


Obrázek 5.19: Model 2 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$ pro zátěž na stupni $j = 2$ (hnědá barva), $j = 5$ (červená barva), $j = 10$ (oranžová barva), $j = 20$ (žlutá barva), $j = 30$ (zelená barva), $j = 40$ (modrá barva) a $j = 50$ (fialová barva).

Inverze pro zátěž na stupni $j = 2$ dává opět velmi špatný výsledek, s rostoucím stupněm zátěže se výsledek zlepšuje (spektrální aproximace je lepší pro vyšší stupně, pro nízké stupně zátěže se pravděpodobně projeví i vliv daleké zóny na deformaci slupky). Nejlepší výsledek pak dává inverze pro zátěž na stupni $j = 10$. S dále rostoucím stupněm zátěže se výsledek zhoršuje (na vyšších stupních velmi klesá citlivost úlohy, spektrální koeficienty pro různé tloušťky T_e se příliš neliší) - nejhorší výsledek dává inverze pro zátěž na stupni $j = 50$. Celkově dávají inverze odpovídající zátěžím na nižších středních stupních ($j = 5, 10, 20$) rozumné výsledky (dá se předpokládat, že pro tyto zátěže se model jeví jako konstantní a spektrální aproximace může fungovat - případ a) z počátku části 5.5). Naopak pro zátěž na stupni $j = 2$ už se model nejeví jako konstantní a spektrální aproximace nefunguje, což se velmi výrazně projeví na výsledku (případ b) z počátku části 5.5). Velmi významný je rozdíl mezi tím, jak inverze odlišně vystihnou tloušťku 200 km (pro hodnoty $\theta = 0^\circ - 90^\circ$) - velmi dobře jen inverze se zátěží na stupni $j = 10$ - a tloušťku 50 km (pro hodnoty $\theta = 90^\circ - 180^\circ$) - inverze se zátěží na všech stupních, což zjevně souvisí s lepší citlivostí spektrálních koeficientů pro menší tloušťky T_e , viz část 5.3.1.

Model 3

Třetí model je velmi podobný předchozímu modelu 2 - opět obsahuje skokovou změnu hodnoty tloušťky elastické litosféry, ale odpovídá harmonickému stupni $j = 2$ (obr. 5.15 c). Výsledky inverze jsou na obr. 5.20 a jsou velmi podobné předchozímu případu (model



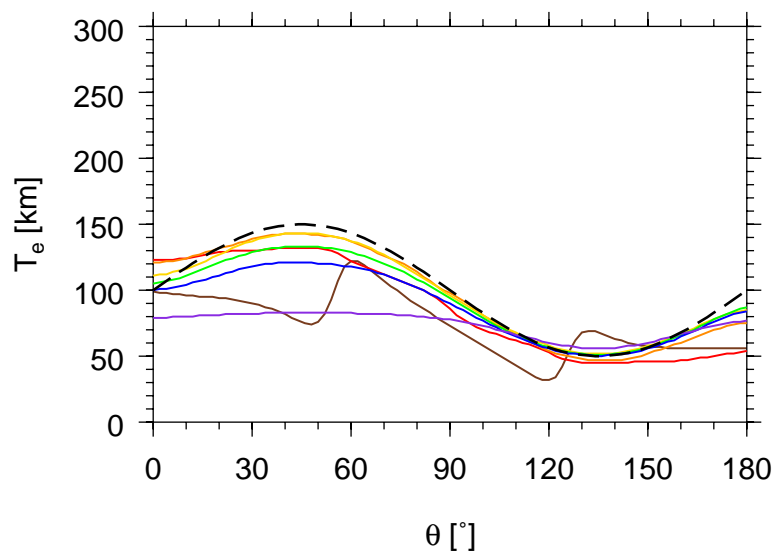
Obrázek 5.20: Model 3 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$ pro zátěž na stupni $j = 2$ (hnědá barva), $j = 5$ (červená barva), $j = 10$ (oranžová barva), $j = 20$ (žlutá barva), $j = 30$ (zelená barva), $j = 40$ (modrá barva) a $j = 50$ (fialová barva).

2). Nejhorší výsledek opět dává inverze pro zátěž na stupni $j = 2$ a s rostoucím stupněm zátěže se výsledek zlepšuje (spektrální aproximace je lepší pro vyšší stupně, pro nízké stupně zátěže se projevuje i vliv daleké zóny na deformaci slupky). Nejlepší výsledek opět dává inverze pro zátěž na stupni $j = 10$ a s dále rostoucím stupněm zátěže se výsledek

zhoršuje (na vyšších stupních velmi klesá citlivost úlohy, spektrální koeficienty pro různé tloušťky T_e se příliš neliší). Celkem lze říci, že inverze odpovídající zátěžím na nižších středních stupních ($j = 5, 10, 20$) dávají rozumné výsledky (opět se dá předpokládat, že pro tyto zátěže se model jeví jako konstantní a spektrální aproximace může fungovat - případ a) z počátku části 5.5) a naopak pro zátěž na stupni $j = 2$ už se model nejeví jako konstantní a spektrální aproximace nefunguje, což se zde opět velmi výrazně projeví na výsledku (případ b) z počátku části 5.5). Pro model 3 je ještě výraznější rozdíl mezi tím, jak inverze vystihnou tloušťku 200 km (pro hodnoty $\theta = 60^\circ - 120^\circ$) - pouze jedna inverze - a tloušťku 50 km (pro hodnoty $\theta = 0^\circ - 60^\circ$ a $\theta = 120^\circ - 180^\circ$) - inverze se zátěží na všech stupních kromě $j = 2$ a $j = 5$ (což opět souvisí s lepší citlivostí spektrálních koeficientů pro menší tloušťky T_e , viz část 5.3.1).

Model 4

Počínaje čtvrtým modelem jsou naše syntetické modely hladší a neobsahují žádné skokové změny v hodnotě tloušťky elastické litosféry (obr. 5.16 d), tento model odpovídá harmonickému stupni $j = 1$). Výsledky inverze jsou na obr. 5.21. Nejhorší výsledky dávají

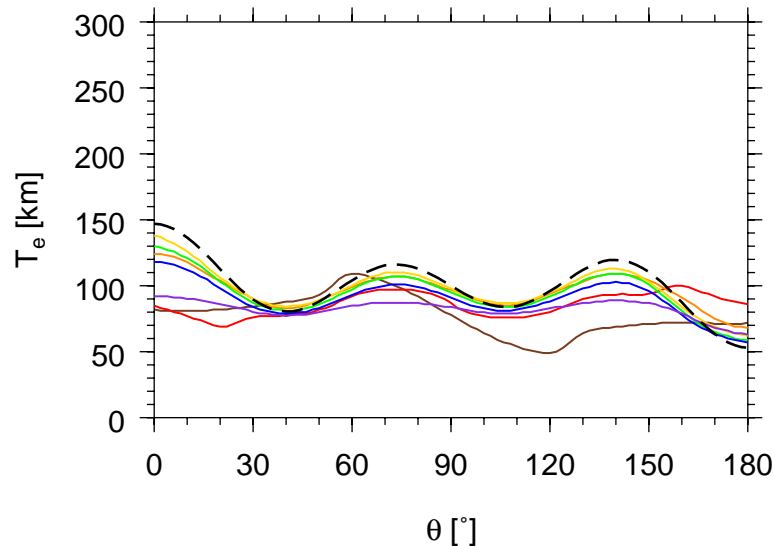


Obrázek 5.21: Model 4 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílů posunutí s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$ pro zátěž na stupni $j = 2$ (hnědá barva), $j = 5$ (červená barva), $j = 10$ (oranžová barva), $j = 20$ (žlutá barva), $j = 30$ (zelená barva), $j = 40$ (modrá barva) a $j = 50$ (fialová barva).

inverze pro zátěž na stupních $j = 2$ a $j = 50$, nejlepší výsledky inverze pro zátěž na stupních $j = 10$ a $j = 20$. Opět se tedy projevuje nepřesnost spektrální aproximace pro nízké stupně a vliv daleké zóny na jedné straně (nízké harmonické stupně) a rychle klesající citlivost predikovaných koeficientů na druhé straně (vysoké harmonické stupně). Naše metoda vystihne velmi dobře střední hodnotu tloušťky elastické litosféry, její variace mají oproti původnímu modelu poněkud podhodnocenou amplitudu, a to především pro větší tloušťky elastické litosféry (konzistentně s předchozími modely).

Model 5

Předposledním modelem je Legendreův polynom stupně 5 (obr. 5.16 e). Tento model odpovídá harmonickému stupni $j = 5$. Výsledky inverze jsou na obr. 5.22. Nejhorší



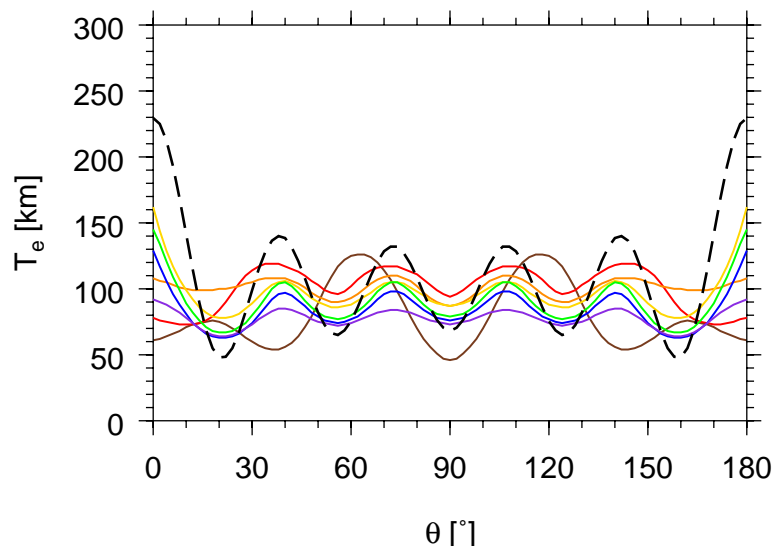
Obrázek 5.22: Model 5 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílů posunutí s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$ pro zátěž na stupni $j = 2$ (hnědá barva), $j = 5$ (červená barva), $j = 10$ (oranžová barva), $j = 20$ (žlutá barva), $j = 30$ (zelená barva), $j = 40$ (modrá barva) a $j = 50$ (fialová barva).

výsledek dávají znovu inverze pro zátěže na nízkých stupních $j = 2$ a $j = 5$ (případ b) z počátku části 5.5) a pro zátěž na vysokém stupni $j = 50$ (malá citlivost harmonických koeficientů ke změně tloušťky elastické litosféry), nejlepší výsledek inverze se zátěží na středním stupni $j = 20$. Opět se nám daří velmi dobře vystihnout jakousi střední tloušťku elastické litosféry, její variace jsou všude mírně podhodnocené. Vzhledem ke krátkovlnnému charakteru modelu lze ale za uspokojivé označit výsledky inverze pro zátěže na stupních $j = 10, 20, 30, 40$.

Model 6

Posledním modelem je Legendreův polynom stupně 10 (obr. 5.16 f). Tento model odpovídá harmonickému stupni $j = 10$. Výsledky inverze jsou na obr. 5.23. Situace je velmi podobná předchozím modelům 4 a 5. Nejhorší výsledek dává inverze se zátěží na stupni $j = 2$ (případ b) z počátku části 5.5), překvapivě dobrý výsledek dává inverze se zátěží na stupni $j = 5$, a to především pro střední hodnoty θ . Naopak inverze pro zátěž na stupni $j = 10$, která pro předchozí modely dávala jedny z nejlepších výsledků, pro tento model už nestačí, neboť vlnová délka zátěže odpovídá vlnové délce modelu a jedná se tedy o případ b) z počátku části 5.5. Za nejlepší lze jednoznačně označit výsledek inverze pro zátěž na stupni $j = 20$, za uspokojivé ale především vzhledem ke krátkovlnnému charakteru modelu považujeme i výsledky pro zátěže na stupních $j = 30, 40$.

Těmito testy jsme potvrdili naše předchozí závěry, tedy především různou citlivost predikovaných spektrálních koeficientů na různé tloušťky elastické litosféry a různé stupně zatížení a také nejlepší fungování používané spektrální aproximace pro zátěže na



Obrázek 5.23: Model 6 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$ pro zátěž na stupni $j = 2$ (hnědá barva), $j = 5$ (červená barva), $j = 10$ (oranžová barva), $j = 20$ (žlutá barva), $j = 30$ (zelená barva), $j = 40$ (modrá barva) a $j = 50$ (fialová barva).

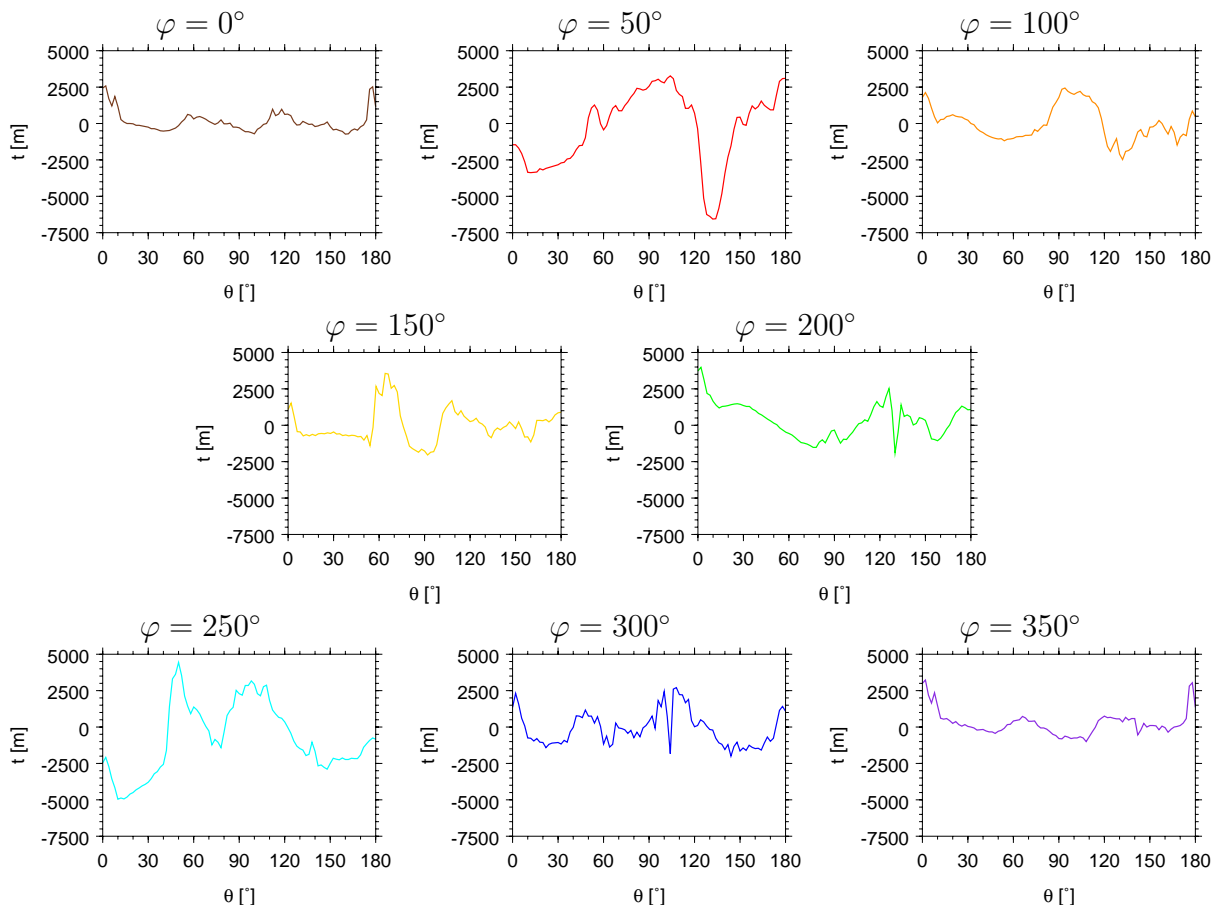
středních stupních. Navíc je zřejmé, že vztah mezi vlnovou délkou modelu a zátěže hraje velkou roli při invertování dat. Speciálně, harmonická zátěž, která byla vhodná pro určitý dlouhovlnný model (jí odpovídající inverze dávala velmi dobré výsledky, např. model 2 a zátěž na stupni $j = 10$) nemusí být tou nejlepší vlnou pro podstatně kratkovlnnější model (např. model 6 a opět zátěž na stupni $j = 10$). Při inverzi reálných dat ale není elastická slupka zatížena zátěží s výkonem pouze na jednom harmonickém stupni. Naopak, reálná topografie má plné spektrum s největším výkonem na stupni $j = 2$. Proto je potřeba zjistit, jak nejlépe formulovat inverzi pro zatížení topografií, která má spektrum plné - viz následující část.

5.6 Vliv volby stupně j_{min}

V předchozí části jsme si přiblížili, že vztah vlnové délky modelu a zátěže hraje velmi důležitou roli při invertování vypočteného posunutí (nebo geoidu). Teď zkusíme stejné modely zatížit reálnou topografií - vybrali jsme několik řezů reálnou topografií Marsu a těmi jsme modely zatížili (jednotlivé řezy jsou na obr. 5.24).

Postupujeme stejně jako v případě jednoduché harmonické zátěže - vybereme model, zatížíme ho konkrétní topografií, v Elmeru vypočteme odpovídající posunutí a to invertujeme (viz formulaci úlohy v části 5.2).

Přestože jsme se v předchozích částech (5.4.1, 5.4.2) snažili vybrat optimální parametry filtru (krok a pološířku), budeme v této části znovu používat různé pološířky filtru ($\sigma = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$), a to především proto, že v uvedených částech jsme pracovali pouze s jednoduchou harmonickou zátěží na jednom stupni. Nyní ale pracujeme s topografií, která má komplexnější spektrum, a proto znovu otestujeme vliv pološířky filtru na výsledky inverze. Krok posunu filtru zachováme již vybraný $\Delta\theta = 2^\circ$. Budeme zkoumat především vliv volby rozsahu použitých harmonických stupňů. Maximální stupeň

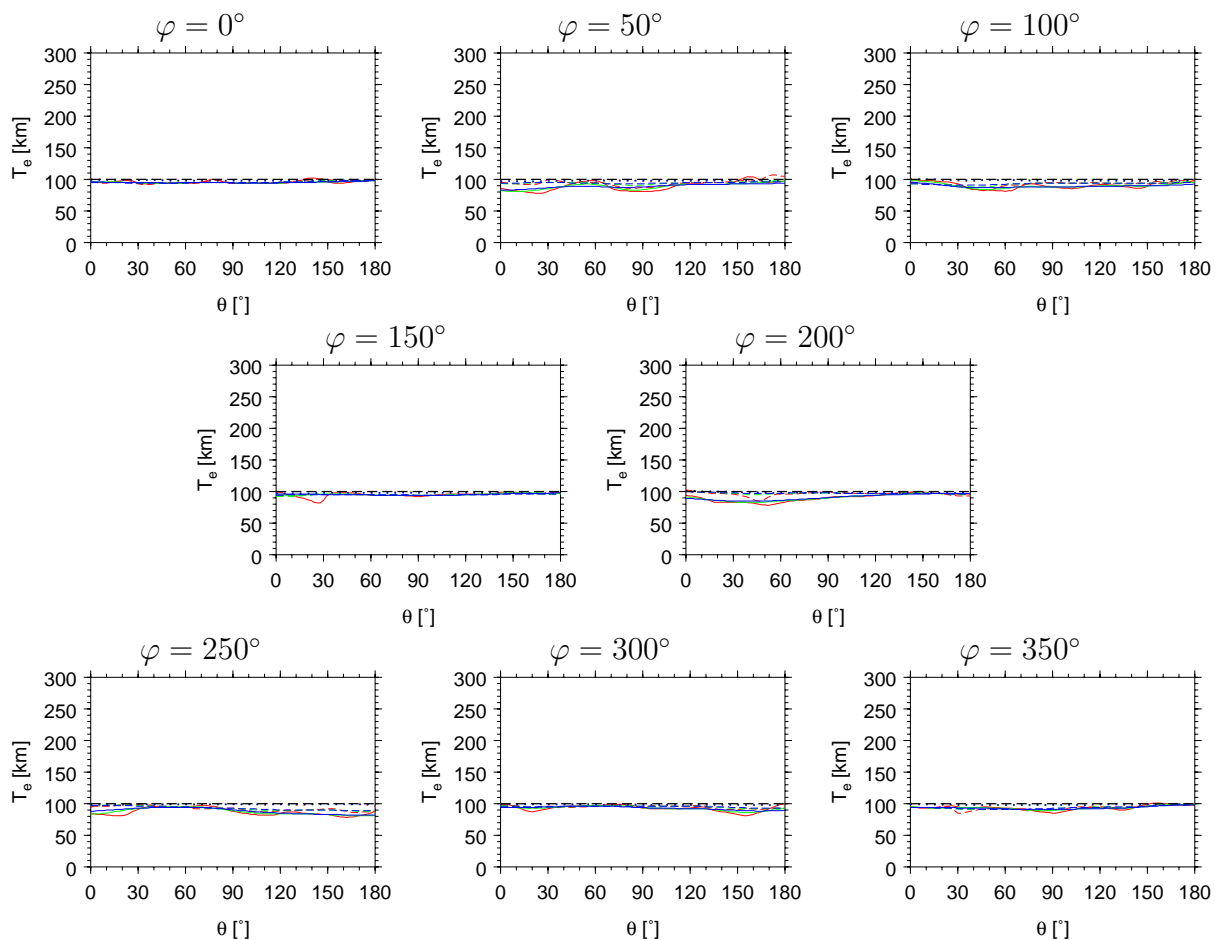


Obrázek 5.24: Řezy topografií Marsu pro $\varphi = 0^\circ$ (hnědá), $\varphi = 50^\circ$ (červená), $\varphi = 100^\circ$ (oranžová), $\varphi = 150^\circ$ (žlutá), $\varphi = 200^\circ$ (zelená), $\varphi = 250^\circ$ (tyrkysová), $\varphi = 300^\circ$ (modrá), $\varphi = 350^\circ$ (fialová).

budeme držet stále stejný $j_{max} = 50$, měnit budeme minimální stupeň $j_{min} = 2, 5, 10$.

Model 1

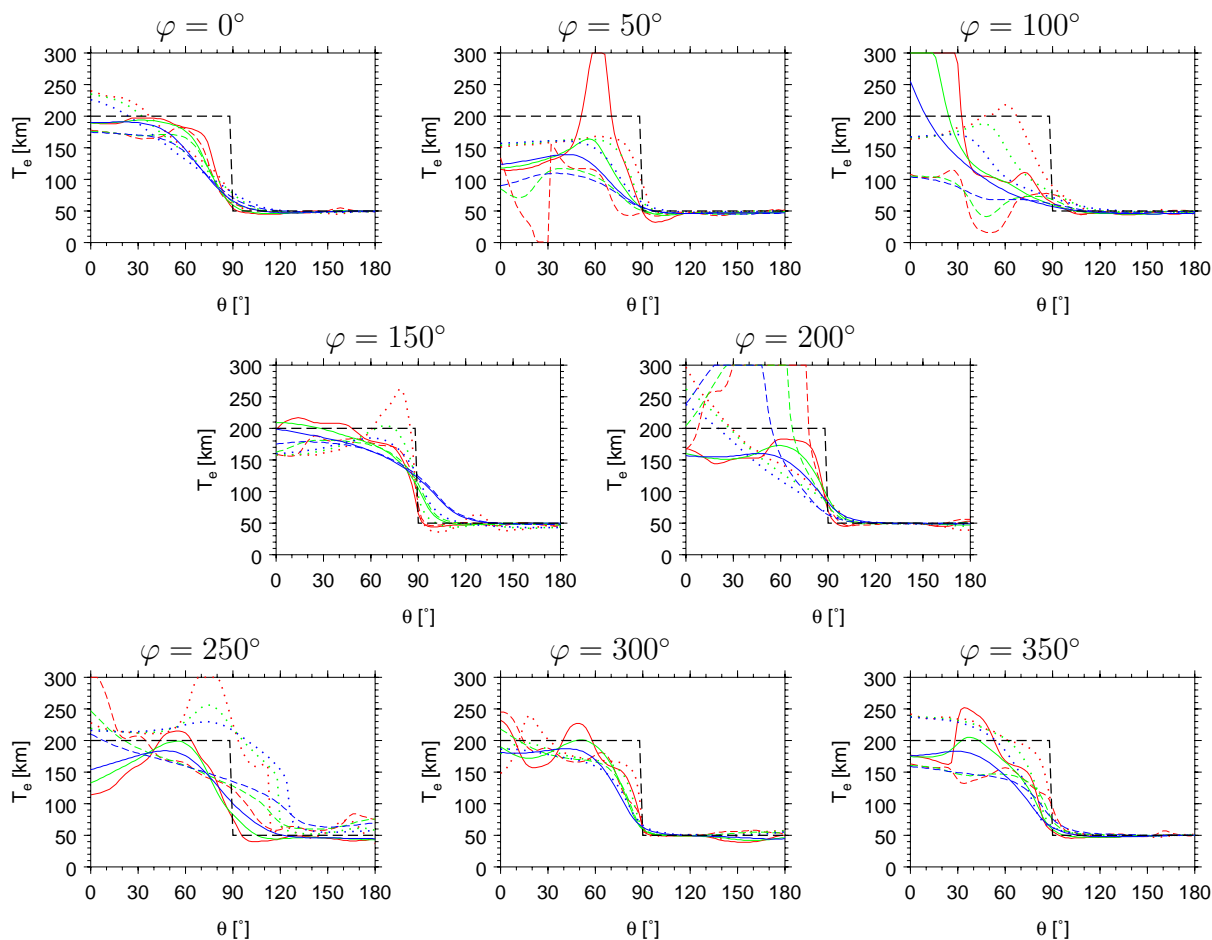
Výsledky inverze pro model 1 a jednotlivé řezy jsou na obr. 5.25. Pro tento nejjednodušší model dávají všechny použité kombinace filtrů a minimálních stupňů dobré výsledky, které od sebe nelze přesně oddělit. Přesto se pro některé řezy od původního modelu více odchylují výsledky pro minimální stupeň $j_{min} = 2$ (plné čáry, např. řez $\varphi = 200^\circ$ nebo $\varphi = 250^\circ$), což souvisí se vztahem vlnových délek filtru a zátěže (viz část 5.7). Z těchto plných čar se nejvýrazněji odchylují výsledky pro nejužší filtr (červené čáry). Naopak nejlepší výsledky lze při detailnějším přezkoumání vysledovat pro nejvyšší minimální stupeň $j_{min} = 10$ (tečkované čáry), a to pro všechny filtry a všechny uvažované řezy. Celkem je schopnost inverze poměrně dobře vystihnout model o konstantní tloušťce velmi dobrým výchozím krokem pro určení tloušťky elastické litosféry na Marsu v době zatížení topografií (viz kapitola 6).



