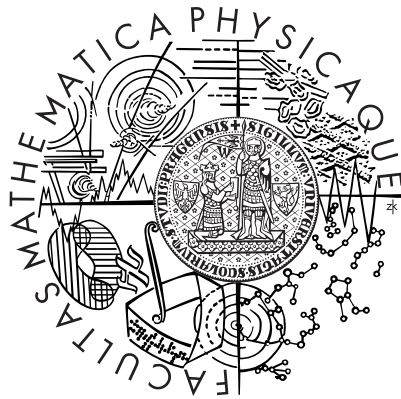


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Eliška Zábranová

Vlastní kmity a slapy měsíců a planet

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Studijní program: Geofyzika

2008

Na tomto místě bych chtěla poděkovat všem, kteří přispěli ke vzniku této práce. Zvláštní dík patří mému vedoucímu doc. Ctiradu Matyskovi a Dr. Ladislavu Hanykovi za trpělivost a za to, že mě nenechali práci vzdát a byli ochotni mi pomoci i během horkých letních dní a nocí. Děkuji doc. Ondřeji Čadkovi a Petře Maierové za poskytnuté informace o ledových měsících, Martinu Pauerovi za diskuze o Venuši a Martině Ulvrové za množství technických rad. Prof. Jiřímu Zahradníkovi a prof. Zdeňku Martincovi děkuji, že vyšli vstříc mým nestandardním časovým nárokům. Všem členům katedry děkuji za výjimečně přátelskou atmosféru, která na pracovišti vždy panovala.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejněním.

V Praze dne 2. 9. 2008

Eliška Zábranová

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 4 |
| 2 | Matematický popis | 5 |
| 2.1 | Pohybová a Poissonova rovnice v Lagrangeově tvaru | 6 |
| 2.2 | Podmínky na rozhraní | 9 |
| 2.3 | Sférická harmonická dekompozice | 9 |
| 3 | Obyčejné diferenciální rovnice a podmínky na rozhraní | 12 |
| 3.1 | Toroidální kmity | 12 |
| 3.2 | Sféroidální kmity | 13 |
| 3.3 | Radiální kmity | 15 |
| 3.4 | Slapy | 16 |
| 4 | Maticová formulace | 18 |
| 4.1 | Kmity kulové vrstvy | 18 |
| 4.2 | Podmínky na rozhraní | 20 |
| 4.3 | Toroidální kmity | 22 |
| 4.4 | Sféroidální kmity | 23 |
| 4.5 | Slapy | 24 |
| 4.6 | Numerické řešení | 25 |
| 5 | Výsledky pro modely Země | 26 |
| 5.1 | Třívrstvý model Země | 26 |
| 5.2 | Model PREM | 28 |
| 6 | Výsledky pro modely planet a měsíců | 32 |
| 6.1 | Mars | 32 |
| 6.2 | Venuše | 37 |
| 6.3 | Ledové měsíce | 41 |
| 6.3.1 | Europa | 41 |
| 6.3.2 | Titan | 46 |
| 6.3.3 | Enceladus | 51 |
| 7 | Závěr | 55 |

Název práce: Vlastní kmity a slapy měsíců a planet

Autor: Eliška Zábranová

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

e-mailová adresa vedoucího: `cm@karel.troja.mff.cuni.cz`

Abstrakt: V předložené práci vyvíjíme a aplikujeme novou metodu pro výpočet vlastních kmitů a slapových Loveových čísel pro sféricky symetrická elastická předpjatá tělesa planetárních rozměrů. Užitím Lagrangeova popisu sestavíme systém parciálních diferenciálních rovnic pro posunutí a přírůstkový gravitační potenciál. Tyto rovnice pomocí sférických harmonických rozvoji převedeme na soustavu čtyř obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro radiální koeficienty rozvoji posunutí a přírůstkového potenciálu. Diskretizaci v radiálním směru získáme pro vlastní kmity maticový vlastní problém a pro slapy nehomogenní soustavu algebraických rovnic. Diskretizace diferenciálních rovnic druhého řádu oproti rovnicím prvního řádu přináší výhodu výsledných matic o poloviční velikosti, přičemž numerické řešiče škálují výpočetní čas s třetí mocninou velikosti matic. Metodu testujeme pro vrstevnatou aproximaci modelu PREM a dále ji použijeme pro výpočet spekter vlastních kmitů a slapových Loveových čísel pro modely Marsu, Venuše a ledových měsíců Evropy, Titanu a Enceladu. Diskutujeme efekty ve spektru vlastních kmitů spojené s existencí podpovrchové kapalně vrstvy. Dosažené výsledky mohou být nápomocny pro určení vnitřní struktury jednotlivých těles.

Klíčová slova: vlastní kmity, slapy

Title: Free oscillations and tides of moons and planets

Author: Eliška Zábranová

Department: Department of Geophysics

Supervisor: Doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Supervisor's e-mail address: `cm@karel.troja.mff.cuni.cz`

Abstract: In the presented work we develop and apply a new method for computing free oscillations and tidal Love numbers of spherically symmetric pre-stressed elastic bodies of planetary dimensions. Using Lagrangian description, we build a system of partial differential equations for displacement and incremental gravitational potential. By means of spherical harmonic expansions we transform these equations into a system of four second-order ordinary differential equations for radial coefficients of displacement and incremental potential expansions. By discretization in the radial direction we get a matrix eigenvalue problem for free oscillations and a non-homogeneous system of algebraic equations for tides. The discretization of second-order differential equations versus first-order equations brings the advantage of half the size of resulting matrices, whereas the numerical solvers scale the computing time to the third power of matrix size. We test the method on the layered approximation of the PREM model and then we use it to compute the spectra of free oscillations and tidal Love numbers for models of Mars, Venus and ice satellites Europa, Titan and Encedalus. We discuss the effects in the free oscillations spectrum associated with the existence of a subsurface liquid layer. The results achieved may help to determine the inner structure of individual bodies.

Keywords: free oscillations, tides

Kapitola 1

Úvod

Tématem předkládané práce je vysokofrekvenční dynamika velkých těles, přesněji modelování vlastních kmitů a slapů tří planet a tří měsíců Sluneční soustavy. V zájmu zjednodušení větné stavby budeme pro tyto planety a měsíce nadále používat souhrnný název těleso, případně model. V práci se omezíme na modely sféricky symetrické, nerotující, elastické a izotropní, tedy na aproximaci SNREI.

Vlastními kmity nebo volnými oscilacemi označujeme pohyb následkem procesů uvolňujících do systému takové množství energie, které vyvolá vlnění schopné obíhat celé těleso a tak interferovat. Jde v podstatě o stojaté vlnění s nekonečným počtem stupňů volnosti a vlastní kmity jsou pak elementy tohoto vlnění. Energie dostatečná pro měřitelnost vlastních kmitů se uvolňuje během velkých zemětřesení (příbuzný zdroj energie zmiňujeme v úvodní větě části 6.3.3) nebo při impaktech.

Vlastní kmity Země byly poprvé spolehlivě nalezeny na záznamech chilského zemětřesení v roce 1960. Historie modelování vlastních kmitů ovšem sahá až k roku 1829, kdy se S. D. Poisson zabýval radiálními kmity homogenní koule. Separaci toroidální a sféroidální části elastických kmitů koule provedl H. Lamb v roce 1882. Roku 1911 spočítal A. E. H. Love periody několika vlastních kmitů koule o rozměrech Země a předpověděl i periody kolem jedné hodiny. První realistický model Země s radiálně závislou hustotou a seismickými rychlostmi počítal v roce 1950 H. Takeuchi. Roku 1972 přišel F. A. Dahlen s teorií pro předpjatý model Země.

Program pro vlastní kmity realizující algoritmus přímé numerické integrace diferenciálních rovnic sestavil F. Gilbert v roce 1966. Podrobné odvození potřebných rovnic a výpočty vlastním programem publikoval za železnou oponou Z. Martinec (Martinec, 1984). Metodu v téže době reformuloval J. H. Woodhouse zavedením minorů a odvozením vztahu pro počet módů a úpravy implementoval do Gilbertova programu. G. Masters program doplnil o možnost výpočtu Stoneleyových a IC (inner-core) módů a pod názvem Mineos (Masters et al., 2007) uvolnil zdrojový kód.

Hlavním cílem této práce je ukázat, že problém vlastních kmitů lze jednoduše a přirozeně formulovat jako maticový vlastní problém a obejít tak mnohaleté hledání kořenů charakteristické rovnice. Vedlejším efektem maticové formulace pro vlastní kmity je možnost její snadné modifikace pro výpočet slapových Loveových čísel modelů SNREI, spočívající v řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Zlatým hřebem v naší práci je předpověď spekter vlastních kmitů planet a měsíců.

Kapitola 2

Matematický popis

V následující části zformulujeme parciální diferenciální rovnice a podmínky na rozhraní popisující elastické kontinuum za přítomnosti gravitační síly. Budeme se snažit popsat celkovou deformaci tělesa, tzn. určit časový průběh posunutí a přírůstkového potenciálu v celém jeho objemu.

Existují dva přístupy popisu deformace kontinua. Lagrangeův popis je vztažen k počátečnímu stavu S v čase $t = 0$, a Eulerův popis je vztažen k okamžitému stavu S' v čase $t' > 0$. Zavedeme-li označení pro polohový vektor v klidovém stavu \mathbf{x} a pro polohový vektor v deformovaném stavu \mathbf{x}' (stejně tak budeme rozlišovat i ostatní veličiny), je jejich vzájemný vztah vyjádřen pomocí tenzoru deformačních gradientů \mathbf{F} ,

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{F}d\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

který je definován

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := (\nabla \mathbf{x}')^T. \quad (2.2)$$

Determinant tenzoru \mathbf{F} souvisí s objemovou změnou kontinua při procesu $S \rightarrow S'$, jak popisuje (Martinec, 2003),

$$dV' = JdV, \quad (2.3)$$

kde V (resp. V') je objem materiálu ve stavu S (resp. S') a kde J jsme označili Jakobián této transformace, pro který z (2.2) platí

$$J := \det \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_l} \right) = \det \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Budeme uvažovat těleso v hydrostatické rovnováze, která je dána rovnicí

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \rho_0 \mathbf{f}_0 = 0, \quad (2.5)$$

kde ρ_0 je referenční hustota, \mathbf{f}_0 referenční tíhové zrychlení a $\boldsymbol{\tau}_0$ předpětí dané Cauchyovým tenzorem napětí.

Pro modely s předpětím Lagrangeův a Eulerův popis nesplyvají. Nechceme-li tedy počítat s pohybující se oblastí, nezbyvá než přejít k Lagrangeovu popisu i co se rovnic týká.

2.1 Pohybová a Poissonova rovnice v Lagrangeově tvaru

Vyjdeme z pohybové rovnice vyjádřené v S' , tedy v Eulerově tvaru,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_0 (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0, \quad (2.6)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je Cauchyův tenzor napětí, \mathbf{f} objemová síla a \mathbf{a} zrychlení částic. Tento vztah nyní potřebujeme vyjádřit vzhledem k S .

