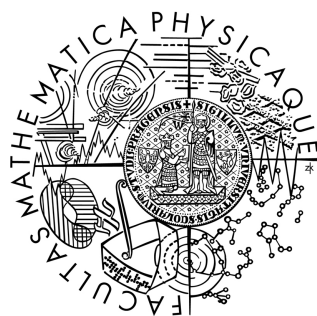


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Libor Šachl

### **Termální konvekce jako nelineární dynamický systém: vliv radiálního přenosu tepla**

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2009

Především bych rád poděkoval svému školiteli doc. RNDr. Ctiradu Matyskovi, DrSc. za velkou ochotu a trpělivost při konzultacích a mnoho konstruktivních nápadů. Dále bych rád poděkoval Mgr. Elišce Zábranové za cenné rady. Závěrem, nikoliv však v poslední řadě, bych chtěl poděkovat všem členům katedry za vytvoření příjemného a inspirujícího pracovního prostředí.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29.května 2009

Libor Šachl

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvodní seznámení</b>	<b>6</b>
1.1	Co je to termální konvekce a proč nás zajímá? . . . . .	6
1.2	Historie . . . . .	7
1.3	Co víme o plášťové konvekci . . . . .	9
1.4	Navržené typy plášťové konvekce . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Základní rovnice</b>	<b>14</b>
2.1	Zákony zachování . . . . .	14
2.1.1	Reynoldsův teorém . . . . .	15
2.1.2	Zobecněný Gaussův teorém . . . . .	16
2.1.3	Zákon zachování hmoty . . . . .	16
2.1.4	Zákon zachování hybnosti . . . . .	17
2.1.5	Zákon zachování momentu hybnosti . . . . .	18
2.1.6	Zákon zachování energie . . . . .	20
2.1.7	Konkrétní vyjádření . . . . .	21
2.2	Rovnice přenosu tepla (RPT) . . . . .	22
2.2.1	RPT v kontinuu s dominantním hydrostatickým tlakem	23
2.3	Boussinesqova aproximace základních rovnic . . . . .	24
2.4	Referenční teplota . . . . .	25
2.5	Bezrozměrné veličiny . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Analýza stability</b>	<b>28</b>
3.1	Referenční rozdělení teploty $T_0$ . . . . .	29
3.1.1	Analytické řešení . . . . .	29
3.1.2	Numerické řešení, popis programu (skriptu) v prostředí MATLAB (Octave) . . . . .	34
3.1.3	Výsledky-grafický výstup . . . . .	36
3.2	Převod rovnic do spektrální oblasti . . . . .	48

3.2.1	Stokesův problém . . . . .	48
3.2.2	RPT . . . . .	49
3.3	Řešení pro vrstvu s konstantní tepelnou roztažností, fononovým $T_0$ , $k(z) = 1 + \tilde{\beta}(T_s + T_0)^3$ a $\hat{\Theta}$ , $\hat{W}$ ve tvaru řad . . . . .	49
3.3.1	Řešení s nulovou disipací . . . . .	50
3.3.2	Popis programu (skriptu) v prostředí MATLAB (Octave) . . . . .	56
3.3.3	Testovací příklad . . . . .	57
3.3.4	Řešení s nenulovou disipací . . . . .	58
3.4	Zobecnění pro 2 vrstvy . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>65</b>
	<b>Literatura</b>	<b>66</b>
<b>A</b>	<b>Obsah přiloženého CD</b>	<b>67</b>
A.1	Adresář Kondukce . . . . .	67
A.2	Adresář Konvekce . . . . .	67
A.3	Adresář Obrazky . . . . .	67

Název práce: Termální konvekce jako nelineární dynamický systém: vliv radiačního přenosu tepla

Autor: Libor Šachl

Katedra (ústav): Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

e-mail vedoucího: cm@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce se zabývá postupem určení tzv. kritického Rayleighova čísla, tj. určením hranice, kdy se systém daný referenčním časově neproměnným kondukčním řešením stává nestabilním vůči libovolně malým perturbacím v teplotě. Úloha je řešena v kartézské geometrii pro vrstvu zahřívanou zevnitř a odspodu užitím rozšířené Boussinesqovy aproximace, která zahrnuje adiabatické zahřívání a ochlazování. Je uvážena proměnná tepelná vodivost popisující kombinaci fononového a radiačního příspěvku, který závisí na třetí mocnině teploty. Referenční stav je volen ve tvaru fononového řešení.

Klíčová slova: termální konvekce, kritické Rayleighovo číslo, tepelná vodivost

Title: Thermal convection as a nonlinear dynamical system: influence of a heat transfer by radiation

Author: Libor Šachl

Department: Department of geophysics

Supervisor: doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Supervisor's e-mail address: cm@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we deal with the determination of a critical Rayleigh number, i.e. with the determination of a state, when the system determined by a reference time-independent conduction solution becomes unstable to arbitrarily small temperature perturbations. Our problem is solved in Cartesian geometry for a layer heated from bellow and from within using the extended Boussinesq approximation, where adiabatic heating and cooling are considered. A varying thermal conductivity combining phonon and radiative contributions is considered. The radiative contribution depends on the third power of temperature. The reference state is chosen to be identical with the phonon solution.

Keywords: thermal convection, critical Rayleigh number, thermal conductivity

# Kapitola 1

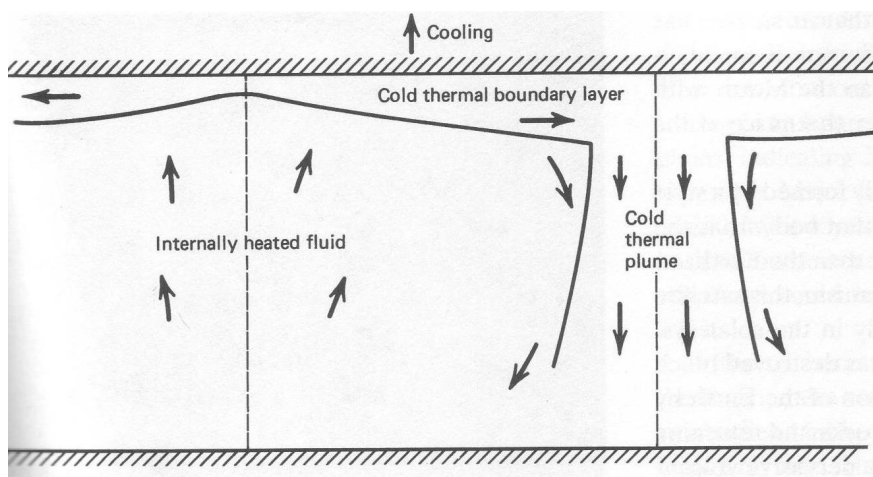
## Úvodní seznámení

Aktuální práce z oblasti geodynamiky se v drtivé většině zabývají pokročilými simulacemi dějů v zemském nitru. Jelikož tato kapitola by měla sloužit jako základní obecné shrnutí poznatků o plášťové konvekci, rozhodl jsem se pojmout ji nikoliv formou rešerší z aktuálních článků, nýbrž převzetím vhodných partií z vybraných knih. Zde [5] a [4], konkrétně podkapitoly 1.1, 1.2 a 1.4 jsou převzaty z [5] str. 189 resp. str. 226 resp. str. 4-5 a podkapitola 1.3 z [4] str. 177-178 vyjma bodu 10, jež je ze str. 364-365.

### 1.1 Co je to termální konvekce a proč nás zajímá?

Když je kapalina ohřáta, její hustota obecně klesá díky teplotní roztažnosti. Vrstva kapaliny, která je zahřívána zespod nebo zevnitř a ochlazována svrchu obsahuje hustou chladnou kapalinu blízko horní hranice a horkou lehkou kapalinu v hloubce. Tato situace je gravitačně nestabilní. Chladná kapalina se snaží zanořit a horká stoupat. To je termální konvekce. Děj je ilustrován na obr. 1.1.

Fakt, že se zemský plášť v jistém ohledu chová jako kapalina, má za následek deskovou tektoniku a kontinentální drift; hraje důležitou roli v určování termální struktury Země. Pochopení termální konvekce je nezbytné k pochopení fundamentálních geodynamických procesů.



**Obrázek 1.1:** Termální konvekce ve vrstvě zahříváné zevnitř a chlazené svrchu

## 1.2 Historie

Šíření seismických střížných vln ukázalo, že plášť je bez jakýchkoliv pochybností pevný. Základní otázka byla, jak může v pevné hornině nastat horizontální posunutí velikosti tisíců kilometrů. "Kapalinové" chování pláště bylo ustanoveno pomocí gravitačních studií, jež byly provedeny v druhé půlce devatenáctého století. Měření ukázala, že horská pásma mají kořeny s nízkou hustotou. Nízká hustota kořenů poskytuje zápornou relativní hmotu, která se téměř rovná kladné hmotě hor. Toto chování může být vysvětleno principem hydrostatické rovnováhy pokud by se plášť choval jako kapalina. Zdá se, že horská pásma se chovají jako dřevěné bloky plující na vodě.

"Kapalinové" chování pláště bylo kvantitativně popsáno N. A. Haskelllem (1935). Studie zdvihání pobřežních teras ve Skandinávii ukázala, že zemský povrch stále stoupal po oprostění od velkého množství ledu během poslední doby ledové. Nakládal-li s pláštěm jako s viskózní kapalinou s viskozitou o velikosti  $10^{20}$  Pa·s, Haskell byl schopen vysvětlit současný zdvih Skandinávie. Ačkoliv je to velká viskozita (voda má viskozitu  $10^{-3}$  Pa·s), vedla tato myšlenka k chování pláště jakožto kapaliny na dlouhých časových intervalech odpovídajících geologickému času.

V padesátých letech teoretické studie vytvořily několik mechanismů pro velmi pomalé tečení krystalických materiálů. Toto tečení vyústilo v "kapalinové" chování. Robert B. Gordon (1965) ukázal, že tečení týkající se pevných látek kvantitativně vysvětluje viskozitu určenou z postglaciálního výzdvihu.

Tečení hornin v plášti nebylo ničím překvapujícím pro vědce, kteří studovali led v ledovcích. Led je také krystalická pevná látka a gravitační objemové síly v ledovcích nutí led téci, neboť jeho teplota je blízko teploty tání. Obdobně horniny v plášti jsou blízko svých teplot tání a tečou v důsledku gravitačních objemových sil.

Síly musejí působit na litosféru tak, aby byly schopny pohybovat deskami. Wegener navrhnul, že síly slapové nebo síly spojené s rotací Země způsobují kontinentální drift. Ovšem ve dvacátých letech minulého století Harold Jeffreys, jak je shrnuto v jeho knize *The Earth* (Jeffreys, 1924), ukázal, že tyto síly jsou nedostačující. Bylo třeba nalézt nějaké jiné mechanismy, které by byly schopny pohánět pohyb desek. Jakýkoliv rozumný mechanismus musí mít dostatečnou energii ke vzniku zemětřesení, chodu vulkánů a vrásnění horstev. Arthur Holmes (1931) navrhnul, že termální konvekce by byla schopna pohánět plášťovou konvekce a kontinentální drift. Je-li kapalina zahřívána zespodu nebo zevnitř a zároveň ochlazována shora v gravitačním poli, stane se gravitačně nestabilní a termální konvekce může začít. Horké plášťové horniny jsou v hloubkách gravitačně nestabilní s ohledem k chladnějším, hustším horninám v litosféře. Výsledkem je termální konvekce, při které chladnější horniny klesají do pláště a teplejší stoupají směrem k povrchu. Výstup plášťových materiálů na oceánských hřbetech a sestup litosféry do pláště v oceánských příkopech je součástí tohoto procesu. Zemský plášť je ohříván rozpadem radioaktivních izotopů uranu 235 ( $^{235}\text{U}$ ), uranu 238 ( $^{238}\text{U}$ ), thoria 232 ( $^{232}\text{Th}$ ) a draslíku ( $^{40}\text{K}$ ). Objemové zdroje tepla z těchto izotopů a sekulární chladnutí Země pohánějí plášťovou konvekci. Teplo generované radioaktivními izotopy klesá s časem, jak dochází k jejich rozpadu. Před dvěma miliardami let bylo generované teplo asi dvakrát větší, než je dnešní hodnota. Protože množství generovaného tepla je dnes menší, intenzita probíhající konvekce, jež odvádí teplo, je také menší. Intenzita plášťové konvekce závisí na plášťové viskozitě.

Během šedesátých let minulého století se objevila nezávislá paleomagnetická pozorování podporující kontinentální drift. Při ochlazování a tuhnutí magmatu dochází ke zmagnetování jeho železných komponent magnetickým polem Země. Tato remanentní magnetizace poskytuje fosilní záznam orientace magnetického pole v daném čase. Studie orientace pole mohou být užity ke stanovení pohybů hornin relativně k zemskému magnetickému poli. Horniny v jednotlivých povrchových vrstvách, které nebyly lokálně deformovány, by měly ukazovat stejnou pozici zemských magnetických pólů. Keith Runcorn (1956) ukázal, že horniny v Severní Americe a Evropě poskytují roz-



dílné pozice magnetických pólů. Vyvodil z toho, že rozdíly jsou důsledkem kontinentálního driftu mezi těmito dvěma kontinenty.

Paleomagnetické studie také ukázaly, že zemské magnetické pole je náchylné k občasnému přepólování. Pozorování magnetického pole nad oceány ukázala pravidelnou pásovou strukturu pásových magnetických anomálií (oblast, kde je velikost magnetického pole nad a pod průměrnou hodnotou) ležící symetricky okolo oceánských hřbetů. Frederick Vine a Drummond Matthews (1963) provedli korelaci položení okrajů proužků s časem přepólování a byli schopni získat kvantitativní hodnoty rychlosti rozšiřování oceánského dna. Tato pozorování poskytla základy pro přesné určení relativních rychlostí, jakými se jednotlivé desky vůči sobě pohybují.

Koncem šedesátých let minulého století byly položeny všechny důležité základy ke komplexnímu pochopení geologických jevů a procesů, jejichž základním principem je kontinentální drift. Koncept vůči sobě se pohybujících tuhých desek byl přirozeným důsledkem termální konvekce v plášti. Podstatná část všech zemětřesení, vulkánů a vrásnění může být připsána interakcím mezi litosférickými deskami na jejich rozhraních (Isacks et al. 1968). Kontinentální drift je neodmyslitelnou součástí deskové tektoniky. Kontinenty jsou nesený na pohybujících se deskách.

### 1.3 Co víme o plášťové konvekci

Shrňme několika klíčovými body pozorování, na nichž je idea plášťové konvekce postavena:

1. Difuzní chlazení v hloubkách pláště je nevýznamné, pokud není tepelná vodivost pláště mnohem větší než máme důvod předpokládat (30 až 100 krát větší než pro obyčejné horniny pláště). Bez konvekce by radioaktivita způsobila vzestup teploty asi o  $120 \text{ K}/10^9 \text{ let}$  a mnohem více ve vzdálené minulosti.
2. Elektrická vodivost spodního pláště je stále natolik nízká, že je schopna přenášet složky geomagnetické sekulární variace s ročními periodami, což zamítá teploty mnohem větší než teploty odpovídající svrchnímu plášti (Dobson and Brodholt, 2000). To je také konsistentní s variacemi ve viskozitě diskutovanými v následujícím paragrafu. Patrně tedy uvnitř pláště neexistuje podstatná tepelná hraniční vrstva; v plášti musí probíhat celoplášťová konvekce, nikoliv konvekce, jakožto separo-

vané cirkulace ve svrchním a spodním plášti (viz. podsekce "navržené typy plášťové konvekce").

3. Postglaciální výzdvih naznačuje obecný vzrůst viskozity s hloubkou pod astenosférou. Ačkoliv viskozita je velmi citlivá na teplotu a musíme předpokládat, že se lokálně může poměrně měnit, obecný trend je konzistentní s poklesem rychlosti konvekce s hloubkou. Extrémní variace ve viskozitě nastávají v hraničních vrstvách, chladné litosféře, která je poměrně pevná a spodní části  $D''$  vrstvy, která má teplotu srovnatelnou s teplotou jádra tj. asi o 1000 K teplejší než sousední plášť, s viskozitou nižší alespoň o 4 řády. V některých částech může dojít k částečnému tání.
4. Téměř rigidní povrchové desky se pohybují rychlostí několika centimetrů za rok. Oceánská kůra vzniká na hřbetech a mizí v subdukčních zónách rychlostí asi 3,4 km<sup>2</sup>/rok; povrch oceánů je asi  $3 \times 10^8$  km<sup>2</sup>, takže průměrné stáří subdukující litosféry je 90 milionů let.
5. Kontinenty se pohybují se svými deskami, ačkoliv vypadají méně pohyblivé než čistě oceánské desky, ale kontinentální kůra není subdukována, protože má relativně nízkou hustotu (ačkoliv eroze ukládá nánosy materiálů z kontinentů v oceánech, ze kterých jsou subdukovány). Pevninská kůra se postupně nahromadila v blízkosti starých štítů, které jsou více než 20 krát starší než nejstarší oceánské dno.
6. Izolované vulkanické horké skvrny, ze kterých je Havaj nejstudovanější, se pohybují pomaleji než desky a očividně nezávisle na nich. Chemické složení lávy, kterou produkují (čediče oceánských ostrovů-OIB), je rozdílné od čedičů středooceánských hřbetů (MORB)
7. Celkový povrchový tok tepla ze Země je  $44,2 \times 10^{12}$  W, z čehož  $8 \times 10^{12}$  W je připisováno radioaktivitě kůry. Vyřadíme-li také tepelnou složku od jádra, kterou vysvětlíme zvlášť, musí být termální konvekce pláště vysvětlena tepelným tokem rovným  $32 \times 10^{12}$  W.
8. Většina subdukčních zón je určena skloněnou rovinou ohnisek zemětřesení, v některých případech táhnoucí se do hloubky 700 km. Seismická tomografie naznačuje, že chladné subdukující desky pronikají mnohem dále ale aseismicky. Nicméně jsou evidentně zdrženy fázovým rozhraním v hloubce 660 km.