Obrázek 5.25: Model 1 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí pro různé řezy topografií. Filtř s pološířkou 10° (červená barva), 20° (zelená barva) a 30° (modrá barva) a různý rozsah harmonických stupňů - $j = 2 - 50$ (plná čára), $j = 5 - 50$ (přerušovaná čára) a $j = 10 - 50$ (tečkovaná čára).

Model 2

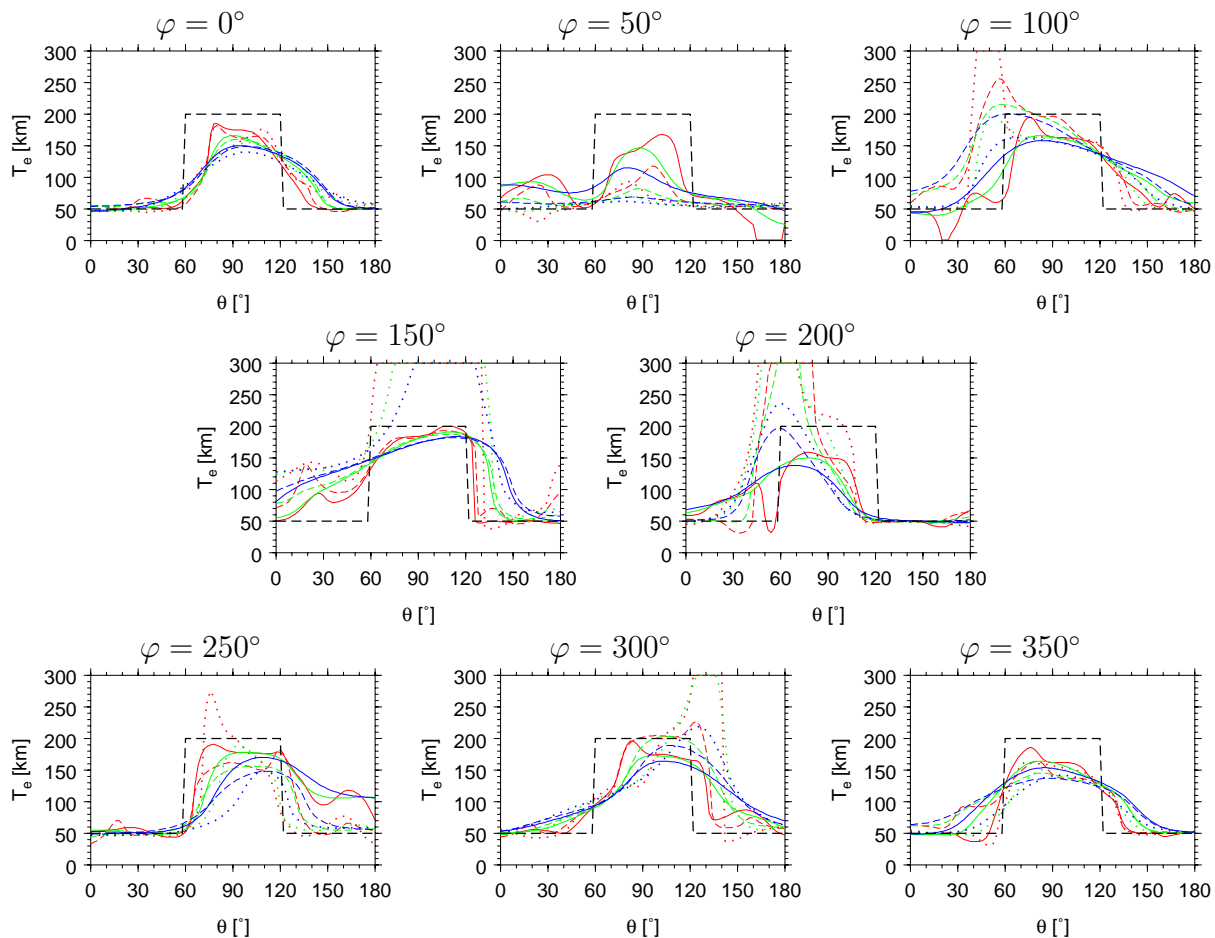
Výsledky inverze pro model 2 a jednotlivé řezy jsou na obr. 5.26. Pro tento model už výsledky inverze pro různé filtry a různé minimální stupně nejsou tak konzistentní jako v případě předchozího jednoduchého modelu. Kvalita výsledků závisí hodně na volbě konkrétního řezu, přesto lze vysledovat volby filtru a minimálního stupně, které vícekrát dají nejhorší výsledek. Touto volbou je především nejužší filtr a nejmenší minimální stupeň (červená plná čára, např. řez $\varphi = 50^\circ$ nebo $\varphi = 200^\circ$), i když i tato volba dává pro některé řezy dobrý výsledek (např. řez $\varphi = 0^\circ$ nebo $\varphi = 150^\circ$). Celkem lze za nejspolehlivější prohlásit filtr prostřední tloušťky ($\sigma = 20^\circ$) - přestože v některých případech jsou výsledky s tímto filtrem o něco málo horší než výsledky s užším filtrem, nejsou celkově tolik oscilující. Stejně jako v části 5.5 vidíme vliv různé citlivosti predikovaných koeficientů na tloušťku elastické litosféry (lepší vystižení menší tloušťky $T_e = 50$ km než velké tloušťky $T_e = 200$ km).



Obrázek 5.26: Model 2 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí pro různé řezy topografií. Filtr s pološířkou 10° (červená barva), 20° (zelená barva) a 30° (modrá barva) a různý rozsah harmonických stupňů - $j = 2 - 50$ (plná čára), $j = 5 - 50$ (přerušovaná čára) a $j = 10 - 50$ (tečkovaná čára).

Model 3

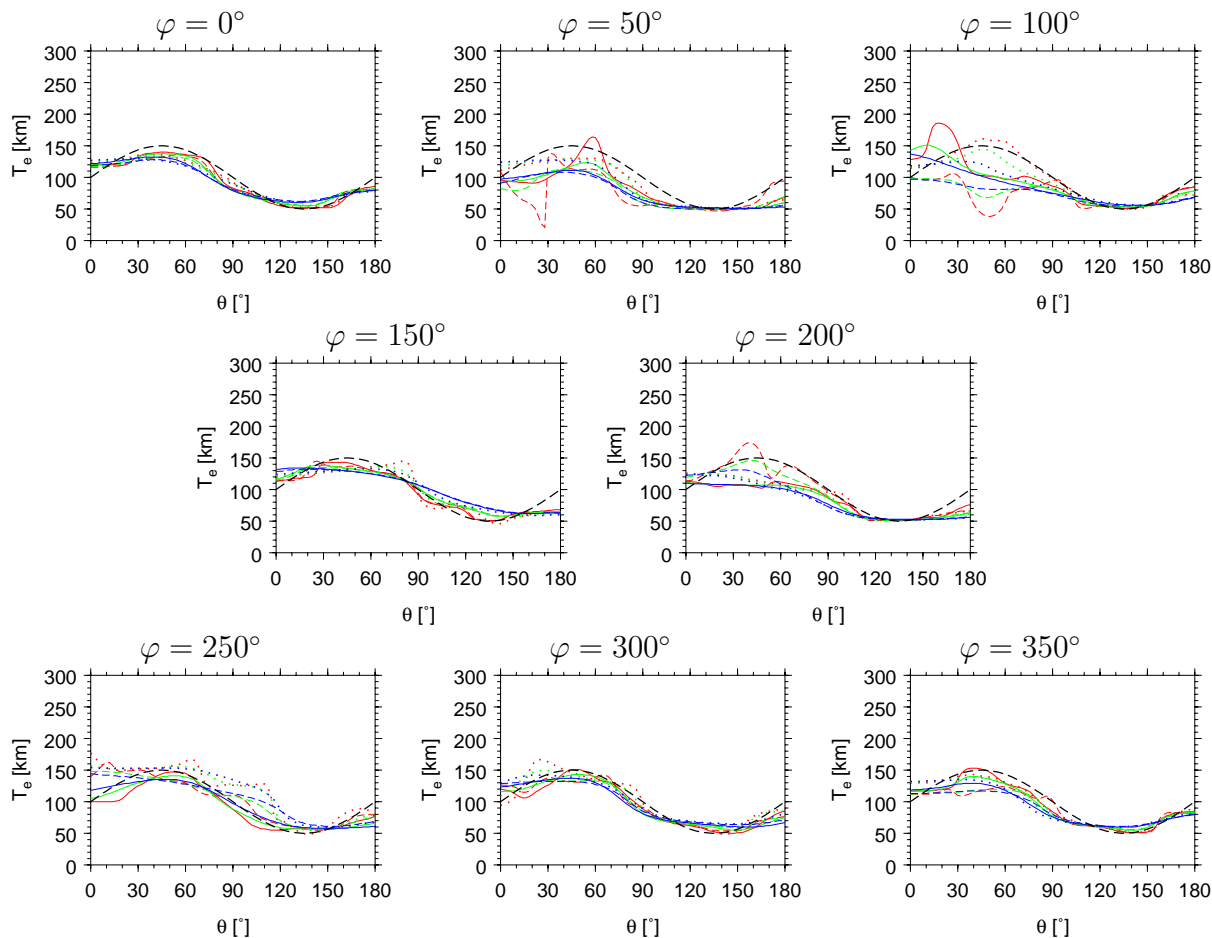
Výsledky inverze pro model 3 a jednotlivé řezy jsou na obr. 5.27. Pro tento model je situace velmi podobná jako v případě předchozího modelu 2. Celkově nejvíce oscilující výsledky dává inverze s filtrem o pološířce $\sigma = 10^\circ$, i když v některých případech dává překvapivě dobré výsledky (např. řez $\varphi = 0^\circ$ nebo $\varphi = 350^\circ$). Filtr s pološířkou $\sigma = 20^\circ$ se zdá i pro tento model býti nejspolehlivějším. Otázku nejvhodnějšího minimálního stupně neumíme jednoznačně zodpovědět ani pro model 3 - ve většině případů přinese (oproti našemu očekávání) zvýšení minimálního stupně zhoršení výsledků, což může souviset s rychlým spektrálním poklesem. Opět pozorujeme vliv rozdílné citlivosti harmonických koeficientů - inverze ve většině případů lépe vystihne menší tloušťky elastické litosféry než větší tloušťky.



Obrázek 5.27: Model 3 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí pro různé řezy topografií. Filtr s pološířkou 10° (červená barva), 20° (zelená barva) a 30° (modrá barva) a různý rozsah harmonických stupňů - $j = 2 - 50$ (plná čára), $j = 5 - 50$ (přerušovaná čára) a $j = 10 - 50$ (tečkovaná čára).

Model 4

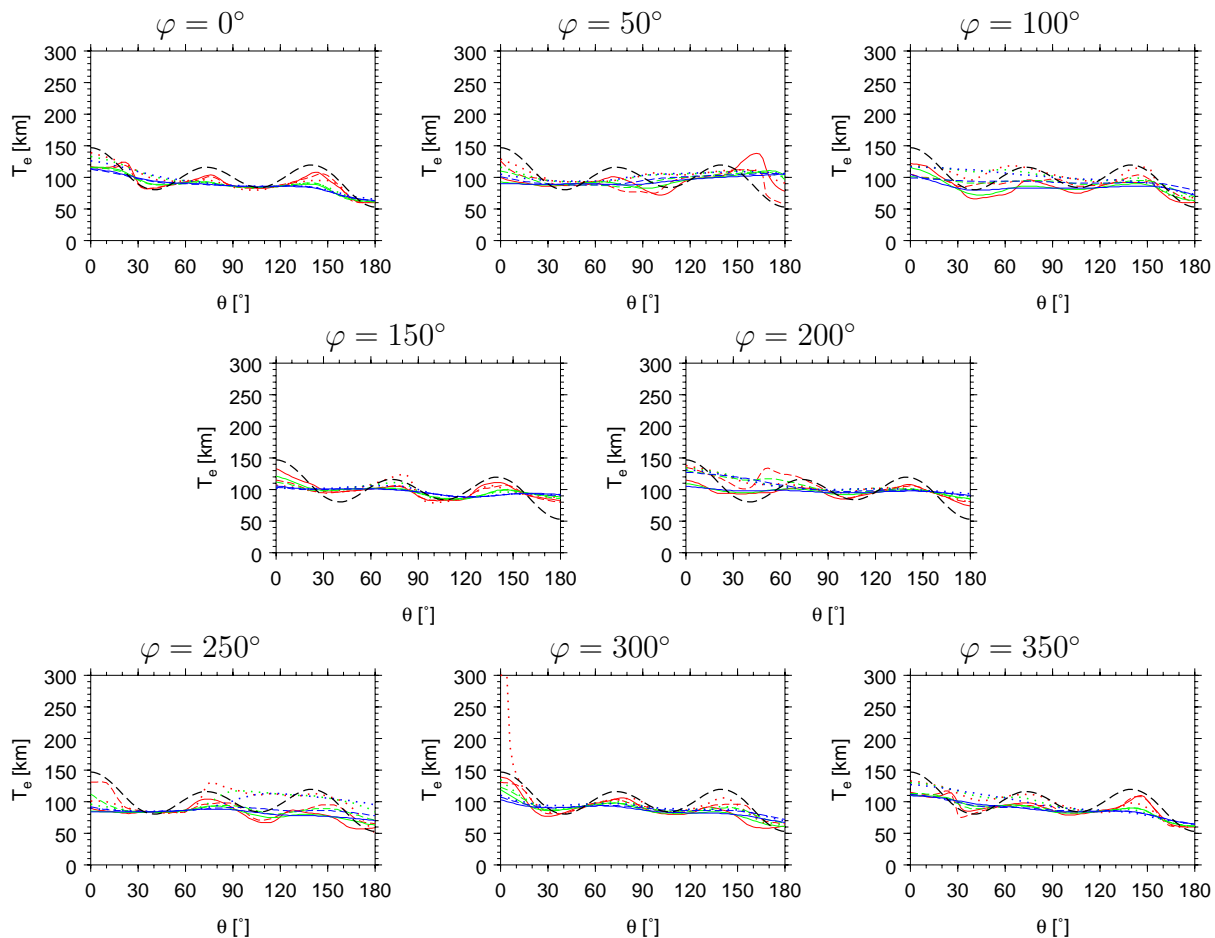
Výsledky inverze pro model 4 a jednotlivé řezy jsou na obr. 5.28. Tento model je podobného charakteru jako model 2, je ovšem výrazně hladší a hodnoty tloušťky elastické litosféry jsou menší - proto i výsledky jsou pro tento model výrazně lepší. Průměrnou hodnotu tloušťky elastické litosféry vystihneme ve většině případů velmi dobře a dokonce i její variace jsou (především pro užší filtry) v některých výsledcích dobře viditelné (např. řez $\varphi = 0^\circ$ nebo $\varphi = 300^\circ$). V několika případech opět výrazněji oscilují výsledky pro nejužší filtr (červená barva, např. řez $\varphi = 50^\circ$ nebo $\varphi = 100^\circ$), zvýšení minimálního stupně přináší ve většině případů zlepšení (především v případě nejvíce rozkmitaných výsledků, např. řez $\varphi = 50^\circ$ nebo $\varphi = 100^\circ$).



Obrázek 5.28: Model 4 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílů posunutí pro různé řezy topografií. Filtr s pološířkou 10° (červená barva), 20° (zelená barva) a 30° (modrá barva) a různý rozsah harmonických stupňů - $j = 2 - 50$ (plná čára), $j = 5 - 50$ (přerušovaná čára) a $j = 10 - 50$ (tečkovaná čára).

Model 5

Výsledky inverze pro model 5 a jednotlivé řezy jsou na obr. 5.29. Výsledky jsou velmi podobné výsledkům pro model 4, i když pro tento kratkovlnnější model je výhodnější použít filtr s nejmenší pološířkou, který dává v případě modelu 5 nejlepší výsledky (červená barva). Průměrnou hodnotu tloušťky elastické litosféry se nám daří vystihnout velmi dobře, s nejužším filtrem pak docela dobře vystihneme i drobnější variace (např. řez $\varphi = 0^\circ$). Ve většině případů, kdy se nám podaří vystihnout tvar modelu, je ale amplituda poněkud podhodnocená (např. řez $\varphi = 0^\circ$). Zvýšení minimálního stupně j_{min} nepřináší v tomto případě zlepšení, spíše naopak některé dobré výsledky zhoršuje (např. pro řez $\varphi = 300^\circ$)



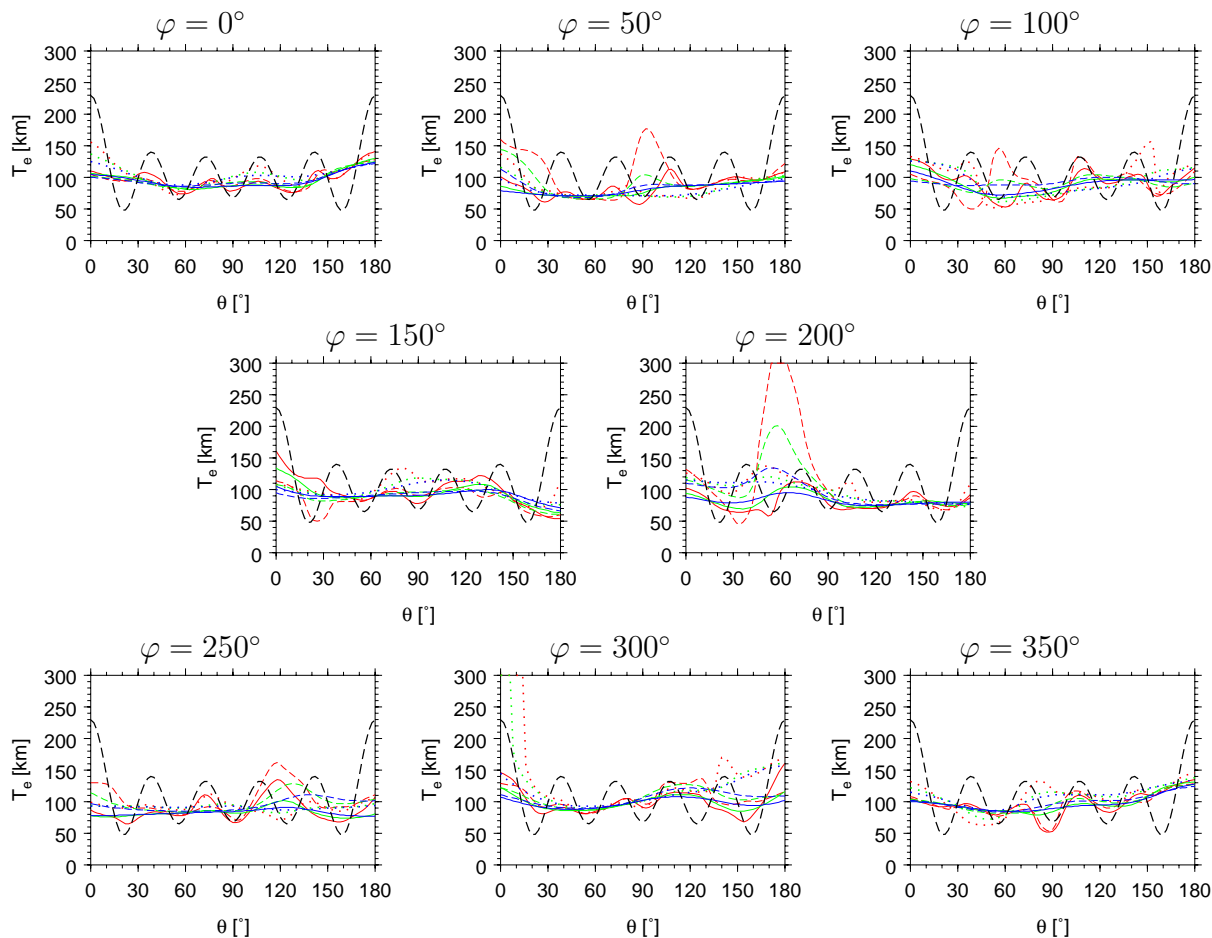
Obrázek 5.29: Model 5 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí pro různé řezy topografií. Filtr s pološírkou 10° (červená barva), 20° (zelená barva) a 30° (modrá barva) a různý rozsah harmonických stupňů - $j = 2 - 50$ (plná čára), $j = 5 - 50$ (přerušovaná čára) a $j = 10 - 50$ (tečkovaná čára).

Model 6

Výsledky inverze pro model 6 a jednotlivé řezy jsou na obr. 5.30. Výsledky pro poslední model jsou opět konzistentní s výsledky pro předchozí modely (především s modely 4 a 5). Díky krátkovlnnému charakteru modelu se nám daří vystihnout především průměrnou tloušťku, variace pak v některých případech s nejužším filtrem (např. řez $\varphi = 0^\circ$), ale spíše jen lokálně (např. řez $\varphi = 250^\circ$ a $\theta = 60^\circ - 100^\circ$ nebo řez $\varphi = 100^\circ$ a $\theta = 90^\circ - 120^\circ$). Zvýšení minimálního stupně přináší spíše zhoršení výsledků (např. řez $\varphi = 200^\circ$ nebo $\varphi = 300^\circ$).

Celkem lze z testů provedených s řezy reálnou topografií Marsu vyvodit několik závěrů:

- Důležitou roli v inverzi hraje vztah mezi vlnovou délkou zátěže a modelu - při použití stejné zátěže se nám lépe daří vystihnout především hladší dlouhovlnnější modely (např. model 1 nebo 4). Tím jsme potvrdili závěry z části 5.5.
- Nejužší filtr o pološířce $\sigma = 10^\circ$ je vhodný především pro krátkovlnné modely, kde v některých případech dobře vystihujeme i drobné variace v tloušťce. Celkově ale



Obrázek 5.30: Model 6 (černá přerušovaná čára) a výsledky inverze počítané minimalizací rozdílu posunutí pro různé řezy topografií. Filtř s pološířkou 10° (červená barva), 20° (zelená barva) a 30° (modrá barva) a různý rozsah harmonických stupňů - $j = 2 - 50$ (plná čára), $j = 5 - 50$ (přerušovaná čára) a $j = 10 - 50$ (tečkovaná čára).

není příliš spolehlivý a často dává příliš oscilující výsledky. V inverzi s reálnými daty navíc nepředpokládáme tak výrazně krátkovlnné modely (jako např. model 6).

- Volba minimálního stupně j_{min} má na inverzi značný vliv. I když jsme zvýšením minimálního stupně výsledek občas zlepšili a občas zhoršili, je zřejmé, že minimální stupeň 2 není příliš vhodnou volbou, protože často dostáváme s tímto minimálním stupněm velmi špatné výsledky (souvislost se vztahem mezi vlnovou délkou filtru a zátěže, viz část 5.7).
- Na výsledky má jistě vliv i výkonové spektrum použité topografie - např. topografie pro řezy odpovídající hodnotám $\varphi = 50^\circ$ a $\varphi = 250^\circ$ mají výrazně největší výkon právě na stupni 2. Výsledky získané pro tyto řezy se tak příliš nezlepší zvýšením minimálního stupně, neboť tím odebíráme data, která mají výrazně největší hodnotu a tedy nesou nejvíc informací (např. výsledky pro model 2 a řez $\varphi = 250^\circ$, kde zvýšení minimálního stupně výsledek dokonce o dost zhorší).

Nejdůležitější je pro nás zjištění, že inverze velmi dobře vystihne konstantní tloušťku (model 1), neboť nám při výpočtu s reálnými daty půjde především o to, vystihnout nějakou charakteristickou tloušťku pro danou oblast. Testy navíc ukazují, že v jednodušších případech ne příliš krátkovlnného a navíc poměrně hladkého modelu (model 4) jsme při vhodné volbě filtru a minimálního stupně schopni dostat i nějaké drobnější variace v tloušťce elastické litosféry.