Síla působící na elementární plošku da s normálou \mathbf{n} v jednom bodě ve stavu S se rovná síle působící na elementární plošku da' s normálou \mathbf{n}' ve stavu S' v bodě, na který během deformace původní bod přešel. Abychom toto tvrzení mohli matematicky zapsat, potřebujeme tenzor, který popisuje deformaci ve stavu S . Takový tenzor se nazývá Piola-Kirchhoffův tenzor prvního druhu \mathbf{T} a platí pro něj

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}' da' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} da. \quad (2.7)$$

Uvědomíme-li si, že pro změnu plochy platí vztah (Martinec, 2003),

$$da'_k = J \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} da_l, \quad (2.8)$$

můžeme z (2.7) vyjádřit vztah mezi Piola-Kirchhoffovým a Cauchyovým tenzorem napětí,

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}') = J^{-1} (\nabla \mathbf{x}')^T \mathbf{T}(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

Dále uvažujeme, že počáteční napětí bude mnohem větší než dodatečné napětí způsobené deformací. Jednotlivé veličiny pak můžeme rozepsat na počáteční a přírůstkovou část, se kterou budeme dále počítat,

$$\mathbf{x}' \doteq \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \doteq \boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t), \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}', t) \doteq \boldsymbol{\tau}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \overline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}, t), \quad (2.12)$$

kde $\varepsilon \rightarrow 0$. Dosazením (2.10) do vztahu (2.4) pro J dostaneme

$$J = \det(\delta_{kl} + \varepsilon u_{k,l}) \doteq 1 + \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.13)$$

a použitím Taylorova rozvoje v prvním přiblížení i jeho převrácenou hodnotu,

$$J^{-1} \doteq 1 - \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.14)$$

Nyní můžeme rovnici (2.9) popisující vztah mezi Cauchyovým a Piola-Kirchhoffovým tenzorem přepsat pro přírůstkové části obou tenzorů,

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\mathbf{T}} + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau}_0 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau}_0. \quad (2.15)$$

Vlivem deformace tělesa při kmitání dochází ke změnám gravitačního pole, což působí jako zdroj pro časově proměnný přírůstek síly ve stavu S' ,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}', t) \doteq \mathbf{f}_0(\mathbf{x}') + \varepsilon \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}', t). \quad (2.16)$$

Stejně jako ostatní veličiny i sílu chceme mít vyjádřenou ve stavu S . Použitím rovnice (2.10) a Taylorova rozvoje rozepíšeme první člen. Druhý člen rovnice (2.16) vzhledem k malé veličině ε , které v ní vystupuje, můžeme v prvním přiblížení do stavu S přepsat rovnou,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}', t) \doteq \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.17)$$

Z pohybové rovnice v Lagrangeově tvaru vyjádřené pomocí \mathbf{T} dostaneme dosazením vztahů (2.11), (2.17) a použitím podmínky hydrostatické rovnováhy (2.5) výslednou pohybovou rovnici vyjádřenou ve stavu S pro přírůstkové veličiny,

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} + \rho_0 (\bar{\mathbf{f}} + \nabla \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{u}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2.18)$$

Pro další výpočty je vzhledem k reologii nepraktické pracovat s Piola-Kirchhoffovým tenzorem, pohodlnější je zachovat přírůstkový Cauchyův tenzor napětí a používat pro popis reologie Laméovy koeficienty. Tuto rovnici tedy přepíšeme pomocí (2.15).

Nyní je potřeba v (2.18) explicitně vyjádřit počáteční a přírůstkovou sílu. Referenční síla \mathbf{f}_0 je dána vztahem

$$\mathbf{f}_0 = -\nabla \phi_0, \quad (2.19)$$

kde ϕ_0 je tzv. geopotenciál, pro který platí

$$\phi_0(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}), \quad (2.20)$$

kde ψ je odstředivý potenciál způsobený rotací tělesa a φ_0 gravitační potenciál. Odstředivý potenciál zapíšeme jako

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} [(\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2)], \quad (2.21)$$

kde $\boldsymbol{\Omega}$ je úhlová rychlost rotace daného modelu a gravitační potenciál splňuje Poissonovu rovnici

$$\Delta \varphi_0 = 4\pi G \rho_0. \quad (2.22)$$

Pro vyjádření přírůstku síly $\bar{\mathbf{f}}$ je potřeba si uvědomit, že je způsoben změnami hustoty v daném bodě v průběhu deformace. Ze zákona zachování hmoty,

$$\int_V \rho dV = \int_{V'} \rho' dV', \quad (2.23)$$

a použitím rovnic (2.3) a (2.14), dostaneme průběh změn hustoty v bodě \mathbf{x}' vyjádřený veličinami v bodě \mathbf{x} ,

$$\rho(\mathbf{x}', t) = \rho_0(\mathbf{x}) (1 - \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)). \quad (2.24)$$

Druhým způsobem vyjádření $\rho(\mathbf{x}', t)$ je rozepsat hustotu na počáteční část a přírůstek v bodě \mathbf{x}' , tak jako v předchozích případech,

$$\rho(\mathbf{x}', t) = \rho_0(\mathbf{x}') + \varepsilon \bar{\rho}(\mathbf{x}', t). \quad (2.25)$$

Nyní lze rozepsat $\rho_0(\mathbf{x}')$ použitím Taylorova rozvoje a (2.10) v okolí bodu \mathbf{x} a použít linearizovaný vztah $\varepsilon\bar{\rho}(\mathbf{x}', t) \doteq \varepsilon\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$,

$$\rho(\mathbf{x}', t) \doteq \rho_0 + \varepsilon\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon\bar{\rho}(\mathbf{x}, t). \quad (2.26)$$

Porovnáním rovnic (2.24) a (2.26) získáme přírůstek hustoty po deformaci,

$$\bar{\rho} = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}). \quad (2.27)$$

Formálním rozkladem geopotenciálu a gravitačního potenciálu na počáteční a přírůstkovou část,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(\mathbf{x}) + \varepsilon\bar{\phi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.28)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \varepsilon\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.29)$$

a porovnáním s rovnicí (2.20) dostaneme

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \bar{\varphi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.30)$$

Jinými slovy, přírůstek síly je způsoben pouze změnou gravitačního potenciálu,

$$\bar{\mathbf{f}} = -\nabla\bar{\varphi}, \quad (2.31)$$

který splňuje Poissonovu rovnici

$$\Delta\bar{\varphi} = 4\pi G\bar{\rho} = -4\pi G\nabla \cdot (\mathbf{u}\rho_0). \quad (2.32)$$

Výsledná pohybová rovnice v Lagrangeově tvaru vypadá

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + 2\Omega \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\bar{\varphi} + (\nabla(\nabla\phi_0)) \cdot \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}. \quad (2.33)$$

Jak již bylo řečeno výše, Piola-Kirchhoffův tenzor se nehodí pro zapsání reologie, proto pomocí rovnice (2.15) přejdeme zpět k Cauchyovu tenzoru napětí,

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + 2\Omega \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\bar{\varphi} + (\nabla(\nabla\phi_0)) \cdot \mathbf{u} \right) = \\ = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \nabla \cdot [(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau}_0] + \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Budeme uvažovat nerotující modely, které jsou v počátečním stavu v hydrostatické rovnováze. Dosadíme tedy do (2.34) $\Omega = 0$ a podmínku hydrostatické rovnováhy (2.5). Spolu s Poissonovou rovnicí pro přírůstek gravitačního potenciálu a reologickým vztahem pro elastický materiál podle (Martinec, 1984) tak dostaneme soustavu parciálních diferenciálních rovnic pro \mathbf{u} a $\bar{\varphi}$, ve které přeznačíme přírůstkový tenzor napětí $\boldsymbol{\tau} = \bar{\boldsymbol{\tau}}$,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{f} = -\rho_0 \nabla\bar{\varphi} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \nabla\varphi_0 - \nabla(\rho_0 \nabla\varphi_0 \cdot \mathbf{u}), \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot (\nabla\bar{\varphi} + 4\pi G\rho_0 \mathbf{u}) = 0, \quad (2.37)$$

$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] = \boldsymbol{\tau}. \quad (2.38)$$

2.2 Podmínky na rozhraní

Na hranici modelu a rozhraní dvou odlišných materiálů k soustavě (2.35)–(2.38) přibudou ještě hraniční podmínky v Lagrangeově tvaru omezující posunutí, přírůstkový Cauchyův tenzor napětí a přírůstkový potenciál (Martinec, 1984, Dahlen & Tromp, 1998).

Pokud obě vrstvy budou z pevného materiálu, požadujeme přes hranici spojitě posunutí a všechny složky přírůstkového napětí,

$$[\mathbf{u}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.39)$$

$$[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.40)$$

kde \mathbf{n} je normála k hranici.

Pro rozhraní pevný materiál – kapalina platí spojitost normálové složky posunutí a normálové složky přírůstkového napětí. Tečné napětí je pro tento případ nulové,

$$[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.41)$$

$$[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\tau} - (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = 0. \quad (2.43)$$

Na volném povrchu je nulová tečná i normálová složka přírůstkového napětí,

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.44)$$

Ve středu modelu požadujeme nulové posunutí i přírůstkový potenciál,

$$\mathbf{u}(r=0) = 0. \quad (2.45)$$

$$\bar{\varphi}(r=0) = 0, \quad (2.46)$$

Na všech typech rozhraní je přírůstkový potenciál spojitý a platí Poissonova rovnice na rozhraní,

$$[\bar{\varphi}]_{-}^{+} = 0, \quad (2.47)$$

$$[\nabla \bar{\varphi} \cdot \mathbf{n} + 4\pi G \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0. \quad (2.48)$$

V případě slapů je působící silové pole buzeno vně modelu. Slapový potenciál splňuje uvnitř modelu Laplaceovu rovnici, a tedy se explicitně neobjeví v pohybové rovnici (2.35). Do problému vstoupí pouze skrz okrajovou podmínku pro potenciál na povrchu modelu (Farrell, 1972). Podmínky pro napětí na povrchu a podmínky pro napětí, posunutí a přírůstkový potenciál na všech ostatních rozhraních jsou stejné jako v případě vlastních kmitů.