9. Subdukční zóny jsou také určeny liniemi vulkánů, koncentrovaných v místech, kde subdukující desky dosáhly hloubky okolo 100 km. Jejich chemické složení obsahuje látky pocházející z mořské vody.
10. Fázový přechod musí splňovat Clausiovu-Clapeyronovu rovnici. Na fázovém rozhraní platí:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\Delta V}{\Delta S},$$

kde  $T$  je teplota,  $p$  tlak,  $V$  objem,  $S$  entropie. LeChatelierův princip požaduje pro každý fázový přechod způsobený rostoucím tlakem, aby objemová změna  $\Delta V$  byla záporná, ale změna entropie může mít jedno i druhé znaménko a oba případy jsou u plášťových minerálů pozorovány. Pokud je  $\Delta S$  kladné, tj. forma, jež se vyskytuje při větším tlaku má vyšší entropii, potom minerál absorbuje teplo při konverzi na tuto formu. Fázové rozhraní v hloubce 660 km je endotermického charakteru. Naopak, při kladném  $\Delta S$  je rozhraní exotermické, což je případ fázových rozhraní v hloubce 220 a 440 km.

Loper (1985) poukázal na fakt, že konvekce je poháněna vztlakovými silami (obojího znaménka), jež jsou generovány na hranicích. Obě hranice pláště, svrchní i spodní, jsou zdroji vztlaku, avšak pohánějí dva dosti rozdílné konvekční módy, které jsou superponovány a přinejmenším polozávislé. Desková tektonika je poháněna chladnutím litosféry a plumami, které jsou zodpovědné za vyzvedávání tepla, které je přivedeno do D" z jádra kondukčním mechanismem. Podstatná příčina pro dva rozdílné druhy konvekce je, že jsou ovládány silnými ale opačnými viskózními kontrasty. Lehká litosféra představuje vrstvu o tolik viskóznější než níže ležící plášť, že je prakticky tuhá a je široce subdukována. Naopak, horký materiál ze spodních vrstev D" je ihned deformován a samočinně upraven tak, aby byl schopen projít pláštěm a způsobit jeho minimální deformaci. To znamená, že je zformována příčná, axiálně symetrická pluma, do které je tok efektivně omezen. V každém případě je druh konvekce řízen principem, že nastane to, co se realizuje nejnadhěji. Deformace je koncentrována v nejméně viskózním materiálu a tato situace je posílena teplem, které je tím generováno.

## 1.4 Navržené typy plášťové konvekce

Zemetřesení, jejichž ohniska jsou lokalizována hluboko, poskytují přesvědčivý důkaz existence aktivní konvekce v plášti do hloubky 660 km. Jelikož se

zdá, že spodní plášť obsahuje významné koncentrace radioaktivních izotopů, očekáváme, že plášťová konvekce bude nastávat ve spodním plášti za účelem transportu tepla. Byly navrženy tři alternativní modely plášťové konvekce:

1. *Celoplášťová konvekce.* Pokud významné množství subdukující litosféry může vstoupit do spodního pláště pod 660 km, potom zde musí existovat komplementární plášťový výzdvih. V tomto případě bude geoterma pravděpodobně adiabatická. Primární argumenty proti celoplášťové konvekci se zakládají na chemicko-geodynamických studiích.
2. *Vrstevnatá plášťová konvekce.* Dva separované konvekční systémy pracují ve svrchním a spodním plášti. Tento případ by nastal, pokud by hustotní diskontinuita v hloubce 660 km kompletně zablokovala konvekci. Svrchní konvektivní systém spojený s deskovou tektonikou by byl omezen na svrchních 660 km pláště; spodní separovaný systém by operoval mezi hloubkou 660 km a CMB (Core-Mantle-Boundary neboli rozhraní plášť-jádro). V tomto případě se očekává, že by vznikla tepelná hranice v hloubce 660 km, jako k tomu dochází v litosféře. Samozřejmě je velmi složité odhadnout změny v teplotě spojené s touto hraniční vrstvou. Ačkoliv se zemetřesení, jejichž ohniska jsou lokalizována hluboko, nevyskytují v hloubkách větších než 660 km, studie používající plášťovou tomografii naznačují, že alespoň některé subdukované desky pronikají skrz tuto hranici. To je bráno jako průkazné svědectví pro významný materiálový transport mezi svrchním a spodním pláštěm.
3. *Hybridní modely.* Navržené hybridní modely zahrnují silnou časovou závislost a/nebo bariéru pro konvekci v plášti. Pokud se diskontinuita v 660 km chová jako částečná bariéra pro plášťovou konvekce, potom plášťové "laviny" mohou být spuštěny, což by vedlo k silně časově závislé plášťové konvekci. Hustá subdukovaná litosféra se může nakupit v oblasti diskontinuity, dokud nestabilita nevyústí v plášťové překlopení nebo lavinu. Občasná plášťová překlopení byla navržena jako vysvětlení pro zjevné epizodicitu v geologických záznamech. Studie užívající seismickou tomografii byly použity k argumentaci pro bariéru s velkou topografií a časovou závislostí.

Omezení na teplotu ve spodních partiích pláště plyne ze seismického dokladu o kapalnosti vnějšího jádra, jež spočívá především v neschopnosti

střížných vln šířit se skrz vnější jádro. Změřené rychlosti seismických kompresních vln ve vnějším jádře naznačují, že vnější jádro, ačkoliv je primárně složeno ze železa, musí také obsahovat významné koncentrace jednoho nebo více dalších komponent, nejpravděpodobnější je síra. Teplota tání eutektické směsi železo-síra na CMB je odhadována na 3200 K. To je přibližná minimální teplota na CMB.

Očekává se, že tak jako termální hraniční vrstva svrchního pláště, litosféra, zasahuje mezi povrch a vnitřní adiabatický plášť, termální hraniční vrstva spodního pláště existuje těsně nad CMB. Seismické studie potvrdily existenci hraniční vrstvy, která se nazývá D". D" má komplexní strukturu a je tlustá od 150 do 300 km. Laboratorní studie ukazují, že teplota natavení materiálu tvořeného perovskitem a magnesiiovüstitem budou okolo 4300 K. I vrstva D" může být ještě rozvrstvena.

### Literatura

- Dobson D. P., Brodholt J. P.: The electrical conductivity and thermal profile of the Earth's mid mantle, *Geophys. Res. Lett.* **27**, 2325-2328, 2000
- Gordon R. B.: Diffusion creep in the Earth's mantle, *J. Geophys. Res.* **70**, 2413-2418, 1965
- Haskell N. A.: The motion of a viscous fluid under a surface load, *Physics* **6**, 265-269, 1935
- Holmes A.: Radioactivity and Earth movement XVIII, *Trans. Geol. Soc. Glasgow* **18**, 559-606, 1931
- Isacks B. L., Oliver J., Sykes L. R.: Seismology and the new global tectonics, *J. Geophys. Res.* **73**, 5855-5899, 1968
- Jeffreys H.: *The Earth*, Cambridge University Press, Cambridge, 1924
- Loper D. E.: A simple model of whole mantle convection, *J. Geophys. Res.* **90**, 1809-1836, 1985
- Runcorn K.: Paleomagnetic comparisons between Europe and North America, *Proc. Geol. Assoc. Canada* **8**, 77-85, 1956
- Vine F., Matthews D.: Magnetic anomalies over ocean ridges, *Nature* **199**, 947, 1963

# Kapitola 2

## Základní rovnice

Podkapitoly 2.1.1 až 2.1.6 jsou převzaty a komentovány z [2]. Podkapitoly 2.2 až 2.5 jsou s drobnými úpravami převzaty z [3].

### 2.1 Zákony zachování

Základní rovnice popisující dynamiku dějů v mechanice kontinua vycházejí ze zákona zachování (ZZ) hmoty  $\rightarrow$  rovnice kontinuity, ZZ hybnosti  $\rightarrow$  pohybová rovnice, ZZ momentu hybnosti  $\rightarrow$  symetrie Cauchyho tenzoru napětí, ZZ energie  $\rightarrow$  (rovnice přenosu tepla).

Postup při jejich důkazu je následující: Mějme objem  $v(t)$  ohraničený plochou  $s(t)$ . Uvnitř objemu  $v(t)$  se nachází diskontinuita  $\Sigma(t)$ . Zapišeme ZZ nejprve v integrálním tvaru. Na plošné integrály použijeme zobecněný Gaussův teorém

$$\int_{v(t)-\Sigma(t)} \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_{s(t)} \vec{n} \cdot \mathbf{A} da - \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [\mathbf{A}]_{-}^{+} da, \quad (2.1)$$

kde  $\vec{n}$  je jednotková vnější normála, resp. na diskontinuitě jednotková normála mířící do oblasti  $+$  a  $\mathbf{A}$  tenzorová funkce spojitě diferencovatelná v proměnné  $v$ .

Na levé strany rovnic, kde vystupuje materiálová časová derivace (viz. [2]) použijeme Reynoldsův teorém (viz. [2])

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)-\Sigma(t)} \phi dv = \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \frac{D\phi}{Dt} + \phi \nabla \cdot \vec{v} \right) dv + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w}) \otimes \phi]_{-}^{+} da \quad (2.2)$$

Tímto docílíme převedení všech integrací na integrace objemové, resp. integrace přes diskontinuitu. Použijeme dříve odvozené ZZ, máme-li nějaké. Je-li třeba, pak jistě matematické identity-viz. důkaz. Na závěr předpokládáme, že platí-li vztahy v integrálním tvaru, musí platit i lokálně tj. v každém bodě, přes který se integruje.

Důkazy:

### 2.1.1 Reynoldsův teorém

Dokažme pro ilustraci Reynoldsův teorém pro oblast  $v(t)$  bez diskontinuity. Pro skalární funkci  $\phi$  platí

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi dv = \frac{D}{Dt} \int_V \Phi(\vec{X}, t) J dV = \int_V \frac{D}{Dt} (\Phi(\vec{X}, t) J) dV,$$

kde jsme nejprve integraci přes deformovaný objem  $v(t)$  v čase  $t$  převedli na integraci přes referenční objem  $V$  pomocí vztahu  $dv = JdV$  (viz. [2]) a jelikož ten je na čase nezávislý, můžeme prohodit derivaci a integrál.

$$= \int_V \left( \frac{D\Phi}{Dt} J + \Phi \frac{DJ}{Dt} \right) dV = \int_V \left( \frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \nabla \cdot \vec{v} \right) J dV.$$

V první rovnosti jsme zderivovali součin, ve druhé využili vztahu  $\frac{DJ}{Dt} = J \nabla \cdot \vec{v}$  viz. [2].

$$\begin{aligned} &= \int_{v(t)} \left( \frac{D\phi}{Dt} + \phi \nabla \cdot \vec{v} \right) dv = \int_{v(t)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{v} \right) dv = \\ &= \int_{v(t)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \vec{v}) \right) dv. \end{aligned}$$

V Eulerově popisu totiž platí:  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$  [2] a  $\nabla \cdot (\phi \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{v}$ . V případě vektorové resp. tenzorové funkce platí obdobný vztah, jen člen s divergencí bude jiný. Např. pro vektorovou funkci  $\vec{\phi} \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\phi} = \nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{\phi})$ , neboť

$$\nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{\phi}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{e}_k \cdot (v_m \phi_n \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n) = \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \phi_n + v_m \frac{\partial \phi_n}{\partial x_k} \right) \delta_{km} \vec{e}_n = \vec{\phi} \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\phi}.$$

### 2.1.2 Zobecněný Gaussův teorém

Víme, že pro vektor  $\vec{A}$ , platí

$$\int_v \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_s \vec{n} \cdot \vec{A} da.$$

Stejný vztah však můžeme psát i pro tenzor  $\mathbf{A}$ , neboť pro libovolný konstantní vektor  $\vec{c}$  platí

$$\int_v \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{c}) dv = \oint_s \vec{n} \cdot (\mathbf{A} \cdot \vec{c}) da,$$

což je to samé jako

$$\left( \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv - \oint_s \vec{n} \cdot \mathbf{A} da \right) \cdot \vec{c} = 0.$$

Jelikož  $\vec{c}$  je libovolný, musí být celá závorka rovna nule, což dává požadovaný vztah.

Je-li v objemu  $v$  diskontinuita rozdělující objem na 2 části, použijeme Gaussův teorém na každou část zvlášť, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{v_+} \nabla \cdot \mathbf{A} dv &= \oint_{s_+} \vec{n} \cdot \mathbf{A} da + \oint_{\Sigma_+} \vec{n}^+ \cdot \mathbf{A}^+, \\ \int_{v_-} \nabla \cdot \mathbf{A} dv &= \oint_{s_-} \vec{n} \cdot \mathbf{A} da - \oint_{\Sigma_-} \vec{n}^- \cdot \mathbf{A}^-. \end{aligned}$$

Sečteme-li obě rovnice a zavedeme-li značení  $\vec{n}^+ = -\vec{n}^- =: -\vec{n}$ ,  $\mathbf{A}^- - \mathbf{A}^+ =: -[\mathbf{A}]_+$ , dostaneme rovnici (2.1).

### 2.1.3 Zákon zachování hmoty

Celková hmota tělesa se při deformaci nemění tj.

$$\int_V \rho_0(\vec{X}) dV = \int_{v(t)} \rho(\vec{x}, t) dv,$$

resp.

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho(\vec{x}, t) dv = 0.$$



Užijeme-li Reynoldsův teorém, dostáváme

$$0 = \frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho(\vec{x}, t) dv = \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right) dv + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w})\rho]_{-}^{+} da.$$

Jak bylo řečeno výše, budeme předpokládat, že integrální zápis implikuje lokální tvar. Tj.

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \quad \text{ve } v(t) - \Sigma(t), \\ \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w})\rho]_{-}^{+} &= 0 \quad \text{na } \Sigma(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 2.1.4 Zákon zachování hybnosti

Uvažme, že na daný objem  $v(t)$  působí objemové síly  $\vec{f}$  a plošné síly  $\vec{t}_{\vec{n}}$ , kde  $\vec{n}$  značí jednotkovou vnější normálu. Pak má tento zákon zachování na základě 1. impulzové věty (viz. [1]) tvar

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{v} dv = \int_{v(t)} \rho \vec{f} dv + \oint_{s(t)} \vec{t}_{\vec{n}} da.$$

V duchu myšlenek citovaných na začátku sekce upravíme levou stranu pomocí Reynoldsova teorému, plošný integrál na pravé straně pomocí zobecněného Gaussova teorému. Navíc využijeme vztahu:  $\vec{t}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ , kde  $\boldsymbol{\tau}$ , je Cauchyho tenzor napětí (viz. [2]). Úprava plošného integrálu

$$\oint_{s(t)} \vec{t}_{\vec{n}} da = \oint_{s(t)} \vec{n} \cdot \boldsymbol{\tau} da = \int_{v(t)-\Sigma(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dv + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau}]_{-}^{+} da.$$

Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \frac{D}{Dt}(\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \nabla \cdot \vec{v} \right) dv + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w}) \otimes \rho \vec{v}]_{-}^{+} da - \\ - \int_{v(t)-\Sigma(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dv - \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau}]_{-}^{+} da - \int_{v(t)-\Sigma(t)} \rho \vec{f} dv = 0. \end{aligned}$$

Sloučíme-li objemové a plošné integrály, dostaneme stejně jako v zákonu zachování hmoty lokální tvar

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \nabla \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho \vec{f} &= 0 \quad \text{ve } v(t) - \Sigma(t), \\ \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w}) \otimes \rho \vec{v} - \boldsymbol{\tau}]_{-}^{+} &= 0 \quad \text{na } \Sigma(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Rovnici (2.4) však můžeme ještě upravit. Provedeme-li derivaci  $\frac{D}{Dt}(\rho\vec{v}) = \frac{D\rho}{Dt}\vec{v} + \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}$  můžeme užitím rovnice (2.3) přejít k následujícímu tvaru

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho\vec{f} = 0 \quad \text{ve } v(t) - \Sigma(t), \quad (2.5)$$

$$\vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w}) \otimes \rho\vec{v} - \boldsymbol{\tau}]_{\perp}^{\pm} = 0 \quad \text{na } \Sigma(t). \quad (2.6)$$

### 2.1.5 Zákon zachování momentu hybnosti

Stejně jako v případě zákona zachování hybnosti zapišme 2. impulsová větu (viz.[1]) pro objemové a plošné síly

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} (\vec{x} \times \rho\vec{v}) dv = \oint_{s(t)} (\vec{x} \times \vec{t}_{\vec{n}}) da + \int_{v(t)} (\vec{x} \times \rho\vec{f}) dv. \quad (2.7)$$

Abychom mohli upravit plošný integrál, budeme potřebovat identitu:  $\vec{v} \times (\vec{w} \cdot \mathbf{A}) = -\vec{w} \cdot (\mathbf{A} \times \vec{v})$ , kde  $\mathbf{A}$  je tenzor. Identitu dokážeme rozpisem obou stran

$$\begin{aligned} L &= v_i \vec{e}_i \times (w_k \vec{e}_k \cdot A_{mn} \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n) = v_i w_k A_{mn} \vec{e}_i \times \vec{e}_n \delta_{km} = v_i w_k A_{kn} \epsilon_{jin} \vec{e}_j, \\ P &= -w_k \vec{e}_k \cdot (A_{mn} \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \times \vec{v}_i \vec{e}_i) = -\delta_{km} w_k A_{mn} v_i \vec{e}_n \times \vec{e}_i = -w_k A_{kn} v_i \epsilon_{jni} \vec{e}_j = \\ &= v_i w_k A_{kn} \epsilon_{jin} \vec{e}_j. \end{aligned}$$

Jak vidno identita platí a můžeme psát

$$\vec{x} \times \vec{t}_{\vec{n}} = \vec{x} \times (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) = -\vec{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \vec{x}).$$

Užitím zobecněného Gaussova teorému dostáváme

$$\oint_{s(t)} \vec{x} \times \vec{t}_{\vec{n}} da = - \oint_{s(t)} \vec{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \vec{x}) da = - \int_{v(t) - \Sigma(t)} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \vec{x}) dv - \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} \times \vec{x}]_{\perp}^{\pm} da.$$

První člen v poslední rovnosti lze upravit pomocí identity:  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \vec{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \vec{v} + \boldsymbol{\tau}^T \dot{\times} \nabla \vec{v}$ . Význam operátoru  $\dot{\times}$  vysvitne z důkazu.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{e}_k \cdot (t_{mn} \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \times v_i \vec{e}_i) = \frac{\partial}{\partial x_k} (t_{mn} v_i) \delta_{km} \vec{e}_n \times \vec{e}_i = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} (t_{kn} v_i) \epsilon_{nij} \vec{e}_j = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_n v_i \epsilon_{nij} \vec{e}_j + (\nabla \vec{v})_{ki} \epsilon_{nij} t_{kn} \vec{e}_j = \end{aligned}$$

$$= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \times \vec{v} + t_{nk}^T (\nabla \vec{v})_{ki} \epsilon_{jni} \vec{e}_j = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \times \vec{v} + \boldsymbol{\tau}^T \dot{\times} \nabla \vec{v}.$$