5.7 Vztah mezi vlnovými délkami modelu, zátěže a filtru

Pokusme se určit harmonický stupeň j , který by odpovídal filtru o dané pološířce. Jako charakteristiku filtru vybereme plnou šířku v polovině maxima (FWHM, *full width in half maximum*) - pro úhlovou vzdálenost odpovídající tomuto parametru platí

$$\delta_{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \quad (5.11)$$

odpovídající charakteristický rozměr filtru je

$$\lambda = \frac{\pi R}{180} \delta_{FWHM} = \frac{\pi R \sqrt{2 \ln 2}}{90} \sigma \quad (5.12)$$

Charakteristický rozměr sférické harmonické funkce lze definovat jako vzdálenost mezi dvěma uzly, tedy

$$\lambda = \frac{\pi R}{j} \quad (5.13)$$

Spojením vzorců (5.12) a (5.13) dostáváme

$$j = \frac{180}{\delta_{FWHM}} = \frac{180}{2\sqrt{2 \ln 2} \sigma} = \frac{90}{\sqrt{2 \ln 2} \sigma} \quad (5.14)$$

Pro pološířky filtrů $\sigma = 10^\circ$, resp. 20° , resp. 30° tak dostáváme hodnoty $j = 8$, resp. 4, resp. 3 (zaokrouhleno nahoru).

Na výsledek inverze má vliv vzájemný vztah mezi vlnovými délkami modelu (λ_m), zátěže (λ_z) a filtru (λ_f). Pro správné fungování inverze je nutné, aby se model jevil konstantní vzhledem k zátěži i vzhledem k filtru (předpoklad používané spektrální aproximace) a aby filtr byl dlouhovlnnější než zátěž (v opačném případě je zátěž filtrem porušena). Tedy

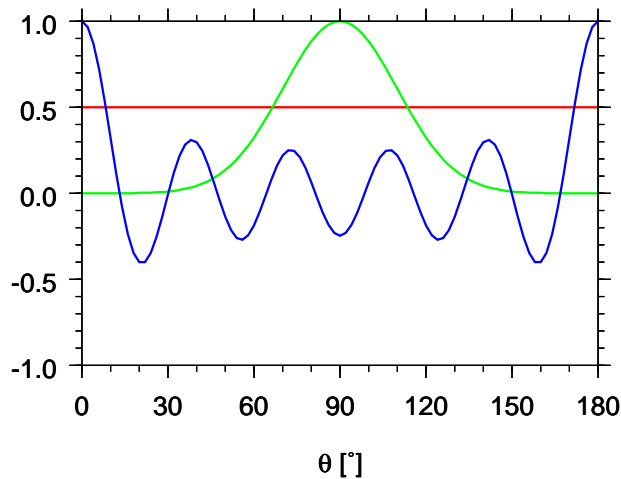
$$\lambda_m > \lambda_f > \lambda_z \quad (5.15)$$

V řeči harmonických stupňů vztah (5.15) vypadá následovně

$$j_m < j_f < j_z \quad (5.16)$$

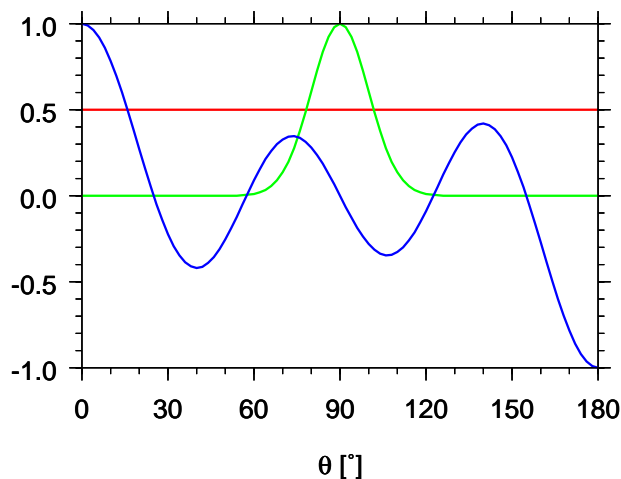
Uvedme několik ilustrativních případů:

- Mějme model o konstantní tloušťce ($j = 0$), filtr o pološířce $\sigma = 20^\circ$ ($j = 4$) a zátěž na harmonickém stupni $j = 10$. V tomto případě je splněn vztah (5.16) a inverze by měla fungovat, neboť model je vůči zátěži i filtru konstantní a zároveň filtr v daném místě zátěž příliš neporuší (obr. 5.31). Z provedených testů nastává tato situace např. na obr. 5.18 pro zátěž na harmonickém stupni $j = 20$.



Obrázek 5.31: Konstantní model (červená barva), filtr o pološířce $\sigma = 20^\circ$ (zelená barva) a zátěž na harmonickém stupni $j = 10$ (modrá barva).

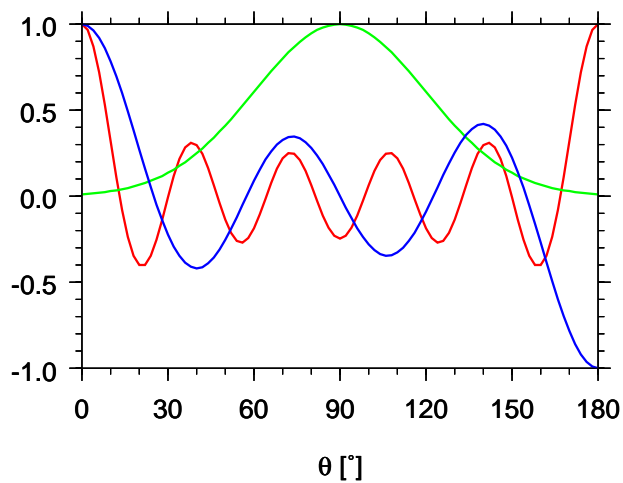
- Mějme opět model o konstantní tloušťce ($j = 0$), filtr o pološířce $\sigma = 10^\circ$ ($j = 8$) a zátěž na harmonickém stupni $j = 5$. V tomto případě sice platí, že model je podstatně dlouhovlnnější než zátěž, ale filtr je krátkovlnnější než zátěž, tedy zátěž ve filtračním okénku ani jednou nezkmitne. Signál od zátěže tak bude značně porušený a inverze nebude fungovat tak dobře, jako v předchozím případě (viz obr. 5.32). V provedených testech nastává tato situace např. na obr. 5.18 pro zátěž na harmonickém stupni $j = 5$.



Obrázek 5.32: Konstantní model (červená barva), filtr o pološířce $\sigma = 10^\circ$ (zelená barva) a zátěž na harmonickém stupni $j = 5$ (modrá barva).

- Mějme tentokrát krátkovlnný model tloušťky elastické litosféry ($j = 10$). Filtr zvolíme dlouhovlnný s pološířkou $\sigma = 30$ ($j = 3$) a zátěž na harmonickém stupni $j = 5$. Zátěž je sice krátkovlnnější než filtr a její signál tedy nebude tolik poškozen, ale teď je zase příliš nevhodný model - v žádném případě ho nemůžeme považovat

za konstantní vzhledem k zátěži. Inverze v tomto případě nebude správně fungovat (viz obr. 5.33). V testech se tato situace objevila např. na obr. 5.14 vlevo nahoře pro $j = 5$ a $\sigma = 30^\circ$ - vystihneme průměrnou hodnotu, ale ne variace.



Obrázek 5.33: Model na stupni $j = 10$ (červená barva), filtr o pološířce $\sigma = 30^\circ$ (zelená barva) a zátěž na harmonickém stupni $j = 5$ (modrá barva).

Kapitola 6

Princip zamrzlé litosféry

Spodní hranici litosféry můžeme definovat několika způsoby - jedním z nich je definice pomocí izotermy (např. [15]). Litosférou tak chápeme nejchladnější a nejzevnější vrstvu planety, která kompenzuje tlaky působené topografií na geologicky dlouhých časových škálách [15].

Mějme elastickou litosféru konstantní tloušťky Te_1 na celém povrchu planety a v nějakém místě ji zatěžíme (obr. 6.1 a). Litosféra se prohne o hodnotu u_1 (obr. 6.1 b). S průběhem času planeta chladne a litosféra tloustne, neboť její spodní hranice se posouvá více do nitra planety - pak máme na celé planetě litosféru o tloušťce Te_2 , která je v jednom místě prohnutá o hodnotu u_1 . Litosféru znovu zatížíme na jiném místě (obr. 6.1 c). Výsledkem je další prohnutí litosféry u_2 (obr. 6.1 d). Díky větší tloušťce litosféry je ale toto prohnutí (i pro stejnou zátěž jako v prvním případě) menší než prohnutí pro tenčí litosféru, tedy $u_1(Te_1) > u_2(Te_2)$. Z tohoto pohledu je náš přístup, kdy počítáme inverzi jen pro konkrétní oblast (určenou filtrem) a předpokládáme, že tloušťka elastické litosféry je konstantní (předpoklad užitý v používané spektrální aproximaci, viz příloha B), správný. Místo současné tloušťky litosféry na Marsu tak určujeme tloušťku v době zatížení topografií (což je ve shodě s citovanou literaturou, viz část 7.2). V této kapitole se pokusíme otestovat fungování výše popsaného principu v naší inverzi.

6.1 Formulace testovací úlohy

Budeme zatěžovat elastickou litosféru konstantní tloušťky různými zátěžemi. Původní výška zátěže l se rozdělí na průhyb litosféry u (počítán kladně směrem od středu) a povrchovou topografií t

$$l = t + u \quad (6.1)$$

spektrálně

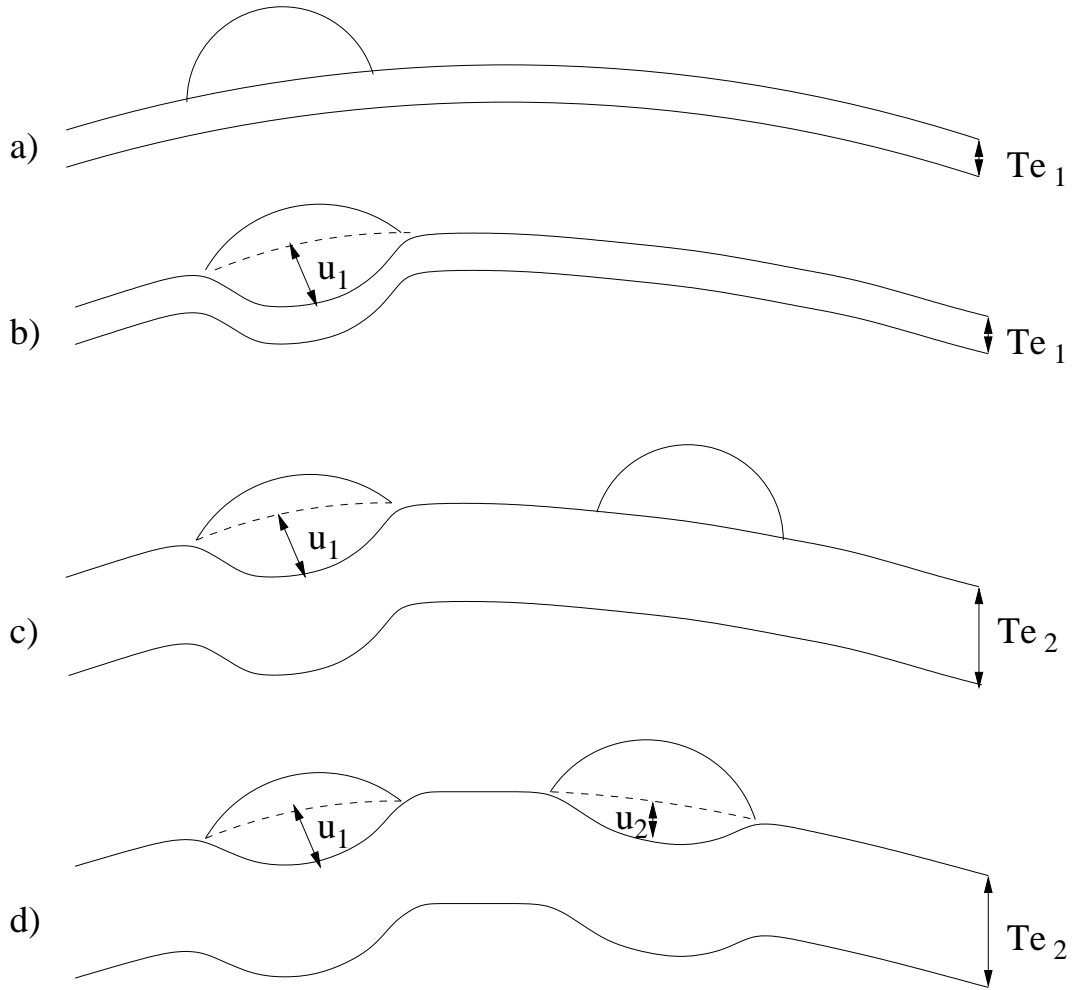
$$l_{jm} = t_{jm} + u_{jm} \quad (6.2)$$

Pokud by byla topografie kompenzována pouze izostaticky, platil by jednoduchý vztah mezi průhybem litosféry a povrchovou topografií

$$t_{\varrho} = u \Delta \varrho \quad (6.3)$$

spektrálně

$$t_{jm} \varrho = u_{jm} \Delta \varrho \quad (6.4)$$



Obrázek 6.1: Princip zamrzlé litosféry (podrobný popis je v textu).

Je-li zatížení kompenzováno elasticky, platí podobný vztah

$$C_j t_{jm} \varrho = u_{jm} \Delta \varrho \quad (6.5)$$

kde C_j je kompenzační koeficient (viz příloha B). Vyjádřením koeficientů posunutí ze vztahu (6.5) dostáváme

$$u_{jm} = \frac{\varrho}{\Delta \varrho} C_j t_{jm} \quad (6.6)$$

(viz (B.21)). Jejich dosazením do rovnice (6.2) dostáváme vztah mezi koeficienty původní zátěže l_{jm} a povrchové topografie po prohnutí t_{jm}

$$l_{jm} = \left(\frac{\Delta \varrho + \varrho C_j}{\Delta \varrho} \right) t_{jm} \quad (6.7)$$

resp.

$$t_{jm} = \left(\frac{\Delta \varrho}{\Delta \varrho + \varrho C_j} \right) l_{jm} \quad (6.8)$$

Z koeficientů topografie vypočteme koeficienty geoidu podle vztahu (B.26).

Naše úloha je lineární, můžeme proto koeficienty topografie i geoidu od jednotlivých zátěží sčítat. Napočítáme si syntetická data pro jednoduchý scénář vývoje povrchu planety - vždy budeme předpokládat konstantní tloušťku elastické litosféry a tu zatížíme Gaussovou funkcí

$$l(\theta, \varphi) = A \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6.9)$$

kde A je amplituda, δ je úhlová vzdálenost mezi bodem o souřadnicích (θ, φ) a středem Gaussovy funkce (θ_0, φ_0) a σ je pološířka Gaussovy funkce. Pro jednu tloušťku litosféry a jednu zátěž vypočítáme koeficienty topografie a geoidu. Poté vybereme jinou tloušťku litosféry a jinou zátěž a opět napočítáme odpovídající koeficienty topografie a geoidu. Takto si napočteme koeficienty geoidu a topografie pro všechny uvažované zátěže a tloušťky a tyto koeficienty sečteme. Tím dostaneme koeficienty výsledné topografie a výsledného geoidu, které budeme invertovat.

Pro přehlednost uvedme celý postup:

1. Volba počtu zátěží (i_{max}), jejich parametrů (amplituda A^i , souřadnice středu θ_0^i, φ_0^i , pološířka σ^i) a odpovídajících tloušťek elastické litosféry pod zátěžemi (T_e^i)
2. Výpočet všech zátěží v prostoru podle vztahu (6.9)
3. Výpočet harmonických koeficientů jednotlivých zátěží (podle (A.9)) a odpovídajících topografií a geoidů podle vztahů (6.8) a (B.26)

$$l^i(\theta, \varphi) \rightarrow l_{jm}^i$$

$$l_{jm}^i \rightarrow t_{jm}^i(T_e^i)$$

$$t_{jm}^i(T_e^i) \rightarrow h_{jm}^i(T_e^i)$$

4. Součet koeficientů topografií a geoidů pro všechny zátěže

$$t_{jm} = \sum_{i=1}^{i_{max}} t_{jm}^i(T_e^i)$$

$$h_{jm} = \sum_{i=1}^{i_{max}} h_{jm}^i(T_e^i)$$

5. Dosazení vypočtených koeficientů topografie a geoidu do prostorové inverze formulované v části 4.2 a výpočet modelu tloušťky elastické litosféry

Jelikož se nám v předchozí kapitole nepodařilo přesvědčivě určit optimální filtr (i když nejvíce důvěryhodné výsledky dával prostřední filtr o pološířce $\sigma = 20^\circ$) a minimální stupeň, budeme opět používat různě široké filtry ($\sigma = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 2 - 10$). Minimalizujeme již rozdíl geoidů (viz poznámka v části 5.4.2) a filtr posouváme s krokem $\Delta\theta = \Delta\varphi = 5^\circ$ ¹

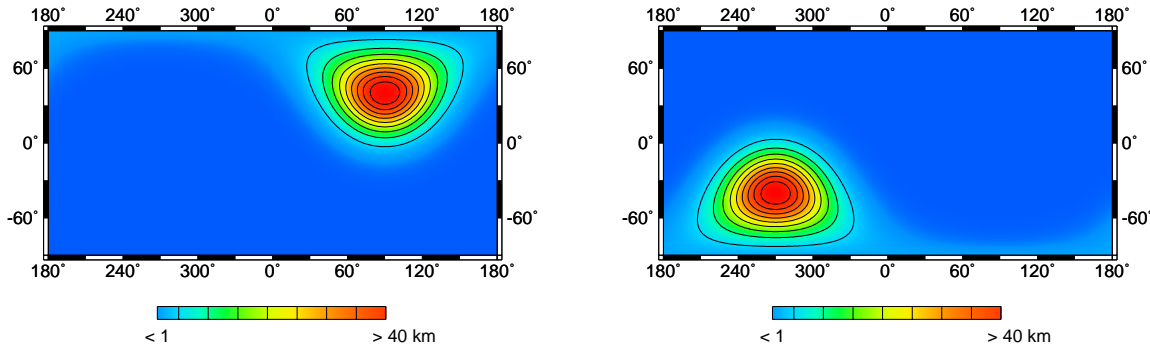
¹Filtr teď posouváme ve směru obou souřadnic θ a φ , a proto by byl výpočet s původním krokem $\Delta\theta = \Delta\varphi = 2^\circ$ poměrně časově náročný. Podle testů s krokem posunu filtru (část 5.4.1) navíc ani zvětšení kroku na 5° nepřináší výrazné zhoršení výsledků.

Model 1

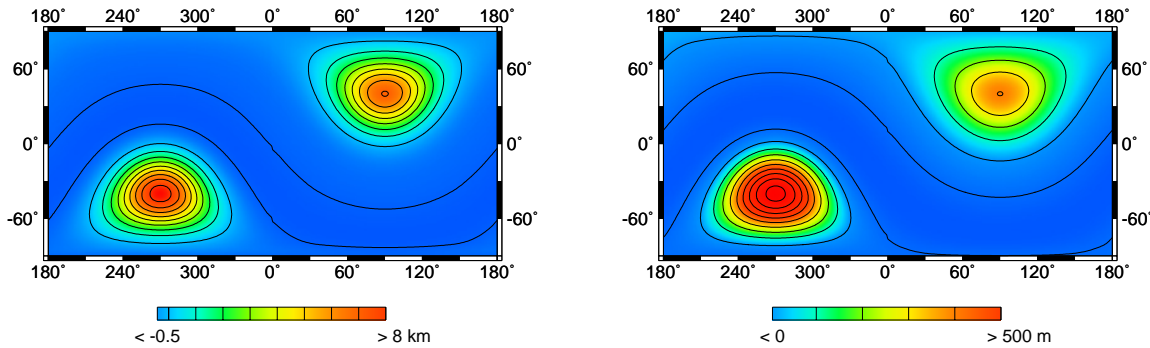
Uvažujme nejprve velmi jednoduchý model se dvěma zátěžemi, které se nepřekrývají:

- $T_e^1 = 20 \text{ km}$, $\theta_0^1 = 40^\circ$, $\varphi_0^1 = 90^\circ$, $\sigma^1 = 20^\circ$, $A^1 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^2 = 100 \text{ km}$, $\theta_0^2 = -40^\circ$, $\varphi_0^2 = 270^\circ$, $\sigma^2 = 20^\circ$, $A^2 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$

Na obr. 6.2 jsou vykresleny obě zátěže, na obr. 6.3 výsledná topografie a geoid a na obr. 6.4 výkonová spektra topografie a geoidu. Výsledky inverze pro různé filtry a různé

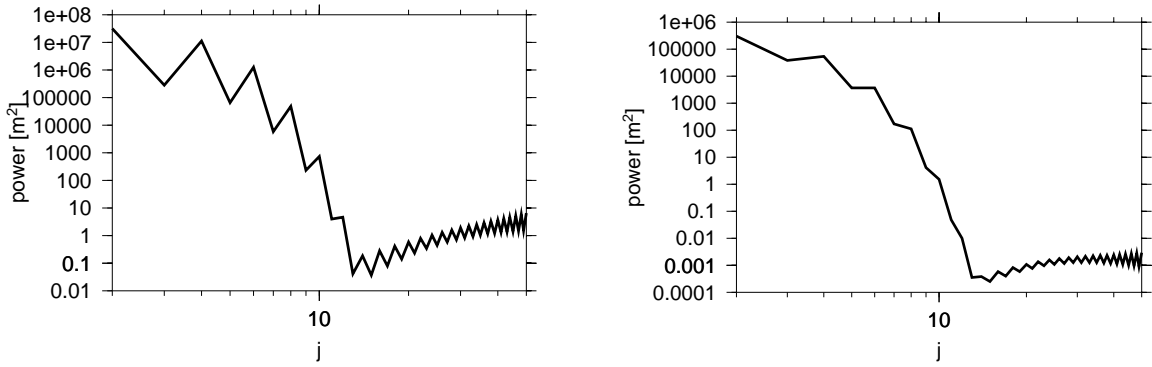


Obrázek 6.2: Model 1: zátěž 1 (vlevo) a zátěž 2 (vpravo).