2.3 Sférická harmonická dekompozice

Řešení soustavy rovnic (2.35)–(2.38) budeme hledat na kouli, proto je výhodné použití sférických souřadnic: poloměr $r \in \langle 0, R \rangle$, šířka $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ a délka $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

kde R je poloměr studovaného tělesa. Jednotkovou vektorovou bází příslušnou těmto souřadnicím označíme $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi)$. Pro jednotlivé veličiny zavedeme formalismus sférických harmonických funkcí. Každou kvadraticky integrabilní funkci lze na jednotkové sféře rozložit do úplné ortonormální báze sférických harmonických funkcí $Y_{nm}(\vartheta, \varphi)$ stupně n a řádu m ,

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm}(r) Y_{nm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.49)$$

kde $f_{nm}(r)$ jsou koeficienty rozvoje, n úhlové číslo a m azimutální číslo. Skalární sférické harmonické funkce jsou definovány vztahem

$$Y_{nm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m N_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (2.50)$$

kde N_{nm} je normalizační faktor v souladu s (Martinec, 1984),

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}, \quad (2.51)$$

a $P_n^m(\cos \vartheta)$ jsou přidružené Legendrovy funkce. Rozložíme-li jednotlivé složky vektoru posunutí a přírůstkový potenciál podle (2.49) do skalárních sférických harmonických funkcí, dostaneme

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u_r(\mathbf{r})\mathbf{e}_r + u_\vartheta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\vartheta + u_\varphi(\mathbf{r})\mathbf{e}_\varphi, \quad (2.52)$$

$$u_r(\mathbf{r}) = \sum_{nm} U_{nm}(r) Y_{nm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.53)$$

$$u_\vartheta(\mathbf{r}) = \sum_{nm} V_{nm}(r) \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \varphi) - W_{nm}(r) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \varphi}(\vartheta, \varphi), \quad (2.54)$$

$$u_\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{nm} V_{nm}(r) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \varphi}(\vartheta, \varphi) + W_{nm}(r) \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \vartheta}(\vartheta, \varphi), \quad (2.55)$$

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_{nm} F_{nm}(r) Y_{nm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.56)$$

Po zavedení vektorových sférických harmonických funkcí

$$\mathbf{S}_{nm}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) = Y_{nm} \mathbf{e}_r, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{S}_{nm}^{(1)}(\vartheta, \varphi) = \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{S}_{nm}^{(0)}(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.59)$$

bude mít vektor posunutí následující tvar,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{nm} \left[U_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(-1)} + V_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(1)} + W_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(0)} \right]. \quad (2.60)$$

$\mathbf{S}_{nm}^{(0)}$ tvoří toroidální bázi a $\mathbf{S}_{nm}^{(-1)}$ a $\mathbf{S}_{nm}^{(1)}$ bázi sféroidální. Označíme-li derivaci podle radiální souřadnice čárkou, $f' = \frac{df}{dr}$, pak dosazením (2.60), (2.56) a reologické rovnice

(2.38) do pohybové rovnice (2.35) dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = & \sum_{nm} \left[\left(T'_{rr,nm} - \frac{4\gamma}{r^2} U_{nm} + \frac{2N\gamma}{r^2} V_{nm} + \frac{4\mu}{r\beta} T_{rr,nm} - \frac{N}{r} T_{r\vartheta,nm} \right) S_{nm}^{(-1)} \right. \\ & + \left(T'_{r\vartheta,nm} + \frac{2\gamma}{r^2} U_{nm} - \frac{N\gamma + (N-2)\mu}{r^2} V_{nm} + \frac{\lambda}{r\beta} T_{rr,nm} + \frac{3}{r} T_{r\vartheta,nm} \right) S_{nm}^{(1)} \\ & \left. + \left(T'_{r\varphi,nm} - \frac{(N-2)\mu}{r^2} W_{nm} + \frac{3}{r} T_{r\varphi,nm} \right) S_{nm}^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \sum_{nm} \left[\left(\frac{4\rho_0 g_0}{r} U_{nm} - \frac{N\rho_0 g_0}{r} V_{nm} + \frac{(n+1)\rho_0}{r} F_{nm} - \rho_0 Q_{nm} \right) S_{nm}^{(-1)} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\rho_0 g_0}{r} U_{nm} + \frac{\rho_0}{r} F_{nm} \right) S_{nm}^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

kde $\beta = \lambda + 2\mu$, $\gamma = \mu(3\lambda + 2\mu)/\beta$, n úhlové číslo, $N = n(n+1)$ a $\nabla\varphi_0 = g_0\mathbf{e}_r$ a kde je pro zjednodušení zápisu zavedeno značení

$$T_{rr,nm} = \beta U'_{nm} + \frac{\lambda}{r} (2U_{nm} - NV_{nm}), \quad (2.63)$$

$$T_{r\vartheta,nm} = \mu \left(V'_{nm} + \frac{U_{nm} - V_{nm}}{r} \right), \quad (2.64)$$

$$T_{r\varphi,nm} = \mu \left(W'_{nm} - \frac{W}{r} \right), \quad (2.65)$$

$$Q_{nm} = F'_{nm} + \frac{n+1}{r} F_{nm} + 4\pi G\rho_0 U_{nm}. \quad (2.66)$$

$T_{rr,nm}$, $T_{r\vartheta,nm}$ a $T_{r\varphi,nm}$ jsou vlastně složky trakce na sféře o poloměru r pro Cauchyův přírůstkový tenzor napětí $\boldsymbol{\tau}$,

$$\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{nm} \left[T_{rr,nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(-1)} + T_{r\vartheta,nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(1)} + T_{r\varphi,nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(0)} \right]. \quad (2.67)$$

Dosazením (2.60), (2.56) do Poissonovy rovnice (2.37) dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla\varphi_1 + 4\pi G\rho_0\mathbf{u}) = & \sum_{nm} \left[Q'_{nm} + 4\pi G \frac{(n+1)\rho_0}{r} U_{nm} \right. \\ & \left. - 4\pi G \frac{N\rho_0}{r} V_{nm} - \frac{n-1}{r} Q_{nm} \right] Y_{nm}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Podrobný postup, jak předešlé rovnice dostat, ukázali (Hanyk, 1999 a Hanyk et al., 2002), kteří soustavu řeší pro postglaciální výzdvih, kde se oproti ostatním členům v pohybové rovnici (2.35) zanedbává setrvačný člen na pravé straně. V případě vlastních kmitů tento člen zanedbat nelze a v případě slapů by to nebylo vhodné. Časové derivace se však snadno zbavíme fourierovským přechodem z časové do spektrální oblasti, při kterém platí $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$. Na pravé straně rovnice (2.35) tak dostaneme $-\rho_0\omega^2\mathbf{u}$, kde ω je úhlová frekvence jednotlivých vlastních kmitů nebo slapových vln.

Kapitola 3

Obyčejné diferenciální rovnice a podmínky na rozhraní

V této kapitole popíšeme základní rozdíly mezi jednotlivými typy vlastních kmitů sféricky symetrických nerotujících těles a pro každý odvodíme obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, podobné jako pro slapový problém. V předchozí kapitole jsme rozkladem pole posunutí do vektorových sférických harmonických funkcí dostali pro vlastní kmity dvě vzájemně nezávislé úlohy. Jedna část pole posunutí u_T se nazývá toroidální, pro kterou potřebujeme jednu rovnici pro neznámou funkci W_n . Pro sféroidální část pole posunutí u_S do úlohy vstupuje přírůstkový potenciál. Musíme tedy řešit tři rovnice pro neznámé funkce U_n , V_n a F_n . Jednotlivé toroidální módy lze značit ${}_pT_{nm}$ a sféroidální ${}_pS_{nm}$, kde n je úhlové, m azimutální a p modální číslo. Indexy n a m se do úlohy dostaly rozepsáním rovnic do sférických harmonických funkcí. Pro sféricky symetrické modely je úloha $(2m + 1)$ krát degenerovaná. Při pevném n vychází pro libovolné m stejné frekvence, a proto se omezíme jen na zonální módy ($m = 0$) a index m budeme nadále vynechávat. Vzhledem k tomu, že naše modely budou mít konečný rozměr, vyhovuje rovnicím celá sada řešení. Číslo p pak udává pořadí řešení v této sérii. Pro toroidální a radiální kmity navíc vyjadřuje počet uzlových ploch ($\mathbf{u} = 0$), ve sféroidálním případě je význam modálního čísla složitější (Woodhouse & Deuss, 2007). Všechny modely budeme počítat ve vrstevnaté aproximaci, kdy v každé vrstvě jsou konstantní hustoty a Laméovy koeficienty, proto v rovnicích odvozených v této kapitole položíme derivace podle radiální souřadnic ρ' , μ' , λ' rovny nule.

3.1 Toroidální kmity

Nejdříve popíšeme kmity, které nevyvolávají změnu objemu, tedy ani změnu gravitačního pole (tj. $\bar{\rho} = 0$ a $\bar{\varphi} = 0$) a pro které platí

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r = 0. \quad (3.1)$$

Sférické složky vektoru posunutí mají tvar

$$u_r(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.2)$$

$$u_{\vartheta}(\mathbf{r}) = -\sum_n W_n(r) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi}(\vartheta, \varphi), \quad (3.3)$$

$$u_{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_n W_n(r) \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta}(\vartheta, \varphi). \quad (3.4)$$

Rozpis do vektorových sférických funkcí pak vypadá

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_n W_n(r) \mathbf{S}_n^{(0)}(\vartheta, \varphi). \quad (3.5)$$

Posunutí toroidálních kmitů je popsáno jedinou neznámou funkcí W_n . Stačí tedy v rovnicích (2.61) a (2.62) porovnat členy, u kterých vystupuje $\mathbf{S}_n^{(0)}$. Tak dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro funkce W_n ,

$$\mu \left(W_n'' + \frac{2W_n'}{r} \right) - \frac{N\mu}{r^2} W_n = -\rho_0 \omega_n^2 W_n. \quad (3.6)$$

Okrajové podmínky (2.39)–(2.48) pro posunutí a přírůstkové napětí přejdou rozkladem do sférických harmonických funkcí podle (2.60) a (2.65) pro případ rozhraní mezi dvěma pevnými látkami na tvar

$$\begin{aligned} [W_n]_{-}^{+} &= 0, \\ [T_{r\varphi,n}]_{-}^{+} &\equiv \left[\mu \left(W_n' - \frac{W_n}{r} \right) \right]_{-}^{+} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jak je vidět z rovnice (3.6), v kapalných vrstvách ($\mu = 0$) se toroidální kmity nešíří, proto platí na rozhraní pevná látka – kapalina podmínky pro volnou hranici stejné jako na povrchu uvažovaného modelu,

$$T_{r\varphi,n} \equiv \mu \left(W_n' - \frac{W_n}{r} \right) = 0. \quad (3.8)$$

Pokud model nebude obsahovat kapalnou vrstvu, budou se toroidální kmity šířit v celém jeho objemu. Pro posunutí ve středu modelu bude platit podmínka

$$W_n(0) = 0. \quad (3.9)$$

3.2 Sféroïální kmity

Sféroïální část vektoru posunutí splňuje rovnici

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_r = 0. \quad (3.10)$$

Narozdíl od předchozího případu sféroïální kmity objemovou změnu způsobují, proto je potřeba započítat i přírůstkový gravitační potenciál. Rozpisem složek vektoru posunutí do sférických souřadnic dostaneme

$$u_r(\mathbf{r}) = \sum_n U_n(r) Y_n(\vartheta, \varphi), \quad (3.11)$$

$$u_{\vartheta}(\mathbf{r}) = \sum_n V_n(r) \frac{\partial Y_n}{\partial \vartheta}(\vartheta, \varphi), \quad (3.12)$$

$$u_{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_n V_n(r) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi}(\vartheta, \varphi) \quad (3.13)$$

a dodatečný gravitační potenciál má tvar

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_n F_n(r) Y_n(\vartheta, \varphi). \quad (3.14)$$

Posunutí rozepsané do báze vektorových sférických funkcí vypadá následovně:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_n \left[U_n(r) \mathbf{S}_n^{(-1)}(\vartheta, \varphi) + V_n(r) \mathbf{S}_n^{(1)}(\vartheta, \varphi) \right]. \quad (3.15)$$