V našem případě je  $\vec{v} = \vec{x}$  a proto  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \vec{x}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \vec{x} + \boldsymbol{\tau}^T \dot{\times} \mathbf{I}$ , kde  $\mathbf{I}$  je jednotkový tenzor. Upravíme-li ještě člen s materiálovou časovou derivací na levé straně rovnice (2.7) pomocí Reynoldsova teorému, dojdeme k rovnosti

$$\begin{aligned} & \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \frac{D}{Dt} \underbrace{(\vec{x} \times \rho \vec{v})}_{\rho(\vec{x} \times \vec{v})} + (\vec{x} \times \rho \vec{v}) \nabla \cdot \vec{v} \right) dv + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w}) \otimes (\vec{x} \times \rho \vec{v})]_{-}^{+} da \\ & + \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \vec{x} + \boldsymbol{\tau}^T \dot{\times} \mathbf{I} \right) dv + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} \times \vec{x}]_{-}^{+} da - \int_{v(t)-\Sigma(t)} (\vec{x} \times \rho \vec{f}) dv = 0. \end{aligned}$$

Provedeme-li derivaci v prvním členu (derivace součinu), sloučíme-li objemové a plošné integrály a využijeme rovnici kontinuity (2.3), dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( (\vec{x} \times \vec{v}) \underbrace{\left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right)}_{=0 \text{ rce kontinuity}} + \rho \underbrace{\frac{D}{Dt} (\vec{x} \times \vec{v})}_{\vec{v} \times \vec{v} + \vec{x} \times \frac{D\vec{v}}{Dt}} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \vec{x} + \boldsymbol{\tau}^T \dot{\times} \mathbf{I} - \vec{x} \times \rho \vec{f} \right) dv \\ & + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} - (\vec{v} - \vec{w}) \otimes \rho \vec{v}]_{-}^{+} \times \vec{x} da = 0. \end{aligned}$$

V posledním kroku použijeme obě rovnice (2.5), (2.6) plynoucí ze zákona zachování hybnosti

$$\begin{aligned} & \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \vec{x} \times \underbrace{\left( \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho \vec{f} \right)}_{=0 \text{ ZZ hybnosti}} + \boldsymbol{\tau}^T \dot{\times} \mathbf{I} \right) dv + \\ & + \int_{\Sigma(t)} \underbrace{\vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} - (\vec{v} - \vec{w}) \otimes \rho \vec{v}]_{-}^{+}}_{=0 \text{ ZZ hybnosti}} \times \vec{x} da = 0. \end{aligned}$$

Lokální tvar

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\times} \mathbf{I} \text{ ve } v(t) - \Sigma(t).$$

Což ve složkách znamená:  $(\boldsymbol{\tau}^T \dot{\times} \mathbf{I})_j = t_{nk}^T \delta_{ki} \epsilon_{jni} = t_{ni}^T \epsilon_{jni} = 0$  pro  $\forall j$ . Rozložíme-li  $\boldsymbol{\tau}$  na část symetrickou  $\boldsymbol{\tau}^s$  a antisymetrickou  $\boldsymbol{\tau}^a$ , dostaneme

$$(t_{ni}^s + t_{ni}^a) \epsilon_{jin} = t_{ni}^a \epsilon_{jin} = 0,$$

což po vynásobení  $\epsilon_{jkm}$  a užití identity  $\epsilon_{jin}\epsilon_{jkm} = \delta_{ik}\delta_{nm} - \delta_{im}\delta_{nk}$  dává

$$t_{mk}^a - t_{km}^a = 0 \Rightarrow t_{mk}^a + t_{mk}^a = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau}^a = 0,$$

neboli

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^s. \quad (2.8)$$

Tenzor  $\boldsymbol{\tau}$  je symetrický.

### 2.1.6 Zákon zachování energie

Vyjdeme z integrálního tvaru

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \left( \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\vec{v} \cdot \vec{v} \right) dv = \oint_{s(t)} (\vec{t}_{\vec{n}} \cdot \vec{v} - \vec{q} \cdot \vec{n}) da + \int_{v(t)} (\rho\vec{f} \cdot \vec{v} + R) dv,$$

v němž  $\rho\epsilon$  značí objemovou hustotu vnitřní energie,  $q$  tepelný tok,  $R$  je objemová hustota energie dodávaná vnitřními tepelnými zdroji a  $\vec{n}$  vnější normála (proto je tokový člen s mínusem). Úprava plošného integrálu

$$\oint_{s(t)} \vec{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v} - \vec{q}) da = \int_{v(t)-\Sigma(t)} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v} - \vec{q}) dv + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v} - \vec{q}]_+^- da.$$

Nyní dokažme identitu  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\tau}^T : \nabla \vec{v}$ , s jejíž pomocí okamžitě upravíme integrand v 1. členu poslední rovnice.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot (t_{mn} \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \cdot v_j \vec{e}_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} (t_{mn} v_j) \delta_{im} \delta_{nj} = \\ &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} v_j + t_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\tau}^T : \nabla \vec{v}. \end{aligned}$$

S využitím Reynoldsova teorému můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \underbrace{\frac{D}{Dt} \left( \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\vec{v} \cdot \vec{v} \right)}_{= \frac{D\rho}{Dt} (\epsilon + \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}) + \rho \frac{D}{Dt} (\epsilon + \frac{1}{2}\rho\vec{v} \cdot \vec{v})} + \left( \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\vec{v} \cdot \vec{v} \right) \nabla \cdot \vec{v} \right) dv + \\ + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot \left[ (\vec{v} - \vec{w}) \left( \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\vec{v} \cdot \vec{v} \right) \right]_+^- da + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \nabla \cdot \vec{q} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \vec{v} - \boldsymbol{\tau}^T : \nabla \vec{v} - \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - R \right) dv - \\
& \quad - \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v} - \vec{q}]_+^- da = 0.
\end{aligned}$$

Sloučíme plošné a objemové integrály a použijeme rovnici kontinuity

$$\begin{aligned}
& \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \underbrace{\left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right)}_{=0 \text{ rce kontinuity}} \left( \epsilon + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \rho \underbrace{\frac{D}{Dt} \left( \epsilon + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right)}_{=\frac{D\epsilon}{Dt} + \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt}} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \vec{v} - \right. \\
& \quad \left. - \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{q} - \boldsymbol{\tau}^T : \nabla \vec{v} - R \right) dv + \\
& \quad + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot \left[ (\vec{v} - \vec{w}) \left( \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \vec{q} - \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v} \right]_+^- da = 0.
\end{aligned}$$

Nakonec využijeme pohybovou rovnici (2.5), připomeneme si symetrii tenzoru  $\boldsymbol{\tau}$  (2.8) a se zavedeným značením  $\nabla \vec{v} = \mathbf{l} = \mathbf{l}^s + \mathbf{l}^a = \mathbf{d} + \mathbf{l}^a$  rovnici přepíšeme na

$$\begin{aligned}
& \int_{v(t)-\Sigma(t)} \left( \vec{v} \cdot \underbrace{\left( \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho \vec{f} \right)}_{=0 \text{ ZZ hybnosti}} + \rho \frac{D\epsilon}{Dt} + \nabla \cdot \vec{q} - \underbrace{\boldsymbol{\tau}^T : \nabla \vec{v}}_{=\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}} - R \right) dv \\
& \quad + \int_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot \left[ (\vec{v} - \vec{w}) \left( \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \vec{q} - \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v} \right]_+^- da = 0.
\end{aligned}$$

Lokální tvar

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} + \nabla \cdot \vec{q} - \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - R = 0 \quad \text{ve } v(t) - \Sigma(t), \quad (2.9)$$

$$\vec{n} \cdot \left[ (\vec{v} - \vec{w}) \left( \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \vec{q} - \mathbf{t} \cdot \vec{v} \right]_+^- = 0 \quad \text{na } \Sigma(t). \quad (2.10)$$

### 2.1.7 Konkrétní vyjádření

V minulých sekcích jsme pracovali s obecnými objemovými a plošnými silami. Za objemové síly budeme nyní chápat sílu gravitační, Coriolisovu a

odstředivou

$$\begin{aligned} f_g &= \vec{g}, \\ f_c &= -2\vec{\Omega} \times \vec{v}, \\ f_o &= -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \end{aligned}$$

Tím přejde rovnice (2.5) v zákonu zachování hybnosti do tvaru

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v},$$

kde jsme vyjádřili materiálovou časovou derivaci  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ , viz. [2].

## 2.2 Rovnice přenosu tepla (RPT)

Uvažujme nyní kontinuum s vlastnostmi klasické viskózní tepelně vodivé kapaliny. Pak platí

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}), \quad \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = 0, \quad (2.11)$$

kde  $p$  je termodynamický tlak <sup>1</sup>, a

$$\vec{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T,$$

kde  $\mathbf{k}$  je tenzor tepelné vodivosti a  $T$  je absolutní teplota. Nyní použijeme Gibbsovu relaci

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{D\epsilon}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{v},$$

kde  $s$  je entropie vztažená na jednotku hmoty (detailněji viz [3] a především relace (6.34) v [2]). Spolu se zákonem zachování energie ve tvaru (2.9), (2.10), dostáváme RPT ve tvaru

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v} + R \quad \text{ve } v(t) - \Sigma(t),$$

kde  $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v}$  je disipace tepla,

$$[\mathbf{k} \cdot \nabla T]_{-}^{+} \cdot \vec{n} = -[\vec{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]_{-}^{+} \cdot \vec{n} + [(\rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho\vec{v} \cdot \vec{v})(\vec{v} - \vec{w})]_{-}^{+} \cdot \vec{n} \quad \text{na } \Sigma(t).$$

<sup>1</sup>Obecně  $\boldsymbol{\sigma}$  není deviatorická část  $\boldsymbol{\tau}$ , tj.,  $p \neq -\frac{1}{3} \sum_i \tau_{ii}$ .

Stav klasické viskózní tepelně vodivé kapaliny je určen 3 stavovými proměnnými — absolutní teplotou  $T$ , tlakem  $p$  a objemem  $V$ . V následujícím budeme uvažovat kapalinu jednotkové hmoty, tj.,  $V = 1/\rho$ . Tyto 3 proměnné nejsou nezávislé, protože termodynamické vlastnosti media jsou dány stavovou rovnicí, kterou můžeme formálně psát ve tvaru

$$f(p, T, V) = 0. \quad (2.12)$$

Uvažme tlak a teplotu za nezávislé veličiny. Potom

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} + \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T,$$

kde  $c_p$  je měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku. Využijeme-li dále jednu z Maxwellových relací  $\left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ , kterou lze s pomocí koeficientu teplotní roztažnosti  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  přepsat na  $\left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = -V\alpha$ , dostáváme finální tvar RPT

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) - \rho c_p \vec{v} \cdot \nabla T + \alpha T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p \right) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v} + R.$$

### 2.2.1 RPT v kontinuu s dominantním hydrostatickým tlakem

Předpokládejme, že existuje stav, ve kterém hmoty nejsou v pohybu ( $\mathbf{v}=0$ ), charakterizovaný referenční teplotou  $T_0$  a hustotu danou referenčním rozdělením  $\rho_0$ . Dle pohybové rovnice (2.5) a reologického vztahu (2.11) platí

$$\nabla p_0 = \rho_0 \vec{g}_0 - \rho_0 \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \quad (2.13)$$

kde  $\vec{g}_0$  je gravitační zrychlení způsobené gravitačním potenciálem referenčního rozložení hustoty  $\rho_0$  a odstředivého potenciálu.<sup>2</sup> Budeme předpokládat, že i v pohybujeícím se kontinuu je tento hydrostatický tlak mnohem větší než rozdíl  $p - p_0$  a tudíž budeme uvažovat pouze závislost na hydrostatickém tlaku.

Dle předpokladu dominance hydrostatického tlaku, můžeme nyní položit  $\partial p / \partial t + \vec{v} \cdot \nabla p = -v_r \rho g$ , kde  $v_r$  značí radiální složku rychlosti, a  $g = |\vec{g}|$ ,

<sup>2</sup>V obecném případě vnější zdroje gravitačního pole mohou být považovány za konstantní část slapového potenciálu.

$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ ,<sup>3</sup> a získáme tak obvyklou formu RPT

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) - \rho c_p \vec{v} \cdot \nabla T - \rho v_r \alpha T g + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v} + R.$$

Člen  $\rho v_r \alpha T g$  se nazývá adibatické zahřívání (chlazení)-viz. [3].

## 2.3 Boussinesqova aproximace základních rovnic

Idea Boussinesqovy aproximace tkví v linearizaci základních rovnic okolo referenčního hydrostatického stavu, kde  $\vec{v} = 0$ . Máme-li reologii danou vztahem (2.11), je tlak  $p_0$  a hustota  $\rho_0$  charakterizující (společně s teplotou  $T_0$ ) referenční stav, jsou svázány rovnicí (2.13).

Zanedbáme-li změny hustoty způsobené tlakovými změnami  $\Pi = p - p_0$ , můžeme provést linearizaci stavové rovnice vzhledem k teplotním změnám  $T - T_0$  a psát

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)). \quad (2.14)$$

Tato aproximace znamená, že vliv hydrostatického tlaku (stejně jako teploty  $T_0$ ) na hustotu je obsažen v prostorově nekonstantním referenčním rozdělení  $\rho_0$ .

Předpokládáme, že referenční rozdělení  $\rho_0$  je časově nezávislá funkce. Uvážíme-li pouze největší člen v rovnici kontinuity, tj. zanedbáme-li termální roztažnost, dojdeme k zjednodušené rovnici

$$\nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0. \quad (2.15)$$

Dosadíme-li (2.11), (2.13), (2.14) do pohybové rovnice, dostaneme

$$-\nabla \Pi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho_0 \alpha (T - T_0) \vec{g}_0 + \rho_0 (\vec{g} - \vec{g}_0) = \rho_0 \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right), \quad (2.16)$$

kde jsme zanedbali kvadratický člen  $-\rho_0 \alpha (T - T_0) (\vec{g} - \vec{g}_0)$ , Coriolisovu sílu a termální roztažnost na pravé straně. Všimněme si, že změna v gravitačním zrychlení  $\vec{g} - \vec{g}_0$  je způsobena vlastní gravitací Země. Obvykle magnituda tohoto členu je okolo jednoho řádu nižší než členu  $-\rho_0 \alpha (T - T_0) \vec{g}_0$ , proto podstatně neovlivňuje základní fyzikální principy termální konvekce. Z tohoto

<sup>3</sup>Zde jednoduše předpokládáme, že radiální jednotkový vektor  $\vec{e}_r \doteq -\vec{g}/g$ .



důvodu ho dále nebudeme uvažovat. Linerizace RPT spočívá v nahrazení  $\rho$  rozložením  $\rho_0$ , tj.

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) - \rho_0 c_p \vec{v} \cdot \nabla T - \rho_0 v_r \alpha T g_0 + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v} + R. \quad (2.17)$$

Systém (2.15)–(2.17) je nazýván *stlačitelnou rozšířenou Boussinesgovou aproximací* základních rovnic. Zanedbáme-li stlačitelnost, tj. nahradíme-li (2.15) rovnicí  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , dostaneme systém rovnic nazývaný (*nestlačitelná*) *rozšířená Boussinesgova aproximace*.

*Klasická Boussinesgova aproximace* znamená další značné zjednodušení studovaného systému rovnic: Referenční rozdělení hustoty  $\rho_0$ , referenční gravitační zrychlení  $\vec{g}_0$ , koeficient termální roztažnosti  $\alpha$ , měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku  $c_p$ , tepelná vodivost  $k$  jsou konstantní;  $R$  stejně jako  $H$  jsou prostorově konstantní (mohou být časově závislé) a výše zmíněný systém je aplikován na newtonovskou kapalinu.

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T)$$

s konstantní dynamickou viskozitou  $\eta$ . Navíc ani disipace  $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v}$  ani adiabatické zahřívání  $-\rho_0 v_r \alpha T g_0$  nejsou uvažovány. Dostáváme systém

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.18)$$

$$-\nabla \Pi + \eta \nabla^2 \vec{v} - \rho_0 \alpha (T - T_0) \vec{g}_0 = \rho_0 \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T - \vec{v} \cdot \nabla T + \frac{R}{\rho_0 c_p},$$

## 2.4 Referenční teplota

V numerickém modelování termální konvekce je vhodné ztotožnit  $T_0$  s řešením kondukčního problému

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T_0}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T_0) + R, \quad (2.19)$$

s vhodnými hraničními podmínkami. Ve většině aplikací ani tepelné zdroje ani okrajové podmínky pro  $T_0$  nejsou časově závislé,  $T_0$  tudíž nezávisí na čase, a levá strana (2.19) je nula.

## 2.5 Bezrozměrné veličiny

Abychom problém trochu zjednodušili, budeme nyní uvažovat referenční rozložení hustoty  $\rho_0$ , měrnou tepelnou kapacitu při konstantním tlaku  $c_p$ , termální vodivost  $k$ , gravitační zrychlení  $\vec{g}_0$  a konstantní tepelné zdroje. Tato aproximace je vhodná pro modelování konvekce v plášti vzhledem k tomu, že nejvíce měnící se parametry v plášti jsou pravděpodobně viskozita a koeficient termální roztažnosti.