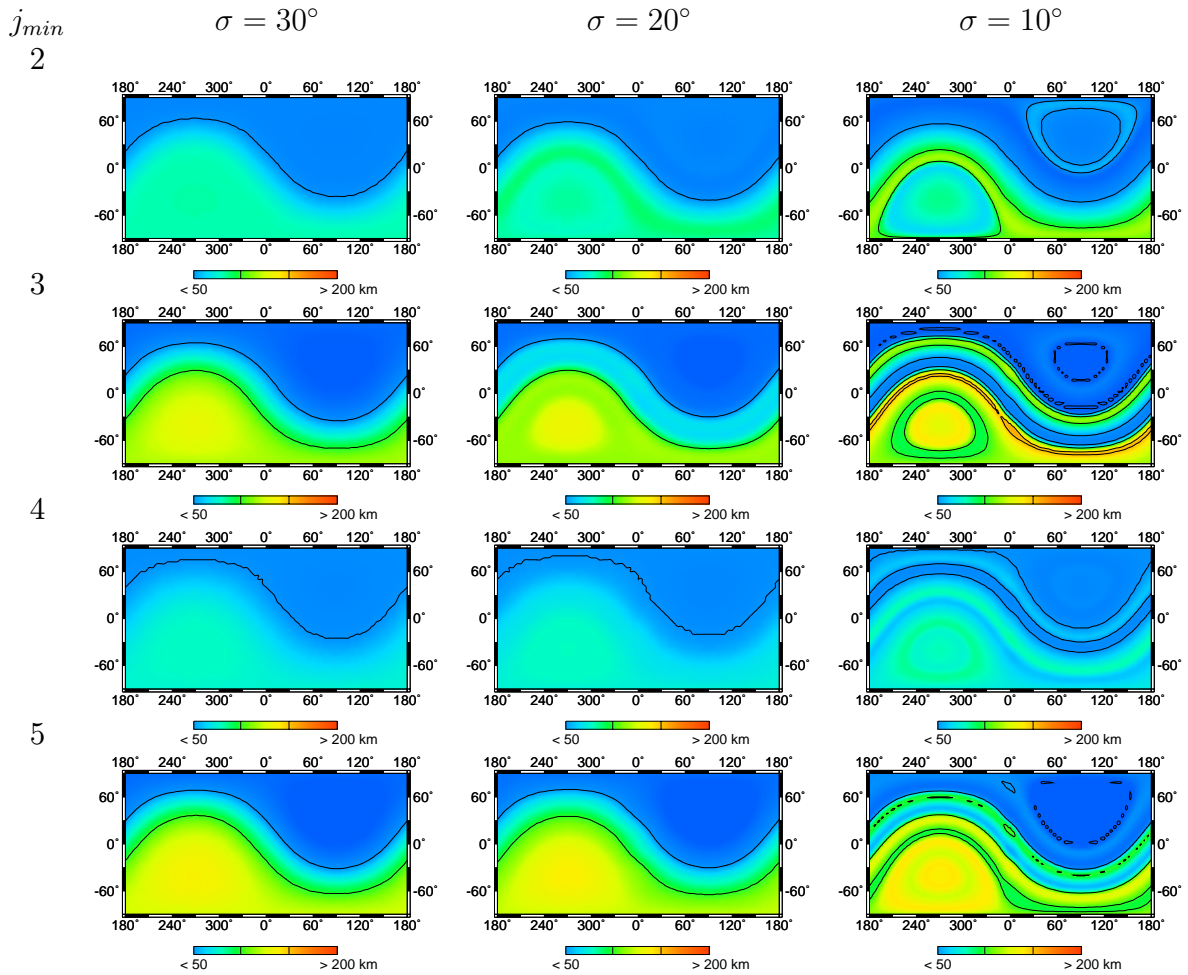


Obrázek 6.3: Model 1: výsledná topografie (vlevo) a odpovídající geoid (vpravo) pro stupně $j = 2 - 50$.

minimální stupně jsou na obr. 6.5 a 6.6. Z obrázků je zřejmé, že výsledky pro různé filtry jsou vcelku konzistentní, i když lze opět pozorovat, že výsledky pro nejužší filtr s pološířkou $\sigma = 10^\circ$ jsou v některých případech (např. $j_{min} = 3$) hodně oscilující. Velmi výrazný je ale rozdíl mezi výsledky pro různé minimální stupně, konkrétně lze sledovat rozdíl mezi výsledky pro liché, resp. sudé, minimální stupně. I když tvarově jsou si výsledné modely velmi podobné, výsledky pro sudé minimální stupně mají výrazně menší amplitudy (dosahují maxim přibližně pod 100 km). Naopak výsledky pro liché minimální stupně dosahují maxim okolo 150 km a mají i výraznější minima. Při pohledu na výkonová spektra se nabízí snadné vysvětlení. Výkonové spektrum geoidu i topografie (obr. 6.4) má totiž značně oscilující charakter - dosahuje lokálních maxim pro sudé stupně a lokálních minim pro liché stupně. Rozdíl mezi výkonem na sudých a lichých

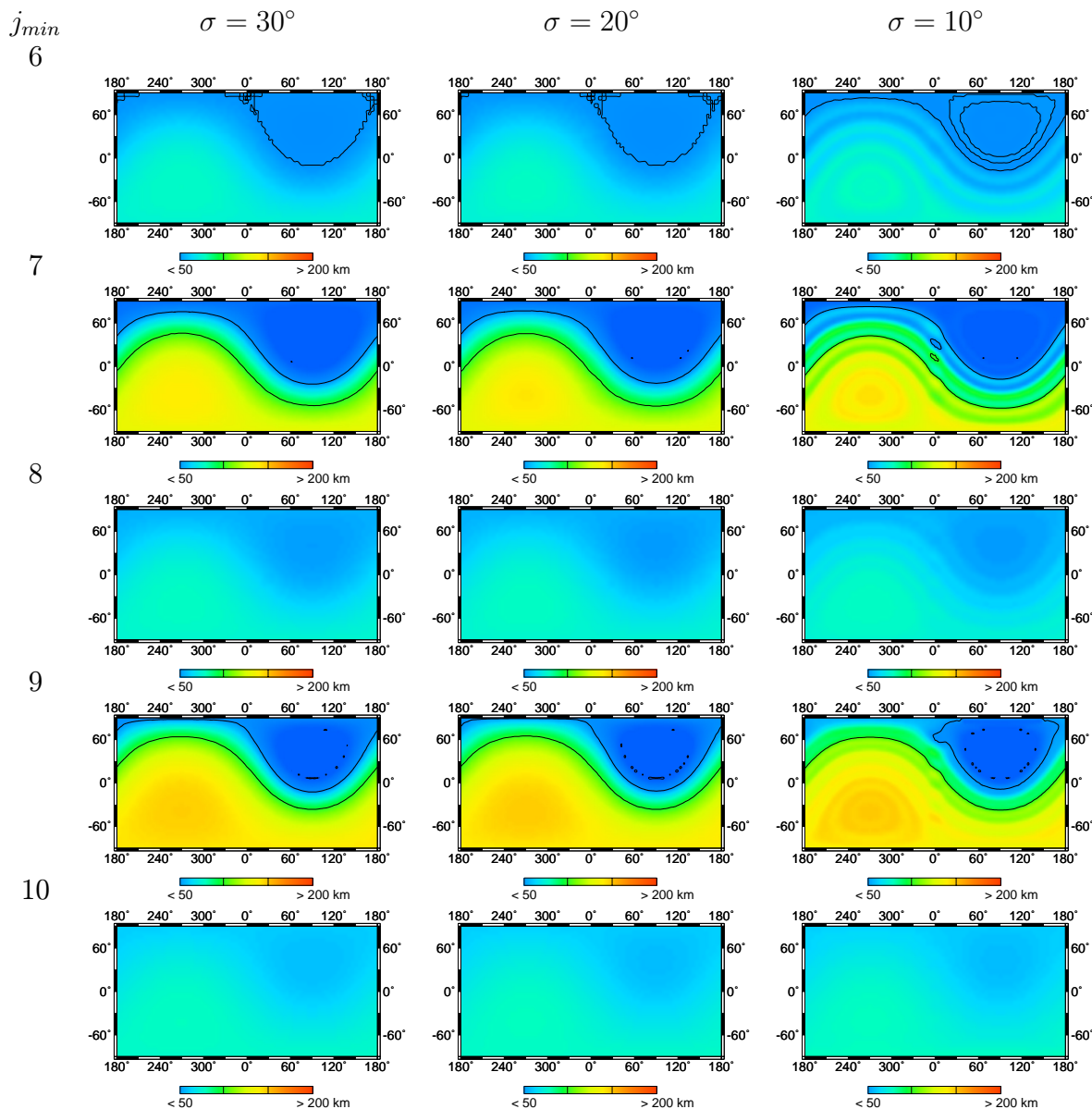


Obrázek 6.4: Model 1: výkonové spektrum topografie (vlevo) a geoidu (vpravo).



Obrázek 6.5: Model 1: vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 2 - 5$).

stupních přitom dosahuje velikosti dvou řádů (v případě topografie), resp. jednoho řádu (v případě geoidu). Tyto oscilace jsou zřejmě způsobeny velmi symetrickým rozložením zátěže, neboť zátěže 1 a 2 jsou na sféře umístěny antipodálně (protilehle). Pro maxima ve výkonovém spektru dostáváme menší výchylky od střední tloušťky elastické litosféry, což



Obrázek 6.6: Model 1: vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 6 - 10$).

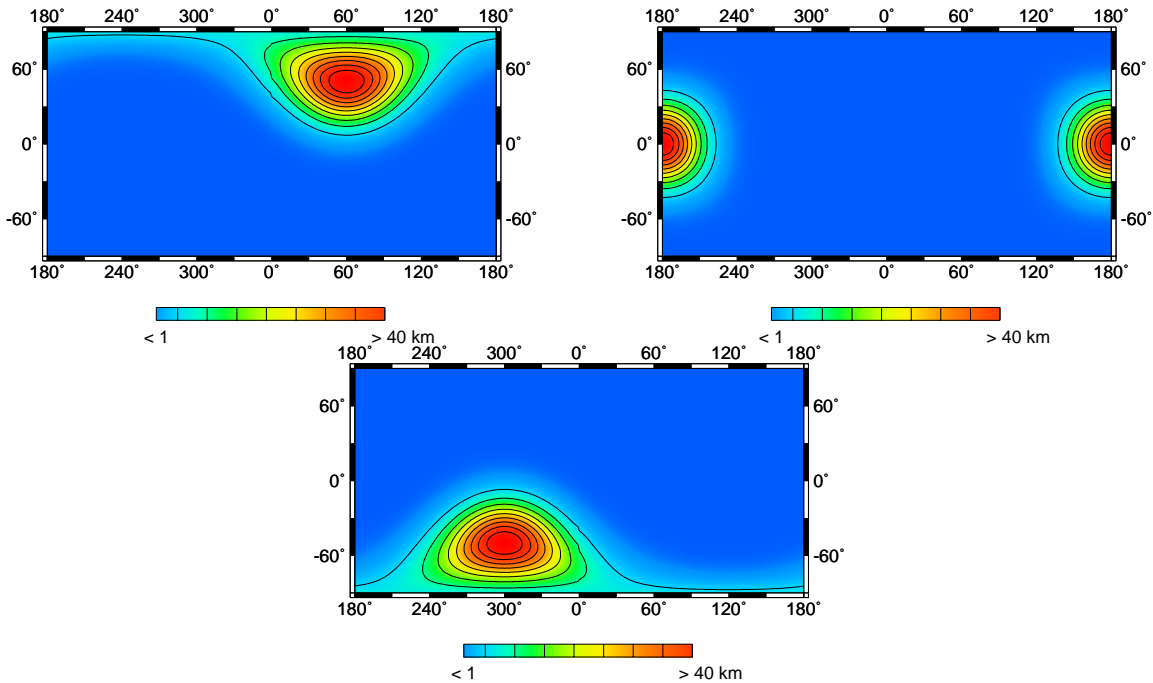
zřejmě souvisí s faktem, že naše inverze tyto výchylky spíše podceňuje (což bylo patrné i v testech provedených v kapitole 5). Za správnější považujeme výsledky pro sudé stupně (v oblasti, kde byla zatížena litosféra tloušťky 20 km, dostáváme hodnoty okolo 30 km a v druhé části planety, kde byla zatížena litosféra tloušťky 100 km, dostáváme tloušťky kolem 80 km). V dalších modelech se pokusíme vyvarovat symetrického rozmístění zátěží a tedy problémů s oscilujícím spektrem.

Model 2

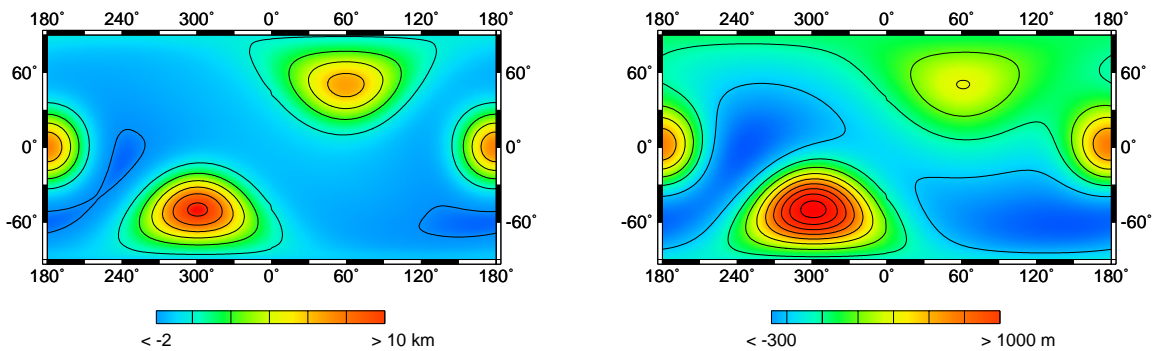
Přidáme další zátěž a budeme ještě stále pracovat s nepřekrývajícími se zátěžemi, pokusíme se je ale rozložit tak, aby výsledná pole (topografie a geoid) byla méně symetrická:

- $T_e^1 = 20 \text{ km}$, $\theta_0^1 = 50^\circ$, $\varphi_0^1 = 60^\circ$, $\sigma^1 = 20^\circ$, $A^1 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^2 = 100 \text{ km}$, $\theta_0^2 = 0^\circ$, $\varphi_0^2 = 180^\circ$, $\sigma^2 = 20^\circ$, $A^2 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^3 = 200 \text{ km}$, $\theta_0^3 = -50^\circ$, $\varphi_0^3 = 300^\circ$, $\sigma^3 = 20^\circ$, $A^3 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$

Na obr. 6.7 jsou vykresleny všechny tři zátěže, na obr. 6.8 výsledná topografie a na obr. 6.9 výkonová spektra topografie a geoidu. Výsledky inverze pro různé filtry a různé

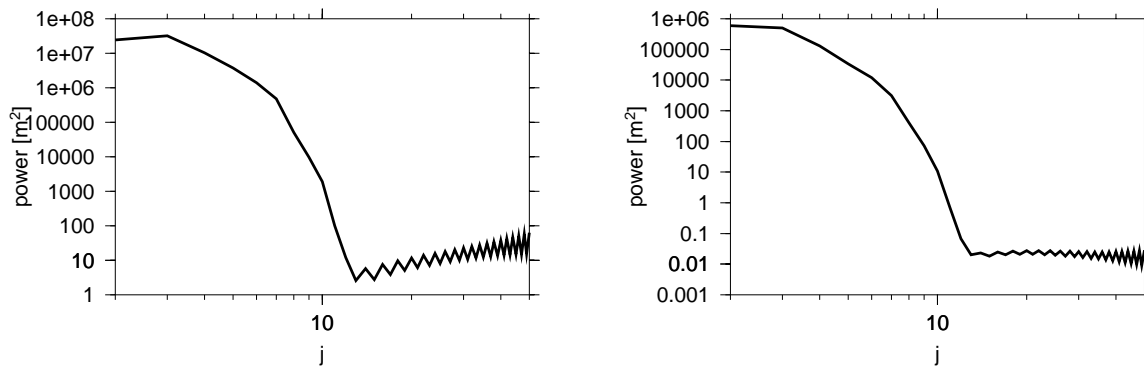


Obrázek 6.7: Model 2: zátěž 1 (vlevo), zátěž 2 (vpravo) a zátěž 3 (dole).

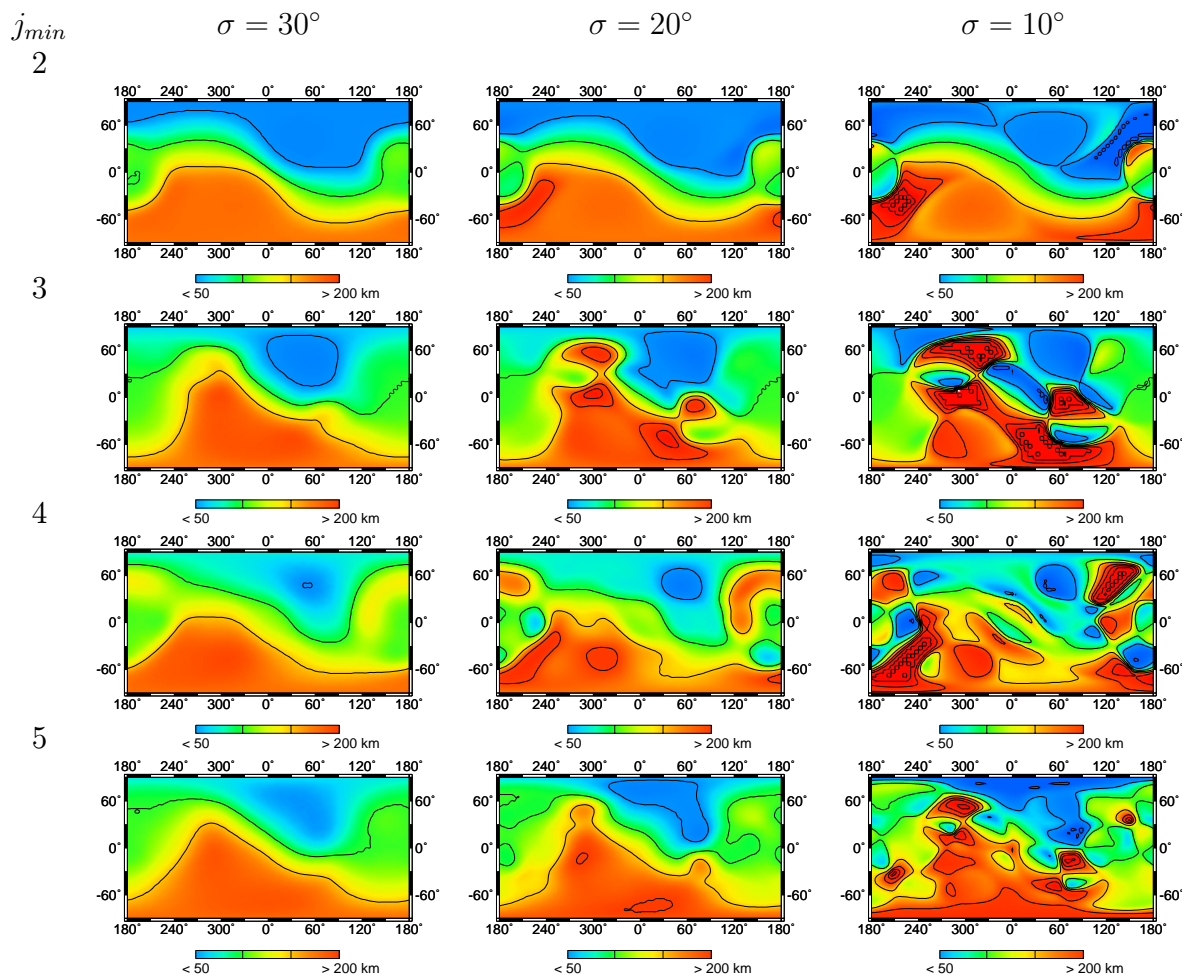


Obrázek 6.8: Model 2: výsledná topografie (vlevo) a odpovídající geoid (vpravo) pro stupně $j = 2 - 50$.

minimální stupně jsou na obr. 6.10 a 6.11. V případě modelu 2 již spektrum neosciluje (alepoň do stupně 10) a zároveň mezi modely získanými pro různé minimální stupně nejsou tak znatelné skokové rozdíly jako v případě modelu 1. Proto považujeme naše vysvětlení výrazného efektu volby minimálního stupně v případě modelu 1 za uspokojivé.

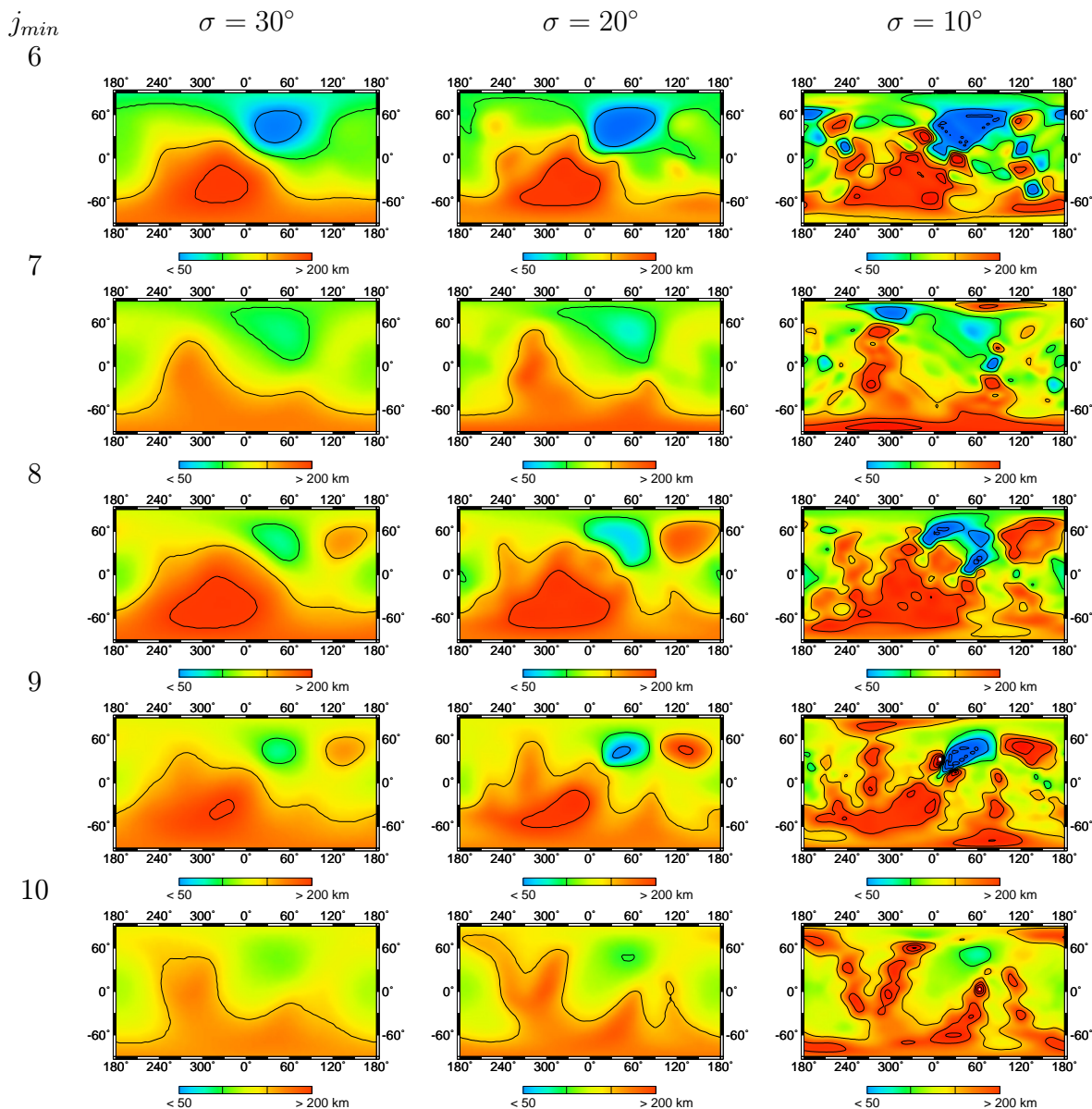


Obrázek 6.9: Model 2: výkonové spektrum topografie (vlevo) a geoidu (vpravo).



Obrázek 6.10: Model 2: vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 2 - 5$).

Při pohledu na obr. 6.10 a 6.11 je zřejmé, že výsledky pro nejúžší filtr s pološířkou $\sigma = 10^\circ$ jsou příliš oscilující, a to především pro nižší minimální stupně. Výsledky pro další 2 filtry lze považovat za konzistentní. Volba minimálního stupně má zřejmě poměrně značný vliv, i když zvolíme-li minimální stupeň někde v rozpětí $j_{min} = 3 - 6$, dostáváme



Obrázek 6.11: Model 2: vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 6 - 10$).

velmi podobné výsledky. V případě ještě vyšších minimálních stupňů (tedy v případě ubrání dlouhovlnných útvarů v geoidu a v topografii) je zřejmé, že ztrácíme informaci především o menších tloušťkách elastické litosféry, které byly zatíženy dlouhovlnnějšími zátěžemi. V místě první zátěže dostáváme dokonce hodnoty takřka 100 km (místo modelových 20 km). Jako optimální volbu bychom tedy pro tento model vybrali filtr o pološířce $\sigma = 30^\circ$ nebo $\sigma = 20^\circ$ a minimální stupeň některý z rozpětí $j_{min} = 3 - 6$. V případě filtru o pološířce $\sigma = 20^\circ$ by se dokonce za nejlepší dal označit model pro minimální stupeň $j_{min} = 5$ - vystihuje tloušťku menší než 50 km v místě první zátěže, tloušťku kolem 100 km v místě druhé zátěže a tloušťku 200 km v místě třetí zátěže nepřehodnocuje (na rozdíl od modelů s minimálními stupni $j_{min} = 3, 4, 6$). V případě filtru s pološířkou $\sigma = 30^\circ$ lze za nejlepší označit modely určené pro minimální stupně $j_{min} = 3, 4$ (ze stej-

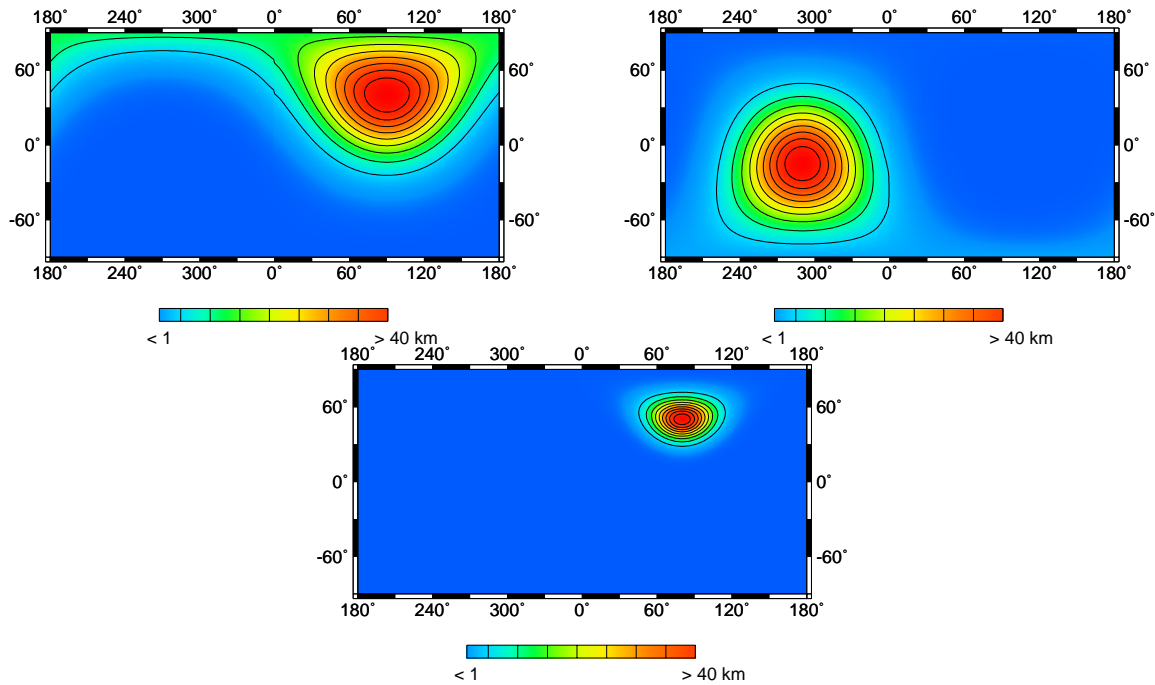
ných důvodů jako výše vybraný model pro filtr o pološířce $\sigma = 20^\circ$ a minimální stupně $j_{min} = 5$). Tyto minimální stupně souhlasí s nerovností (5.16) a s hodnotami stupňů, které odpovídají jednotlivým filtrům (vztah (5.14)). Usuzujeme tedy, že námi odvozený způsob určení minimálního stupně je opodstatněný.