Při odvozování rovnic budeme postupovat stejně jako v předchozím případě, v rovnicích (4.12) a (4.15) budeme porovnávat koeficienty u $\mathbf{S}_n^{(-1)}$ a $\mathbf{S}_n^{(1)}$, tedy u sféroidální části pole posunutí. Přidáním rovnice (4.22) dostaneme soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro neznámé U_n , V_n a F_n ,

$$\begin{aligned} \beta U_n'' + \frac{2\beta}{r} U_n' + \left(\frac{4\rho_0 g_0}{r} - 4\pi G \rho^2 - \frac{2\beta + \mu N}{r^2} \right) U_n - \\ - \frac{N}{r} (\lambda + \mu) V_n' + \left(\frac{3\mu + \lambda}{r^2} - \frac{\rho_0 g_0}{r} \right) N V_n - \rho_0 F_n' = -\rho_0 \omega_n^2 U_n, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\mu V_n'' + \frac{2\mu}{r} V_n' - \frac{\beta N}{r^2} V_n + \frac{\mu + \lambda}{r} U_n' + \left(\frac{2\beta}{r^2} - \frac{\rho_0 g_0}{r} \right) U_n - \frac{\rho_0}{r} F_n = -\rho_0 \omega_n^2 V_n, \quad (3.17)$$

$$F_n'' + \frac{2}{r} F_n' - \frac{N}{r^2} F_n + 4\pi G \rho_0 \left(U_n' + \frac{2}{r} U_n - \frac{N}{r} V_n \right) = 0. \quad (3.18)$$

Hraniční podmínky (2.39)–(2.48) v tomto případě budou mít po použití vztahů (2.60) a (2.63) – (2.65) pro funkce U_n , V_n a F_n tvar

$$\begin{aligned} \text{pevná látka – pevná látka} \quad [U_n]_{-}^{+} &= 0, \\ [V_n]_{-}^{+} &= 0, \\ [T_{rr,n}]_{-}^{+} &\equiv \left[\beta U_n' + \frac{\lambda}{r} (2U_n - N V_n) \right]_{-}^{+} = 0, \\ [T_{r\vartheta,n}]_{-}^{+} &= \left[\mu \left(V_n' - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r} \right) \right]_{-}^{+} = 0, \\ [F_n]_{-}^{+} &= 0, \\ [F_n' + 4\pi G \rho_0 U_n]_{-}^{+} &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \text{pevná látka – kapalina} \quad [U_n]_{-}^{+} &= 0, \\ [T_{rr,n}]_{-}^{+} &\equiv \left[\beta U_n' + \frac{\lambda}{r} (2U_n - N V_n) \right]_{-}^{+} = 0, \\ [T_{r\vartheta,n}]_{-}^{+} &\equiv \mu \left(V_n' - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r} \right) = 0, \\ [F_n]_{-}^{+} &= 0, \\ [F_n' + 4\pi G \rho_0 U_n]_{-}^{+} &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
\text{volná hranice} \quad T_{rr,n} &\equiv \beta U'_n + \frac{\lambda}{r} (2U_n - NV_n) = 0, \\
T_{r\vartheta,n} &\equiv \mu \left(\frac{dV_n}{dr} - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r} \right) = 0 \\
Q_n &\equiv F' + \frac{n+1}{r} F_n + 4\pi G \rho_0 U_n = 0. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

3.3 Radiální kmity

Položíme-li úhlové číslo $n = 0$, z vektorových sférických harmonických funkcí (2.57) – (2.59) zůstane nenulová jen jediná, a to v radiálním směru (2.57) $\mathbf{S}_{00}^{(-1)} = N_{00} \mathbf{e}_r$. Index $n = 0$ budeme vynechávat. Posunutí v horizontálním směru je tedy identicky nulové,

$$u_r = UN_{00}e^{i\omega t}, \quad (3.22)$$

$$u_\vartheta = 0, \quad (3.23)$$

$$u_\varphi = 0. \quad (3.24)$$

Rovnice (2.60) popisující posunutí se tím zredukuje na

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = U(r)N_{00}e^{i\omega t} \mathbf{e}_r. \quad (3.25)$$

Toto je speciální typ sféroidálních kmitů, při kterých se deformací mění pouze radiální komponenta posunutí. Pro přírůstkový potenciál pak z (2.56) platí

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}) = F(r)N_{00}e^{i\omega t}, \quad (3.26)$$

kde $F(r)$ splňuje rovnici (3.18), která má v tomto speciálním případě tvar

$$F'' + \frac{2}{r}F' + 4\pi G \rho_0 \left(U' + \frac{2}{r}U \right) = 0. \quad (3.27)$$

Jednoduchou úpravou přejde rovnice (3.27) na

$$\frac{(r^2 F')'}{r^2} + \frac{4\pi G}{r^2} (r^2 \rho_0 U)' = 0, \quad (3.28)$$

kterou integrací vzhledem k r přepíšeme na tvar

$$F' + 4\pi G \rho_0 U = 0. \quad (3.29)$$

S touto znalostí můžeme z rovnic (4.12) a (4.15) porovnáním členů stojících u $\mathbf{S}_{nm}^{(-1)}$ (tedy u radiální části vektorových sférických harmonických funkcí) dostat výslednou obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou U ,

$$\beta U'' + \frac{2\beta}{r}U' + \left(\frac{4\rho_0 g_0}{r} - \frac{2\beta}{r^2} \right) U = -\rho_0 \omega^2 U. \quad (3.30)$$

Pro radiální kmity je na hranici mezi různými materiály potřeba řešit jen podmínky na normálové složky trakce a posunutí, ostatní podmínky jsou automaticky splněny, proto se rozhraní pevná látka – pevná látka chová stejně jako pevná látka – kapalina,

$$\begin{aligned} \text{pevná látka – pevná látka (kapalina)} \quad [U]_-^+ &= 0, \\ [T_{rr}]_-^+ &\equiv \left[\beta U' + \frac{2\lambda}{r} U \right]_-^+ = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\text{volná hranice} \quad T_{rr} \equiv \beta U' + \frac{2\lambda}{r} U = 0. \quad (3.32)$$

Na rozdíl od sféroidálních kmitů není v tomto případě výpočet posunutí svázán s výpočtem přírůstkového gravitačního potenciálu. Stačí řešit jednu rovnici (3.30) pro jednu neznámou U a přírůstkový potenciál dopočítávat z (3.29) samostatně.

3.4 Slapy

Slapová deformace je způsobena vnějším gravitačním polem. Vektor posunutí ve sférických souřadnicích na povrchu modelu ($r = a$) zapíšeme v souladu s (Wahr, 1989),

$$u_{r,n}(a, \vartheta, \varphi) = \frac{h_n}{g_0(a)} V_n^{\text{tide}}(a, \vartheta, \varphi), \quad (3.33)$$

$$u_{\vartheta,n}(a, \vartheta, \varphi) = \frac{l_n}{g_0(a)} \frac{\partial V_n^{\text{tide}}(a, \vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta}, \quad (3.34)$$

$$u_{\varphi,n}(a, \vartheta, \varphi) = \frac{l_n}{g_0(a) \sin(\vartheta)} \frac{\partial V_n^{\text{tide}}(a, \vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad (3.35)$$

$$\varphi_{1,n}(a, \vartheta, \varphi) = k_n V_n^{\text{tide}}(a, \vartheta, \varphi), \quad (3.36)$$

kde V_n^{tide} je slapový potenciál pro úhlové číslo n a $\varphi_{1,n}$ změna potenciálu vyvolaná deformací modelu působením V_n^{tide} . Pak h_n , l_n a k_n jsou bezrozměrná Loveova čísla vyjadřující deformovatelnost na povrchu tělesa, jinak též konstanty úměrnosti mezi deformací a slapovým potenciálem. Celkovou změnu přírůstkového potenciálu $\bar{\varphi}$ na povrchu vyjádříme jako

$$\bar{\varphi}_n = \varphi_{1,n}(a, \vartheta, \varphi) + V_n^{\text{tide}}(a, \vartheta, \varphi) = (k_n + 1) V_n^{\text{tide}}(a, \vartheta, \varphi). \quad (3.37)$$

Pole posunutí a přírůstkový potenciál rozepsané do báze vektorových sférických funkcí vypadají stejně jako pro sféroidální kmity,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_n \left[U_n(r) \mathbf{S}_n^{(-1)}(\vartheta, \varphi) + V_n(r) \mathbf{S}_n^{(1)}(\vartheta, \varphi) \right], \quad (3.38)$$

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_n F_n(r) Y_n(\vartheta, \varphi), \quad (3.39)$$

tedy i soustava tří diferenciálních rovnic (3.16) - (3.18) bude stejná. Na dvou pevných materiálových rozhraních uvnitř modelu použijeme hraniční podmínky (3.19). Na rozhraní pevná látka – kapalina pak platí soustava rovnic (3.20). Od sféroidálních kmitů

se slapy liší podmínkou na volné hranici na povrchu modelu. Pokud do podmínky (3.21) na pravé straně vstoupí slapový potenciál, podmínky na volné hranici budou mít podle (Fang, 1998) tvar

$$T_{rr,n} \equiv \beta U'_n + \frac{\lambda}{r} (2U_n - NV_n) = 0, \quad (3.40)$$

$$T_{r\vartheta,n} \equiv \mu \left(\frac{dV_n}{dr} - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r} \right) = 0, \quad (3.41)$$

$$Q_n \equiv \frac{dF_n}{dr} + \frac{n+1}{r} F_n + 4\pi G \rho_0 U_n = -2(n+1)g_0. \quad (3.42)$$

Povrchová (sféroidální) Loveova čísla pro neznámé U_n , V_n a F_n vyjádříme podle (Fang, 1998),

$$h_n = \frac{U_n(a)}{a}, \quad (3.43)$$

$$l_n = \frac{V_n(a)}{a}, \quad (3.44)$$

$$k_n + 1 = -\frac{F_n(a)}{ag_0(a)}. \quad (3.45)$$

Kapitola 4

Maticová formulace

V části 2.3 jsme ukázali, jak se vypořádat s horizontálními souřadnicemi ϑ a φ . Neznámé U_n , V_n , F_n a W_n závisejí jen na radiální souřadnici r . Cílem této kapitoly je pro vlastní kmity převést celou úlohu na problém hledání vlastních čísel a vlastních funkcí, kdy pro dané úhlové číslo n získáme celé spektrum vlastních vektorů (radiální průběh posunutí a přírůstkového potenciálu) a k nim i příslušná vlastní čísla (úhlové frekvence jednotlivých vlastních kmitů) najednou. Pro slapy je úloha značně jednodušší – postačí vyřešit pro dané n jednu soustavu lineárních algebraických rovnic.