Zavedme nové bezrozměrné veličiny (čárkované) pomocí relací

$$\vec{r} = d\vec{r}', \quad t = \frac{d^2}{\kappa}t', \quad \vec{v} = \frac{\kappa}{d}\vec{v}', \quad \Pi = \frac{\eta_s \kappa}{d^2}\Pi', \quad T = T_1 + (T_2 - T_1)T',$$

kde  $\vec{r}$  je polohový vektor,  $d$  je charakteristický rozměr systému—např. tloušťka pláště při modelování plášťové konvekce nebo vertikální rozměr kapalinové vrstvy v problémech s kartézskou geometrií—a  $\eta_s$  je hodnota viskozity na povrchu. Pakliže nemůže dojít k nedorozumění, budeme v dalším textu psát bezrozměrné veličiny jako nečárkované. Systém (2.16), (2.17) a (2.18) v bezrozměrných proměnných

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.20)$$

$$-\nabla \Pi + \nabla \cdot \left( \frac{\eta}{\eta_s} (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \right) + Ra_s \frac{\alpha}{\alpha_s} (T - T_0) \vec{e}_r = Pr_s^{-1} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right), \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T - \vec{v} \cdot \nabla T + \frac{Ra q_s}{Ra_s} - D_s \frac{\alpha}{\alpha_s} \left( T + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \right) v_r + \frac{D_s}{Ra_s} \frac{\eta}{\eta_s} (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) : \nabla \vec{v}, \quad (2.22)$$

kde jsme zavedli

(povrchové) Prandtlovo číslo

$$Pr_s = \frac{\nu_s}{\kappa}$$

(povrchové) Rayleighovo číslo

$$Ra_s = \frac{\alpha_s (T_2 - T_1) g_0 d^3}{\nu_s \kappa}$$

(povrchové) Rayleighovo číslo pro tepelné zdroje

$$Ra q_s = \frac{\alpha_s g_0 R d^5}{\nu_s \kappa k}$$

(povrchové) disipační číslo

$$D_s = \frac{\alpha_s g_0 d}{c_p}$$

a  $\nu = \eta / \rho_0$  je kinematická viskozita. Řešíme-li plášťovou konvekci, je setrvačná síla na pravé straně (2.21) zanedbatelná. Jinými slovy můžeme řešit systém (2.20)–(2.22) pro nekonečně velké Prandtlovo číslo; přepíšeme-li systém užitím  $\Theta = T - T_0$  místo  $T$ , dostaneme

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.23)$$

$$-\nabla \Pi + \nabla \cdot \left( \frac{\eta}{\eta_s} (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) \right) + Ra_s \frac{\alpha}{\alpha_s} \Theta \vec{e}_r = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \nabla^2 \Theta - \vec{v} \cdot \nabla T_0 - \vec{v} \cdot \nabla \Theta - \\ &- D_s \frac{\alpha}{\alpha_s} \left( T_0 + \Theta + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \right) v_r + \frac{D_s}{Ra_s} \frac{\eta}{\eta_s} (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) : \nabla \vec{v}, \end{aligned}$$

kde  $T_0$  je kondukční řešení RPT. Rovnice (2.23), (2.24) popisují systém v rovnovážném stavu. Jinak řečeno časová závislost není explicitní a tento systém definuje mapování  $\Theta \mapsto \vec{v}$  and  $\Theta \mapsto \Pi$ . To znamená, že můžeme  $\Theta$  považovat za jedinou nezávislou proměnnou nelineárního systému

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \nabla^2 \Theta - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla T_0 - D_s \frac{\alpha}{\alpha_s} \left( T_0 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \right) v_r(\Theta) - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla \Theta - \\ &- D_s \frac{\alpha}{\alpha_s} \Theta v_r(\Theta) + \frac{D_s}{Ra_s} \frac{\eta}{\eta_s} (\nabla \vec{v}(\Theta) + (\nabla \vec{v}(\Theta))^T) : \nabla \vec{v}(\Theta). \end{aligned}$$

Klasická Boussinesqova aproximace v bezrozměrných jednotkách

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0, \\ -\nabla \Pi + \nabla^2 \vec{v} + Ra \Theta \vec{e}_r &= 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \nabla^2 \Theta - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla \Theta - \vec{v}(\Theta) \cdot \nabla T_0. \end{aligned}$$

# Kapitola 3

## Analýza stability

Zabývejme se nyní stabilitou referenčního rozložení teploty  $T_0$ .

V dalším textu budeme pracovat v kartézské geometrii,  $(x, y, z) \equiv (\vec{\rho}, z)$ ,  $\vec{e}_z$  směřuje vzhůru; s rozšířenou Boussinesqovou aproximací základních rovnic v bezrozměrných veličinách, jež zahrnuje adiabatické zahřívání. Navíc tepelná vodivost a zároveň, až do sekce 3.3, i teplotní roztažnost budou funkce souřadnice  $z$ , tj.  $\alpha = \alpha(z)$ ,  $k = k(z)$ . Mějme dvě, na sobě položené, nekonečné vrstvy s konstantní viskozitou. Tloušťka obou vrstev dohromady v bezrozměrných jednotkách je rovna 1. Na horní resp. dolní ploše držíme teploty  $T_1 = 0$  resp.  $T_2 = 1$ . Soustava rovnic je následující

*Stokesův problém*

$$\begin{aligned}\nabla_H \cdot \vec{u} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0, \\ -\nabla_H \Pi + \eta \left( \nabla_H^2 \vec{u} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \eta \left( \nabla_H^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) &= -Ra\alpha(z)\Theta,\end{aligned}$$

kde  $\nabla_H$  - horizontální nabla,  $\Pi$  - odchylka tlaku od hydrostatického a pro rychlost jsme zavedli ozn.<sup>1</sup>  $\vec{v} \equiv (\vec{u}(x, y, z), W(x, y, z))$ .

---

<sup>1</sup> $\vec{v}$  je implicitně též funkcí času  $t$

Hraniční podmínky na horní, spodní ploše jsou

$$W = 0, \quad \vec{T}_H = 0$$

Podmínky na rozhraní jsou

$$\begin{aligned} [W]_-^+ &= 0, & [\vec{u}]_-^+ &= 0, \\ [T_z]_-^+ &= 0, & [\vec{T}_H]_-^+ &= 0, \end{aligned}$$

kde  $\vec{T}_H$  je horizontální,  $T_z$  vertikální složka trakce.

*Linearizovaná rovnice přenosu tepla*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \nabla \cdot (k(z) \nabla \Theta) - \left( \frac{\partial T_0}{\partial z} + D\alpha(T_s + T_0(z)) \right) W + \frac{d}{dz} \left( k \frac{dT_0}{dz} \right) + R = \\ &= k(z) \nabla_H^2 \Theta + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial T_0}{\partial z} + D\alpha(T_s + T_0(z)) \right) W + \frac{d}{dz} \left( k \frac{dT_0}{dz} \right) + R, \end{aligned}$$

$$\text{kde } T_s = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

Hraniční podmínky na horní, dolní ploše jsou

$$\Theta = 0$$

### 3.1 Referenční rozdělení teploty $T_0$

Abychom mohli provádět analýzu stability referenčního rozdělení teploty, musíme ho nejprve určit. Referenčním rozdělením rozumíme, dle sekce 2.4, řešení kondukčního problému.

#### 3.1.1 Analytické řešení

Zabývejme se kondukčním problémem ve dvou nekonečných 2D vrstvách, jež jsou nad sebou, každá o jiných vnitřních parametrech. Horní nechť představuje plášť, dolní vrstvu D". Zaveďme následující značení: veličiny v horní vrstvě označujeme indexem 1, v dolní vrstvě indexem 2. Neznámé v horní vrstvě označujeme A, B, v dolní vrstvě C, D. Kartézský systém nechť má počátek v rozhraní dvou vrstev (viz. dále), horní plocha má souřadnici  $z = H$ , kde  $H \in (0, 1)$ , dolní  $z = h$ , kde  $h \in (0, -1)$ . Celková tloušťka obou vrstev

dohromady je 1. Kondukce je popsána rovnicí (2.19). Jak bylo v odstavci 2.4 naznačeno, nebudeme uvažovat časové závislosti a navíc předpokládáme závislost  $T_0$  pouze na souřadnici  $z$ . Kondukční rovnice je proto v bezrozměrných jednotkách popsána obyčejnou diferenciální rovnicí v proměnné  $z$

$$\frac{d}{dz} \left( k(z) \frac{dT_0}{dz} \right) + R = 0 . \quad (3.1)$$

Na horní ploše  $z = H$ , resp. dolní ploše  $z = h$  jsou zadány teploty

$$T_0(H) = 0 , \quad (3.2)$$

$$T_0(h) = 1 . \quad (3.3)$$

Na rozhraní požadujeme spojitost teplot a tepelných toků. Tj.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_r^+} T_0(z) - \lim_{z \rightarrow z_r^-} T_0(z) &= 0 , \\ \lim_{z \rightarrow z_r^+} k(z) \frac{dT_0}{dz} - \lim_{z \rightarrow z_r^-} k(z) \frac{dT_0}{dz} &= 0 . \end{aligned}$$

Kde  $z_r$  značí souřadnici rozhraní. Zde pokládám  $z_r = 0$ , neboť nejsložitější se zdála právě podmínka na spojitě tepelné toky, jež se touto volbou zjednoduší.

Pro  $k(z)$  budeme uvažovat teplotní závislost tvaru

$$k = k_0 + \beta(T_s + T_0)^3 , \quad (3.4)$$

kde první člen budeme nazývat fononovým, druhý radiačním. Po dosazení do rovnice (3.1) a dvojitě integraci, dostáváme algebraickou rovnici 4. stupně pro  $T_0$

$$k_0 T_0 + \beta \frac{(T_s + T_0)^4}{4} = -\frac{R}{2} z^2 + Az + B . \quad (3.5)$$

Kde  $A, B$  jsou integrační konstanty.

Je-li člen  $\beta \frac{(T_s + T_0)^4}{4}$  zanedbatelný, platí

$$T_0 = \frac{1}{k_0} \left( -\frac{R}{2} z^2 + Az + B \right) . \quad (3.6)$$

Takové řešení nazýváme fononové.

Naopak, je-li zanedbatelný člen  $k_0 T_0$

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{4}{\beta} \left( -\frac{R}{2} z^2 + Az + B \right)} - T_s . \quad (3.7)$$

Takové řešení nazýváme radiační.

Mohou však nastat i situace, kdy jeden z diskutovaných členů je dominantní, ale druhý nelze zcela opominout. V takovém případě mluvíme o dominantním řešení s perturbací. Tedy

$$T_0 = \frac{1}{k_0} \left\{ -\frac{\beta}{4} \left[ \frac{1}{k_0} \left( k_0 T_s - \frac{R}{2} z^2 + Az + B \right) \right]^4 - \frac{R}{2} z^2 + Az + B \right\} \quad (3.8)$$

je fononové řešení s radiačním perturbací a

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{4}{\beta} \left\{ -\frac{R}{2} z^2 + Az + B - k_0 \left[ \sqrt[4]{\frac{4}{\beta} \left( -\frac{R}{2} z^2 + Az + B \right) - T_s} \right] \right\}} - T_s . \quad (3.9)$$

radiační řešení s fononovou perturbací.

Poznamenejme, že v případě uvažované dvojvrstvy lze zvolit bezrozměrné jednotky tak, že pro spodní vrstvu platí:  $k_{02} = 1$  (za referenční jsme zvolili  $k_{02}$  ve fyzikálních jednotkách).

Pakliže v horní vrstvě platí fononové řešení, nastávají v uvažované dvojvrstvě následující kombinace:

$$\begin{aligned} \text{Plášť: fononové řešení} \\ D'': \text{fononové řešení} \end{aligned}$$

Spojité tepelné toky na rozhraní

$$A \left( 1 + \frac{\beta_1}{k_{01}^4} B^3 \right) = C \left( 1 + \beta_2 D^3 \right) . \quad (3.10)$$

Spojité teploty na rozhraní

$$\frac{B}{k_{01}} = D .$$

Daná  $T_0(H) = 0$  na horní ploše  $z = H$

$$AH + B = R \frac{H^2}{2} .$$

Daná  $T_0(h) = 1$  na dolní ploše  $z = h$

$$Ch + D = 1 + R \frac{h^2}{2} .$$

*Plášť: fononové řešení*  
*D'': radiační řešení*

Spojité tepelné toky na rozhraní

$$A \left( 1 + \frac{\beta_1}{k_{01}^4} B^3 \right) = C \left( 1 + (4^3 \beta_2)^{1/4} D^{3/4} \right) (4^3 \beta_2)^{-1/4} D^{-3/4} .$$

Spojité teploty na rozhraní

$$\frac{B}{k_{01}} = \left( \frac{4}{\beta_2} \right)^{1/4} D^{1/4} - T_s .$$

Daná  $T_0(H) = 0$  na horní ploše  $z = H$

$$AH + B = R \frac{H^2}{2} .$$

Daná  $T_0(h) = 1$  na dolní ploše  $z = h$

$$\sqrt[4]{\frac{4}{\beta_2} \left( -\frac{Rh^2}{2} + hC + D \right)} - T_s = 1 .$$

*Plášť: fononové řešení*  
*D''': fononové řešení s radiační perturbací*

Spojité tepelné toky na rozhraní

$$A \left( 1 + \frac{\beta_1}{k_{01}^4} B^3 \right) = C \left\{ 1 + \beta_2 \left[ -\frac{\beta_2}{4} (D + T_s)^4 + D \right]^3 \right\} [1 - \beta_2 (D + T_s)^3] .$$

Spojité teploty na rozhraní

$$\frac{1}{k_{01}} B = -\frac{\beta_2}{4} (T_s + D)^4 + D .$$

Daná  $T_0(H) = 0$  na horní ploše  $z = H$

$$AH + B = R \frac{H^2}{2} .$$

Daná  $T_0(h) = 1$  na dolní ploše  $z = h$

$$-\frac{\beta_2}{4} \left( T_s - \frac{Rh^2}{2} + hC + D \right)^4 - \frac{Rh^2}{2} + hC + D = 1 .$$



*Plášť: fononové řešení*  
*D'': radiační řešení s fononovou perturbací*

Spojité tepelné toky na rozhraní

$$A \left( 1 + \frac{\beta_1}{k_{01}^4} B^3 \right) = \left\{ 1 + \beta_2 \left\{ \left[ \frac{4}{\beta_2} \left( (D - T_s) - \sqrt[4]{\frac{4D}{\beta_2}} \right) \right]^{1/4} - T_s \right\}^3 \right\}$$

$$\frac{1}{\beta_2} \left[ \frac{4}{\beta_2} \left( (D - T_s) - \sqrt[4]{\frac{4D}{\beta_2}} \right) \right]^{-3/4} \left( 1 - \frac{1}{(4D)^{3/4} \beta_2^{1/4}} \right) C.$$

Spojité teploty na rozhraní

$$\frac{B}{k_{01}} = \sqrt[4]{\frac{4}{\beta_2} \left( D - \sqrt[4]{\frac{4}{\beta_2} D + T_s} \right) - T_s}.$$

Daná  $T_0(H) = 0$  na horní ploše  $z = H$

$$AH + B = R \frac{H^2}{2}.$$

Daná  $T_0(h) = 1$  na dolní ploše  $z = h$

$$\sqrt[4]{\frac{4}{\beta_2} \left[ -\frac{Rh^2}{2} + hC + D - \sqrt[4]{\frac{4}{\beta_2} \left( -\frac{Rh^2}{2} + hC + D \right) + T_s} \right] - T_s} = 1.$$

Zbývá charakterizovat podmínky, za kterých je volba jednotlivých zjednodušujících forem řešení akceptovatelná. Určující je poměr členu  $k_{0i}T_0$  a členu  $\beta_i \frac{(T_s+T_0)^4}{4}$ , kde  $i \in \{1, 2\}$ . Označme ho  $P$ ,  $P = \frac{4k_{0i}T_0}{\beta_i(T_s+T_0)^4}$ . Stanovme následující kritéria pro typy řešení:

1. Fononové nebo radiační: Člen budeme považovat za zanedbatelný, bude-li v dané oblasti téměř všude alespoň o řád menší, než ten druhý.
2. Fononové s radiační perturbací nebo radiační s fononovou perturbací: Člen nebudeme zanedbávat, ale budeme s ním pracovat jako s perturbací, bude-li v dané oblasti téměř všude alespoň 5 krát menší než ten druhý.

Jinak řečeno musí  $P$  ve většině bodů dané oblasti pro daný typ řešení splňovat

1. fononové<sup>2</sup>:  $P > 10$
2. radiační<sup>3</sup>:  $P < 0, 1$
3. fononové s radiační perturbací:  $P > 5$
4. radiační s fononovou perturbací:  $P < 0, 2$

Nakonec poznamenejme, že podobným způsobem bychom mohli postupovat také v případě více vrstev na sobě a že jsme současně vyřešili i případ pouze jedné vrstvy. Tvar řešení známe, je jen třeba splnit podmínky na horní a dolní ploše (rozhraní neexistuje), jimiž jsou fixované teploty. Položíme-li nulu souřadného systému do spodní plochy, dostáváme 2 rovnice pro  $A$ ,  $B$ . Např. pro fononové řešení

Daná  $T_0(1) = 0$  na horní ploše  $z = 1$

$$A + B = \frac{R}{2} .$$

Daná  $T_0(0) = 1$  na dolní ploše  $z = 0$

$$B = 1 ,$$

z čehož

$$T_0 = -\frac{R}{2}z^2 + \left(\frac{R}{2} - 1\right)z + 1 . \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Numerické řešení, popis programu (skriptu) v prostředí MATLAB (Octave)

Dále jsem numericky, v programu MATLAB, řešil jednotlivé soustavy rovnic. Napsal jsem následující skript.

#### Idea

Zadáme číslo parametru, jež budeme měnit (který) (ostatní zůstávají na hodnotách daných vektorem  $Pr$ ), krok, s jakým se bude měnit (krok), popř.

---

<sup>2</sup>Mohli bychom mluvit i o čistě fononovém řešení, pro  $P \rightarrow \infty$

<sup>3</sup>a čistě radiačním řešením, pro  $P = 0$

počet bodů (pbodu), z kolika se budou obě části grafu zvlášť vykreslovat. Dále zadáme počáteční stav charakterizovaný vektorem  $Pr$  a, nefunguje-li standardní nastavení, odhad řešení ( $x_0$ ).

### Vstup

ktery.....číslo parametru, jež se bude v průběhu výpočtu měnit, viz tabulka 3.1  
 krok.....krok, s jakým se bude zvolený parametr měnit  
 pbodu.....počet vykreslovacích bodů v dolní resp. spodní vrstvě zvlášť, čím větší, tím hladší graf, ale náročnější na výpočet; standardně nastaveno na 200  
 $x_0$ .....odhad řešení; standardně nastaven jako vektor jedniček  
 $Pr$ .....vektor jednotlivých parametrů v počátečním stavu

parametr	$k_1$	$\beta_1$	$\beta_2$	$h$	$R$	$T_s$
číslo	1	2	3	4	5	6

**Tabulka 3.1:** Zavedené očíslování parametrů

### Výstup

Graf sestávající z pěti teplotních rozložení, mění se jenom parametr ktery, ostatní jsou dány vektorem  $Pr$ . Popisy os jsou nastaveny, legenda a název grafu se generují automaticky. Graf se rovněž automaticky uloží do souboru *ktery.ps*, tedy např. *1.ps*.