Model 3

Teď už vyzkoušíme, jak popsany princip a také naše inverze reagují na zátěže, které se překrývají:

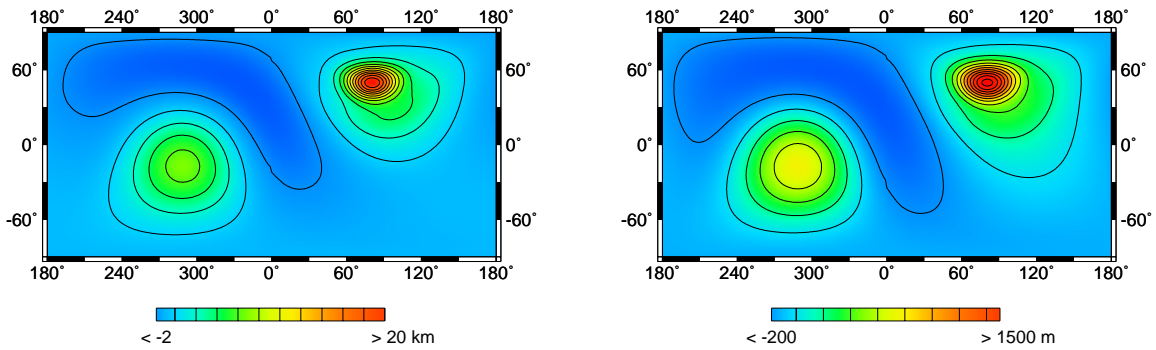
- $T_e^1 = 20$ km, $\theta_0^1 = 40^\circ$, $\varphi_0^1 = 90^\circ$, $\sigma^1 = 30^\circ$, $A^1 = 5 \cdot 10^4$ m
- $T_e^2 = 100$ km, $\theta_0^2 = -15^\circ$, $\varphi_0^2 = 290^\circ$, $\sigma^2 = 30^\circ$, $A^2 = 5 \cdot 10^4$ m
- $T_e^3 = 200$ km, $\theta_0^3 = 50^\circ$, $\varphi_0^3 = 80^\circ$, $\sigma^3 = 10^\circ$, $A^3 = 5 \cdot 10^4$ m

Na obr. 6.12 jsou vykresleny všechny tři zátěže, na obr. 6.13 výsledná topografie a geoid a na obr. 6.14 výkonová spektra topografie a geoidu. Výsledky inverze pro různé filtry

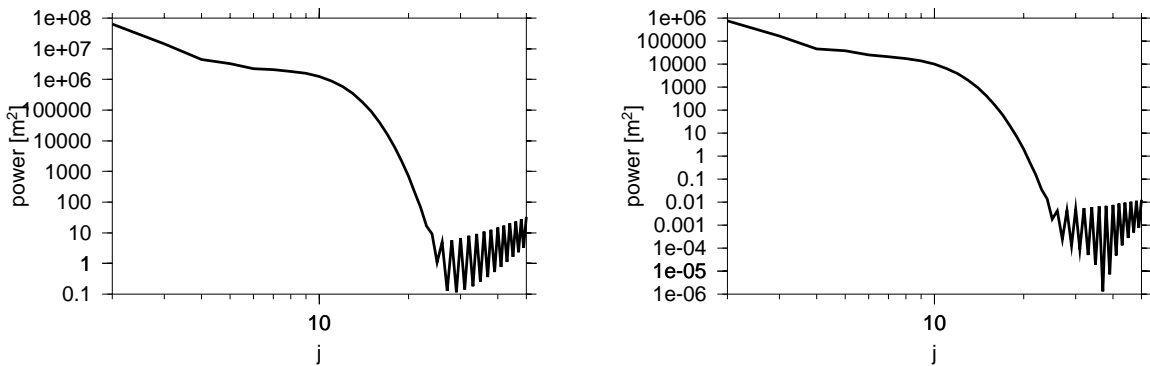


Obrázek 6.12: Model 3: zátěž 1 (vlevo), zátěž 2 (vpravo) a zátěž 3 (dole).

a různé minimální stupně jsou na obr. 6.15 a 6.16. Hned na první pohled je zřejmé, že volba minimálního stupně zde opět hraje zásadní roli. Spektrum sice neosciluje (alespoň pro $j < 20$), zato ale velmi rychle klesá - pokles mezi stupni 10 a 20 je z 10^6 m² na 10 m² (v případě topografie), resp. z 10^4 m² na 10^{-2} m² (v případě geoidu). Tento prudký pokles se pak samozřejmě projeví při inverzi počítané pro vyšší minimální stupně. Zatímco výsledky pro $j_{min} = 2, 3, 4$ dávají smysl (nejblíže původnímu modelu jsou zřejmě výsledky pro $j_{min} = 3$, i když tloušťka v místě poslední zátěže je značně podceněná - místo 200 km dostáváme jen přibližně 150 km), výsledky pro vyšší minimální stupně (počínaje stupněm $j_{min} = 6$) jsou takřka konstantní okolo hodnoty 200 km. Tento fakt



Obrázek 6.13: Model 3: výsledná topografie (vlevo) a odpovídající geoid (vpravo) pro stupně $j = 2 - 50$.

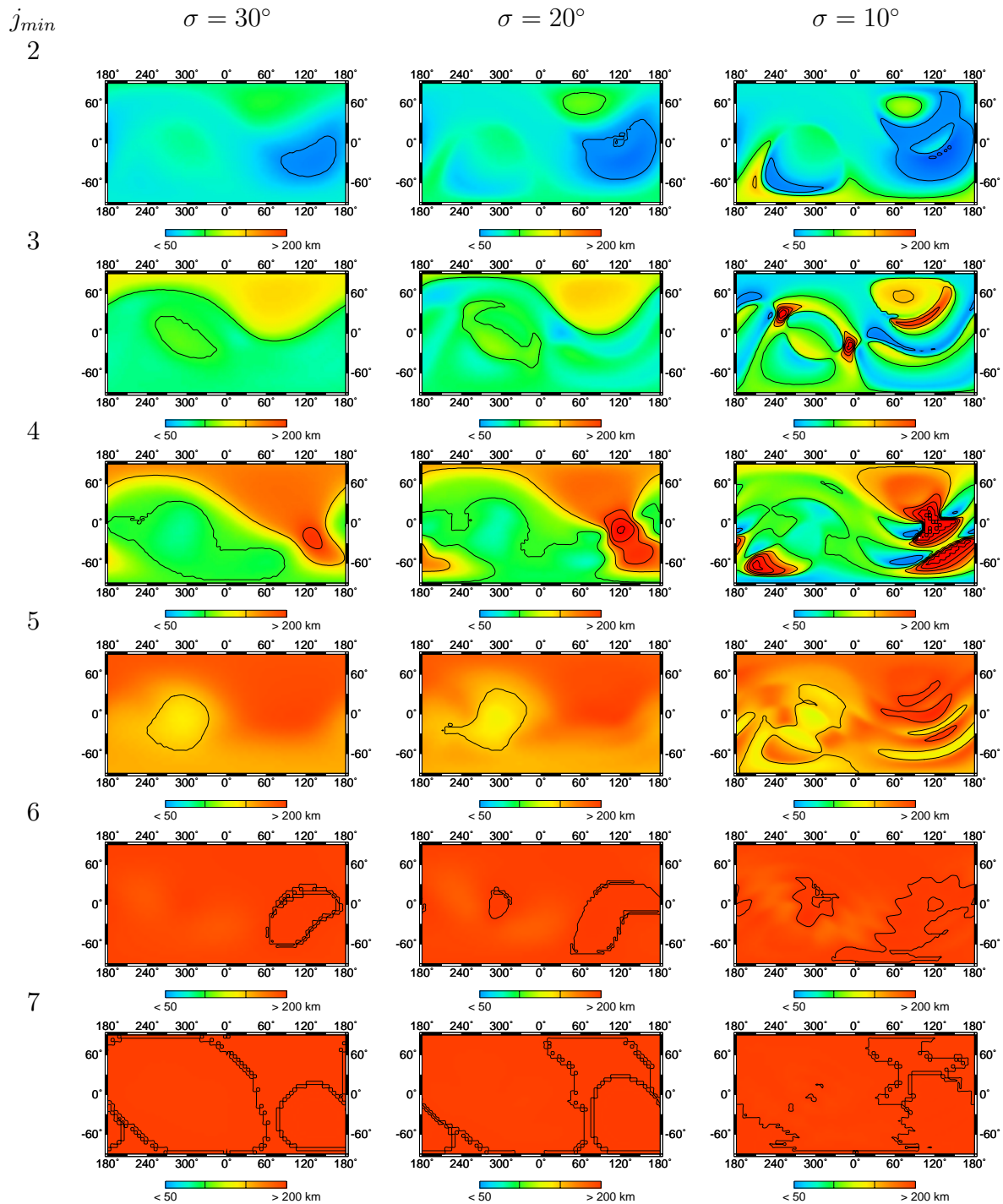


Obrázek 6.14: Model 3: výkonové spektrum topografie (vlevo) a geoidu (vpravo).

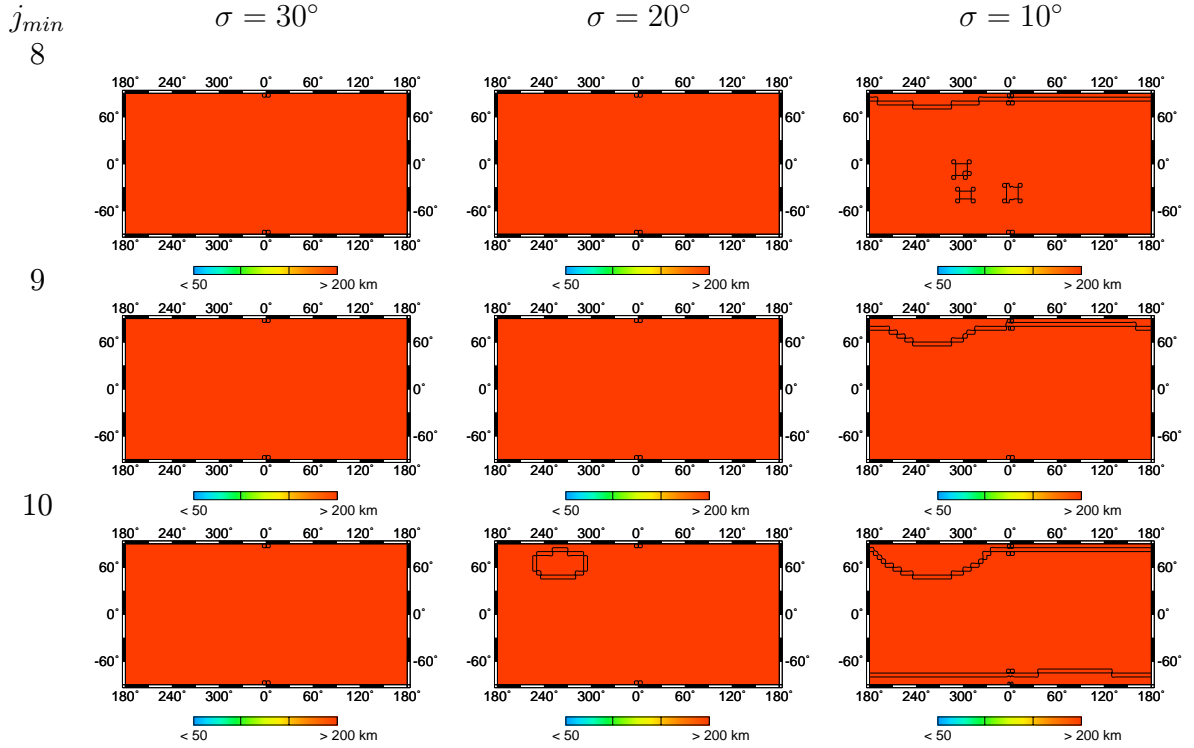
lze zjevně nejlépe vysvětlit právě příliš prudkým poklesem spektra - tím, že uберeme nízké stupně, na kterých je v podstatě všechen výkon, uберeme téměř veškerou informaci obsaženou v topografii a v geoidu. Ponecháním pouze kratších vlnových délek ztrácíme informaci o tloušťkách, které byly zatíženy dlouhovlnnou zátěží, a zůstává nám pouze informace o tloušťkách, které byly zatíženy krátkovlnnou zátěží 3. Tou jsme zatížili litosféru o tloušťce 200 km, a to je také tloušťka, kterou vrátí inverze počítaná od vyšších minimálních stupňů. Podobné chování má i spektrum v příkladu 2, pokles je tam dokonce ještě rychlejší, ale přesto inverze počítané pro model 2 a vyšší minimální stupně dopadají docela dobře. Tento rozdíl lze pravděpodobně vysvětlit tím, že zatímco v případě modelu 2 se jednotlivé zátěže v podstatě nepřekrývaly, tak v případě modelu 3 leží zátěž 3 přímo na zátěži 1. A zatímco zátěž 1 zatěžuje litosféru o tloušťce pouze 20 km, která se hodně prohýbá a výsledná topografie pak dosahuje poměrně malých amplitud, tak zátěž 3 je zatížena litosféra o tloušťce 200 km, která se prohne daleko méně a tedy výsledná topografie má (i při stejné amplitudě původní zátěže) daleko větší amplitudy než topografie odpovídající zátěži 1. Proto také signál odpovídající krátkovlnnější zátěži 3 bude dominovat nad signálem od dlouhovlnné zátěže 1.

Převážení topografie a geoidu odpovídajících zátěžím na tlustších a tedy i mladších litosférách se zřejmě projeví i při inverzi reálných dat. Abychom ale získali co nejlepší představu, jak inverze funguje, pokusíme se vytvořit topografii a jí odpovídající geoid, jejichž výkonová spektra by byla co nejvíce podobná reálným, a to především co se týče

spektrálního spádu na nízkých a středních stupních.



Obrázek 6.15: Model 3: vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 2 - 7$).



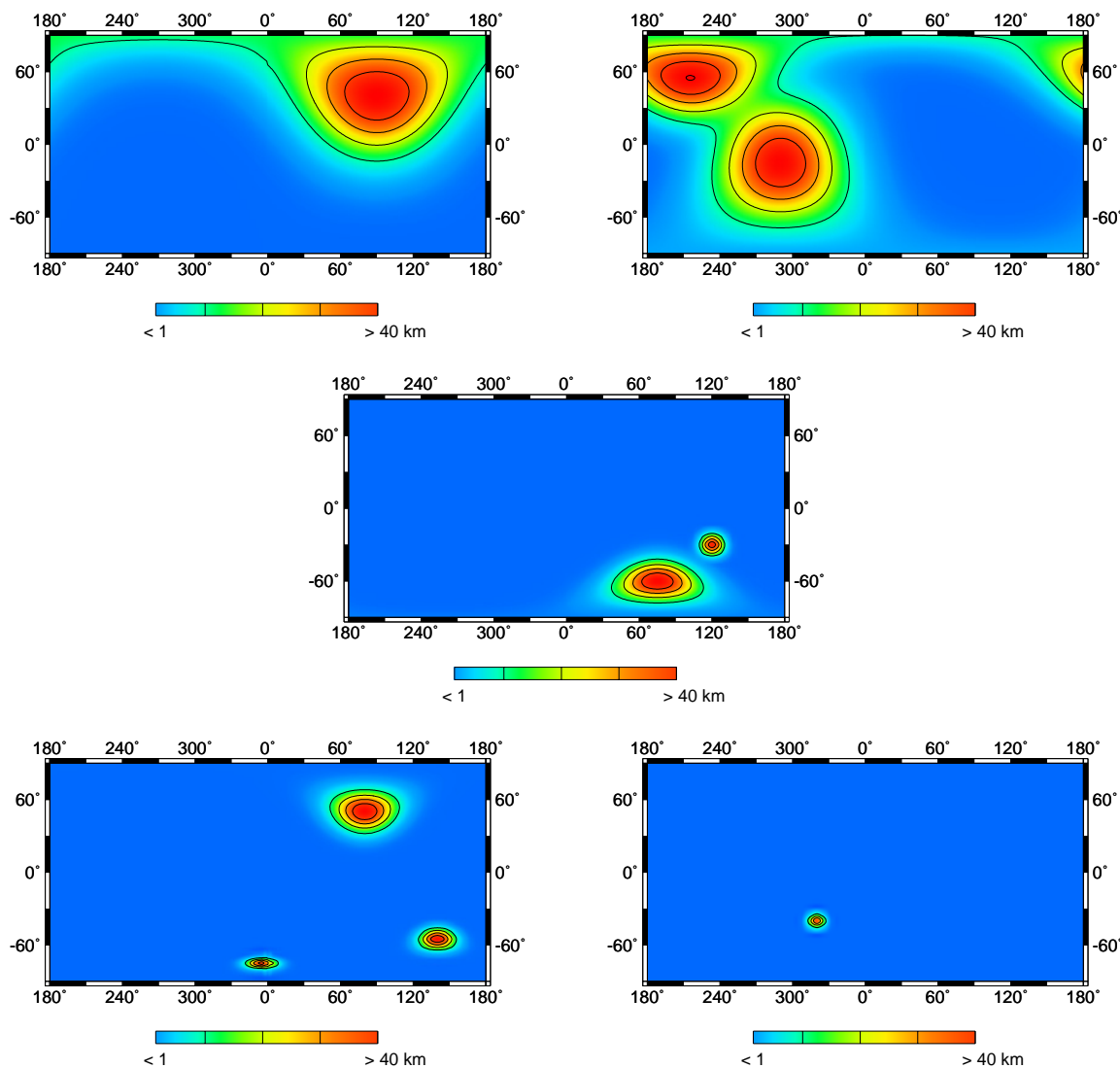
Obrázek 6.16: Model 3: vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 8 - 10$).

Model 4

V tomto modelu se pokoušíme použít takové zátěže a takové tloušťky elastické litosféry, aby výkonová spektra výsledné topografie a geoidu alespoň přibližně odpovídala výkonovým spektrům skutečných polí. Proto musíme použít více zátěží na různých tloušťkách litosféry a především potřebujeme, aby byly zastoupeny zátěže dlouhovlnné i krátkovlnné:

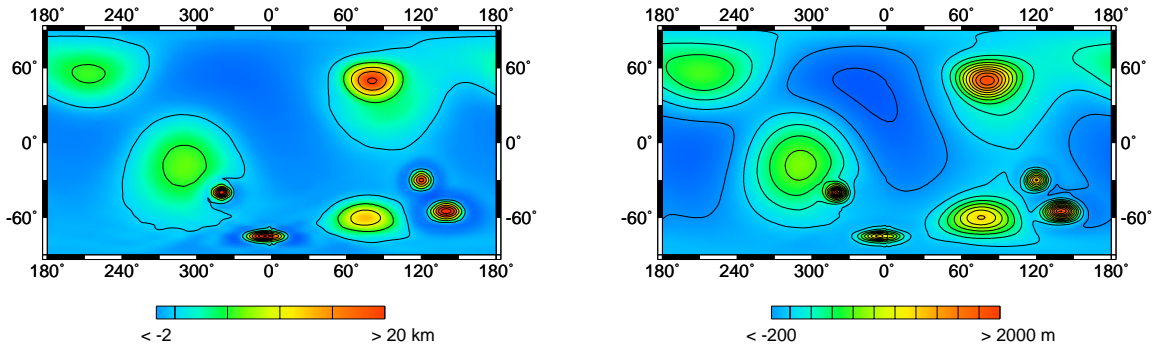
- $T_e^1 = 20 \text{ km}, \theta_0^1 = 40^\circ, \varphi_0^1 = 90^\circ, \sigma^1 = 30^\circ, A^1 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^2 = 100 \text{ km}, \theta_0^2 = -15^\circ, \varphi_0^2 = 290^\circ, \sigma^2 = 30^\circ, A^2 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^3 = 100 \text{ km}, \theta_0^3 = 55^\circ, \varphi_0^3 = 215^\circ, \sigma^3 = 20^\circ, A^3 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^4 = 150 \text{ km}, \theta_0^4 = -60^\circ, \varphi_0^4 = 75^\circ, \sigma^4 = 10^\circ, A^4 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^5 = 150 \text{ km}, \theta_0^5 = -30^\circ, \varphi_0^5 = 120^\circ, \sigma^5 = 5^\circ, A^5 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^6 = 200 \text{ km}, \theta_0^6 = 50^\circ, \varphi_0^6 = 80^\circ, \sigma^6 = 10^\circ, A^6 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^7 = 200 \text{ km}, \theta_0^7 = -55^\circ, \varphi_0^7 = 140^\circ, \sigma^7 = 5^\circ, A^7 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^8 = 200 \text{ km}, \theta_0^8 = -75^\circ, \varphi_0^8 = 355^\circ, \sigma^8 = 2^\circ, A^8 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$
- $T_e^9 = 250 \text{ km}, \theta_0^9 = -40^\circ, \varphi_0^9 = 320^\circ, \sigma^9 = 3^\circ, A^9 = 5 \cdot 10^4 \text{ m}$

Na obr. 6.17 jsou vykresleny všechny zátěže, na obr. 6.18 výsledná topografie a geoid a na obr. 6.19 výkonová spektra topografie a geoidu (pro srovnání jsou zakreslena i skutečná spektra topografie a geoidu Marsu). Výsledky inverze pro různé filtry a různé minimální

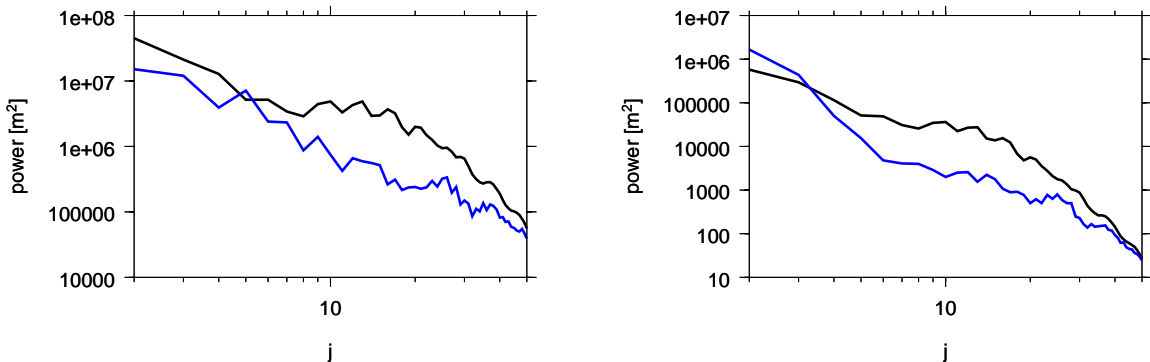


Obrázek 6.17: Model 4: zátěž 1 (vlevo nahoře), zátěže 2 a 3 (vpravo nahoře), zátěže 4 a 5 (uprostřed), zátěže 6, 7 a 8 (vlevo dole) a zátěž 9 (vpravo dole).

stupně jsou na obr. 6.20 a 6.21. Výsledky pro všechny filtry jsou v tomto případě vcelku konzistentní, i když inverze s nejužším filtrem opět dává v některých místech velké hodnoty, které nejsou příliš důvěryhodné. Z obrázků je zřejmé, že nejmenší tloušťky elastické litosféry v místě první zátěže (na litosféře o tloušťce 20 km) dostáváme jen při volbě minimálního stupně $j_{min} = 2$, tedy při ponechání nejdélnějších útvarů v inverzi. Při této volbě ale zase nejsme schopni vystihnout krátkovlnnější útvary, kterými byly zatíženy tlustší litosféry. Pro minimální stupeň v rozsahu přibližně $j_{min} = 3 - 5$ dostáváme poměrně členitý obraz tlouštěk elastické litosféry. Za nejzdařilejší lze považovat výsledky pro filtr o pološířce $\sigma = 20^\circ$ - je na nich zachyceno více detailů než na výsledcích pro nejšířší filtr, zároveň ale stále zůstávají věrohodné a nevykazují přílišné výchytky jako výsledky pro nejužší filtr.