4.1 Kmity kulové vrstvy

Nejprve ukážeme, jak pro vlastní kmity řešit úlohu na jedné vrstvě. Neznámé uspořádáme do vektoru

$$\mathbf{y} = (U_n, V_n, F_n, W_n)^T, \quad (4.1)$$

kde první tři složky jsou sféroidální a poslední je toroidální část pole. Rovnice (3.6), (3.16)–(3.18) popisující posunutí uvnitř vrstvy přepíšeme do jednotného maticového tvaru,

$$\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{y}'' + \mathbf{B}(r) \cdot \mathbf{y}' + \mathbf{C}(r) \cdot \mathbf{y} = -\omega^2 \mathbf{D}(r) \cdot \mathbf{y}, \quad (4.2)$$

kde matice koeficientů \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} mají velikost 4x4 a nabudou tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{2\beta}{r} & -\frac{N(\lambda+\mu)}{r} & -\rho_0 & 0 \\ \frac{\mu+\lambda}{r} & \frac{2\mu}{r} & 0 & 0 \\ 4\pi G \rho_0 & 0 & \frac{2}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\mu}{r} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{4\rho_0 g_0}{r} - 4\pi G \rho_0^2 - \frac{2\beta + N\mu}{r^2} & \frac{(\lambda + 3\mu)}{r^2} - \frac{\rho_0 g_0}{r} & 0 & 0 \\ \frac{2\beta}{r^2} - \frac{\rho_0 g_0}{r} & -\frac{N\beta}{r^2} & -\frac{\rho_0}{r} & 0 \\ \frac{8}{r} \pi G \rho_0 & -\frac{4N}{r} \pi G \rho_0 & -\frac{N}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{N}{\mu} r^2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Hustota a Laméovy koeficienty jsou v těchto maticích v každé vrstvě konstantní.

Pro diskretizaci každé vrstvy modelu v radiálním směru podél souřadnice r použijeme síť N bodů $r_j, j = 1, \dots, N$, položenou do extrémů Čebyševových polynomů. Čebyševovy polynomy $T_{n-1}(x)$ mají na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ N extrémů v bodech

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.7)$$

Uvažujeme-li vrstvu jako interval $\langle a, b \rangle$, extrémy se posunou do bodů

$$r_j = a + \frac{b-a}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi(j-1)}{N-1}\right) + 1 \right], \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.8)$$

Hodnoty vektoru \mathbf{y} a jeho první a druhé derivace v bodě r_i vyjádříme váženým součtem hodnot \mathbf{y} v bodech r_j ,

$$\mathbf{y}(r_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \mathbf{y}_j(r_j), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{y}'(r_i) = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \mathbf{y}_j(r_j), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{y}''(r_i) = \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \mathbf{y}_j(r_j), \quad (4.11)$$

kde $i = 1, \dots, N$ a $\mathbf{y}_j = (U_n, V_n, F_n, W_n)(r_j)$. Matice vah α_{ij}, β_{ij} a γ_{ij} příslušné jednotlivým součtům budeme počítat podle (Fornberg, 1999). V našem případě je ovšem $\alpha_{ii} = 1$, jinak $\alpha_{ij} = 0$. Dosazením (4.9)–(4.11) do rovnice (4.2) dostaneme,

$$\sum_{j=1}^N [\mathbf{A}\gamma_{ij} + \mathbf{B}\beta_{ij} + \mathbf{C}\alpha_{ij}] \cdot \mathbf{y}_j = -\omega^2 \sum_{j=1}^N \mathbf{D}\alpha_{ij} \cdot \mathbf{y}_j. \quad (4.12)$$

V rovnici (4.12) je potřeba si vyjasnit, jak budeme chápat součin $\mathbf{A}\gamma_{ij}$. Matice \mathbf{A} má rozměr 4×4 , zatímco γ_{ij} ($i = 1, \dots, N$ a $j = 1, \dots, N$) $N \times N$. Vezmeme každý prvek matice \mathbf{A} a vynásobíme ho s γ_{ij} ($i = 1, \dots, N$ a $j = 1, \dots, N$). Tak dostaneme výslednou matici o rozměrech $4N \times 4N$.

Rovnici (4.2) budeme řešit jen na vnitřních bodech vrstvy ($i = 2, \dots, N-1$), na rozhraní budeme žádat splnění hraničních podmínek. Interval $\langle a, b \rangle$ máme rozdělený na N bodů $a = r_1 < \dots < r_N = b$, a v každém z nich počítáme 4 rovnice.

Ve vnitřních bodech dostaneme $4N-8$ skalárních rovnic (4.12), v krajních bodech intervalu budeme mít po čtyřech rovnicích splňujících předepsané vlastnosti na rozhraní.

4.2 Podmínky na rozhraní

Nejdříve vyřešíme případ volného povrchu, kde pro všechny typy kmitů platí nulovost složek trakce a veličiny Q_n . Zapsáno maticově,

$$(T_{rr,n}, T_{r\vartheta,n}, Q_n, T_{r\varphi,n})^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}' + \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} = 0, \quad (4.13)$$

kde opět první tři složky zastupují sféroidální a poslední složka toroidální část pole. Matice koeficientů (4.3)–(4.6) určíme z rovnic (3.8) a (3.21). Matice \mathbf{A} u první derivace je totožná s maticí koeficientů, která vystupuje v rovnici (4.2) u druhých derivací. Matice \mathbf{E} má tvar

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{r} & -\frac{N\lambda}{r} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{r} & -\frac{\mu}{r} & 0 & 0 \\ 4\pi G\rho_0 & 0 & \frac{n+1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{r} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Dosazením rovnic (4.9)–(4.11) do (4.13) dostaneme 4 rovnice pro bod a (resp. 4 rovnice pro bod b), které jsou v souladu se soustavou (4.12),

$$\sum_{j=1}^N [\mathbf{A}\beta_{ij} + \mathbf{E}\alpha_{ij}] \cdot \mathbf{y}_j = 0, \quad (4.15)$$

kde $i = 1$, resp. $i = N$.

V počátku soustavy souřadné, tedy v bodě $r = 0$, jsou hraniční podmínky zvlášť jednoduché, platí, že $\mathbf{u}(r_1) = 0$ a $\bar{\varphi} = 0$. Zavedeme čtyřsložkový vektor $\mathbf{y}_1 = (U_{n,1}, V_{n,1}, F_{n,1}, W_{n,1})^T$ a podmínku ve středu zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{y}_1 = 0, \quad (4.16)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice o velikosti 4×4 .

Zavedeme-li matici \mathbf{F} o velikosti $4 \times 4N$,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

lze (4.16) přepsat do tvaru odpovídajícího soustavám rovnic (4.12) a (4.15),

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{F} \cdot \mathbf{y}_j = 0. \quad (4.18)$$

Pokud bychom uvažovali model jako jednu vrstvu, měli bychom vše připraveno pro převedení úlohy na vlastní problém. Zapsáním rovnic (4.18), (4.12) a (4.15) pod sebe dostaneme soustavu

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{y} = -\omega^2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{y}, \quad (4.19)$$

kde $\mathbf{y} = (U_{n,1}, \dots, U_{n,N}, V_{n,1}, \dots, V_{n,N}, F_{n,1}, \dots, F_{n,N})$ má velikost $4N$ a matice \mathbf{P} a \mathbf{R} mají dimenze $4N \times 4N$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{A}\gamma_{ij} + \mathbf{B}\beta_{ij} + \mathbf{C}\alpha_{ij} \\ \mathbf{A}\beta_{Nj} + \mathbf{E}\alpha_{Nj} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{D}\alpha_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

kde $i = 2, \dots, N-1$ a $j = 1, \dots, N$. Rovnice (4.19) vzhledem k nenulové matici \mathbf{R} na pravé straně, která zastupuje setrvačný člen, je tzv. zobecněný vlastní problém, který bychom v principu mohli řešit. Z hlediska numeriky je však jednodušší převést \mathbf{P} na druhou stranu rovnice a počítat "klasický" vlastní problém. Inverzi lze provést díky tomu, že matice \mathbf{P} není singulární,

$$(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{y} = \xi \mathbf{y}, \quad \xi = -\frac{1}{\omega^2}, \quad (4.21)$$

kde ξ reprezentuje vlastní číslo a vektor neznámých \mathbf{y} vlastní funkce.

Nyní je již jednoduché rozšířit rovnici pro větší počet vrstev. Začneme s modely složenými pouze z pevných vrstev, kapalnou vrstvu vyřešíme později pro případ sféroidálních kmitů. Vektor \mathbf{y} v k -té vrstvě označíme $\mathbf{y}^{(k)}$. Na rozhraní dvou pevných látek s různými fyzikálními vlastnostmi platí spojitost posunutí, gravitačního potenciálu, trakce a Q_n přes hranici, tak jak jsou popsány v rovnicích (3.19) a (3.7). Pro posunutí dostaneme užitím rozvoje (4.9) a (4.10)

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{I}\alpha_{Nj}^{(k)} \mathbf{y}_j^{(k)} - \sum_{j=1}^N \mathbf{I}\alpha_{1j}^{(k+1)} \mathbf{y}_j^{(k+1)} = 0 \quad (4.22)$$

a pro trakci a Q_n

$$\sum_{j=1}^N [\mathbf{A}\beta_{Nj}^{(k)} + \mathbf{E}'\alpha_{Nj}^{(k)}] \mathbf{y}_j^{(k)} - \sum_{j=1}^N [\mathbf{A}\beta_{1j}^{(k+1)} + \mathbf{E}'\alpha_{1j}^{(k+1)}] \mathbf{y}_j^{(k+1)} = 0, \quad (4.23)$$

kde matice vah jsou počítány pro každou vrstvu zvlášť. Matice koeficientů uvádíme bez indexů, ale samozřejmě pro ně platí, že hodnoty, které obsahují se mění podle toho, v které vrstvě vystupují, a dále už index k nebudeme uvádět ani u matic vah. Matice \mathbf{E}' se rovná

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{r} & -\frac{N\lambda}{r} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{r} & -\frac{\mu}{r} & 0 & 0 \\ 4\pi G\rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{r} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

se mění i matice koeficientů a vah. Jak je vidět, matice má blokovou strukturu bez nulových řádků a můžeme ji beztréstně invertovat. Matice \mathbf{R}_T má stejný rozměr jako \mathbf{P}_T a pro toroidální kmitý má tvar

$$\mathbf{R}_T = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{0}}_{1 \times N} \\ \boxed{\mathbf{D}_T \alpha_{ij}}_{N-2 \times N} \\ \boxed{\mathbf{0}}_{1 \times N} & \boxed{\mathbf{0}}_{1 \times N} \\ \boxed{\mathbf{0}}_{1 \times N} & \boxed{\mathbf{0}}_{1 \times N} & \cdots & \boxed{\mathbf{0}}_{1 \times N} \\ & & \cdots & \boxed{\mathbf{0}}_{1 \times N} \\ & & \cdots & \boxed{\mathbf{D}_T \alpha_{ij}}_{N-2 \times N} \\ & & & \boxed{\mathbf{0}}_{1 \times N} \end{pmatrix}.$$

4.4 Sférooidální kmitý

Pro tento typ kmitů obsahuje vektor neznámých \mathbf{y} tři složky $\mathbf{y} = (U_n, V_n, F_n)^T$ v jedné vrstvě. Matice koeficientů jsou tvořeny levým horním blokem o velikosti 3×3 příslušných matic,

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{B}_S = \mathbf{B}_{3 \times 3}, \quad \dots$$