Soubory *ktery\_podm1.dat* a *ktery\_podm2.dat*, tedy např. *1\_podm.dat*. Soubory obsahují 5 sloupců s hodnotami poměrů  $P$  v jednotlivých hloubkách vrchní resp. spodní vrstvy daných velikostí proměnné pbodu. Nejsou-li splněny předpoklady, za jakých je problém řešen (viz. výše), vypíše se na obrazovku hlášení "Nahore nejsou splněny podmínky reseni" nebo "Dole nejsou splněny podmínky reseni". Pro radiační přenosy se navíc kontroluje, nedochází-li, při nevhodné volbě parametrů, k odmocňování záporného čísla. Pokud by se tak stalo, vypíše se na obrazovku "Odmocňuje se zaporne cislo".

Soubor *ktery\_tep.dat* obsahující 10 sloupců, obsahujících střídavě hodnoty souřadnice  $z$  a příslušné teploty  $T_0$ .

### Podmínky řešení

Podmínky pro správnost užití jednotlivých typů řešení jsou dány hodnotou  $P$ , viz. výše. Po provedení výpočtu známe jeho hodnoty v daném intervalu poměrně dobře. I bez numerického výpočtu můžeme provést následující

úvahu. Platí

$$\frac{dP}{dT_0} = \frac{\overbrace{4k_{0i}(T_s - 3T_0)}^{>0}}{\underbrace{\beta_i(T_s + T_0)^5}_{>0}}.$$

Derivace je kladná pro  $T_0 \in \langle 0, \frac{T_s}{3} \rangle$ , pro  $T_0 = \frac{T_s}{3}$  je nulová a pro  $T_0 > \frac{T_s}{3}$  je záporná. Pro  $T_0 = \frac{T_s}{3}$  je  $P$  maximální. Předpokládejme, že  $T_0 = \frac{T_s}{3}$  se nabývá v horní vrstvě. Předpokládáme-li dále, že teplota roste ve spodní vrstvě zhruba monotónně a její změna není příliš velká, pak se maximální  $P$  ve spodní vrstvě nabývá zhruba na rozhraní a minimální na spodní ploše

$$P_{max} = \frac{4T_0(0)}{\beta_2(T_s + T_0(0))^4} < \frac{4T_0(0)}{\beta_2 T_0(0)^4} = \frac{4}{\beta_2 T_0(0)^3} \approx \frac{4}{\beta_2},$$

$$P_{min} = \frac{4}{\beta_2(T_s + 1)^4} \cong \frac{2.94}{\beta_2} \approx \frac{3}{\beta_2}.$$

Je-li  $T_s = 0.08$ , dostáváme pro jednotlivé typy řešení podmínky

1. Fononové:  $\beta_2 < 0.3$
2. Radiační:  $\beta_2 > 40$
3. Fononové s radiační perturbací:  $\beta_2 < 0.6$
4. Radiační s fononovou perturbací:  $\beta_2 > 20$

### 3.1.3 Výsledky-grafický výstup

#### *Fononové řešení*

Vykresleny jsou 2 volby parametrů.

1. volba

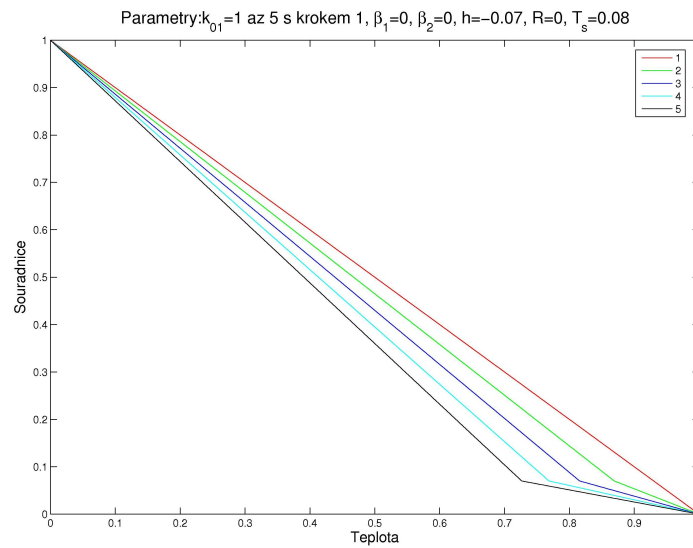
Počáteční stav:  $k_{01} = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $h = -0.07$ ,  $R = 0$ ,  $T_s = 0.08$ .

Na jednotlivých obrázcích se mění:

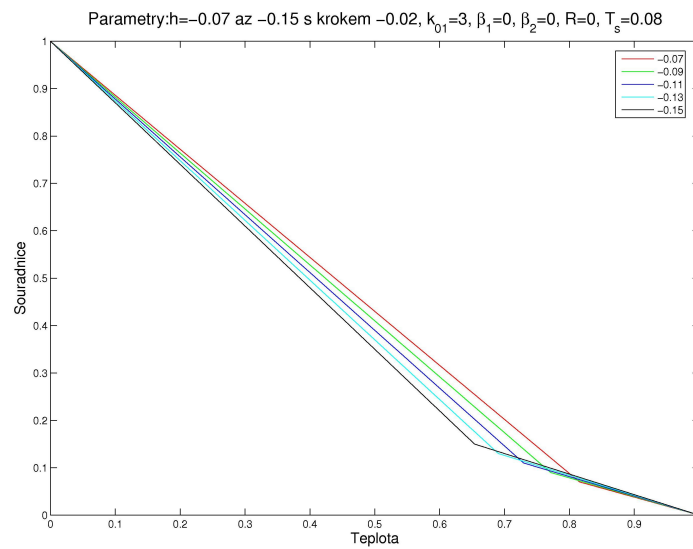
Obr. 3.1:  $k_{01} = 1$  až 5 s krokem 1.

Obr. 3.2:  $h = -0.07$  až  $-0.15$  s krokem  $-0.02$ , nastaveno  $k_{01} = 3$

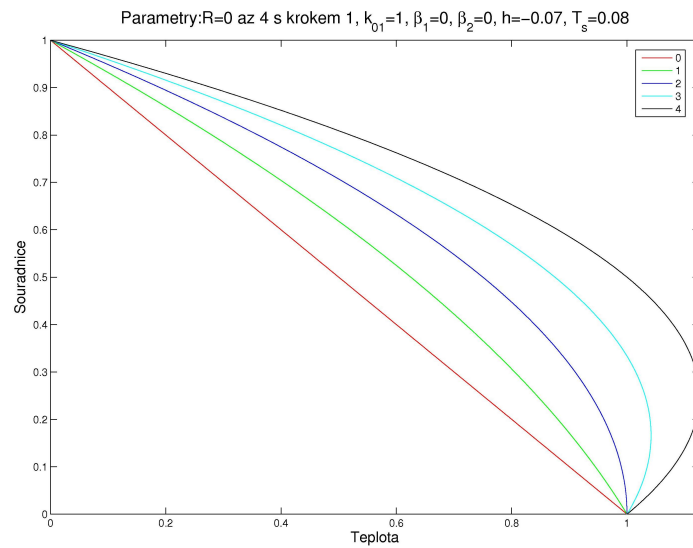
Obr. 3.3:  $R = 0$  až 4 s krokem 1.



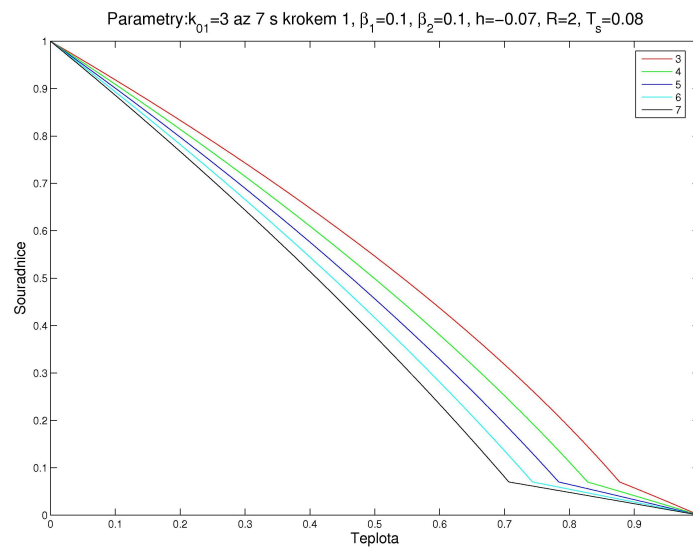
**Obrázek 3.1:** Fononové řešení, 1. volba počátečních parametrů, mění se  $k_{01}$



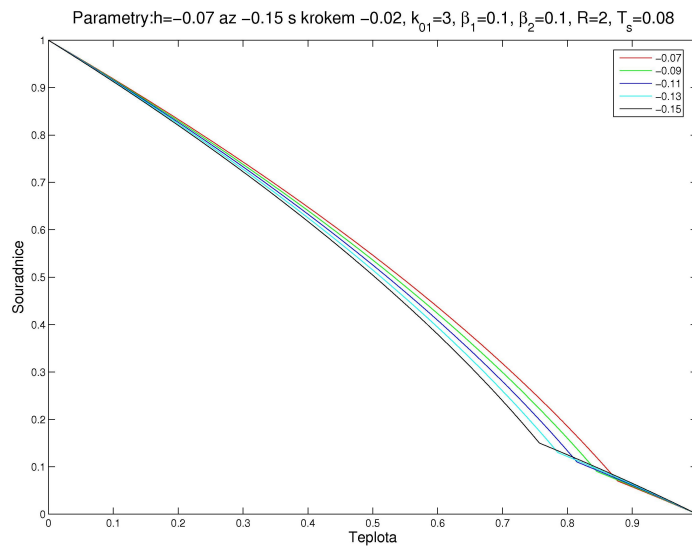
**Obrázek 3.2:** Fononové řešení, 1. volba počátečních parametrů, mění se  $h$



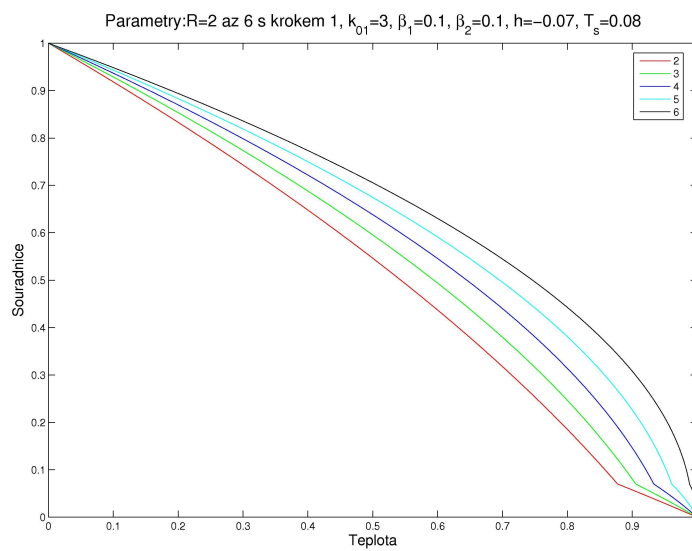
**Obrázek 3.3:** Fononové řešení, 1. volba počátečních parametrů, mění se  $R$



**Obrázek 3.4:** Fononové řešení, 2. volba počátečních parametrů, mění se  $k_{01}$



**Obrázek 3.5:** Fononové řešení, 2. volba počátečních parametrů, mění se  $h$



**Obrázek 3.6:** Fononové řešení, 2. volba počátečních parametrů, mění se  $R$

2.volba

Počáteční stav:  $k_{01} = 3$ ,  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 0.1$ ,  $h = -0.07$ ,  $R = 2$ ,  $T_s = 0.08$ .

Na jednotlivých obrázcích se mění:

Obr. 3.4:  $k_{01} = 3$  až 7 s krokem 1.

Obr. 3.5:  $h = -0.07$  až  $-0.15$  s krokem  $-0.02$ .

Obr. 3.6:  $R = 2$  až 6 s krokem 1.

1. volba parametrů slouží zároveň k jisté kontrole chodu programu, neboť zvolenou situaci je možno řešit i analyticky. Např. na obr. 3.3 je zajímavé, že teplota pro  $R = 4$  (i  $R = 3$ ) nedosahuje svého maxima na dolní ploše, ale zhruba pro  $z = 0.25$ . Provedeme-li analýzu rovnic z odstavce 3.1.1, dostáváme, po přepočtu na jiné umístění souřadného systému, extrém pro  $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{R}$ . Dosadíme-li  $R = 4$ , vychází  $z = 0.25$ , což se plně shoduje s naším pozorováním. Obrázek 3.1 rovněž není nepochopitelný. Z (3.6) víme, že průběh teploty v jednotlivých vrstvách je dán lineární závislostí. Dle (3.10) platí  $A = C$ , je-li  $k_{01} > k_{02}$ , je  $\frac{A}{k_{01}} < \frac{C}{k_{02}}$ . Neboli směrnice závislosti teploty na souřadnici v první vrstvě je v absolutní hodnotě menší než ve vrstvě druhé. Poznamenejme, že v případě obrázku 3.2 bylo třeba vnést do počátečního stavu nějakou nerovnováhu. Počáteční stav totiž reprezentuje pouze 1 vrstvu, tudíž změny  $h$  by se nijak neprojevíly.

2. volba parametrů je na řešení složitější.  $R \neq 0$ , ale hlavně  $\beta_1 \neq 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$ . Na druhou stranu, citlivost na parametry  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  není velká, jak je mj. vidět, vykreslíme-li si příslušné závislosti pro 1. volbu s  $\beta_1 = 0$  až 0.2 s krokem 0.05 resp.  $\beta_2 = 0$  až 0.2 s krokem 0.05 a pro 2. volbu s  $\beta_1 = 0.1$  až 0.3 s krokem 0.05 resp.  $\beta_2 = 0.1$  až 0.26 s krokem 0.04. Všimněme si dále, že obrázky 3.1 a 3.4 jsou si dosti podobné. Rozdíly jsou vidět, budeme-li srovnávat křivky se stejnými hodnotami  $k_{01}$ . Např. na rozhraní je v případě 2. volby parametrů teplota větší.

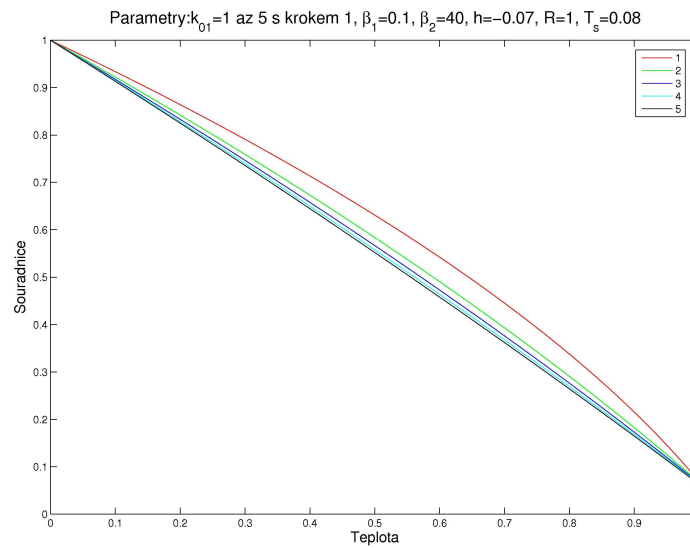
### *Fononové řešení s radiační perturbací*

Vyřešíme-li úlohu určenou 2. volbou parametrů pro fononové řešení, nedostáváme příliš odlišné závislosti. Např. ve srovnání s obrázkem 3.4 by teploty ve spodní části byly o málo vyšší, křivky srovnávané vůči obrázku 3.6 se zdají blíže u sebe.

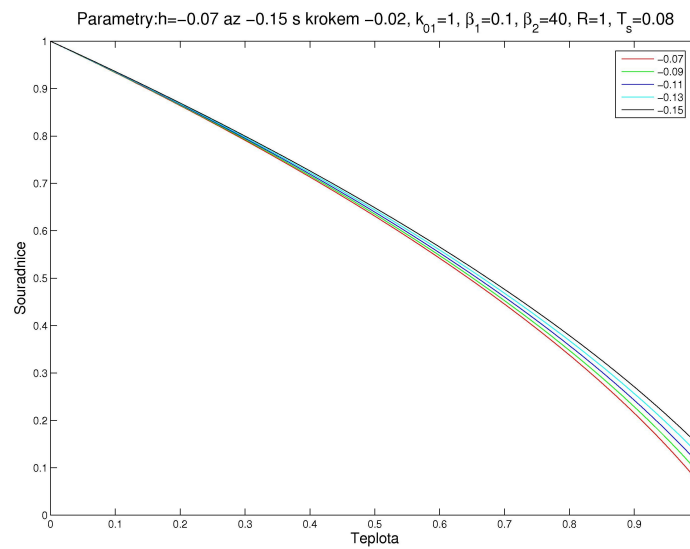
### *Radiační řešení*

Vykresleny jsou opět 2 volby parametrů.