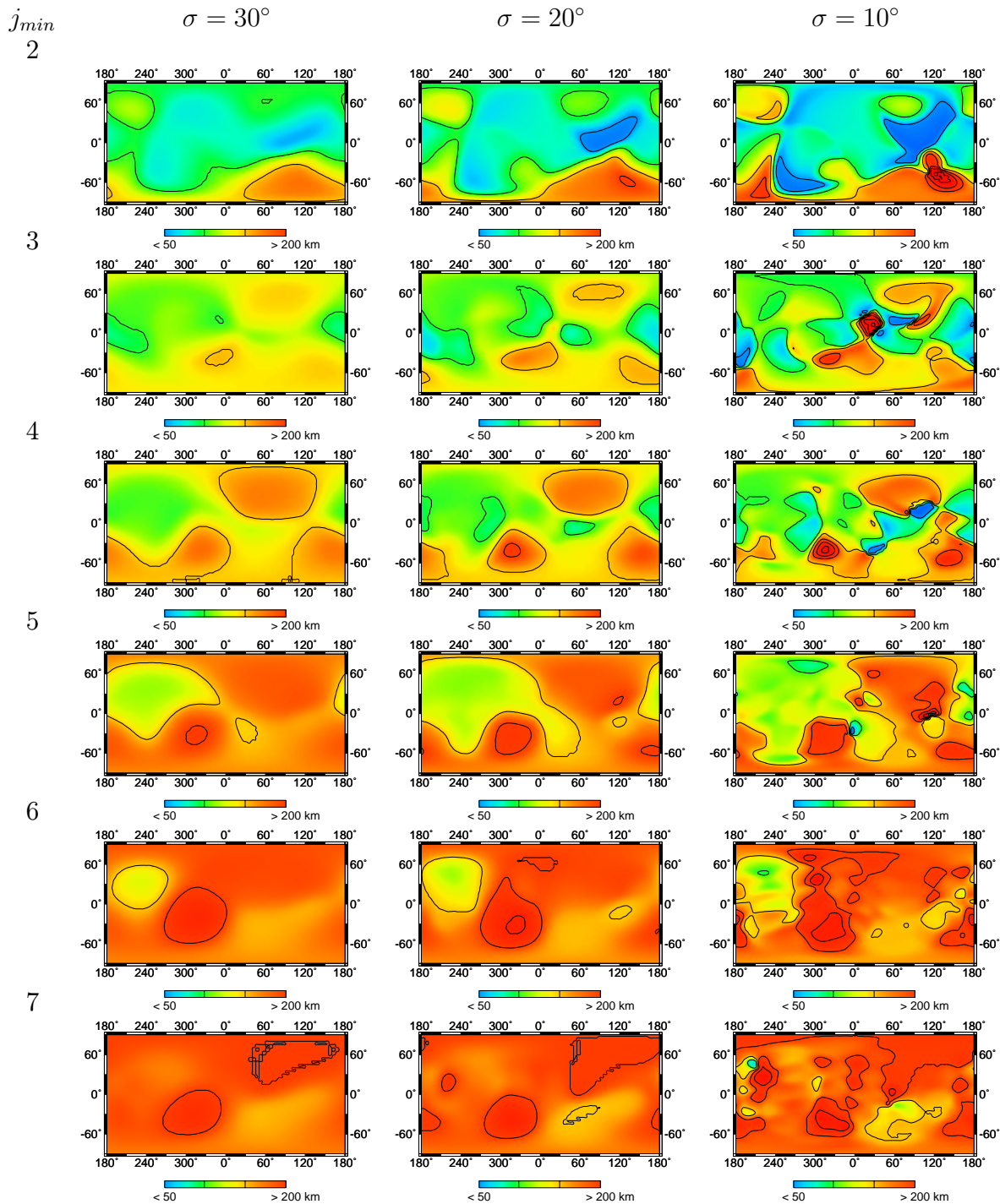


Obrázek 6.18: Model 4: výsledná topografie (vlevo) a odpovídající geoid (vpravo) pro stupně $j = 2 - 50$.



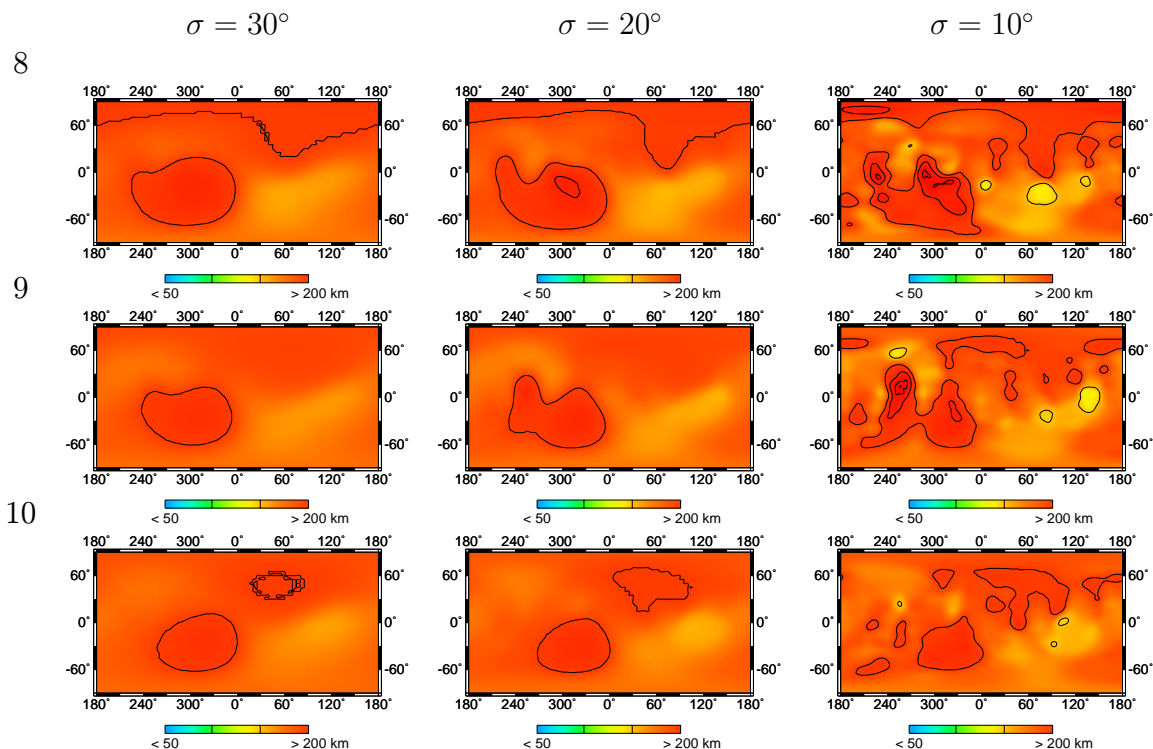
Obrázek 6.19: Model 4: výkonové spektrum topografie (vlevo) a geoidu (vpravo). Model 4 (černá barva) a skutečná spektra topografie a geoidu Marsu (modrá barva).

Zaměříme-li se tedy na výsledky pro střední filtr, pak vidíme, že především na výsledcích pro minimální stupeň $j_{min} = 3 - 4$ lze pozorovat tloušťky elastické litosféry přibližně 50 km (okolo rovníku pro zeměpisné délky $\varphi \sim 150^\circ - 200^\circ$). Toto jsou pravděpodobně pozůstatky po první zátěži (kterou jsme zatížili litosféru o tloušťce 20 km) v místech, kde už nebyla použita žádná jiná zátěž. Informace o malé tloušťce litosféry tedy v těchto místech nebyla přepsána žádnou jinou informací o větší tloušťce. Určená tloušťka litosféry v těchto místech je sice o něco větší než byla tloušťka zatížené litosféry, to lze ale připsat několika skutečnostem. Především, první zátěž nedosahovala v těchto oblastech příliš velkých amplitud a také naše inverze obecně podceňuje výchylky od jakési střední tloušťky. Podíváme-li se na stejné obrázky ($\sigma = 20^\circ$, $j_{min} = 3, 4$) a na místa, kde jsme zatěžovali litosféru o tloušťce 100 km (zátěž 2 a 3), vidíme převážně zelenou barvu odpovídající právě tloušťce 100 km. V místě zatížení litosféry o tloušťce 150 km (zátěž 4 a 5) pozorujeme litosféru o tloušťce necelých 150 km, v místě zátěží 6, 7 a 8 litosféru o tloušťce necelých 200 km. Na obrázku pro minimální stupeň $j_{min} = 4$ navíc v místě zátěže 9 pozorujeme litosféru o tloušťce přes 200 km. Tento výsledek lze tedy považovat za velmi zdařilý, neboť se nám pro tuto volbu parametrů ($\sigma = 20^\circ$, $j_{min} = 4$) podařilo vystihnout takřka všechny tloušťky na správných místech. V místě první zátěže samozřejmě dominuje signál od pozdější zátěže 6, která leží na místě první zátěže a kterou jsme zatížili tlustší litosféru.



Obrázek 6.20: Model 4: vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 2 - 7$).

Co se týká výsledků pro vyšší minimální stupně, je zřejmé, že odebráním dlouhovlnných částí topografie a geoidu se připravujeme o informace o menších tloušťkách litosféry, které jsme zatížili dlouhovlnnějšími zátěžemi. Obrázky jsou čím dál tím červenější, což značí převahu tlouštěk okolo 200 km. Pro vyšší j_{min} jsou si také čím dál tím bližší výsledky pro různé filtry. To je dáno pravděpodobně tím, že pracujeme s informacemi



Obrázek 6.21: Model 4: vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 8 - 10$).

obsaženými pouze v krátkovlnných útvarch, které úzký filtr může vystihnout (na rozdíl od dlouhovlnných útvarů, které krátkovlnný filtr nevystihne).

Celkem považujeme výsledky získané těmito testy za velmi cenné, neboť jsme si především ověřili, že volba minimálního stupně hraje velmi důležitou roli. Vhodný minimální stupeň nesmí být příliš nízký, neboť pak ztrácíme informaci o krátkovlnných útvarch (především díky skutečnosti, že reálná topografie a geoid mají maximální výkon právě na nejnižších stupních a tudíž informace nesená nízkými stupni převáží nad informací od vyšších stupňů). Vliv na volbu minimálního stupně jistě má i použitý filtr - při používání filtru o pološířce $\sigma = 10^\circ$ se nemůžeme příliš spolehnout na výsledky získané se zahrnutím dlouhovlnných útvarů, tedy při volbě nízkého minimálního stupně. Optimální minimální stupeň ale nesmí být ani příliš vysoký, neboť tím ztrácíme informaci o nízkých stupních, navíc se projeví i vliv spektrálního spádu, kdy odstraněním příliš mnoha nízkých stupňů přestáváme mít dostatečný výkon topografie a geoidu a výsledky inverze už nelze považovat za rozumné. Dalším výsledkem testů v této kapitole je ověření skutečnosti, že je-li v určitém místě zatížena nejprve tenká litosféra (zátěž 1) a později je v tom samém místě zatížena litosféra o větší tloušťce (zátěž 2), výsledky inverze ukazují spíše tlustší litosféru. To je dáno tím, že silnější litosféra se prohne méně než tenká litosféra, a tedy topografie odpovídající zátěži 2 dominuje nad topografií, která odpovídá zátěži 1.

Přes všechny provedené testy ale nemůžeme určit nějaký obecný předpis pro optimální minimální stupeň, což je dáno především komplexností problému, kdy na tuto volbu má vliv příliš mnoho skutečností, které v některých případech (např. přibližná vlnová délka modelu) ani neznáme a nejsme schopni je zjistit. I při inverzi reálných

dat tedy budeme počítat s různými minimálními stupni a teprve na základě srovnání jednotlivých výsledků určíme vhodný minimální stupeň.

Kapitola 7

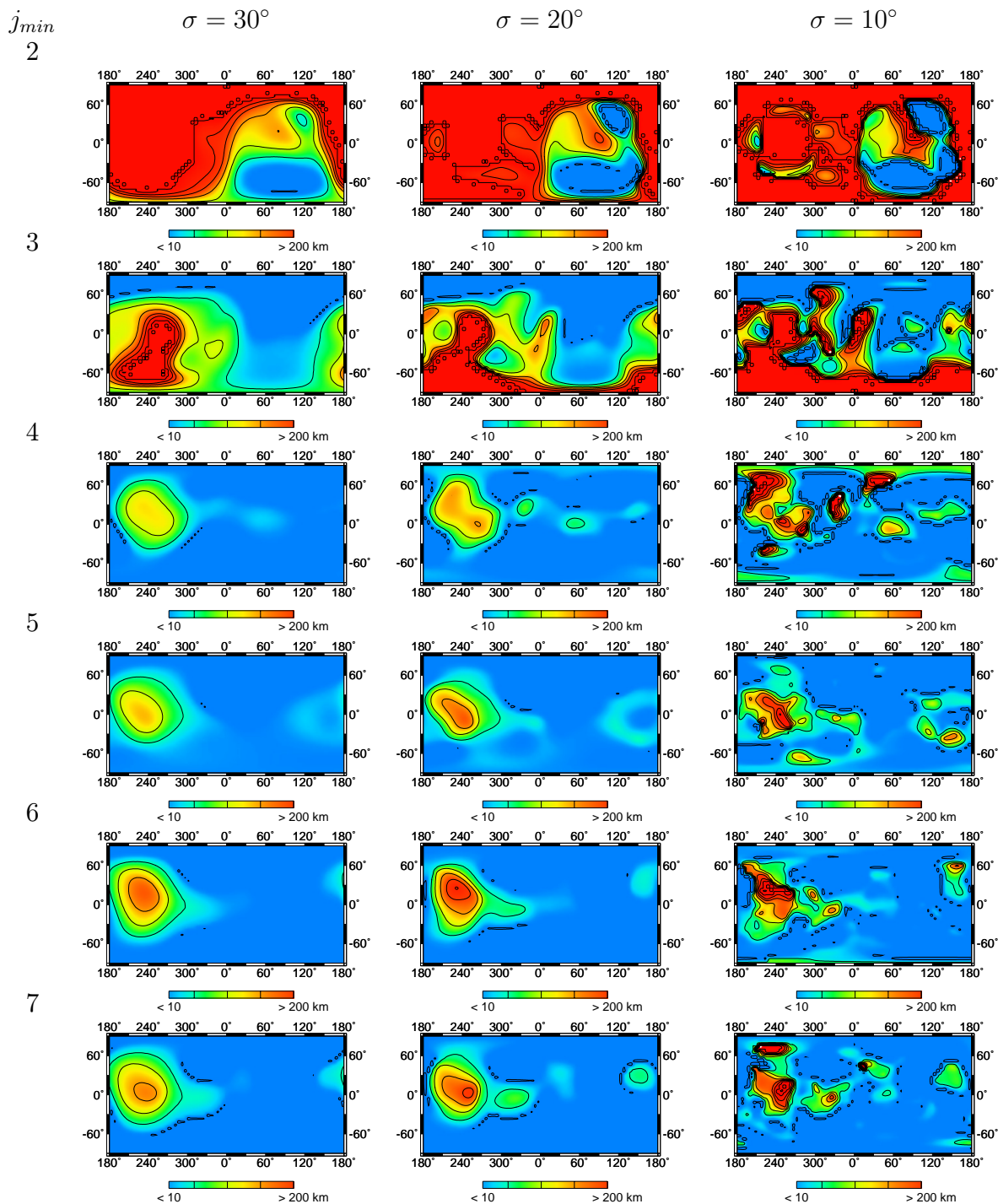
Model tloušťky elastické litosféry na Marsu

7.1 Výpočet a výběr modelu

V této části sestavujeme model tlouštěk elastické litosféry pro tři filtry s různou pološířkou ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$). K výpočtu používáme postup popsany v části 4.2. Ani v testech provedených v kapitolách 5 a 6 se nám nepodařilo určit nějaký obecný optimální minimální stupeň, který by zaručil nejlepší výsledky inverze. Teď navíc ani neznáme povahu (přibližnou vlnovou délku) modelu, který hledáme. Budeme proto předpokládat, že je spíše dlouhovlnný (krátkovlnné detaily stejně nejsme schopni vystihnout). Jediné hodnoty, které máme k dispozici, jsou teoretické odhady harmonických stupňů, které odpovídají různým filtrům (vzorec (5.14)). Filtrům se zvolenými pološířkami odpovídají stupně $j = 3, 4, 8$, minimální stupně pro inverzi bychom proto mohli zvolit $j_{min} = 4, 5, 9$ - tím bychom splnili alespoň druhou část nerovnosti (5.16). Otázkou zůstává, zda úvaha použitá k odvození daného vzorce dává dobrý smysl (i když výsledky testů provedených v kapitole 6 ji podporují). Nemůžeme si být jisti ani vhodnou dlouhovlnností modelu. Proto vypočteme modely pro různé pološířky a různé minimální stupně. Výsledky jsou na obr. 7.1 pro $j_{min} = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ a 7.2 pro $j_{min} = 8, 9, 10$. Hodnoty fyzikálních veličin používaných v inverzi jsou v tabulce 7.1¹.

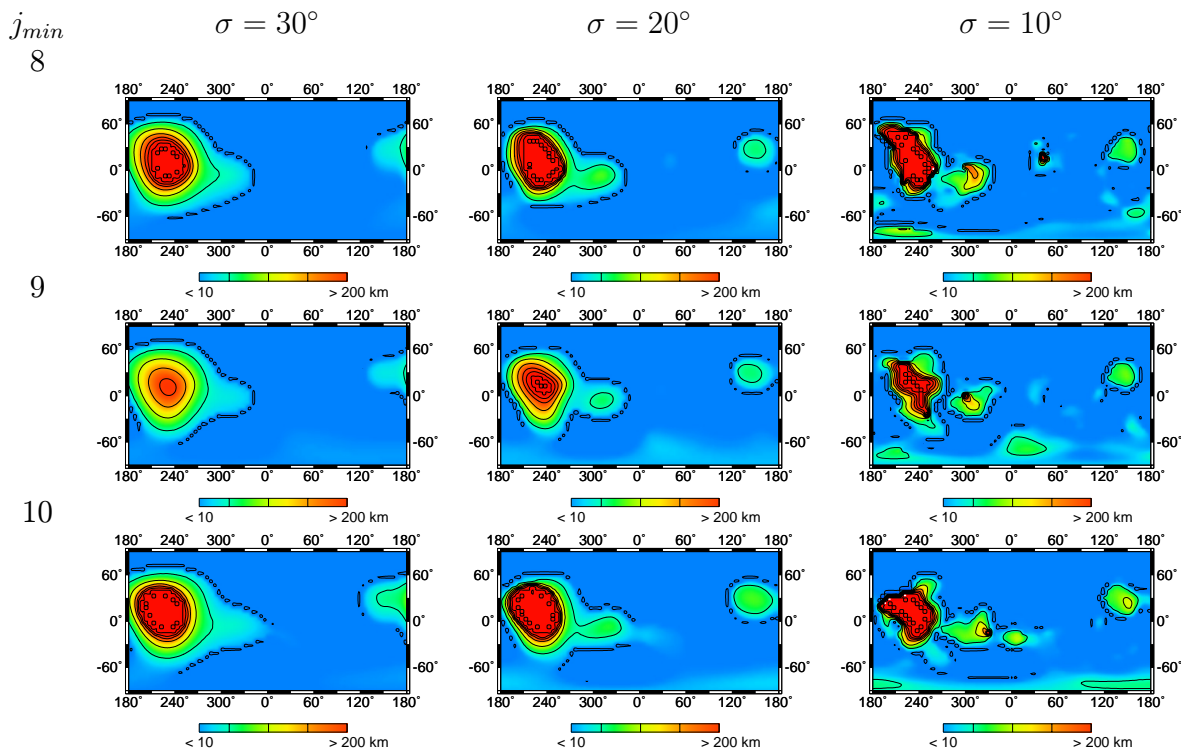
Z obrázků je zřejmé, že výsledky pro inverzi počítanou od stupňů $j_{min} = 2$ a $j_{min} = 3$ nedávají smysl pro žádný filtr, což souhlasí s nerovností (5.16). S rostoucím stupněm j_{min} se výsledky zdají být lepší a od určitého j_{min} i konzistentní (nejdříve pro nejširší filtr s pološířkou $\sigma = 30^\circ$, nejpozději pro filtr nejužší s pološířkou $\sigma = 10^\circ$). Pro nejširší použitý filtr s pološířkou $\sigma = 30^\circ$ dostáváme už pro velmi nízký stupeň $j_{min} = 4$ výsledek, který lze v jistém smyslu považovat za rozumný. S dále rostoucím minimálním stupněm jsou výsledky kvalitativně konzistentní. Větší odlišnost obrázků pro minimální stupně $j_{min} = 8$ a 10 způsobuje pravděpodobně fakt, že na těchto stupních má výkonové spektrum topografie Marsu lokální minimum (v případě stupně 8), resp. podstatně menší hodnotu než na předchozím stupni (v případě stupně 10) (viz obr. 7.3 a diskuzi na toto téma v kapitole 6 u modelu 1). Pro širší filtr s pološířkou $\sigma = 20^\circ$ dostáváme

¹Tyto hodnoty se nepatrně liší od hodnot uvedených v tabulce 5.1 - nejprve jsme totiž provedli testy s hodnotami z [20]. Až poté jsme se zabývali důkladnější rešerší článků a podle těchto jsme poopravili používané hodnoty, abychom používali stejné parametry jako práce, s kterými v části 7.2 srovnáváme naše výsledky.



Obrázek 7.1: Vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 2 - 7$)

výsledky velmi podobné výsledkům pro filtr s pološířkou $\sigma = 30^\circ$. V případě nejužšího filtru s pološířkou $\sigma = 10^\circ$ jsou už vypočtené modely poněkud oscilující (srovnejme tuto skutečnost s výsledky v kapitolách 5 a 6). S rostoucím minimálním stupněm se oscilace zmenšují či úplně mizí. Pro stupeň $j_{min} = 9$ dostáváme model, který je zřejmě nejpodobnější modelům pro širší filtry. Užší filtr by sice mohl znamenat více detailů, je



Obrázek 7.2: Vypočtené modely pro různé pološířky filtru ($\sigma = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$) a různé minimální stupně ($j_{min} = 8 - 10$)

ale důležité si uvědomit, že užšímu filtru teoreticky odpovídá vyšší minimální stupeň a že s rostoucím harmonickým stupněm poměrně rychle klesá citlivost harmonických koeficientů (viz část 5.3.1) a také výkon. Z tohoto množství vypočtených modelů, které si jsou velmi podobné (na rozdíl od zinvertovaných modelů v kapitole 6, kde změna minimálního stupně většinou znamenala velkou změnu v povaze modelu), je potřeba vybrat pro každý filtr jeden model, se kterým budeme dále pracovat v části 7.2. Vybereme tedy ty, které mají co nejmenší minimální stupeň j_{min} a zároveň alespoň částečně splňují nerovnost (5.16), resp. její část týkající se vztahu mezi harmonickým stupněm zátěže a filtru. Vybereme tedy modely pro tyto dvojice parametrů:

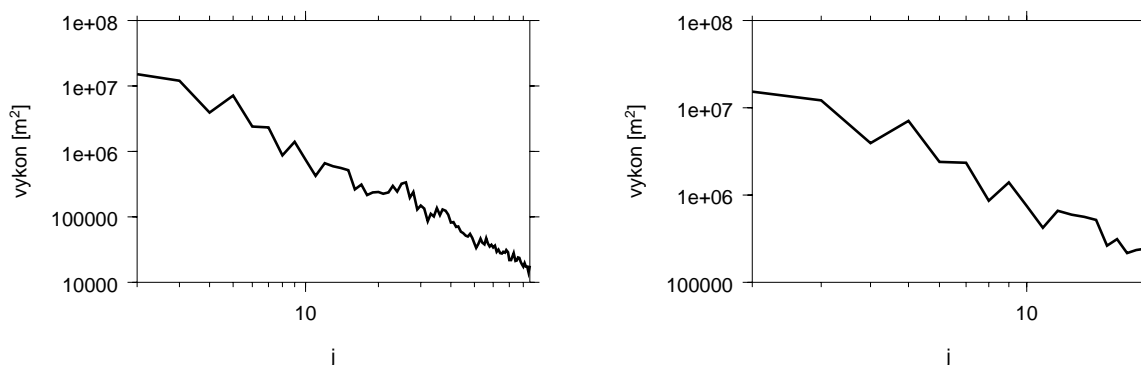
- filtr o pološířce $\sigma = 30^\circ$ a minimální stupeň $j_{min} = 4$
- filtr o pološířce $\sigma = 20^\circ$ a minimální stupeň $j_{min} = 5$
- filtr o pološířce $\sigma = 10^\circ$ a minimální stupeň $j_{min} = 9$

Pokusme se ještě porozumět rozdílu mezi inverzemi modelových dat v kapitole 6 a inverzí reálných dat v této kapitole. Hlavní rozdíl je ten, že zatímco modely v kapitole 6.1 jsou vypočteny výhradně za použití aproximace popsané v příloze B, a tedy všechny zátěže jsou kompenzovány pouze průhybem elastické litosféry, tak o zátěžích na Marsu nic takového říci nemůžeme. Nevíme, do jaké míry jsou jednotlivé zátěže na Marsu kompenzovány elasticky a do jaké míry nějakým jiným mechanismem (izostáze, plášťová konvekce atd.). Proto nás také u vypočtených modelů (obr. 7.1 a 7.2) nepřekvapí oblasti s velmi malou tloušťkou elastické litosféry (modré plochy, které se v modelech v kapitole

6 neobjevovaly), které ukazují, že tyto oblasti nebo alespoň jejich části by mohly být kompenzovány spíše izostaticky.

poloměr	R	3389.5	km
gravitační zrychlení	g	3.7	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Youngův modul	E	$1 \cdot 10^{11}$	Pa
Poissonův poměr	ν	0.25	
povrchová hustota	ρ_s	2900	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
hustota pláště	ρ_m	3500	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
průměrná hustota planety	$\bar{\rho}$	3930	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
hustotní skok v litosféře	$\Delta\rho$	500	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
tloušťka kůry	T_c	50	km

Tabulka 7.1: Hodnoty fyzikálních veličin použité pro výpočet modelu tloušťky elastické litosféry na Marsu.