Sférooidální kmitý existují i v kapalných vrstvách, takže platí obecně, že počáteční bod je ve středu modelu. V něm je potřeba splnit podmínku na nulové posunutí. Na povrchu modelu platí podmínka na volnou hranici. Poskládáním rovnic (4.18), (4.12), (4.15), (4.23) a (4.15) do správného pořadí dostaneme pro K vrstev matici \mathbf{P}_S pro sférooidální kmitý, která bude mít oproti toroidálním kmitům velikost $3NK \times 3NK$,

$$\mathbf{P}_S = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{F}_S}_{3 \times 3N} \\ \boxed{\mathbf{A}_S \gamma_{ij} + \mathbf{B}_S \beta_{ij} + \mathbf{C}_S \alpha_{ij}}_{3N-6 \times 3N} \\ \boxed{\mathbf{A}_S \beta_{Nj} + \mathbf{E}_S \alpha_{Nj}}_{3 \times 3N} & \boxed{-\mathbf{A}_S \beta_{1j} - \mathbf{E}_S \alpha_{1j}}_{3 \times 3N} \\ \boxed{\mathbf{I} \alpha_{Nj}}_{3 \times 3N} & \boxed{-\mathbf{I} \alpha_{1j}}_{3 \times 3N} & \boxed{-\mathbf{A}_S \beta_{1j} - \mathbf{E}_S \alpha_{1j}}_{3 \times 3N} \\ & & \boxed{-\mathbf{I} \alpha_{1j}}_{3 \times 3N} \\ & & \boxed{\mathbf{A}_S \gamma_{ij} + \mathbf{B}_S \beta_{ij} + \mathbf{C}_S \alpha_{ij}}_{3N-6 \times 3N} \\ & & \boxed{\mathbf{A}_S \beta_{Nj} + \mathbf{E}_S \alpha_{Nj}}_{3 \times 3N} \end{pmatrix}.$$

kde vektor \mathbf{Q} má délku $3N$ a v posledním řádku obsahuje nenulovou pravou stranu podmínky na povrchu,

$$\mathbf{Q} = [0, \dots, 0, -(2n + 1)g_0]^T. \quad (4.30)$$

Rovnice (4.29) se od případu vlastních kmitů neliší jen vektorem \mathbf{Q} na pravé straně, základním rozdílem je, že pro slapy není frekvence ω neznámou, ale je dána vnějším slapovým potenciálem. Soustava $3N$ rovnic (4.29) tedy není vlastní problém a můžeme ji upravit na tvar

$$(\mathbf{P} + \omega^2 \mathbf{R}) \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{Q}. \quad (4.31)$$

S přihlédnutím k periodám slapů jsou prvky matice $\omega^2 \mathbf{R}$ malé v porovnání se členy matice \mathbf{P} . Nabízí se možnost položit $\omega = 0$ a tak z výpočtů frekvenci vyloučit úplně. Pro výpočet slapových Loveových čísel pevného modelu je to nejjednodušší způsob. Ovšem pro statické slapy v kapalině ($\mu = 0$ a $\omega = 0$), není možné jednoznačně určit U_n a V_n . Rovnice (3.16) a (3.17) se stanou závislými, zbyde pouze rovnice (3.18) pro potenciál a podmínka na parametry modelu. Tento fakt se nazývá Longmanův paradox (Longman, 1963, Chinnery, 1975) a je detailně diskutován a vysvětlen ve (Fang, 1998). My se tomuto problému vyhneme podržením nenulové malé frekvence.

4.6 Numerické řešení

Popsanou metodu jsme naprogramovali ve Fortranu 90 s voláním podprogramů z numerické knihovny IMSL (<http://www.vni.com>).

Úloha vlastních kmitů vede na problém vlastních čísel. Pro nedostatečnou přesnost řešiče DGVCRG pro zobecněný problém vlastních čísel (4.26) invertujeme matice voláním procedury DLINRG a výsledný standardní maticový problém (4.27) řešíme procedurou DEVCRG pro výpočet vlastních čísel a vektorů, případně procedurou DEVLRG pouze pro výpočet vlastních čísel. Pro slapy řešíme nehomogenní soustavu algebraických rovnic procedurou DLSLRG.

Procesor s frekvencí 2.0 GHz spotřeboval pro výpočet spektra sféroidálních kmitů modelu PREM pro jedno úhlové číslo při 2500 diskretizačních bodech 40 minut, pro výpočet toroidálních kmitů, kde vystupují menší matice, pouze 6 minut a pro řešení slapů 1 minutu. Pro modely ostatních těles, kdy nebylo potřeba vystihovat složitý průběh parametrů a stačily řádově stovky diskretizačních bodů, se doba výpočtu zkrátila pod minutu.

Během přípravy paměťového modelu našeho programu jsme zvažovali použití aparátu pro dynamické rozdělení paměti (podprogram OBAL), navrženého v práci (Matyska, 1982). Vzhledem k novým možnostem správy paměti ve Fortranu 90 jsme se však přiklonili k řešení běžnými postupy tohoto jazyka. Paměť potřebná pro výpočet sféroidálních kmitů modelu PREM na 2500 diskretizačních bodech nepřesáhla 700 MB, pro užití modely ostatních těles byly paměťové nároky nepodstatné.

Kapitola 5

Výsledky pro modely Země

V této kapitole otestujeme popsanou metodu a připravený program na dvou modelech Země. Budeme sledovat periody vlastních kmitů a tvary vlastních funkcí.

5.1 Třívrstvý model Země

Nejprve otestujeme metodu na jednoduchém modelu Země složeném ze tří homogenních soustředných sférických vrstev. Vnější poloměry jednotlivých vrstev a hustot a hodnoty elastických parametrů jsou uvedeny v Tabulce 5.1. Každou vrstvu jsme diskretizovali sto body umístěným v čebyševovských extrémech. Periody několika kmitů jsou zapsány do Tabulky 5.2.

Naše výsledky jsme srovnali s výsledky příbuzného programu pro hledání vlastních čísel, který je založen na soustavě osmi diferenciálních rovnic prvního řádu pro osm neznámých,

$$\mathbf{y} = (U_n, V_n, F_n, T_{rr,n}, T_{r\vartheta,n}, Q_n, W_n, T_{r\varphi,n})^T.$$

Tento program byl sestaven autory práce (Hanyk et al., 2002), ve které je odvozena podobná formulace pro postglaciální výzdvih. Výsledky získané tímto programem jsou uvedeny v Tabulce 5.3. Spočtené periody vlastních kmitů jsou pro obě metody prakticky stejné.

| | poloměr [km] | ρ [$g.cm^{-3}$] | μ [GPa] | λ [GPa] |
|-----------|--------------|------------------------|-------------|-----------------|
| 1. vrstva | 1221.5 | 13 | 200 | 1000 |
| 2. vrstva | 3480 | 11 | 0 | 800 |
| 3. vrstva | 6371 | 5 | 90 | 300 |

Tabulka 5.1: Použité parametry třívrstvého modelu Země.

| p | ${}_pT_2$ [s] | ${}_pS_0$ [s] | ${}_pS_2$ [s] | ${}_pS_3$ [s] | ${}_pS_6$ [s] | ${}_pS_{15}$ [s] | ${}_pS_{60}$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------|------------------|
| 0 | 3916.0 | 1518.5 | 4005.4 | 2770.2 | 1379.9 | 580.7 | 160.5 |
| 1 | 1155.4 | 727.4 | 2070.4 | 1509.1 | 993.4 | 490.1 | 133.4 |
| 2 | 650.7 | 423.2 | 1271.4 | 1104.4 | 745.3 | 410.9 | 127.2 |
| 3 | 444.9 | 322.4 | 926.3 | 653.5 | 554.3 | 345.8 | 123.3 |
| 4 | 336.7 | 244.1 | 765.6 | 628.9 | 427.3 | 301.3 | 115.8 |

Tabulka 5.2: Výsledné periody spočtené systémem diferenciálních rovnic druhého řádu.

| p | ${}_pT_2$ [s] | ${}_pS_0$ [s] | ${}_pS_2$ [s] | ${}_pS_3$ [s] | ${}_pS_6$ [s] | ${}_pS_{15}$ [s] | ${}_pS_{60}$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------------|------------------|
| 0 | 3916.0 | 1518.3 | 4005.5 | 2770.3 | 1379.8 | 580.7 | 160.5 |
| 1 | 1155.4 | 727.6 | 2070.2 | 1509.1 | 993.3 | 490.0 | 133.4 |
| 2 | 650.7 | 423.5 | 1271.2 | 1104.2 | 745.3 | 410.9 | 127.1 |
| 3 | 444.9 | 322.0 | 926.1 | 653.5 | 554.3 | 345.8 | 123.3 |
| 4 | 336.7 | 244.3 | 765.5 | 628.8 | 427.3 | 301.3 | 115.8 |

Tabulka 5.3: Výsledné periody spočtené systémem diferenciálních rovnic prvního řádu.

| n | ${}_0T_n$ [s] | | ${}_1T_n$ [s] | | ${}_2T_n$ [s] | |
|-----|---------------|--------|---------------|-------|---------------|-------|
| | PREM | my | PREM | my | PREM | my |
| 2 | 2639.4 | 2635.5 | 757.5 | 755.3 | - | 445.2 |
| 3 | 1707.6 | 1703.9 | 695.0 | 693.4 | - | 433.5 |
| 4 | 1307.6 | 1304.8 | - | 629.0 | 420.2 | 418.5 |
| 5 | 1078.8 | 1077.0 | - | 571.2 | - | 401.2 |

Tabulka 5.4: Periody vybraných toroidálních kmitů udávané pro model PREM a spočtené pro vrstevnatou aproximaci modelu PREM.