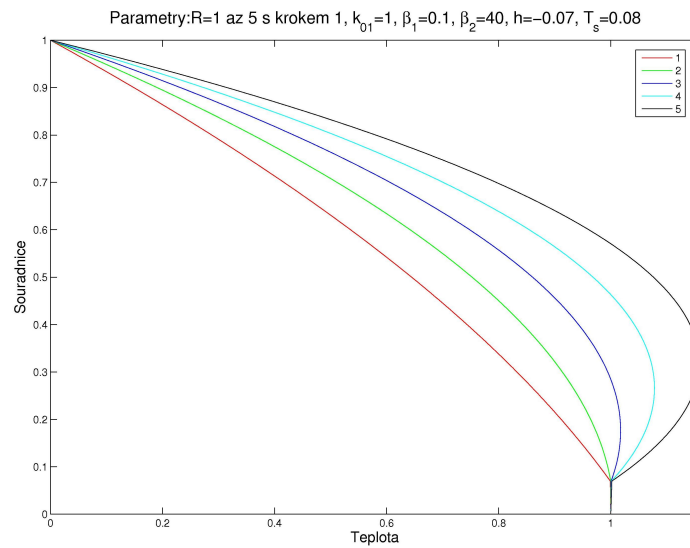




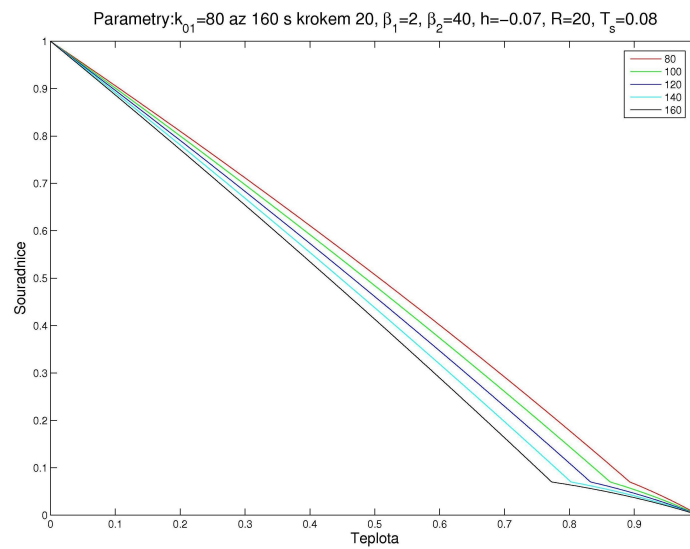
**Obrázek 3.7:** Radiační řešení, 1. volba počátečních parametrů, mění se  $k_{01}$



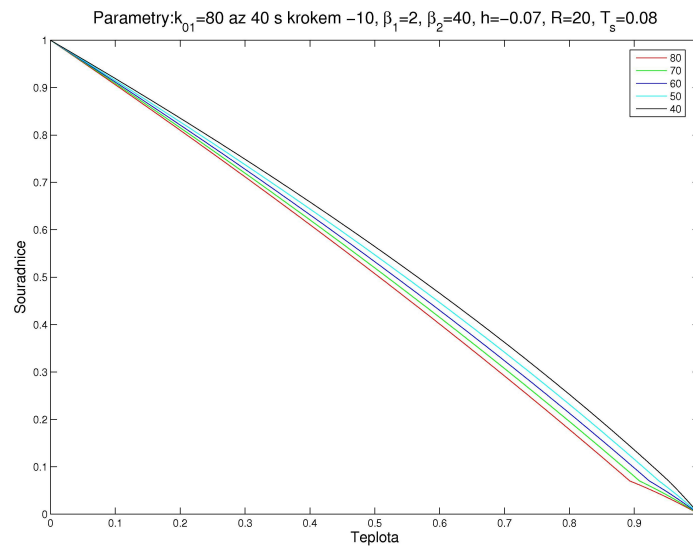
**Obrázek 3.8:** Radiační řešení, 1. volba počátečních parametrů, mění se  $h$



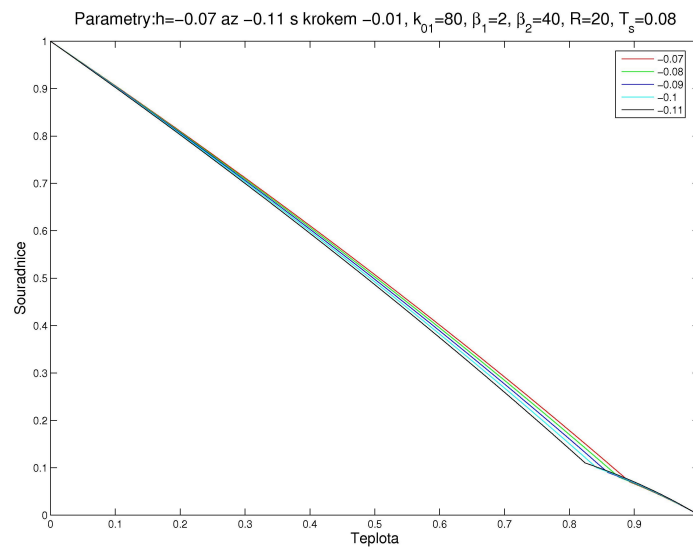
**Obrázek 3.9:** Radiační řešení, 1. volba počátečních parametrů, mění se  $R$



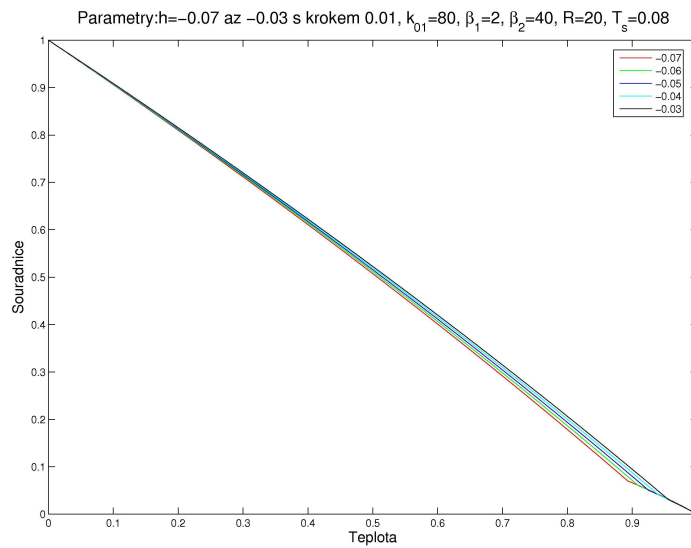
**Obrázek 3.10:** Radiační řešení, 2. volba počátečních parametrů, mění se  $k_{01}$



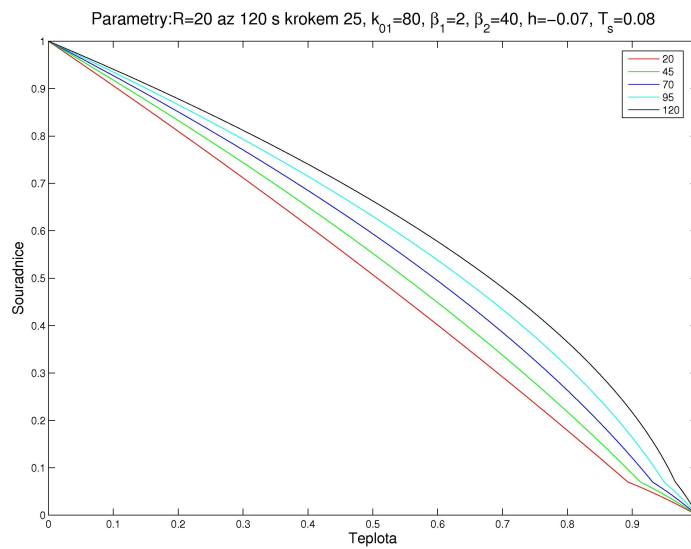
**Obrázek 3.11:** Radiační řešení, 2. volba počátečních parametrů, mění se  $k_{01}$



**Obrázek 3.12:** Radiační řešení, 2. volba počátečních parametrů, mění se  $h$



**Obrázek 3.13:** Radiační řešení, 2. volba počátečních parametrů, mění se  $h$



**Obrázek 3.14:** Radiační řešení, 2. volba počátečních parametrů, mění se  $R$

1.volba

Počáteční stav:  $k_{01} = 1$ ,  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 40$ ,  $h = -0.07$ ,  $R = 1$ ,  $T_s = 0.08$ .

Na jednotlivých obrázcích se mění:

Obr. 3.7:  $k_{01} = 1$  až 5 s krokem 1

Obr. 3.8:  $h = -0.07$  až  $-0.15$  s krokem  $-0.02$ .

Obr. 3.9:  $R = 1$  až 5 s krokem 1.

2. volba

Počáteční stav:  $k_{01} = 80$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 40$ ,  $h = -0.07$ ,  $R = 20$ ,  $T_s = 0.08$ .

Na jednotlivých obrázcích se mění:

Obr. 3.10:  $k_{01} = 80$  až 160 s krokem 20.

Obr. 3.11:  $k_{01} = 80$  až 40 s krokem  $-10$ .

Obr. 3.12:  $h = -0.07$  až  $-0.11$  s krokem  $-0.01$ .

Obr. 3.13:  $h = -0.07$  až  $-0.03$  s krokem  $0.01$ .

Obr. 3.14:  $R = 20$  až 120 s krokem 25.

Obě volby parametrů jsou zřejmě fyzikálně nereálné, slouží především jako citlivostní studie.

Pro 1. volbu je charakteritická prakticky konstantní teplota ve spodní vrstvě.

Závislosti na obrázcích 3.10 a 3.12 by nemusely splňovat požadavky uvažované aproximace, neboť  $P$  v dolní vrstvě nabývá na více místech hodnot přes 0.1 (až 0.15 resp. až 0.12). Proto jsou přiloženy i obrázky 3.11, 3.13.

### *Radiační řešení s fononovou perturbací*

Vykreslena je pouze jedna volba parametrů, jež je identická s 2. volbou pro radiační řešení. Cílem je srovnání výsledků.

Počáteční stav:  $k_{01} = 80$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 40$ ,  $h = -0.07$ ,  $R = 20$ ,  $T_s = 0.08$ .

Na jednotlivých obrázcích se mění:

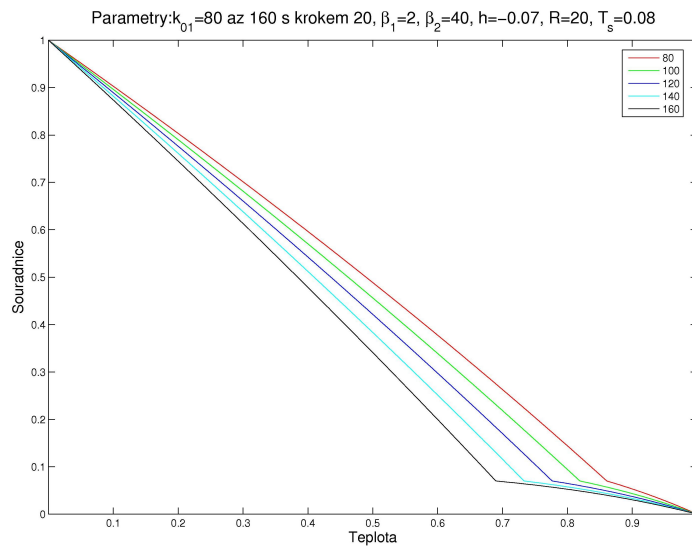
Obr. 3.15:  $k_{01} = 80$  až 160 s krokem 20.

Obr. 3.16:  $\beta_2 = 40$  až 60 s krokem 5.

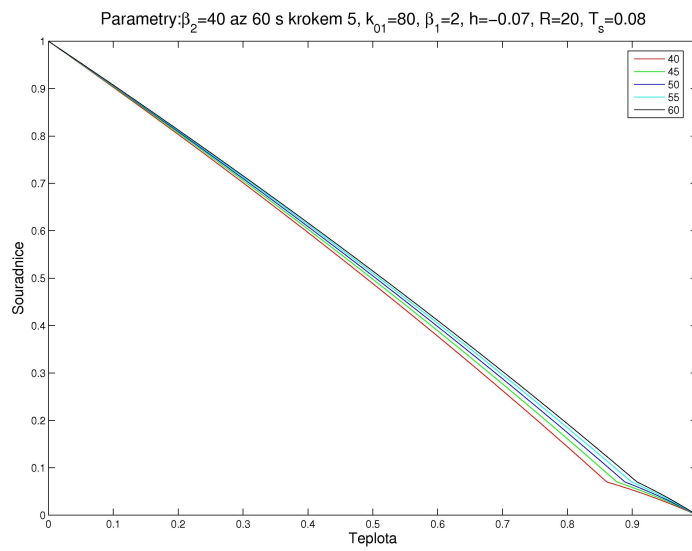
Obr. 3.17:  $h = -0.07$  až  $-0.11$  s krokem  $-0.01$ .

Obr. 3.18:  $R = 20$  až 36 s krokem 4.

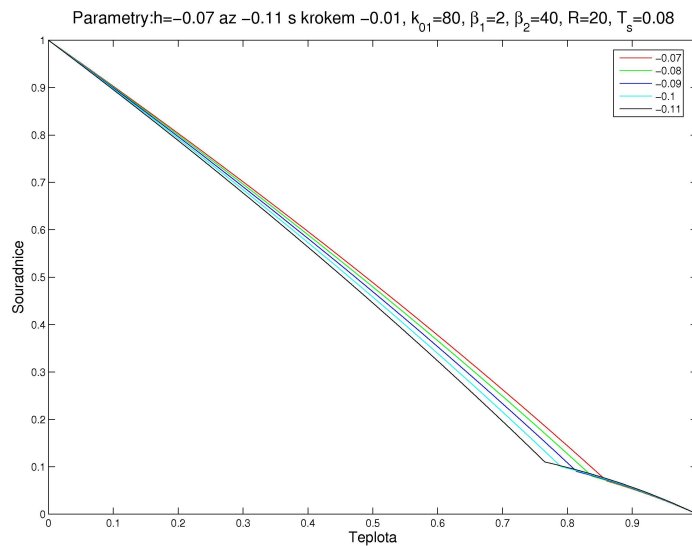
Srovnajme obrázky 3.10 a 3.15. Obrázek 3.15 vyjadřující perturbované řešení má teploty v globálu nižší. Ke stejnému závěru dospějeme srovnáním obrázků 3.12 a 3.17.



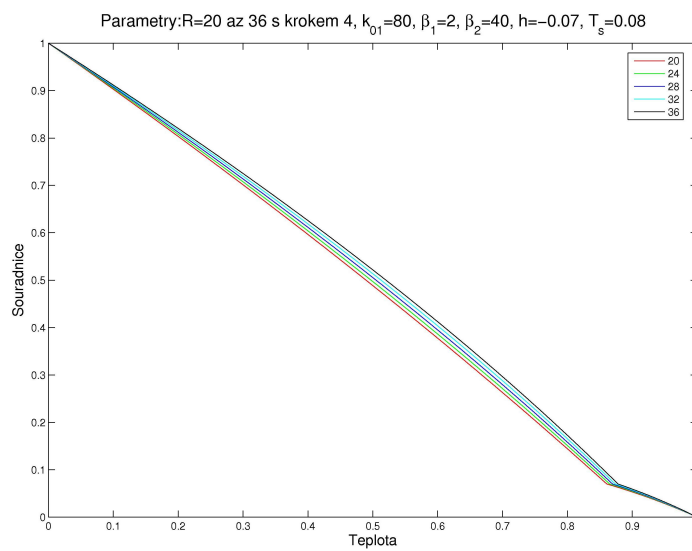
**Obrázek 3.15:** Radiační řešení s fononovou perturbací, mění se  $k_{01}$



**Obrázek 3.16:** Radiační řešení s fononovou perturbací, mění se  $\beta_2$



**Obrázek 3.17:** Radiační řešení s fononovou perturbací, mění se  $h$



**Obrázek 3.18:** Radiační řešení s fononovou perturbací, mění se  $R$

## 3.2 Převod rovnic do spektrální oblasti

Uvažujme následující Fourierovu transformaci (F.T.)

$$\widehat{f}(\vec{\lambda}, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{\rho}, z) \exp(-i\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) dx dy . \quad (3.12)$$

### 3.2.1 Stokesův problém

Řešením Stokesova problému se nyní pokusíme nalézt rovnici pro  $W$ . Stokesův problém po použití F.T (3.12)

$$i\vec{\lambda} \cdot \widehat{\vec{u}} + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} = 0 , \quad (3.13)$$

$$-i\vec{\lambda}\widehat{\Pi} + \eta \left( -\lambda^2 \widehat{\vec{u}} + \frac{\partial^2 \widehat{\vec{u}}}{\partial z^2} \right) = 0 , \quad (3.14)$$

$$-\frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial z} + \eta \left( -\lambda^2 \widehat{W} + \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial z^2} \right) = -Ra\alpha(z)\widehat{\Theta} . \quad (3.15)$$

Kde  $\lambda^2 \equiv \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}$ . Rovnici (3.14) nyní vynásobíme  $i\vec{\lambda} \cdot$  a za  $i\vec{\lambda} \cdot \widehat{\vec{u}}$  dosadíme z (3.13), tedy

$$\widehat{\Pi} = \eta \left( -1 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} . \quad (3.16)$$

Dosazení (3.16) do (3.15) dává finální rovnici

$$\left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \lambda^2 \right) \widehat{W} = \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda \right)^2 \widehat{W} = Ra \frac{\alpha(z)}{\eta} \widehat{\Theta} . \quad (3.17)$$

Vertikální a horizontální složky trakce

$$\begin{aligned} \widehat{T}_z &= -\widehat{\Pi} + 2\eta \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} = \eta \left( 3 - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} , \\ \widehat{T}_H &= \eta \left( \frac{\partial \widehat{\vec{u}}}{\partial z} + i\vec{\lambda} \widehat{W} \right) \Rightarrow i\vec{\lambda} \cdot \widehat{T}_H = -\eta \left( \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial z^2} + \lambda^2 \widehat{W} \right) , \end{aligned}$$

vertikální a horizontální složky rychlosti

$$\widehat{W} , \quad i\vec{\lambda} \cdot \vec{u} = -\frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} . \quad (3.18)$$



Okrajové podmínky pro horní a spodní plochu mají proto tvar

$$\widehat{W} = 0, \quad \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial z^2} = 0. \quad (3.19)$$

Podmínky na rozhraní jsou

$$\begin{aligned} [\widehat{W}]_{-}^{+} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} \right]_{-}^{+} = 0, \\ \left[ \eta \left( 3 - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} \right]_{-}^{+} = 0, \quad \left[ \eta \left( \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial z^2} + \lambda^2 \widehat{W} \right) \right]_{-}^{+} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.2.2 RPT

Pokud je profil  $T_0$  profilem kondukčním, tj.

$$\frac{d}{dz} \left( k(z) \frac{dT_0}{dz} \right) + R = 0,$$

dostáváme po použití F.T. a uvážení časové závislosti  $\Theta \approx \exp(st)$

$$s\widehat{\Theta} = -k(z)\lambda^2\widehat{\Theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z) \frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial T_0}{\partial z} + D\alpha(z)(T_s + T_0(z)) \right) \widehat{W}$$

a okrajové podmínky na horní, spodní ploše

$$\widehat{\Theta} = 0. \quad (3.21)$$

Podmínky na rozhraní jsou

$$[\widehat{\Theta}]_{-}^{+} = 0, \quad \left[ k \frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial z} \right]_{-}^{+} = 0. \quad (3.22)$$

Dohromady dostáváme vlastní problém a je třeba určit sadu možných  $s$ .