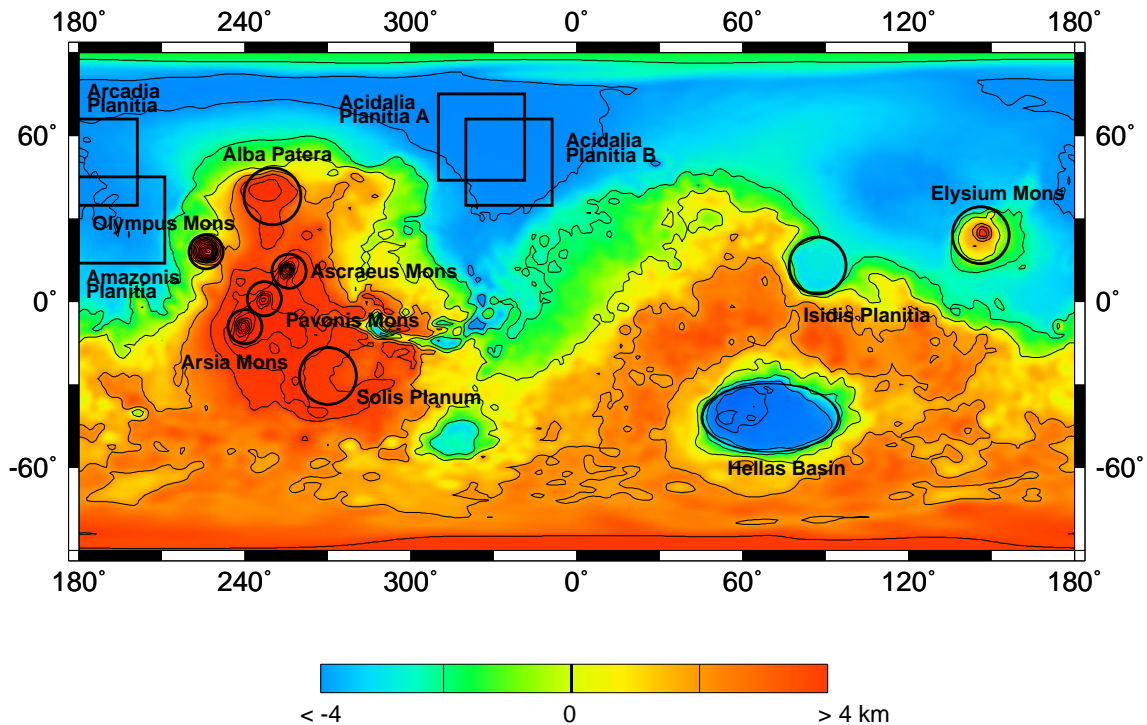


Obrázek 7.3: Výkonové spektrum topografie Marsu (vlevo) a jeho detail pro $j = 2 - 20$ (vpravo).

7.2 Srovnání s literaturou

V této části porovnáme naše výsledky s publikovanými výsledky jiných autorů. Ti nepočítají tloušťku elastické litosféry na celém povrchu Marsu, ale vybírají si pouze některé významné oblasti (např. vulkány v pohoří Tharsis nebo impaktovou pánev Hellas). Abychom mohli naše výsledky porovnat s ostatními, vybíráme také několik významných oblastí: vulkány Olympus Mons, Ascraeus Mons, Pavonis Mons, Arsia Mons a Elysium Mons, impaktové pánve Hellas a Isidis, severní planiny Acidalia Planitia, Amazonia Planitia a Arcadia Planitia, planinu Solis Planum poblíž kaňonovitého údolí Valles Marineris a další výrazný útvar na planetě Alba Patera (obr. 7.4).

Na obr. 7.5 a 7.6 jsou vykresleny všechny tři modely pro různé pološířky filtru a pro odpovídající minimální harmonické stupně (část 7.1) a také jeden model, který vznikl zprůměrováním hodnot předchozích tří modelů, s vyznačenými zájmovými oblastmi. Naše modely dávají hodnotu tloušťky elastické litosféry v bodech s rozlišením $\Delta\theta = \Delta\varphi = 5^\circ$. Vypočteme tedy aritmetický průměr hodnot T_e z bodů, které patří do každé



Obrázek 7.4: Topografie Marsu (pro $j = 2 - 85$) s vyznačenými oblastmi popsányi výše.

vymezené oblasti - takto vypočtená hodnota pak reprezentuje náš odhad tloušťky elastické litosféry v dané oblasti. Vypočtené hodnoty pro naše modely jsou v tabulce 7.2 spolu s některými publikovanými výsledky, pro názornou představu je určen obr. 7.7, kde jsou naše i publikované výsledky vyneseny v závislosti na období, do kterého patří.

Abychom lépe rozuměli srovnání s jednotlivými publikovanými výsledky, je důležité alespoň přibližně rozumět metodám, kterými byly získány. Pokusme se zde stručně popsat metody použité v článkách, s kterými srovnáváme své výsledky:

- **Belleguic et al.** [2] modelují admitanci (přenosová funkce mezi geoidem a topografií ve spektrální oblasti) velkých vulkánů na Marsu za předpokladu, že povrchové i podpovrchové zatížení je drženo elastickým prohnutím litosféry. Zkoumají nejen vliv tloušťky elastické litosféry, ale také vliv tloušťky a hustoty kůry a hustoty zátěže. Výsledky, s kterými se srovnáváme, jsou získány pro jednodušší model bez podpovrchové zátěže, který lépe odpovídá našemu přístupu. K filtraci používají lokalizační okno určené omezeným pásem ve spektru.
- **Comer et al.** [3] modelují povrchové tlaky okolo velkých vulkánů za předpokladu prohnutí elastické litosféry po zatížení a tyto tlaky poté interpretují ve smyslu radiálních vzdáleností mezi centry zatížení a soustřednými propadlinami v okolí vulkánů. Vypočtené vzdálenosti srovnávají s pozorovanými. Meze pro tloušťku elastické litosféry jsou určeny nejen touto inverzí, ale také dalšími důležitými časově závislými efekty jako viskoelastická relaxace, růst vulkánů a nárůst tloušťky elastické litosféry v čase.
- **Hoogenboom et al.** [8] opět modelují admitanci ovšem pro speciální případ

severních nížin². V tomto článku je do výpočtu zahrnuto spodní i povrchové zatěžování (na rozdíl od naší metody, my používáme pouze povrchové zatěžování), navíc je použita metoda modelování syntetické topografie a gravitačního pole s podobným spektrem, jaké mají pozorované veličiny (k odstranění vlivu zhlazení pozorované topografie erozí). K filtraci je použita metoda založená na Fourierově transformaci (*multitaper method*).

- **McGovern et al.** [10, 11] modelují admitanci za předpokladu kompenzace zatížení prohnutím elastické slupky, počítají s podpovrchovým i povrchovým zatížením. My srovnáváme naše výsledky s hodnotami odvozenými pro nulové podpovrchové zatížení. K filtraci je použito axisymetrických filtračních oken omezených šířkou ve spektru.
- **Ritzer et al.** [13] se zaměřili na modelování pouze jediné oblasti (Isidis Basin, jedna z největších impaktové pánví na Marsu). Používají podobný přístup jako předchozí autoři, do výpočtu ale navíc zapojili i možnost vyplnění pánve dodatečným materiálem a tudíž uvažují existenci dalšího hustotního rozhraní mezi materiálem povrchu a materiálem výplně.

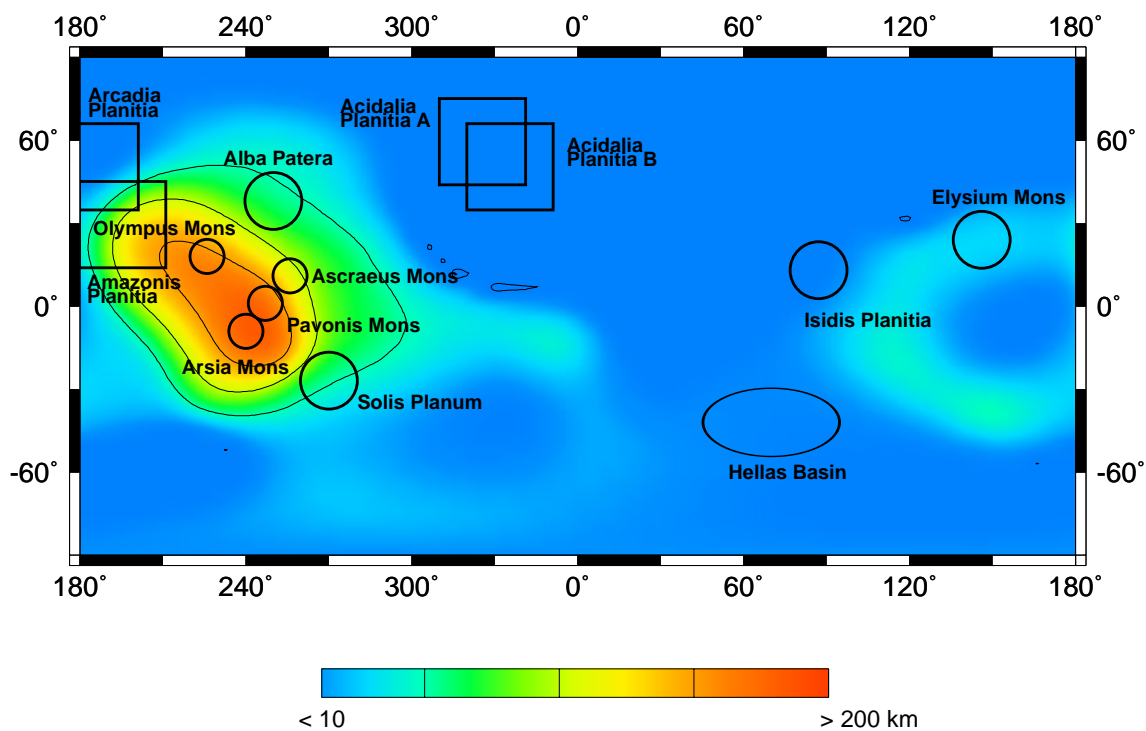
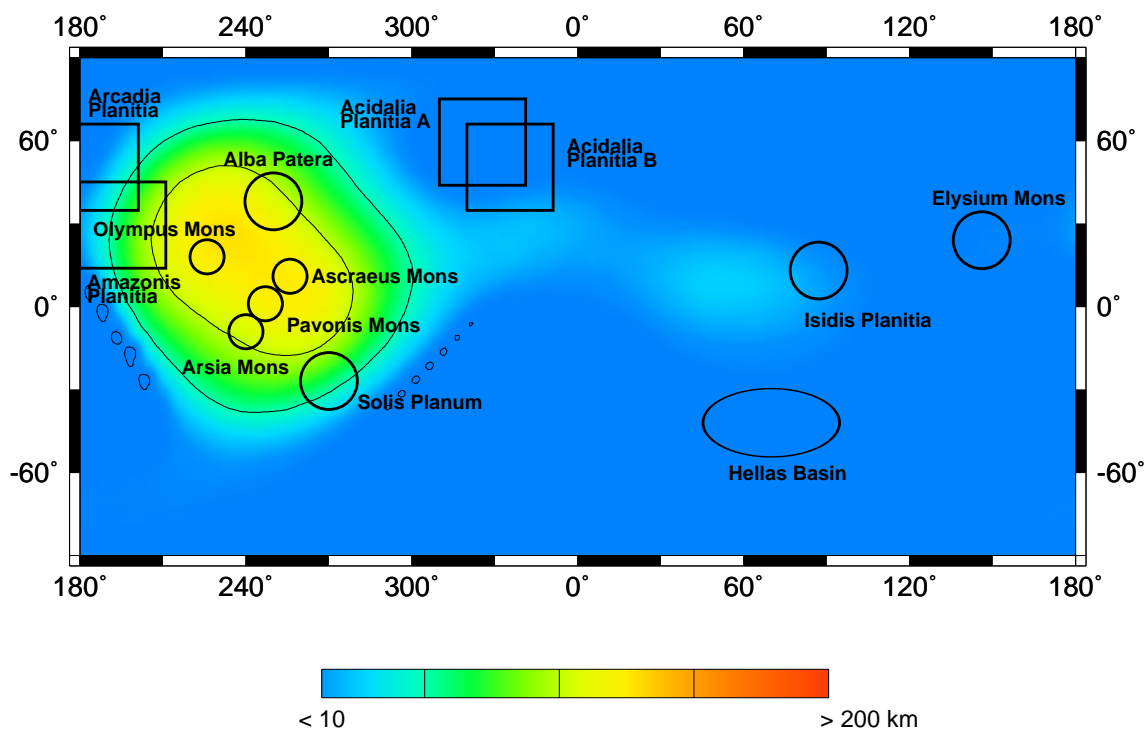
Citovaní autoři vesměs používají velmi podobné metody, rozdíl je především ve veličinách, pro které je formulována inverze - jedná se o admitanci [2, 8, 10] nebo o strukturu a velikost pozorovaných tektonických útvarů [3, 13]. Naše inverze je formulována pro výšku geoidu, srovnáváme tedy pozorovanou a predikovanou výšku geoidu. Další rozdíl je především ve filtračních metodách - většina autorů používá nejrůznější spektrální filtry (omezené pásy ve spektru), my používáme velmi jednoduchý Gaussův filtr v prostorové oblasti. Posledním (ale velmi podstatným) rozdílem je skutečnost, že citovaní autoři se zaměřují na několik málo topograficky významných oblastí, zatímco my odhadujeme tloušťku elastické litosféry na celé planetě. K určení jedné tloušťky v dané oblasti pak používáme pouze jednoduché aritmetické průměrování. Ve všech citovaných článcích je k výpočtu tloušťky elastické litosféry použit předpoklad o jejím prohýbání v důsledku zatížení (stejně jako v naší práci), proto je možné vypočtené tloušťky elastické litosféry považovat za tloušťky v době zatížení topografií (tato analýza byla úspěšně použita i v případě Země) [15].

Naše výsledky nejlépe odpovídají výsledkům z citovaných článků pro filtr s pološířkou $\sigma = 30^\circ$, nicméně i výsledky pro užší filtr s pološířkou $\sigma = 20^\circ$ jsou ve většině případů blízké publikovaným hodnotám. Výsledkům pro nejužší filtr s pološířkou $\sigma = 10^\circ$ nepřikládáme příliš velkou váhu především po provedení testů v kapitolách 5 a 6, kde se projevila přílišná oscilace výsledků jím získaných. Co se týká jednotlivých období, nejlepší shodu dostáváme pro období mezi Hesperianem a Amazonianem (oblasti Alba Patera a Elysium Mons). Ve většině ostatních oblastí naše metoda dává spíše vyšší hodnoty tloušťky elastické litosféry než citovaní autoři (což ale není příliš ve shodě s provedenými testy, kde naše metoda hodnoty tloušťky elastické litosféry spíše podceňovala). Zřetelný je v našich výsledcích nárůst tloušťky elastické litosféry s časem, který velmi dobře odpovídá principu zamrzlé litosféry popsánému v kapitole 6.

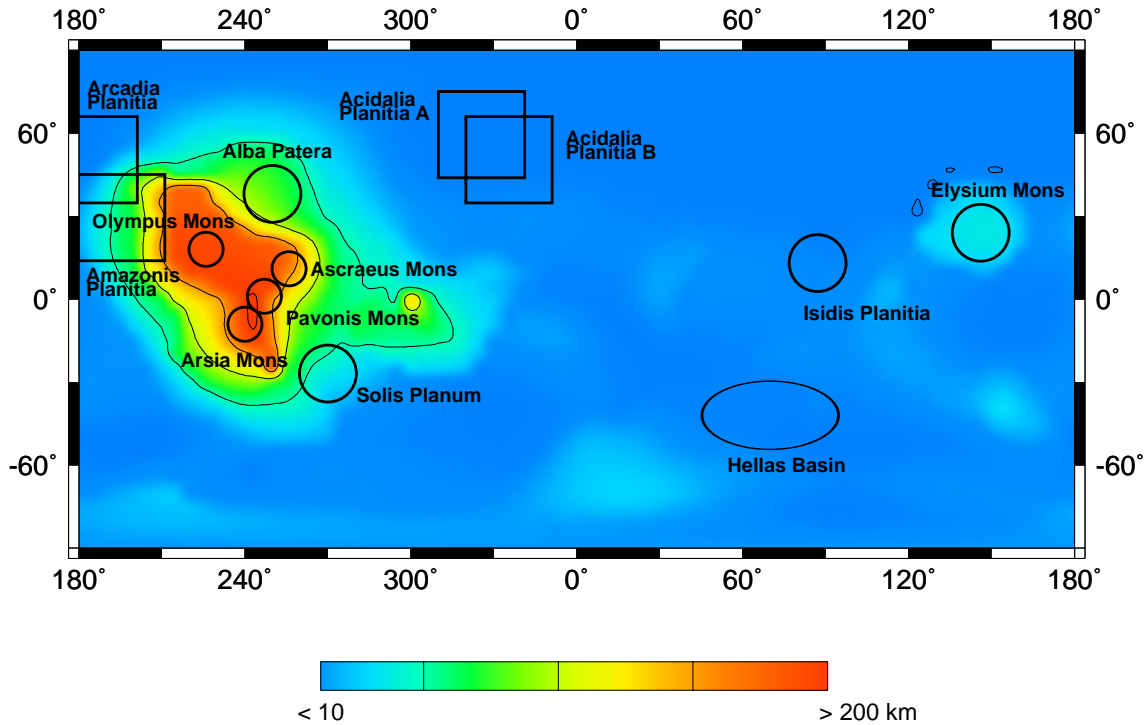
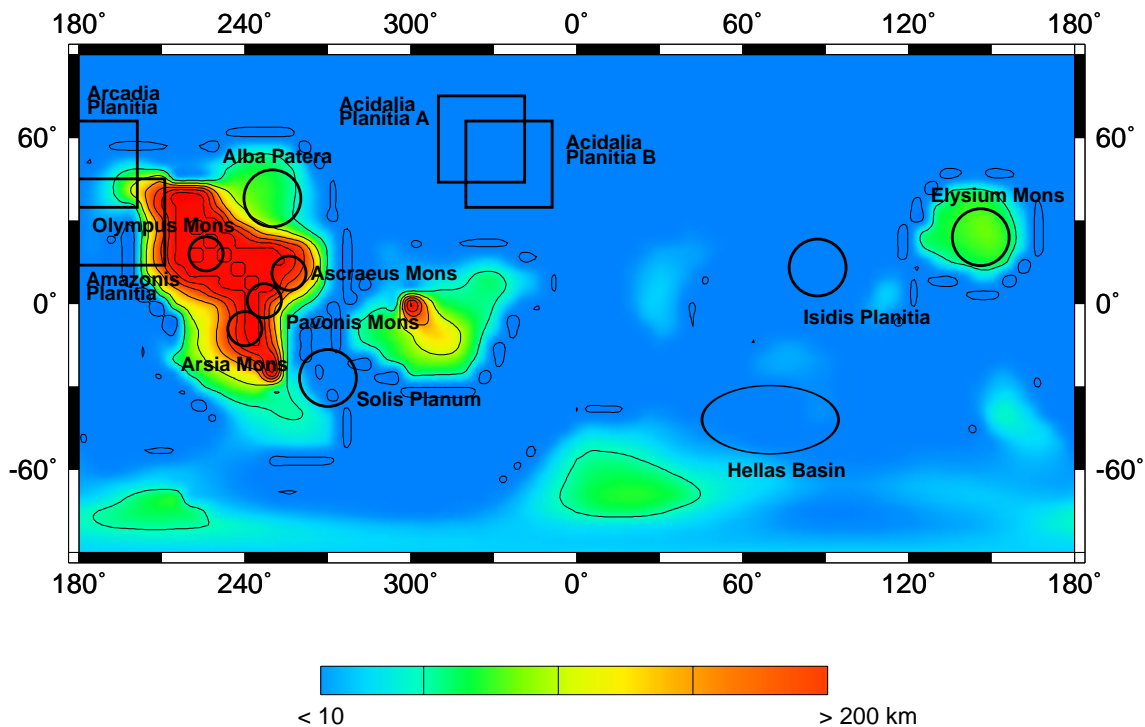
²Nížiny na severu planety představují při snaze určit tloušťku elastické litosféry speciální případ [21], neboť ukládání sedimentárních vrstev a eroze zhladily topografii do té míry, že inverze založená na metodě izostatické odezvy dávájí špatné výsledky, pokud se do výpočtu navíc nezahrne také eroze a vliv spodního zatěžování.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Hellas Basin	-	-	-	< 13	-	1	4	1	2
Isidis Planitia	-	> 120	-	-	100 – 180	12	3	1	5
Amazonis Planitia	-	-	0 – 45	-	-	57	81	58	66
Arcadia Planitia	-	-	0 – 23	-	-	14	10	13	12
Acidalia Planitia A	-	-	13 – 30	-	-	1	1	1	1
Acidalia Planitia B	-	-	0 – 30	-	-	2	1	1	1
Solis Planum	-	-	-	24 – 37	-	70	63	4	46
Alba Patera	66 ± 20	19 – 85	-	38 – 65	-	108	62	72	81
Elysium Mons	56 ± 20	28 – 110	-	15 – 45	-	2	27	75	35
Olympus Mons	94 ± 40	> 150	-	> 70	-	124	155	300	193
Ascraeus Mons	105 ± 40	8 – 50	-	2 – 80	-	123	106	237	155
Pavonis Mons	> 50	10 – 50	-	< 100	-	122	164	271	186
Arsia Mons	< 30	10 – 50	-	> 20	-	106	179	280	189

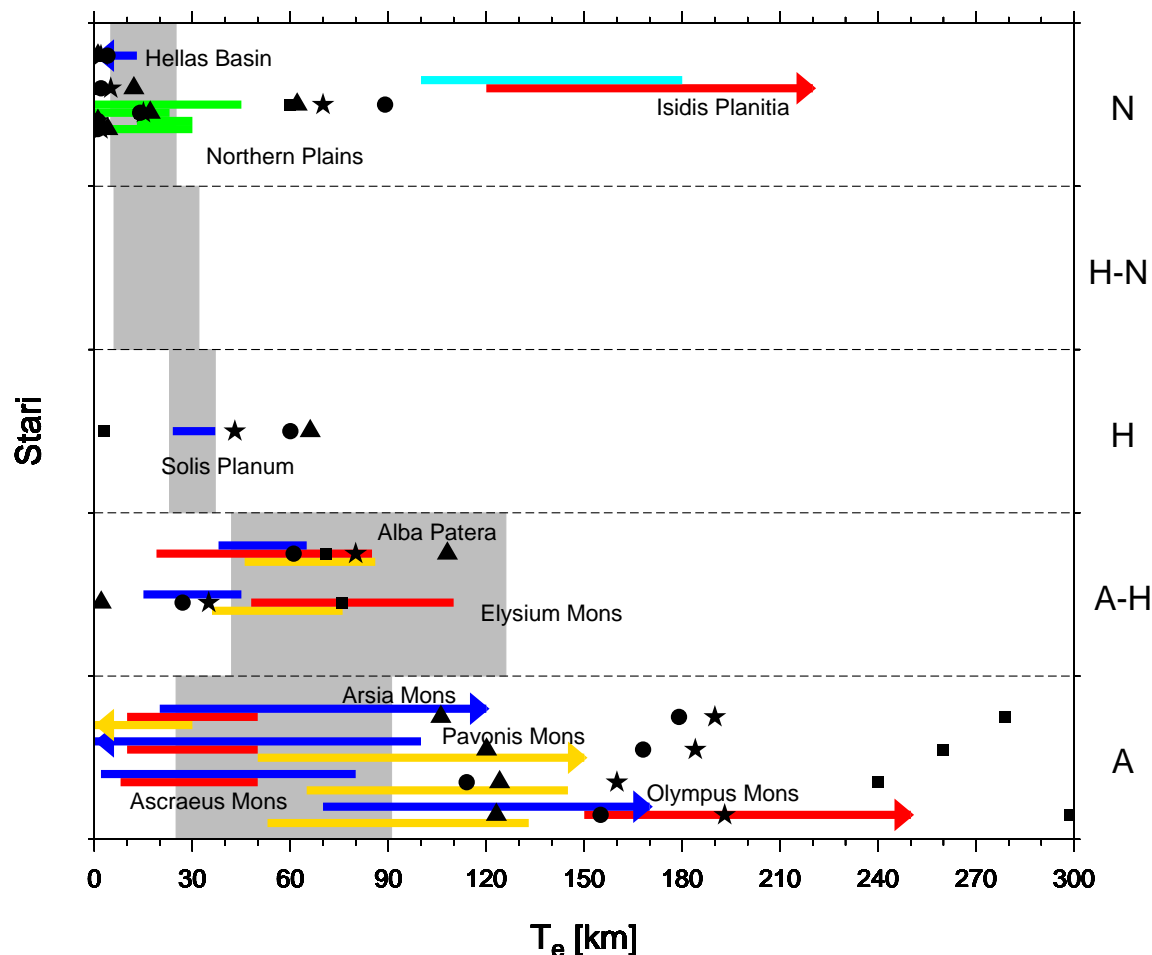
Tabulka 7.2: Srovnání našich výsledků ($\sigma = 30^\circ$ (6), $\sigma = 20^\circ$ (7), $\sigma = 10^\circ$ (8) a průměrný model (9)) s výsledky publikovanými: Belleguic et al. [2] (1), Comer et al. [3] (2), Hoogenboom et al. [8] (3), McGovern et al. [11] (4) a Ritzer et al. [13] (5). Všechny tloušťky jsou v km.



Obrázek 7.5: Vypočtené modely tloušťek elastické litosféry pro různé pološířky filtru: $\sigma = 30^\circ$ (nahore) a $\sigma = 20^\circ$ (dole) s vyznačenými oblastmi popsány výše.



Obrázek 7.6: Vypočtený model tloušťek elastické litosféry pro filtr o pološírce $\sigma = 10^\circ$ (nahore) a model, který vznikl průměrováním předchozích tří modelů (dole) s vyznačenými oblastmi popsány výše.