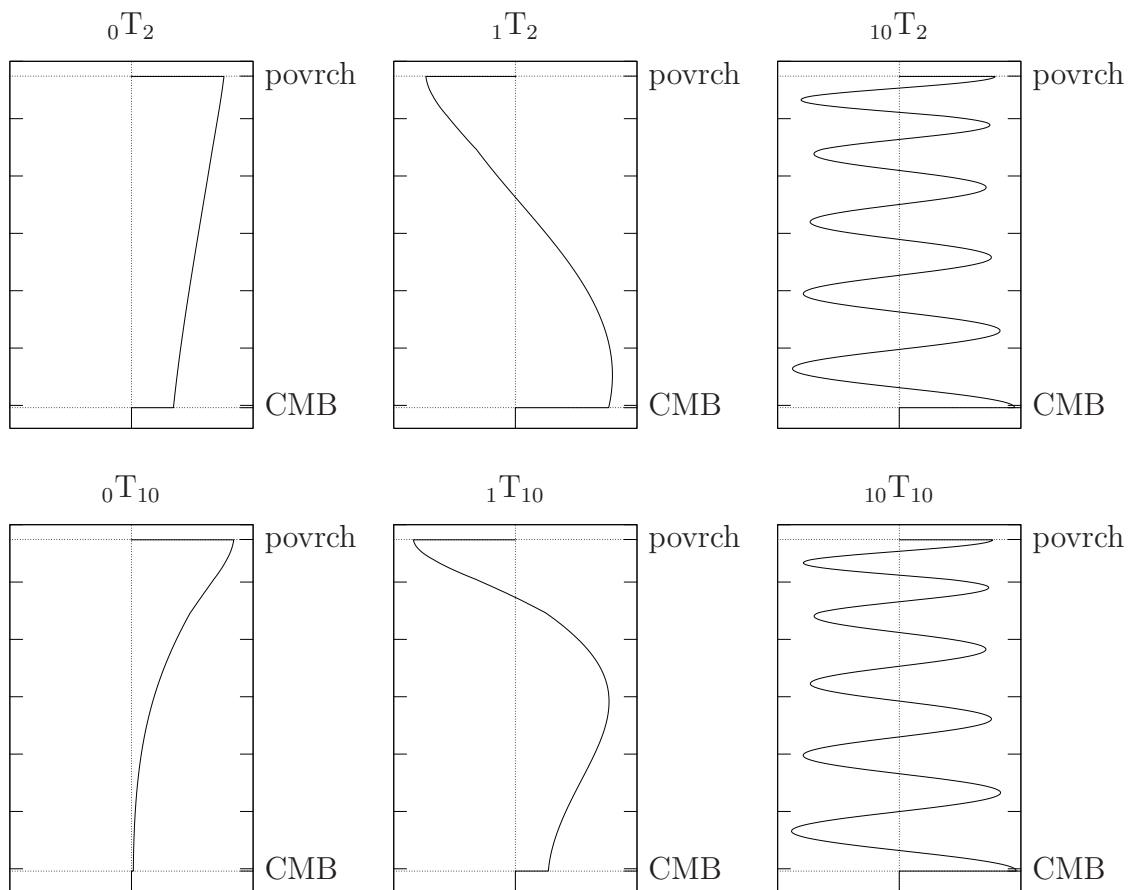
| n | ${}_0S_n$ [s] | | ${}_1S_n$ [s] | | ${}_2S_n$ [s] | |
|-----|---------------|--------|---------------|--------|---------------|--------|
| | PREM | my | PREM | my | PREM | my |
| 0 | 1228.1 | 1230.0 | 613.0 | 614.9 | 398.3 | 400.0 |
| 2 | 3233.5 | 3228.5 | 1471.3 | 1473.5 | - | 1125.2 |
| 3 | 2134.4 | 2131.5 | 1064.4 | 1062.8 | - | 824.5 |
| 4 | 1545.7 | 1546.2 | 852.8 | 852.3 | 725.4 | 723.5 |

Tabulka 5.5: Periody vybraných sféroidálních a radiálních kmitů udávané pro model PREM a spočtené pro vrstevnatou aproximaci modelu PREM.

5.2 Model PREM

PREM neboli Preliminary Reference Earth Model (Dziewonski & Anderson, 1981) je sféricky symetrický model hustot a seismických rychlostí v Zemi. Model byl získán řešením obrácené úlohy užitím pozorovaných časů příchodů objemových vln a period vlastních kmitů. Je složen z několika vrstev, ve kterých jsou hustota a seismické rychlosti popsány polynomy nejvýše třetího stupně. Model PREM jsme aproximovali vrstevnatým modelem s hustotami a Laméovými koeficienty po částech konstantními. Vrstev jsme volili pět set, přičemž jsme respektovali vnitřní hranice vrstev modelu PREM. Každou vrstvu jsme diskretizovali pěti body. Celkový počet diskretizačních bodů tak dosáhl 2500.

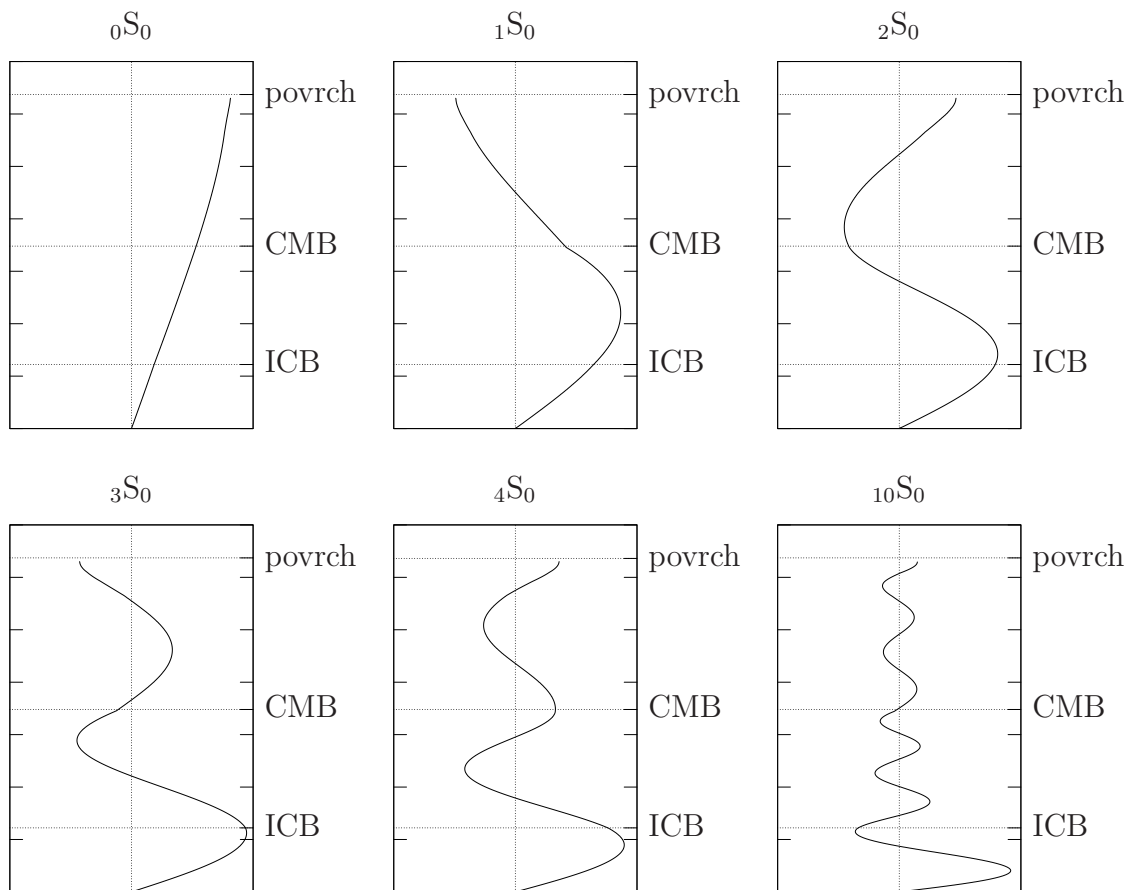
V Tabulkách 5.4 a 5.5 jsou uvedeny periody několika prvních toroidálních a sféroidálních kmitů pro naši aproximaci modelu PREM a porovnány s hodnotami převzatými z (Dziewonski & Anderson, 1981).



Obrázek 5.1: Průběh tangenciálního posunutí pro vybrané toroidální módy mezi volným povrchem a rozhraním jádro – plášť (CMB) pro model PREM. Svislá čára uprostřed každého panelu značí nulové posunutí.

Spektrum toroidálních kmitů začíná kmitem ${}_0T_2$ s periodou 44 minut. Na Obrázku 5.1 je zobrazen průběh tangenciálního posunutí v plášti Země pro několik toroidálních

módů ${}_pT_n$. Modální číslo p vyjadřuje počet uzlových ploch, na kterých je posunutí nulové. Se zvyšujícím se úhlovým číslem n se tyto uzlové plochy stejně jako maximální amplitudy posouvají k povrchu. Na obrázku neuvádíme konkrétní hodnoty amplitud, protože bez předepsání počátečního impulsu nemají fyzikální význam.

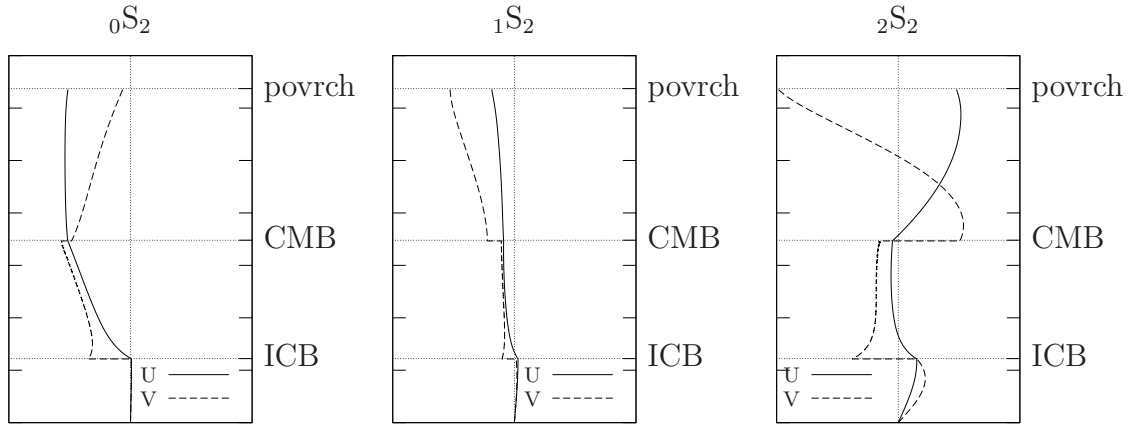


Obrázek 5.2: Průběh radiálního posunutí mezi středem a povrchem pro několik radiálních kmitů modelu PREM. Na obrázcích jsou vyznačena rozhraní jádro – plášť (CMB) a vnitřní – vnější jádro (ICB).

Obrázek 5.2 ukazuje vlastní funkce radiálních kmitů. Radiální mód ${}_0S_0$ s periodou 21 minut nemá žádnou plochu s nulovým posunutím a odpovídá radiálnímu smršťování a roztahování Země. Modálním číslem má podobně jako u toroidálních kmitů význam počtu uzlových ploch. Je zajímavé, že zatímco u toroidálních kmitů s vyšším modálním číslem jsou lokální maxima amplitud přibližně téže velikosti, pro radiální kmitů lokální maxima amplitud rostou směrem ke středu.

Pro sféroidální kmit ${}_0S_2$, tzv. fotbalový mód¹, s nejdělsí periodou fyzikálního spektra o délce 54 minut a dva další módy s $n = 2$ jsou na Obrázku 5.3 vykresleny obě složky vektoru posunutí. V případě sféroidálních kmitů nemá modální číslo význam

¹Dahlen & Tromp, 1998, str. 299, označují za možnou příčinu této přezdívky alternace tvaru tělesa mezi citronem a tykví.