### 3.3 Řešení pro vrstvu s konstantní tepelnou roztažností, fononovým $T_0$ , $k(z) = 1 + \widetilde{\beta}(T_s + T_0)^3$ a $\widehat{\Theta}$ , $\widehat{W}$ ve tvaru řad

Zabývejme se nejprve stabilitou pouze jedné vrstvy. Situaci zobecníme v sekci 3.4.

### 3.3.1 Řešení s nulovou disipací

Označme tepelnou roztažnost  $\alpha(z) \equiv \alpha = konst.$

#### *Stokesův problém*

Řešme nejprve Stokesův problém, jehož tvar ve spektrální oblasti je dán rovnicí (3.17). Po dosazení  $\hat{\Theta}$ ,  $\hat{W}$  ve tvaru nekonečné mocninné řady

$$\hat{\Theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (3.23)$$

$$\hat{W} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad (3.24)$$

dostáváme rci

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \sum_4^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)b_n z^{n-4} - 2 \sum_2^{\infty} n(n-1)b_n z^{n-2} + \\ + \lambda^2 \sum_0^{\infty} b_n z^n = Ra \frac{\alpha}{\eta} \sum_0^{\infty} a_n z^n. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Po přerovnání indexování a srovnání koeficientů u příslušných mocnin, vychází vztah

$$\frac{1}{\lambda^2} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)b_{n+4} - 2(n+2)(n+1)b_{n+2} + \lambda^2 b_n = Ra \frac{\alpha}{\eta} a_n. \quad (3.26)$$

Neboli

$$b_{n+4} = \lambda^2 [K f_2(n) a_n + f_1(n) b_{n+2} - \lambda^2 f_2(n) b_n], \quad (3.27)$$

kde

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \frac{2}{(n+4)(n+3)} \approx \frac{1}{n^2}, \\ f_2(n) &= \frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \approx \frac{1}{n^4}, \\ K &= Ra \frac{\alpha}{\eta}. \end{aligned}$$

Bez újmy na obecnosti lze zvolit souřadnici dolní plochy  $z = 0$ , horní  $z = 1$ . Hraniční podmínky dané rovnicemi (3.19) nabývají tvaru:  
Pro dolní plochu  $z = 0$

$$b_0 = 0 , \quad (3.28)$$

$$b_2 = 0 . \quad (3.29)$$

Pro horní plochu  $z = 1$  (s užitím předchozích podmínek (3.28), (3.29))

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_1 + \sum_{n=3}^{\infty} b_n = 0 , \quad (3.30)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+2}(n+2)(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+2}(n+2)(n+1) = 0 . \quad (3.31)$$

Rovnice (3.27) nám umožňuje jednoznačně vypočítat koeficienty  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  známe-li koeficienty  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

1. Sudé koeficienty: Vztah (3.27) je rekurentní vzorec, který dává hodnoty  $b_4, b_6, b_8$  atd. Uvědomme si, že je-li posloupnost koeficientů  $a_n$  konečná, může být posloupnost koeficientů  $b_n$  nekonečná. Nicméně  $|b_n| \rightarrow 0$  s rostoucím  $n$ .
2. Liché koeficienty: Předpis (3.27) budeme opět používat jako rekurentní vzorec, k čemuž však potřebujeme "počáteční" hodnoty  $b_1, b_3$ . Označme

$b_n^{00}$  řešení (3.27) pro  $b_1 = 0$  a  $b_3 = 0$  ,

$b_n^{10}$  řešení (3.27) pro  $b_1 = 1$  a  $b_3 = 0$  pro  $a_n=0$  ,

$b_n^{01}$  řešení (3.27) pro  $b_1 = 0$  a  $b_3 = 1$  pro  $a_n=0$  .

Po té co získáme jednotlivé členy těchto posloupností pomocí rekurentního vzorce, můžeme libovolnou posloupnost  $b_n$  napsat ve tvaru

$$b_n = b_n^s + \alpha b_n^{10} + \beta b_n^{01} + b_n^{00} ,$$

kde  $b_n^s$  značí posloupnost sudých koeficientů ( $n$  sudé, potom  $b_n^s = b_n$ , jinak  $b_n^s = 0$ ). Koeficienty  $\alpha, \beta$  pak určíme tím, že  $b_n$  dosadíme do (3.30), (3.31) a dostaneme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé  $\alpha, \beta$

$$\alpha \sum_0^{\infty} b_n^{10} + \beta \sum_0^{\infty} b_n^{01} = - \sum_0^{\infty} (b_n^s + b_n^{00}) , \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_0^{\infty} b_{n+2}^{10}(n+2)(n+1) + \beta \sum_0^{\infty} b_{n+2}^{01}(n+2)(n+1) &= \\
&= - \sum_0^{\infty} (b_{n+2}^s + b_{n+2}^{00})(n+2)(n+1) . \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Označme

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_0^{\infty} b_n^{10} = b_1^{10} + \sum_5^{\infty} b_n^{10} , \\
S_2 &= \sum_0^{\infty} b_n^{01} = b_3^{01} + \sum_5^{\infty} b_n^{01} , \\
S_3 &= \sum_0^{\infty} b_{n+2}^{10}(n+2)(n+1) = \sum_3^{\infty} b_{n+2}^{10}(n+2)(n+1) , \\
S_4 &= \sum_0^{\infty} b_{n+2}^{01}(n+2)(n+1) , \\
P_1 &= \sum_0^{\infty} (b_n^s + b_n^{00}) = \sum_6^{\infty} b_n^s + \sum_5^{\infty} b_n^{00} , \\
P_2 &= \sum_0^{\infty} (b_{n+2}^s + b_{n+2}^{00})(n+2)(n+1) = \\
&= \sum_4^{\infty} b_{n+2}^s(n+2)(n+1) + \sum_3^{\infty} b_{n+2}^{00}(n+2)(n+1) ,
\end{aligned}$$

kde druhé rovnosti pro  $P_1, P_2$  jsou odvozeny na základě (3.36) plynoucí z podmínky na rozhraní pro RPT-viz. dále. Nyní můžeme soustavu (3.32), (3.33) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}
\alpha S_1 + \beta S_2 &= -P_1 , \\
\alpha S_3 + \beta S_4 &= -P_2 .
\end{aligned}$$

Z čehož jednoduše vidíme, že řešení nabývá tvaru

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{P_1 S_4 - P_2 S_2}{S_2 S_3 - S_1 S_4} , \\
\beta &= \frac{P_2 S_1 - P_1 S_3}{S_2 S_3 - S_1 S_4} .
\end{aligned}$$

Vidíme, že Stokesův problém lze vyřešit analyticky užitím rekurentní formule (3.27) a vhodného rozpisu řad. Přejdeme nyní k řešení RPT.

*Rovnice přenosu tepla*

Je-li navíc disipační číslo  $D$  rovno nule, a máme-li vyřešen kondukční problém, nabývá linearizovaná rovnice přenosu tepla ve spektrální oblasti následujícího tvaru

$$s\hat{\Theta} = -k(z)\lambda^2\hat{\Theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z) \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial z} \widehat{W} .$$

Resp. po dosazení  $\tilde{k} = 1 + \tilde{\beta}(T_s + T_0)^3$ , kde  $\tilde{\beta} = \frac{\beta(\Delta T)^3}{k_0}$ , přičemž v dalším textu vynechávám vlnkování, nevznikne-li nebezpečí, že se symboly spletou

$$s\hat{\Theta} = -(1+\beta(T_s+T_0)^3)\lambda^2\hat{\Theta} + 3\beta(T_s+T_0)^2 \frac{\partial T_0}{\partial z} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial z} + (1+\beta(T_s+T_0)^3) \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial T_0}{\partial z} \widehat{W} .$$

Uvažme nyní fononové řešení, tj.  $T_0 = -\frac{R}{2}z^2 + Az + B = \frac{C_1}{2}z^2 + C_0z + B$ . Pak platí:  $\frac{\partial T_0}{\partial z} = -Rz + A = C_1z + C_0$ . Koeficienty  $R, A, B$  resp.  $C_1, C_0, B$  známe z kondukčního řešení. Dále označme

$$1 + \beta(T_s + T_0)^3 = \sum_{n=0}^6 F_n z^n ,$$

$$3\beta(T_s + T_0)^2 \frac{\partial T_0}{\partial z} = \sum_{n=0}^5 G_n z^n ,$$

kde koeficienty  $F_n, G_n$  jsou opět dány řešením kondukčního problému a rovnají se

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 + \beta(B + T_s)^3 \\ F_1 &= 3A\beta(B + T_s)^2 \\ F_2 &= \beta \left( 3A^2B - \frac{3}{2}B^2R + 3A^2T_s - 3BRT_s - \frac{3}{2}RT_s^2 \right) = \\ &= -\frac{3}{2}\beta(B + T_s) \left[ -2A^2 + R(B + T_s) \right] \\ F_3 &= A\beta \left[ A^2 - 3R(B + T_s) \right] \\ F_4 &= \frac{3}{4}\beta R \left[ -2A^2 + R(B + T_s) \right] \\ F_5 &= \frac{3}{4}A\beta R^2 \\ F_6 &= -\frac{1}{8}\beta(R^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_0 &= 3A\beta(B + T_s)^2 \\
G_1 &= 6A^2B\beta - 3B^2\beta R + 6A^2\beta T_s - 6B\beta RT_s - 3\beta RT_s^2 = \\
&= -3\beta(B + T_s)[-2A^2 + R(B + T_s)] \\
G_2 &= 3A\beta[A^2 - 3R(B + T_s)] \\
G_3 &= 3\beta R[-2A^2 + R(B + T_s)] \\
G_4 &= \frac{15}{4}A\beta R^2 \\
G_5 &= -\frac{3}{4}\beta R^3
\end{aligned}$$

Dosadíme-li závislosti  $\widehat{\Theta}$ ,  $\widehat{W}$  ve tvaru (3.23), (3.24), dostáváme po příslušném přeznačení sumačních indexů rovnici přenosu tepla ve tvaru

$$\begin{aligned}
s \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j &= - \left( \sum_{i=0}^6 F_i z^i \right) \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{i=0}^5 G_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} (j+1) z^j + \\
&+ \sum_{i=0}^6 F_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2} (j+2)(j+1) z^j - \sum_{i=0}^1 C_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j . \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Speciálně, můžeme-li funkce  $\widehat{\Theta}$ ,  $\widehat{W}$  zapsat ve tvaru polynomů  $k$ -tého a  $l$ -tého stupně

$$\begin{aligned}
s \sum_{j=0}^k a_j z^j &= -\lambda^2 \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^k F_i a_j z^{i+j} + \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{k-1} G_i a_{j+1} (j+1) z^{i+j} + \\
&+ \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^{k-2} F_i a_{j+2} (j+2)(j+1) z^{i+j} - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^l C_i b_j z^{i+j} . \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Hraniční podmínky dané rovnicí (3.21):

Pro dolní plochu  $z = 0$

$$a_0 = 0 . \quad (3.36)$$

Pro horní plochu  $z = 1$  (s užitím předchozí podmínky (3.36))

$$\sum_{n=0}^k a_n = \sum_{n=1}^k a_n = 0 . \quad (3.37)$$

Z rovnosti (3.36) v kombinaci s rekurentním vzorcem (3.27) a podmínkami (3.28), (3.29) plyne

$$b_4 = 0 . \quad (3.38)$$

Ve vztahu (3.35) sice figurují koeficienty  $\{b_n\}_{n=0}^l$ , ty však lze, dle výše uvedeného, vyjádřit pomocí koeficientů  $\{a_n\}_{n=0}^k$ . Aby vztah (3.35) platil v každém bodě, musíme zajistit vynulování koeficientů u všech mocnin  $z$ . Dostaneme tak soustavu rovnic pro  $\{a_n\}_{n=0}^k$ , resp.  $\{a_n\}_{n=1}^k$ , neboť  $a_0 = 0$ .

Zajímáme-li se o začátek konvekce, resp. o podmínky jejího nastání, je pro nás důležitý parametr  $s$ . Z dílčích rovnic vzniklých z linearizované rovnice přenosu tepla nás proto budou zajímat pouze ty, které obsahují  $s$ . Bilancujeme nyní počet rovnic a počet neznámých v naší úloze: Necht'  $\hat{\Theta}$  je polynom  $k$ -tého stupně. Z rovnice (3.36) vidíme, že je popsán  $k$  neznámými. Víme, že koeficienty  $\{b_n\}_{n=0}^l$  určíme jednoznačně z koeficientů  $\{a_n\}_{n=0}^k$ . Jedinou další neznámou je tedy  $s$ . Vyjádříme-li z rovnice (3.37) koeficient  $a_k$  pomocí koeficientů  $a_1$  až  $a_{k-1}$  zjistíme, že soustava (3.35) představuje vlastní problém, kde roli vlastního čísla hraje  $s$ , vlastní vektor  $v$  má  $k - 1$  složek  $v_n = a_n$  pro  $n = 1$  až  $k - 1$  a matice vlastního problému je dána pravou stranou (3.35), kde jsme byli nuceni vyřadit poslední rovnici ze soustavy (3.35), jež obsahovala  $s$ . Neznámá  $s$  je tedy v podstatě parametr, který říká, kdy existuje nenulový vlastní vektor. Soustava (3.35) se nám těmito úvahami převede na

$$\begin{aligned} s \sum_{j=1}^{k-1} a_j z^j = & -\lambda^2 \sum_{i=0}^6 \sum_{j=1}^{k-1} F_i a_j z^{i+j} + \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{k-1} G_i a_{j+1} (j+1) z^{i+j} + \\ & + \sum_{i=0}^6 \sum_{j=0}^{k-2} F_i a_{j+2} (j+2)(j+1) z^{i+j} - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^l C_i b_j z^{i+j} , \end{aligned} \quad (3.39)$$

kde poslední sumace je pro  $j \neq 2, j \neq 4$ . Resp.

$$\begin{aligned} s a_1 &= \lambda^2 (F_0 a_1) + (2G_0 a_2 + G_1 a_1) + \\ &+ (2F_1 a_2) + (C b_0 + D b_1) \\ s a_2 &= \lambda^2 (F_0 a_2 + F_1 a_1) + (2G_1 a_2 + G_2 a_1) + \\ &+ (2F_2 a_2) + (C b_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podle [3], vyskytne-li se pro nějaké  $\lambda$  vlastní číslo s kladnou reálnou částí, konvekce může (lokálně) začít.

### 3.3.2 Popis programu (skriptu) v prostředí MATLAB (Octave)

Víme, jak formulovat rovnice řešící danou úlohu. V případě vysokého stupně polynomů  $\widehat{\Theta}$ ,  $\widehat{W}$  by však formulace mohla být velmi zdlouhavá. Proto jsme tento proces zautomatizovali napsáním programu P.m.

#### Idea:

Program proběhne  $\lambda$ , v intervalu  $\langle L_{\min}, L_{\max} \rangle$  s krokem  $L_{\text{krok}}$ ,  $\frac{Ra\alpha}{\eta}$  v intervalu  $\langle K_{\min}, K_{\max} \rangle$  s krokem  $K_{\text{krok}}$ . Pro každou konfiguraci spočítá vlastní čísla  $s$ . Vyskytne-li se vlastní číslo  $s_n$  s kladnou hodnotou reálné části, konvekce se může (lokálně) rozběhnout (viz. zmiňovaný studijní text nebo uvažovaný tvar  $\Theta$  v paragrafu "Rovnice přenosu tepla":  $\Theta \approx \exp(st)$ ). V opačném případě (všechna  $s$  jsou záporná) je konvekce utlumena.

#### Vstup:

sta.....stupeň polynomu  $\widehat{\Theta}$  (v textu  $k$ )

stb.....stupeň polynomu  $\widehat{W}$  (v textu  $l$ )

Kmin.....minimální hodnota  $\frac{Ra\alpha}{\eta}$  (Pro jednu vrstvu je ekvivalentní s  $Ra$ )

Kmax.....maximální hodnota  $\frac{Ra\alpha}{\eta}$

Kkrok.....krok v hodnotě  $\frac{Ra\alpha}{\eta}$

Lmin.....minimální  $\lambda$

Lmax.....maximální  $\lambda$

Lkrok.....krok v  $\lambda$

#### Výstup:

Hlášení: Konvekce muze zacit/ Konvekce je utlumena

#### Průběh výpočtu:

Program se dá rozdělit na 2 části:

1. Výpočet matice B: V řádcích matice B budou zapsány koeficienty  $b_n$  pomocí  $a_n$ , tj.:  $\vec{b} = B \cdot \vec{a}$ , kde  $\vec{a}$  resp.  $\vec{b}$  je vektor složený z  $a_0, a_1, \dots, a_k$  resp. z  $b_0, b_1, \dots, b_l$ .
2. Výpočet matice M: Matice M je finální matice, o jejíž vlastní čísla se



zajímáme. Splňuje totiž:  $s \cdot \vec{a} = M \cdot \vec{a}$ .

Výpočet matic B, M byl popsán výše. Ve zkratce: Spočteme  $b_n^s, b_n^{10}, b_n^{01}, b_n^{00}$ , z okrajových podmínek určíme  $\alpha, \beta$  a tudíž  $b_n$  resp. matici B. Matici M vytvoříme srovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin  $z$  ve vztahu (3.39) za užití matice B.

### 3.3.3 Testovací příklad

K ověření funkčnosti programu řešíme úlohu pro  $k = 1$  ( $\tilde{\beta}=0$ ), bez vnitřního zahřívání. Z [3] str. 36 víme, že úloha má analytické řešení a vlastní čísla nabývají hodnot

$$\beta_n(\lambda) = -(\lambda^2 + n^2\pi^2) + \frac{\lambda^2 Ra}{(\lambda^2 + n^2\pi^2)^2}, \quad (3.40)$$

kde  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Řešení kondukčního problému má v tomto případě tvar (viz. (3.11))

$$T_0 = 1 - z \Rightarrow \frac{\partial T_0}{\partial z} = -1.$$

A proto

$$\begin{aligned} C_0 &= -1, \\ F_0 &= 1. \end{aligned}$$

Ostatní koeficienty  $F_i, G_i, C_i$  jsou nulové. Tím dojde k následujícímu zjednodušení RPT (3.39)

$$s \sum_{j=1}^{k-1} a_j z^j = -\lambda^2 F_0 \sum_{j=1}^{k-1} a_j z^j + F_0 \sum_{j=0}^{k-2} a_{j+2} (j+2)(j+1) z^j - C_0 \sum_{j=1}^l b_j z^j.$$

Resp.

$$s \sum_{j=1}^{k-1} a_j z^j = -\lambda^2 \sum_{j=1}^{k-1} a_j z^j + \sum_{j=0}^{k-2} a_{j+2} (j+2)(j+1) z^j + \sum_{j=1}^l b_j z^j.$$

kde poslední sumace v posledních dvou rovnicích je opět pro  $j \neq 2, j \neq 4$ .