Obrázek 7.7: Srovnání námi vypočtených tloušťek elasticke litosféry pro jednotlivé oblasti s publikovanými výsledky - Belleguic et al. [2] (žlutá barva), Comer et al. [3] (červená barva), McGovern et al. [11] (modrá barva), Hoogenboom et al. [8] (zelená barva), Ritzer et al. [13] (tyrkysová barva) a průměrnými hodnotami tloušťky elasticke litosféry pro jednotlivá období podle Grott et al. [5] (šedé obdélníky). Naše výsledky pro různé pološířky filtru $\sigma = 30^\circ$ (trojúhelník), $\sigma = 20^\circ$ (kolečko), $\sigma = 10^\circ$ (čtverec) a pro průměrný model (hvězdička). Zařazení do jednotlivých epoch podle [11] - Noachian (N), Hesperian (H), Amazonian (A).

Kapitola 8

Závěr

V této práci jsme se věnovali lokální analýze gravitačního pole a topografie Marsu. Formulovali jsme prostorovou inverzi pro výpočet modelu tloušťky elastické litosféry. Nejprve jsme tuto inverzi rozsáhle testovali, abychom určili nejvhodnější parametry inverze. Zjistili jsme, že na výsledky inverze má velký vliv především vztah vlnových délek používané zátěže, filtru a modelu tloušťky elastické litosféry. Máme-li dlouhovlnný model, zatížíme-li ho dostatečně krátkovlnnou topografií (vzhledem k modelu) a použijeme-li filtr, který je dlouhovlnnější než topografie a zároveň krátkovlnnější než model tloušťky elastické litosféry, dává naše inverze velmi dobré výsledky. V případě nesplnění tohoto vztahu inverze nedává dobré výsledky. Ve skutečnosti ale nevíme, jakou vlnovou délku má námi hledaný model tlouštěk elastické litosféry, proto jsme předpokládali, že je dostatečně dlouhovlnný vzhledem k používané zátěži, a určili jsme stupně vhodné pro inverzi tak, aby byl splněn vztah mezi vlnovou délkou filtru a zátěže. Testovali jsme také fungování tzv. principu zamrzlé litosféry, který se zřejmě uplatňoval při vývoji Marsu i jiných planet.

Otestovanou inverzi jsme použili na reálná data. Určili jsme několik modelů tloušťky elastické litosféry pro různé filtry - tyto se liší spíše kvantitativně, kvalitativně jsou konzistentní. Zaměřili jsme se také na některé významné oblasti Marsu a pro tyto jsme průměrováním určili tloušťku elastické litosféry. Získané výsledky jsme porovnali s výsledky publikovanými v odborné literatuře. Naše výsledky se pro některé oblasti (Alba Patera, Olympus Mons) shodují s publikovanými výsledky, pro jiné oblasti (Solis Planum) nedostáváme shodu. Výsledky do velké míry závisí na pološírce použitého filtru - nejlepší výsledky dostáváme pro filtr s pološírkou $\sigma = 30^\circ$, ale i výsledky s užším filtrem o pološírce $\sigma = 20^\circ$ jsou pro většinu oblastí blízko publikovaným hodnotám. Celkem je z našich výsledků zřetelný nárůst tloušťky elastické litosféry s věkem, což je ve shodě s principem zamrzlé litosféry.

Naše modely jsou vypočteny pro konstantní tloušťku kůry ($T_c = 50$ km). Zlepšení výsledků by jistě napomohlo zahrnutí variací v tloušťce kůry do výpočtu. Dále by bylo vhodné vyzkoušet jiné typy filtrů a následně se zaměřit na vybrané oblasti a počítat inverzi přímo pro ně a ne určovat hodnoty tloušťky průměrováním přes body oblasti. Srovnání s publikovanými výsledky by jistě velmi pomohlo i určení chyby odhadu tloušťky elastické litosféry pro jednotlivé oblasti - tím bychom zřejmě dostali lepší překryv s publikovanými hodnotami. Naše výsledky považujeme vzhledem k jednoduchosti metody a rychlosti výpočtu za užitečné, a to především k předběžným odhadům tloušťky elastické litosféry v jednotlivých oblastech Marsu.

Příloha A

Gravitační potenciál

Uvádíme přehled základních vztahů nezbytných pro práci s gravitačním polem¹. Gravitační potenciál v místě \vec{r} lze vyjádřit pomocí *Newtonova integrálu*

$$V(r, \theta, \varphi) = \kappa \int_{\Omega} \frac{\rho(r', \theta', \varphi')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega' \quad (\text{A.1})$$

kde r , θ a φ jsou sférické souřadnice, ρ je hustota v bodě \vec{r}' , κ je gravitační konstanta a Ω je objem Země. Potenciál (A.1) splňuje *Laplace-Poissonovu rovnici*

$$\nabla^2 V = -4\pi\kappa\rho \quad (\text{A.2})$$

Gravitační zrychlení lze pak vyjádřit jako

$$\vec{g} = \nabla V \quad (\text{A.3})$$

Gravitační potenciál tělesa je zpravidla reprezentován pomocí *geoidu*, definovaného jako ekvipotenciální plocha (v případě Země odpovídá střední hladině oceánů). Jeho výšku můžeme odhadnout podle *Brunsova teoremu*

$$h = \frac{V(R)}{g_0(R)} \quad (\text{A.4})$$

kde R je střední poloměr tělesa a $g_0(R)$ je střední gravitační zrychlení na povrchu.

A.1 Rozvoj potenciálu do řad sférických harmonických funkcí

K popisu gravitačního potenciálu přibližně sférických těles se s výhodou zavádí *povrchové sférické funkce*. Pro jednotkovou sféru S v E_3 a prostor C^∞ nekonečně diferencovatelných komplexních funkcí na S definujeme kanonickou bázi $Y_{jm}(\theta, \varphi)$ ($j = 0, 1, \dots, \infty$ je *stupeň* dané funkce a $m = -j, \dots, j$ je její *řád*)

$$Y_{jm}(\theta, \varphi) = (-1)^m N_{jm} P_{jm}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A.5})$$

¹Převzato z bakalářské práce [9].

pro $m \geq 0$ a

$$Y_{j-m} = (-1)^m Y_{jm}^* \quad (\text{A.6})$$

pro $m < 0$, kde * značí komplexní sdružení, $P_{jm}(\cos \theta)$ ve vztahu (A.5) je *přidružený Legendreův polynom* a N_{jm} normovací faktor,

$$N_{jm} = \left[\frac{(2j+1)(j-m)!}{4\pi(j+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7})$$

Pro $m = 0$ je sférická funkce axiálně symetrická. Takto definované sférické povrchové funkce splňují *relace ortonormality* ve smyslu L_2 normy

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{j_1 m_1}(\theta, \varphi) Y_{j_2 m_2}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (\text{A.8})$$

Libovolnou funkci $f(r, \theta, \varphi) \in L_2(S \times E_1)$, která je spojitá alespoň do 2. derivace, lze pak rozvinout do této báze

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \varphi) \quad (\text{A.9})$$

Díky spojitosti 2. derivace funkce f konverguje suma na pravé straně rovnice (A.9) k f stejnoměrně. Koeficienty f_{jm} získáme vynásobením funkce f komplexně sdruženou bázovou funkcí Y_{jm}^* a přeintegrováním přes celou sféru. S využitím relací ortonormality (a prohozením sumy a integrálu, což je možné díky stejnoměrné konvergenci) dostaneme

$$f_{jm}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r, \theta, \varphi) Y_{jm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{A.10})$$

pro které platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |f_{jm}| = 0 \quad (\text{A.11})$$

Pro reálnou funkci f navíc platí symetrie

$$f_{j-m} = (-1)^m f_{jm}^* \quad (\text{A.12})$$

S využitím výše uvedených vztahů upravíme výraz (A.1). Hustotu rozvineme podle (A.9) a navíc použijeme *adiční teorém*, podle kterého

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r'}{r} \right)^l Y_{ln}^*(\theta', \varphi') Y_{ln}(\theta, \varphi) \quad (\text{A.13})$$

za předpokladu, že $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$ (počítáme potenciál vně tělesa). Pro gravitační potenciál tak dostáváme

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j V_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \left[\int_0^r \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{r} \right)^{j+2} dr' \right] Y_{jm}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Pro koeficienty rozvoje gravitačního potenciálu do sférických harmonických funkcí tedy platí

$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \int_0^r \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{r}\right)^{j+2} dr' \quad (\text{A.15})$$

Analogicky pro geoid

$$h_{jm} = \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} \int_0^R \rho_{jm}(r') \left(\frac{r'}{R}\right)^{j+2} dr' \quad (\text{A.16})$$

Vztahy (A.15), (A.16) lze použít, je-li hustota spojitou funkcí poloměru r' . Nachází-li se někde ve vzdálenosti a od středu tělesa skok v hustotě, např. na rozhraní jádra a pláště (*core-mantle boundary*, CMB), můžeme koeficienty hustoty ρ_{jm} aproximovat plošnou hustotou

$$\rho_{jm}(r') = \Delta\rho t_{jm} \delta(r' - a) \quad (\text{A.17})$$

kde $\Delta\rho$ je hustotní skok na rozhraní, t_{jm} jsou koeficienty topografie rozhraní a $\delta(r' - a)$ je Diracova δ -funkce udávající polohu hustotního rozhraní. Dosazením výrazu (A.17) do (A.15) dostáváme vztah pro koeficienty gravitačního potenciálu generovaného hustotním rozhraním

$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} t_{jm} \Delta\rho \left(\frac{a}{r}\right)^{j+2} \quad (\text{A.18})$$

Stejně pak dosazením (A.17) do (A.16) dostaneme vztah pro koeficienty geoidu generovaného hustotním rozhraním

$$h_{jm} = \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g_0(R)} t_{jm} \Delta\rho \left(\frac{a}{R}\right)^{j+2} \quad (\text{A.19})$$

Ze vztahů (A.15), (A.16), (A.18) a (A.19) je zřejmé, že konkrétní koeficient V_{jm} , resp. h_{jm} , daného stupně a řádu závisí právě jen na hodnotě veličiny ρ_{jm} ((A.15), (A.16)), resp. t_{jm} ((A.18), (A.19)), odpovídajícího stupně a řádu a nezávisí na hodnotách koeficientů jiných stupňů a řádů.

A.2 Výkonové spektrum

Označme funkci vzniklou sečtením koeficientů f_{jm} pro daný stupeň j jako f_j ,

$$f_j(\theta, \varphi) = \sum_{m=-j}^j f_{jm} Y_{jm}(\theta, \varphi) \quad (\text{A.20})$$

Výkon (výkonové spektrum) F_j funkce f na stupni j definujeme jako kvadrát velikosti koeficientu f_j ve smyslu L_2 normy

$$F_j = \|f_j\|_{L_2}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_j f_j^* \sin\theta d\theta d\varphi = \sum_{m=-j}^j f_{jm} f_{jm}^* \quad (\text{A.21})$$

kde poslední rovnost plyne z definice f_j a z ortonormality sférických harmonických funkcí (A.8).

Příloha B

Kompenzace topografie prohnutím elastické litosféry konstantní tloušťky

V současnosti je všeobecně přijímán názor, že planetární tělesa mají vnější tenkou slupku (litosféru), která i na dlouhých časových škálách reaguje elasticky¹. Mějme sférickou slupku poloměru R a konstantní tloušťky T_e . Rovnice pro vertikální posunutí u (měřeno směrem dolů) má tvar

$$D \nabla^6 u + 4 D \nabla^4 u + E T_e R^2 \nabla^2 u + 2 E T_e R^2 u = R^4 (\nabla^2 + 1 - \nu) p \quad (\text{B.1})$$

kde

$$D = \frac{E T_e^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (\text{B.2})$$

je pevnost vůči ohybu (*flexural rigidity*), E Youngův modul, ν Poissonův poměr a p tlak působící na slupku (kladný směrem dolů). Laplaceův operátor působící na funkci proměnných θ a φ je definován vztahem

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{B.3})$$

kde θ je doplněk zeměpisné šířky a φ je zeměpisná délka. Zatížíme-li slupku topografií výšky t , bude její tíže jedním z příspěvků k celkovému tlaku, který působí na slupku. Pokud slupka není nekonečně pevná, pak zatížení topografií způsobí její prohnutí u a to zároveň způsobí deformaci rohraní Moho (toto rozhraní je určeno hustotním kontrastem mezi kůrou (ρ_c) a pláštěm (ρ_m), $\Delta \rho = \rho_m - \rho_c$). Důsledkem tohoto prohnutí bude vztlak. Povrchová topografie navíc způsobí i posunutí geoidu h . Celkový tlak na elastickou slupku po zatížení topografií bude

$$p = g [\rho_c t - \rho_m h - (\rho_m - \rho_c) u] \quad (\text{B.4})$$

Pro zjednodušení zavedme novou proměnnou

$$\bar{t} = t - \frac{\rho_m}{\rho_c} h \quad (\text{B.5})$$

¹Tato kapitola byla přeodvozena podle [20].

a bezrozměrné veličiny

$$\tau = \frac{E T_e}{R^2 g \Delta \varrho} \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma = \frac{E T_e^3}{R^4 g \Delta \varrho 12 (1 - \nu^2)} = \frac{\tau}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{T_e}{R} \right)^2 \quad (\text{B.7})$$

Parametr τ je mírou pevnosti sférické slupky při zanedbání odporu k ohýbání, parametr σ je mírou rezistence slupky k ohýbání. Dosazením veličin \bar{t} , τ a σ do vztahu (B.1) pro vertikální posunutí u dostáváme rovnici

$$[\sigma (\nabla^6 + 4 \nabla^4) + \tau (\nabla^2 + 2)]u = (\nabla^2 + 1 - \nu) \left(\frac{\varrho_c}{\varrho_m - \varrho_c} \bar{t} - u \right) \quad (\text{B.8})$$

Chceme získat posunutí u jako funkci \bar{t} - proto rozvineme tyto veličiny do řady sférických harmonických funkcí podle (A.9)

$$\bar{t} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \bar{t}_{jm} Y_{jm} \quad (\text{B.9})$$

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j u_{jm} Y_{jm} \quad (\text{B.10})$$

Legendreovy přidružené polynomy (obsažené ve sférické harmonické funkci Y_{jm} , viz část A.1) splňují obecnou Legendreovu diferenciální rovnici, tedy

$$\left[(1 - \xi^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(j(j+1) - \frac{m^2}{(1 - \xi^2)} \right) \right] P_{jm}(\xi) = 0 \quad (\text{B.11})$$

Vynásobením rovnice (B.11) komplexní exponenciálou $e^{im\varphi}$ dostáváme

$$\left[(1 - \xi^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(j(j+1) - \frac{m^2}{(1 - \xi^2)} \right) \right] P_{jm}(\xi) e^{im\varphi} = 0 \quad (\text{B.12})$$

Substitucí $\xi = \cos \theta$ do rovnice (B.3) dostáváme jiný tvar Laplaceova operátoru

$$\nabla^2 = (1 - \xi^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{(1 - \xi^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{B.13})$$

Kombinací rovnic (B.11) a (B.13) dostáváme výsledek působení Laplaceova operátoru na sférickou harmonickou funkci

$$\nabla^2 [P_{jm}(\xi) e^{im\varphi}] = -j(j+1) P_{jm}(\xi) e^{im\varphi} \quad (\text{B.14})$$

Dosazením rovnic (B.9), (B.10) a (B.14) do (B.8) dostáváme

$$\begin{aligned} & \sigma [-j^3(j+1)^3 + 4j^2(j+1)^2] + \tau [-j(j+1) + 2] u_{jm} = \\ & = [-j(j+1) + (1 - \nu)] \left[\frac{\varrho_c}{(\varrho_m - \varrho_c)} \bar{t}_{jm} - u_{jm} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

pro každou dvojici j a m . Poměr koeficientů prohnutí slupky u_{jm} a koeficientů zátěže \bar{t}_{jm} má tvar

$$\frac{u_{jm}}{\bar{t}_{jm}} = \left(\frac{\varrho_c}{\varrho_m - \varrho_c} \right) \left(\frac{j(j+1) - (1-\nu)}{\sigma [j^3(j+1)^3 - 4j^2(j+1)^2] + \tau [j(j+1) - 2] + j(j+1) - (1-\nu)} \right) \quad (\text{B.16})$$

Gravitační potenciál v radiální vzdálenosti r od středu sféry generovaný povrchovou topografií t a prohnutím u rozhraní Moho ve vzdálenosti $R - T_c$ od středu sféry (zde T_c je tloušťka kůry, tedy hloubka rozhraní Moho) má tvar (viz vztah pro koeficienty potenciálu (A.18))

$$V(r) = \frac{\kappa M}{r} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \left[\varrho_c t_{jm} \left(\frac{R}{r} \right)^{j+2} - (\varrho_m - \varrho_c) u_{jm} \left(\frac{R - T_c}{r} \right)^{j+2} \right] \quad (\text{B.17})$$

(záporné znaménko je před druhým členem v závorce díky opačné orientaci topografie t a posunutí u). Rozvineme radiální polohu geoidu do řady harmonických funkcí

$$r_h = R + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j h_{jm} Y_{jm} = R + h \quad (\text{B.18})$$

Hodnota gravitačního potenciálu na referenčním geoidu je

$$V(r_h) = \frac{\kappa M}{R} \quad (\text{B.19})$$

Dosadíme vztahy (B.18) a (B.19) do rovnice (B.17) a použijeme aproximace $h/R \ll 1$. Zvlnění geoidu je navíc významné pouze pro nízké stupně, a proto při určování koeficientů geoidu můžeme předpokládat, že $(1 - T_c/R)^{j+2} \doteq 1$. Pro koeficienty rozvoje geoidu tak dostáváme

$$h_{jm} = \frac{3}{(2j+1)\bar{\varrho}} [\varrho_c t_{jm} - (\varrho_m - \varrho_c) u_{jm}] \quad (\text{B.20})$$

kde $\bar{\varrho}$ je střední hustota planety. Dosazením rovnic (B.5) a (B.20) do (B.16) dostáváme

$$\frac{u_{jm}}{\bar{t}_{jm}} = \frac{\varrho_c}{\varrho_m - \varrho_c} C_j \quad (\text{B.21})$$

kde

$$C_j = \left[1 - \frac{3\varrho_m}{(2j+1)\bar{\varrho}} \right] \times \left[\frac{\sigma [j^3(j+1)^3 - 4j^2(j+1)^2] + \tau [j(j+1) - 2] + j(j+1) - (1-\nu)}{j(j+1) - (1-\nu)} - \frac{3\varrho_m}{(2j+1)\bar{\varrho}} \right]^{-1} \quad (\text{B.22})$$

je kompenzační koeficient pro stupeň j . V případě zanedbání selfgravitace platí

$$\frac{3\varrho_m}{(2j+1)\bar{\varrho}} = 0 \quad (\text{B.23})$$

Výsledný tvar kompenzačního koeficientu při zanedbání selfgravitace je

$$C_j = \left[\frac{\sigma [j^3(j+1)^3 - 4j^2(j+1)^2] + \tau [j(j+1) - 2] + j(j+1) - (1-\nu)}{j(j+1) - (1-\nu)} \right]^{-1} \quad (\text{B.24})$$

V limitním případě litosféry nulové tloušťky ($\tau \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$) platí $C_j \rightarrow 1$ a zátěž je kompenzována izostaticky. V limitním případě nekonečně tuhé litosféry ($\tau \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow \infty$) platí $C_j \rightarrow 0$ - litosféra se neprohne a povrchová topografie zůstává nekompenzovaná. Pro naši inverzi potřebujeme znát koeficienty geoidu generovaného povrchovou topografií a odpovídajícím prohnutím rozhraní Moho. Dosazením (B.21) do (B.17) dostáváme pro koeficienty gravitačního potenciálu, resp. geoidu (po dosazení $r = R$ a vydělení gravitačním zrychlením g)

$$V_{jm}(r) = \frac{4\pi\kappa r}{2j+1} \varrho_{ctjm} \left[1 - C_j \left(\frac{r - T_c}{r} \right)^{j+2} \right] \quad (\text{B.25})$$

resp.

$$h_{jm} = \frac{4\pi\kappa R}{(2j+1)g} \varrho_{ctjm} \left[1 - C_j \left(\frac{R - T_c}{R} \right)^{j+2} \right] \quad (\text{B.26})$$

Literatura

- [1] Anderson, D. L., W. F. Miller, G. V. Latham, Y. Nakamura, M. N. Toksöz, A. M. Dainty, F. K. Duennebier, A. R. Lazarewicz, R. L. Kovach, and T. C. D. Knight (1977), Seismology on Mars, *J. Geophys. Res.*, *82*(28), 4524–4546.
- [2] Belleguic, V., P. Lognonné, and M. Wieczorek (2005), Constraints on the Martian lithosphere from gravity and topography data, *J. Geophys. Res.*, *110*(E11005), doi:10.1029/2005JE002437.
- [3] Comer, R. P., S. C. Solomon, and J. W. Head (1985), Mars: Thickness of the Lithosphere From the Tectonic Response to Volcanic Loads, *Rev. Geophys.*, *23*(1), 61–92.
- [4] Forget, F., F. Costard, and P. Lognonné (2008), *Planet Mars: Story of Another World*, Springer and Praxis, Chichester.
- [5] Grott, M., and D. Breuer (2008), The evolution of the martian elastic lithosphere and implications for crustal and mantle rheology, *Icarus*, *193*, 503–515, doi:10.1016/j.icarus.2007.08.015.
- [6] Hartmann, W. K., and G. Neukum (2001), Cratering Chronology and the Evolution of Mars, *Space Sci. Rev.*, *96*, 165–194.
- [7] Head, J. W., R. Greeley, M. P. Golombek, W. K. Hartmann, E. Hauber, R. Jaumann, P. Masson, G. Neukum, L. E. Nyquist, and M. H. Carr (2001), Geological processes and Evolution, *Space Sci. Rev.*, *96*, 263–292.
- [8] Hoogenboom, T., and S. E. Smrekar (2006), Elastic thickness estimates for the northern lowlands of Mars, *Earth Planet. Sci. Lett.*, *248*, 830–839, doi:10.1016/j.epsl.2006.06.035.
- [9] Kalousová, K. (2008), Tělesa Sluneční soustavy: analýza vnitřní stavby na základě topografie a gravitačního pole (bakalářská práce), Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha.
- [10] McGovern, P. J., S. C. Solomon, D. E. Smith, M. T. Zuber, M. Simons, M. A. Wieczorek, R. J. Phillips, G. A. Neumann, O. Aharonson, and J. W. Head (2002), Localized gravity/topography admittance and correlation spectra on Mars: Implications for regional and global evolution, *J. Geophys. Res.*, *107*(E12), doi:10.1029/2002JE001854.

- [11] McGovern, P. J., S. C. Solomon, D. E. Smith, M. T. Zuber, M. Simons, M. A. Wieczorek, R. J. Phillips, G. A. Neumann, O. Aharonson, and J. W. Head (2004), Correction to "Localized gravity/topography admittance and correlation spectra on Mars: Implications for regional and global evolution", *J. Geophys. Res.*, *109*(E07007), doi:10.1029/2004JE002286.
- [12] McKenzie, D., D. N. Barnett, and D. N. Yuan (2002), The relationship between Martian gravity and topography, *Earth Planet. Sci. Lett.*, *195*, 1–16.
- [13] Ritzer, J. A., and S. A. Hauck (2009), Lithospheric structure and tectonics at Isidis Planitia, Mars, *Icarus*, *201*, 528–539, doi:10.1016/j.icarus.2009.01.025.
- [14] Scott, D. H., and M. H. Carr (1978), Geologic map of Mars, *Misc. Invest. Ser. Map, I-1083*, U. S. Geol. Surv., Reston.
- [15] Spohn, T., M. H. Acuña, D. Breuer, M. Golombek, R. Greeley, A. Halliday, E. Hauber, R. Jaumann, and F. Sohl (2001), Geophysical Constraints on the Evolution of Mars, *Space Sci. Rev.*, *96*, 231–262.
- [16] Tanaka, K. L. (1986), The Stratigraphy of Mars, *J. Geophys. Res.*, *91*(B13), E139–E158.
- [17] Tanaka, K. L., D. H. Scott, and R. Greeley (1992), Global Stratigraphy, *Mars*, editor H. H. Kiefer et al., str. 345–382, University of Arizona Press, Tucson.
- [18] Tarantola, A. (2005), *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, SIAM, Philadelphia.
- [19] Toksöz, M. N., and A. T. Hsui (1978), Thermal History and Evolution of Mars, *Icarus*, *34*, 537–547.
- [20] Turcotte, D. L., R. J. Willemann, W. F. Haxby, and J. Norberry (1981), Role of Membrane Stresses in the Support of Planetary Topography, *J. Geophys. Res.*, *86*(B5), 3951–3959.
- [21] Zuber M. T., S. C. Solomon, R. J. Phillips, D. E. Smith, G. L. Tyler, O. Aharonson, G. Balmino, W. B. Banerdt, J. W. Head, C. L. Johnson, F. G. Lemoine, P. J. McGovern, G. A. Neumann, D. D. Rowlands, and S. Zhong (2000), Internal Structure and Early Thermal Evolution of Mars from Mars Global Surveyor Topography and Gravity, *Science*, *287*, 1788–1793.
- Internetové stránky
- [22] <http://planety.astro.cz/mars>
- [23] COMSOL Multiphysics, finite element analysis, solver and simulation software package for various physics and engineering applications, www.comsol.com
- [24] Elmer, Open Source Finite Element Software for Multiphysical Problems, CSC – IT Center for Science, Espoo, Finland, www.csc.fi/english/pages/elmer
- [25] <http://mars.jpl.nasa.gov/missions>

[26] <http://pds.jpl.nasa.gov>

[27] <http://mathworld.wolfram.com/SampleVariance.html>