Po spuštění program P.m požadované spektrum nespočítal. Abych se přesvědčil o jeho správném naprogramování, napsal jsem ho ještě jednou ve

zjednodušené verzi nazvané P\_test.m. Výsledky opět neodpovídaly. Rozhodl jsem se proto ověřit alespoň Stokesovu úlohu. Je-li  $\hat{\Theta} = \sin(\pi z)$  je (z rovnice (3.17))  $\hat{W} = \frac{Ra\lambda^2}{(\pi^2 + \lambda^2)^2} \sin(\pi z)$ . Rozložíme  $\hat{\Theta}$  a  $\hat{W}$  do řady. Užijeme-li vzorec  $\vec{b} = B \cdot \vec{a}$  (viz. sekce 3.3.2), dostaneme koeficienty  $b_n$ , které porovnáme se správnými. V tomto případě dopadlo vše dobře. Jsou-li oba rozvoje do stupně 10, je maximální rozdíl asi 0,35 pro oba rozvoje do stupně 100 je maximální rozdíl jen asi  $1,4 \cdot 10^{-14}$ . Zdá se, že matice B reprezentující řešení Stokesova problému je správně. Na druhou stranu ne všechna nalezená vlastní čísla jsou špatně. Pro  $\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  existují vlastní čísla pro  $n$  sudá, která odpovídají dokonce velice dobře viz. tabulka 3.2.

Nalezená	Správná	$n$
-42,76829	-42,76829	2
-162,72613	-162,72612	4
-360,20119	-360,21556	6
-360,22993		
-636,26407	-636,58148	8
-636,90090		

**Tabulka 3.2:** Nalezená vlastní čísla a odpovídající správné hodnoty

### 3.3.4 Řešení s nenulovou disipací

Není-li disipační číslo  $D = 0$ , projeví se tato změna pouze v RPT. Vznikne nový člen na pravé straně rce (3.39)

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^l H_i b_j z^{i+j},$$

kde

$$D\alpha(T_s + T_0(z)) = \sum_{n=0}^2 H_n z^n.$$

## 3.4 Zobecnění pro 2 vrstvy

Analogicky, ale méně názorně, můžeme postupovat i pro dvě, na sobě položené, nekonečné vrstvy s konstantní viskozitou. Držme se geometrie zavedené

v úvodu této kapitoly.

V horní vrstvě platí

$$\widehat{\Theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \quad (3.41)$$

$$\widehat{W} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n . \quad (3.42)$$

V dolní vrstvě platí

$$\widehat{\Theta} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n , \quad (3.43)$$

$$\widehat{W} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n . \quad (3.44)$$

### *Stokesův problém*

V každé vrstvě dostaneme analogii (3.27)

$$b_{n+4} = \lambda^2 \left[ K f_2(n) a_n + f_1(n) b_{n+2} - \lambda^2 f_2(n) b_n \right] , \quad (3.45)$$

$$d_{n+4} = \lambda^2 \left[ K f_2(n) c_n + f_1(n) d_{n+2} - \lambda^2 f_2(n) d_n \right] . \quad (3.46)$$

Okrajové podmínky dané (3.19)

Pro horní plochu  $z = H$

$$\sum_0^{\infty} b_n H^n = 0 , \quad (3.47)$$

$$\sum_0^{\infty} b_{n+2} (n+2)(n+1) H^n = 0 . \quad (3.48)$$

Pro dolní plochu  $z = h$

$$\sum_0^{\infty} d_n h^n = 0 , \quad (3.49)$$

$$\sum_0^{\infty} d_{n+2} (n+2)(n+1) h^n = 0 . \quad (3.50)$$

Podmínky na rozhraní  $z = 0$  dané (3.20)

$$b_0 = d_0 , \quad (3.51)$$

$$b_1 = d_1 , \quad (3.52)$$

$$\eta_1(3b_1 - \frac{1}{\lambda^2}6b_3) = \eta_2(3d_1 - \frac{1}{\lambda^2}6d_3) , \quad (3.53)$$

$$\eta_1(2b_2 + \lambda^2b_0) = \eta_1(2d_2 + \lambda^2d_0) . \quad (3.54)$$

Protože nedostaneme ani v jedné vrstvě konkrétní hodnoty několika prvních koeficientů jako v případě jediné vrstvy<sup>4</sup> (viz. (3.28), (3.29)), aplikujeme analogický postup jako pro jednu vrstvu při výpočtu lichých koeficientů. Rozdělíme členy  $b_n$  na  $b_n = b_n^s + b_n^l$ . Členy  $b_n^s$  jsou nenulové pro sudá  $n$ ,  $b_n^l$  pro lichá. Označme

$b_n^{l00}$  řešení (3.45) pro  $b_1 = 0$  a  $b_3 = 0$  ,

$b_n^{l10}$  řešení (3.45) pro  $b_1 = 1$  a  $b_3 = 0$  pro  $a_n = 0$  ,

$b_n^{l01}$  řešení (3.45) pro  $b_1 = 0$  a  $b_3 = 1$  pro  $a_n = 0$  .

$b_n^{s00}$  řešení (3.45) pro  $b_0 = 0$  a  $b_2 = 0$  ,

$b_n^{s10}$  řešení (3.45) pro  $b_0 = 1$  a  $b_2 = 0$  pro  $a_n = 0$  ,

$b_n^{s01}$  řešení (3.45) pro  $b_0 = 0$  a  $b_2 = 1$  pro  $a_n = 0$  .

Po té co získáme jednotlivé členy těchto posloupností pomocí rekurentního vzorce, můžeme libovolnou posloupnost  $b_n$  napsat ve tvaru

$$b_n = \alpha_s b_n^{s10} + \beta_s b_n^{s01} + b_n^{s00} + \alpha_l b_n^{l10} + \beta_l b_n^{l01} + b_n^{l00} . \quad (3.55)$$

Stejně si budeme počínat i ve druhé vrstvě

$$d_n = \gamma_s d_n^{s10} + \delta_s d_n^{s01} + d_n^{s00} + \gamma_l d_n^{l10} + \delta_l d_n^{l01} + d_n^{l00} . \quad (3.56)$$

Hledáme 8 koeficientů  $\alpha_s, \beta_s, \alpha_l, \beta_l, \gamma_s, \delta_s, \gamma_l, \delta_l$ , máme pro ně 8 rovnic (3.47) až (3.54). Po příslušném dosazení dostaneme lineární soustavu rovnic pro tyto koeficienty.

$$P_1 = \alpha_s S_1 + \beta_s S_2 + \alpha_l S_3 + \beta_l S_4 ,$$

$$P_2 = \alpha_s S_5 + \beta_s S_6 + \alpha_l S_7 + \beta_l S_8 ,$$

$$P_3 = \gamma_s S_9 + \delta_s S_{10} + \gamma_l S_{11} + \delta_l S_{12} ,$$

$$P_4 = \gamma_s S_{13} + \delta_s S_{14} + \gamma_l S_{15} + \delta_l S_{16} ,$$

---

<sup>4</sup>Museli bychom souřadný systém umístit tak, aby nula byla v jedné z ploch. Pak bychom ale dostali složitější podmínky na rozhraní.

$$\begin{aligned}
P_5 &= \alpha_s b_0^{s10} + \beta_s b_0^{s01} + \alpha_l b_0^{l10} + \beta_l b_0^{l01} - \\
&\quad - \gamma_s d_0^{s10} - \delta_s d_0^{s01} - \gamma_l d_0^{l10} - \delta_l d_0^{l01} , \\
P_6 &= \alpha_s b_1^{s10} + \beta_s b_1^{s01} + \alpha_l b_1^{l10} + \beta_l b_1^{l01} - \\
&\quad - \gamma_s d_1^{s10} - \delta_s d_1^{s01} - \gamma_l d_1^{l10} - \delta_l d_1^{l01} , \\
P_7 &= \alpha_s S_{17} + \beta_s S_{18} + \alpha_l S_{19} + \beta_l S_{20} + \gamma_s S_{21} + \delta_s S_{22} + \gamma_l S_{23} + \delta_l S_{24} , \\
P_8 &= \alpha_s S_{25} + \beta_s S_{26} + \alpha_l S_{27} + \beta_l S_{28} + \gamma_s S_{29} + \delta_s S_{30} + \gamma_l S_{31} + \delta_l S_{32} ,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_0^\infty b_n^{s10} H^n , \\
S_2 &= \sum_0^\infty b_n^{s01} H^n , \\
S_3 &= \sum_0^\infty b_n^{l10} H^n , \\
S_4 &= \sum_0^\infty b_n^{l01} H^n , \\
S_5 &= \sum_0^\infty b_{n+2}^{s10} (n+2)(n+1) H^n , \\
S_6 &= \sum_0^\infty b_{n+2}^{s01} (n+2)(n+1) H^n , \\
S_7 &= \sum_0^\infty b_{n+2}^{l10} (n+2)(n+1) H^n , \\
S_8 &= \sum_0^\infty b_{n+2}^{l01} (n+2)(n+1) H^n , \\
P_1 &= - \sum_0^\infty b_n^{s00} H^n - \sum_0^\infty b_n^{l00} H^n , \\
P_2 &= - \sum_0^\infty b_{n+2}^{s00} (n+2)(n+1) H^n - \sum_0^\infty b_{n+2}^{l00} (n+2)(n+1) H^n , \\
S_9 &= \sum_0^\infty d_n^{s10} h^n , \\
S_{10} &= \sum_0^\infty d_n^{s01} h^n ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \sum_0^{\infty} d_n^{l10} h^n , \\
S_{12} &= \sum_0^{\infty} d_n^{l01} h^n , \\
S_{13} &= \sum_0^{\infty} d_{n+2}^{s10} (n+2)(n+1) h^n , \\
S_{14} &= \sum_0^{\infty} d_{n+2}^{s01} (n+2)(n+1) h^n , \\
S_{15} &= \sum_0^{\infty} d_{n+2}^{l10} (n+2)(n+1) h^n , \\
S_{16} &= \sum_0^{\infty} d_{n+2}^{l01} (n+2)(n+1) h^n , \\
P_3 &= -\sum_0^{\infty} d_n^{s00} h^n - \sum_0^{\infty} d_n^{l00} h^n , \\
P_4 &= -\sum_0^{\infty} d_{n+2}^{s00} (n+2)(n+1) h^n - \sum_0^{\infty} d_{n+2}^{l00} (n+2)(n+1) h^n , \\
P_5 &= -b_0^{s00} - b_0^{l00} + d_0^{s00} + d_0^{l00} , \\
P_6 &= -b_1^{s00} - b_1^{l00} + d_1^{s00} + d_1^{l00} , \\
S_{17} &= \eta_1 \left( 3b_1^{s10} - \frac{1}{\lambda^2} 6b_3^{s10} \right) , \\
S_{18} &= \eta_1 \left( 3b_1^{s01} - \frac{1}{\lambda^2} 6b_3^{s01} \right) , \\
S_{19} &= \eta_1 \left( 3b_1^{l10} - \frac{1}{\lambda^2} 6b_3^{l10} \right) , \\
S_{20} &= \eta_1 \left( 3b_1^{l01} - \frac{1}{\lambda^2} 6b_3^{l01} \right) , \\
S_{21} &= -\eta_2 \left( 3d_1^{s10} - \frac{1}{\lambda^2} 6d_3^{s10} \right) , \\
S_{22} &= -\eta_2 \left( 3d_1^{s01} - \frac{1}{\lambda^2} 6d_3^{s01} \right) , \\
S_{23} &= -\eta_2 \left( 3d_1^{l10} - \frac{1}{\lambda^2} 6d_3^{l10} \right) , \\
S_{24} &= -\eta_2 \left( 3d_1^{l01} - \frac{1}{\lambda^2} 6d_3^{l01} \right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_7 &= -\eta_1 \left( 3(b_1^{s00} + b_1^{l00}) - \frac{1}{\lambda^2} 6(b_3^{s00} + b_3^{l00}) \right) + \\
&\quad + \eta_2 \left( 3(d_1^{s00} + d_1^{l00}) - \frac{1}{\lambda^2} 6(d_3^{s00} + d_3^{l00}) \right) , \\
S_{25} &= \eta_1 \left( 2b_2^{s10} + \lambda^2 b_0^{s10} \right) , \\
S_{26} &= \eta_1 \left( 2b_2^{s01} + \lambda^2 b_0^{s01} \right) , \\
S_{27} &= \eta_1 \left( 2b_2^{l10} + \lambda^2 b_0^{l10} \right) , \\
S_{28} &= \eta_1 \left( 2b_2^{l01} + \lambda^2 b_0^{l01} \right) , \\
S_{29} &= -\eta_2 \left( 2d_2^{s10} + \lambda^2 d_0^{s10} \right) , \\
S_{30} &= -\eta_2 \left( 2d_2^{s01} + \lambda^2 d_0^{s01} \right) , \\
S_{31} &= -\eta_2 \left( 2d_2^{l10} + \lambda^2 d_0^{l10} \right) , \\
S_{32} &= -\eta_2 \left( 2d_2^{l01} + \lambda^2 d_0^{l01} \right) , \\
P_7 &= -\eta_1 \left( 2(b_2^{s00} + b_2^{l00}) + \lambda^2 (b_0^{s00} + b_0^{l00}) \right) + \\
&\quad + \eta_2 \left( 2(b_2^{s00} + b_2^{l00}) + \lambda^2 (d_0^{s00} + d_0^{l00}) \right) .
\end{aligned}$$

Vyřešením opět dostaneme vyjádření koeficientů  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  pomocí koeficientů  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

*RPT*

Okrajové podmínky dané (3.21):

Pro horní plochu  $z = H$

$$\widehat{W} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n H^n . \quad (3.57)$$

Pro dolní plochu  $z = h$

$$\widehat{W} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n h^n . \quad (3.58)$$

V případě konečných rozvojuů opět dostáváme v každé vrstvě maticový problém. Nebudeme uvažovat rce, kde se nevyskytují vlastní čísla  $s_i, i \in$

$\{1, 2\}$  a rovnice  $s_1 a_k = \dots, s_2 c_m = \dots$ , kde  $k, m$  je stupeň polynomu  $\Theta$  v první resp. druhé vrstvě.

Obdobně bychom mohli postupovat i v případě více vrstev. Řešení by však bylo po stránce formulace příslušných rovnic komplikované.



# Kapitola 4

## Závěr

Seznámili jsme se se základními rovnicemi, jež popisují plášťovou konvekci. Systém těchto rovnic jsme poté použili k analýze stability vrstvy v rozšířené Boussinesgově aproximaci, kde však  $k(z) = k_0 + \beta(T_s + T_0)^3$ , nikoliv pouze  $k(z) = k_0 = konst..$  Řešili jsme kondukční rovnici ve čtyřech různých aproximacích, jež jsme označili za řešení fononové, radiační, fononové s radiační perturbací a radiační s fononovou perturbací. Dílčí rovnice vzniklé z podmínek na hranicích, resp. na rozhraní jsme řešili numericky, neboť analytické řešení by bylo možné jen ve speciálních zjednodušených případech. Program řešící uvedenou úlohu je přiložen na CD. Jeho popis lze nalézt v odstavci 3.1.2. Řešení kondukční rovnice v aproximaci fononového řešení jsme ztotožnili s referenčním stavem, o jehož stabilitu jsme se zajímali. Provedli jsme přechod do spektrální oblasti a teplotní perturbace spolu s vertikálními rychlostmi jsme uvažovali ve tvaru Taylorových řad, resp. ve tvaru polynomů. Ukázalo se, že systém mechanických rovnic (Stokesův problém) a rovnice termální (RPT) se ve spektrální oblasti separuje tak, že vertikální rychlost lze určit na základě znalosti perturbací v teplotě. Stokesův problém ve zmiňované polynomiální aproximaci je možno řešit pomocí rekurentních vzorců odvozených odstavci 3.3.1. Celá úloha se nakonec dá převést na maticový problém vlastních čísel. Pro případ jedné vrstvy jsme vytvořili program P.m, který automatizuje převod úlohy na vlastní problém a zároveň ji řeší. Program je opět přiložen na CD. Jeho popis nalezneme v odstavci 3.3.2.

# Literatura

- [1] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*, Academia, Praha, 2001
- [2] Martinec Z.: *Continuum Mechanics (lecture notes)*, Praha, 2003
- [3] Matyska C.: *Mathematical Introduction to Geothermics and Geodynamics*, Praha, 2005
- [4] Stacey F. D., Davis P. M.: *Physics of the Earth*, fourth edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2008
- [5] Turcotte D. L., Schubert G.: *Geodynamics*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002

# Dodatek A

## Obsah přiloženého CD

### A.1 Adresář Kondukce

Obsahuje 4 složky: fon, fon-rad, rad, rad-fon. Každá odpovídá jednomu typu řešení kondukčního problému, tj. řešení fononovému, fononovému s radiační perturbací, radiačnímu a radiačnímu s fononovou perturbací. V každé složce je řídicí program p1.m, resp. p2.m atd. Soubory začínající písmeny ps, obsahují příslušnou soustavu rovnic. Zápis je tvaru  $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ , kde vektorem  $\vec{x}$  je chápán vektor neznámých  $A, B, C, D$ . Soustavu rovnic tvoří 4 rovnice, proto má vektorová funkce  $\vec{F}$  čtyři složky. Ostatní soubory jako např. fon.m, rad.m obsahují přepsané závislosti (3.6) až (3.9).

### A.2 Adresář Konvekce

Obsahuje program P.m a jeho zjednodušenou variantu použitou při testování P\_test.m. Funkce fakt.m počítá faktoriál přirozeného čísla.

### A.3 Adresář Obrazky

Obsahuje obrázky ze sekce 3.1.3 včetně několika dalších, které vyjadřují slabou závislost zkoumaného parametru a nebyly proto zahrnuty do textu. Obsaženy jsou rovněž soubory s teplotami a podmínkami.