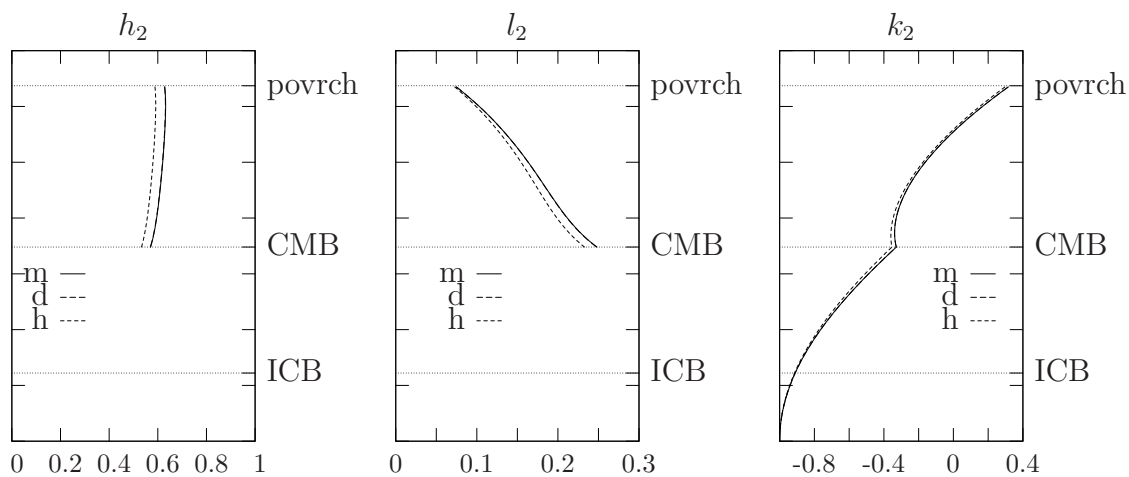
Obrázek 5.3: Průběh radiálního (U) a tangenciálního (V) posunutí mezi středem a povrchem pro sféroidální módy ${}_pS_2$ modelu PREM. Na obrázcích jsou vyznačena rozhraní jádro – plášť (CMB) a vnitřní – vnější jádro (ICB).

| n | my | | | Agnew, 2007 | | |
|---|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|
| | h_n | l_n | k_n | h_n | l_n | k_n |
| 2 | 0.603 | 0.084 | 0.298 | 0.617 | 0.083 | 0.300 |
| 3 | 0.288 | 0.015 | 0.092 | 0.298 | 0.015 | 0.095 |
| 4 | 0.175 | 0.010 | 0.041 | 0.179 | 0.009 | 0.043 |

Tabulka 5.6: Povrchová Loveova čísla pro model PREM.

počtu uzlových ploch, jak je z obrázku patrné. Pro sféroidální kmity není tangenciální posunutí, na rozdíl od radiálního, spojitě na kapalném rozhraní. Spočtené vlastní funkce módu ${}_0S_2$ jsou vizuálně totožné jako funkce na Fig. 8.18 v (Dahlen & Tromp, 1998).

Slapová Loveova čísla modelu PREM jsme počítali pro $n = 2, 3, 4$. V Tabulce 5.6 porovnáváme hodnoty povrchových Loveových čísel vrstevnaté aproximace modelu PREM s hodnotami uvedenými v (Agnew, 2007). Výpočet jsme provedli pro slapovou periodu jeden den. Loveova čísla jsou na periodě slapového potenciálu závislá, ovšem pro dostatečně velké periody se výsledek mění jen zanedbatelně. Na Obr. 5.4 ukazujeme radiální průběh h_2 , l_2 a k_2 pro tři různé slapové periody. Pro hodinovou periodu se výsledek ještě liší, ale Loveova čísla pro periody den a měsíc se už shodují na šířku čáry.



Obrázek 5.4: Loveova čísla h_2 , l_2 a k_2 v modelu PREM pro slapové periody rovné měsíci, dni a hodině (m-d-h). Vodorovné čáry vyznačují rozhraní jádro – plášť (CMB) a vnitřní – vnější jádro (ICB).

Kapitola 6

Výsledky pro modely planet a měsíců

6.1 Mars

Pro výpočty vlastních kmitů a slapů Marsu jsme vycházeli ze dvou modelů hustot a seismických rychlostí podle (Sohl & Spohn, 1997). První model byl optimalizován pro geochemická data z meteoritů, druhý pro splnění momentu setrvačnosti Marsu. Oba modely vykazují podobnou globální strukturu s kůrou, svrchním a spodním pláštěm, odděleným přechodovou oblastí olivínu na γ -spinel, a tekutým jádrem. Chybí však vrstva perovskitu a vnitřní pevné jádro, pro které nebyly splněny tlakové

| | poloměr [km] | ρ [g·cm ⁻³] | μ [GPa] | λ [GPa] |
|-----------------|--------------|------------------------------|-------------|-----------------|
| jádro | 1468 | 7.15 | 0 | 284 |
| spodní plášť | 2033 | 4.25 | 143 | 174 |
| přechodová zóna | 2360 | 4.00 | 116 | 150 |
| svrchní plášť | 3280 | 3.60 | 83 | 110 |
| kůra | 3390 | 2.80 | 46 | 78 |

Tabulka 6.1: Parametry Marsu pro Model A.

| | poloměr [km] | ρ [g·cm ⁻³] | μ [GPa] | λ [GPa] |
|-----------------|--------------|------------------------------|-------------|-----------------|
| jádro | 1667 | 7.05 | 0 | 280 |
| spodní plášť | 1974 | 4.20 | 141 | 167 |
| přechodová zóna | 2332 | 4.00 | 117 | 155 |
| svrchní plášť | 3140 | 3.65 | 88 | 111 |
| kůra | 3390 | 2.80 | 47 | 78 |

Tabulka 6.2: Parametry Marsu pro Model B.

a teplotní podmínky. V plášti a kůře hustota roste s hloubkou téměř lineárně. Na rozhraní kůra – plášť dochází ke skokovému zvýšení o $600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, při přechodu olivín – β -spinel byl skok o $250 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a na rozhraní β -spinel – γ -spinel o $100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Nejvýznamnější zvýšení hustoty kolem $3000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je na rozhraní jádro – plášť.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 1757.3 | 591.5 | 337.9 | 239.6 | 2 | 1968.2 | 977.2 | 633.5 | 415.2 |
| 3 | 1126.9 | 505.0 | 320.5 | 233.5 | 3 | 1200.4 | 733.0 | 546.8 | 349.8 |
| 4 | 860.7 | 435.8 | 300.4 | 225.8 | 4 | 864.4 | 596.3 | 481.0 | 315.9 |
| 5 | 705.4 | 383.5 | 279.3 | 216.9 | 5 | 691.4 | 502.9 | 421.4 | 291.9 |
| 6 | 601.0 | 344.2 | 259.0 | 207.0 | 6 | 592.1 | 428.2 | 371.2 | 272.8 |
| 7 | 525.1 | 313.9 | 240.6 | 196.6 | 7 | 525.6 | 368.5 | 330.6 | 256.3 |
| 8 | 466.9 | 289.7 | 224.5 | 186.2 | 8 | 474.9 | 322.0 | 297.7 | 241.4 |
| 9 | 420.9 | 269.7 | 210.8 | 176.2 | 9 | 433.6 | 286.5 | 270.1 | 227.6 |
| 10 | 383.4 | 252.7 | 199.1 | 167.0 | 10 | 398.8 | 259.9 | 246.0 | 214.7 |

Tabulka 6.3: Periody vybraných vlastních kmitů pro model A.

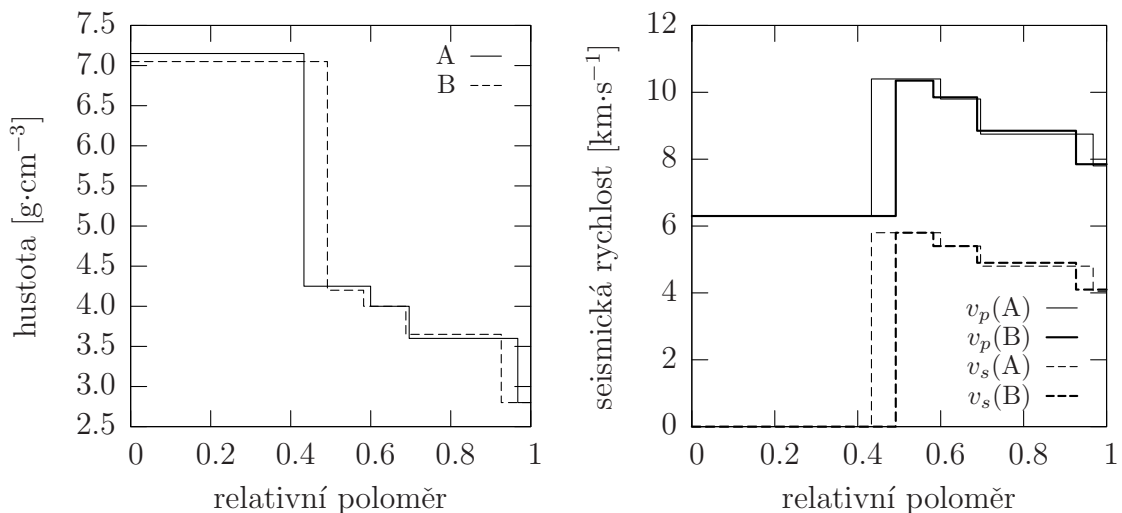
| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 1812.4 | 572.1 | 319.8 | 227.3 | 2 | 2222.2 | 987.2 | 632.9 | 408.7 |
| 3 | 1143.1 | 501.9 | 308.3 | 223.0 | 3 | 1366.1 | 732.7 | 546.6 | 342.3 |
| 4 | 868.6 | 439.7 | 294.4 | 217.6 | 4 | 965.1 | 599.5 | 483.7 | 307.6 |
| 5 | 711.5 | 389.0 | 279.0 | 211.2 | 5 | 744.3 | 520.5 | 427.3 | 285.0 |
| 6 | 607.1 | 348.9 | 262.8 | 204.0 | 6 | 611.7 | 461.7 | 378.5 | 266.7 |
| 7 | 531.6 | 317.4 | 246.7 | 196.3 | 7 | 527.2 | 409.8 | 338.6 | 251.4 |
| 8 | 474.1 | 292.4 | 231.5 | 188.3 | 8 | 469.1 | 363.4 | 306.6 | 238.1 |
| 9 | 428.5 | 271.9 | 217.6 | 180.1 | 9 | 425.3 | 323.7 | 280.8 | 226.1 |
| 10 | 391.5 | 254.8 | 205.2 | 172.1 | 10 | 390.1 | 290.5 | 259.6 | 214.9 |

Tabulka 6.4: Periody vybraných vlastních kmitů pro model B.

Pro výpočty jsme převzali tato hlavní rozhraní a hodnoty hustot jsme odečtením z Fig. 2 práce (Sohl & Spohn, 1997) aproximovali konstantní hustotou pro každou vrstvu. Profil seismických rychlostí jsme převzali stejným způsobem z Fig. 8. Průběh rychlostí P a S vln má lineární průběh v plášti a kůře a parabolický průběh v jádře. Zvyšování seismických rychlostí je pro Mars o poznání menší než pro Zemi v důsledku nižšího nárůstu tlaku spojeného s menším rozměrem planety.

Budeme uvažovat dva modely složené z pěti vrstev: kůra, svrchní plášť, přechodová oblast, spodní plášť a jádro. Základní rozdíl mezi oběma modely je především velikost jádra a tloušťka kůry Marsu. Oba modely splňují gravitační zrychlení na povrchu Marsu $3.7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a dosahují podobných tlaků ve středu planety, kolem 40 GPa.

V Tabulkách 6.1 a 6.2 uvádíme vnější poloměry jednotlivých vrstev, hustotu a Laméovy koeficienty přepočtené z hustoty a seismických rychlostí pro modely A



Obrázek 6.1: Hustota (vlevo) a seismické rychlosti (vpravo) pro modely Marsu.

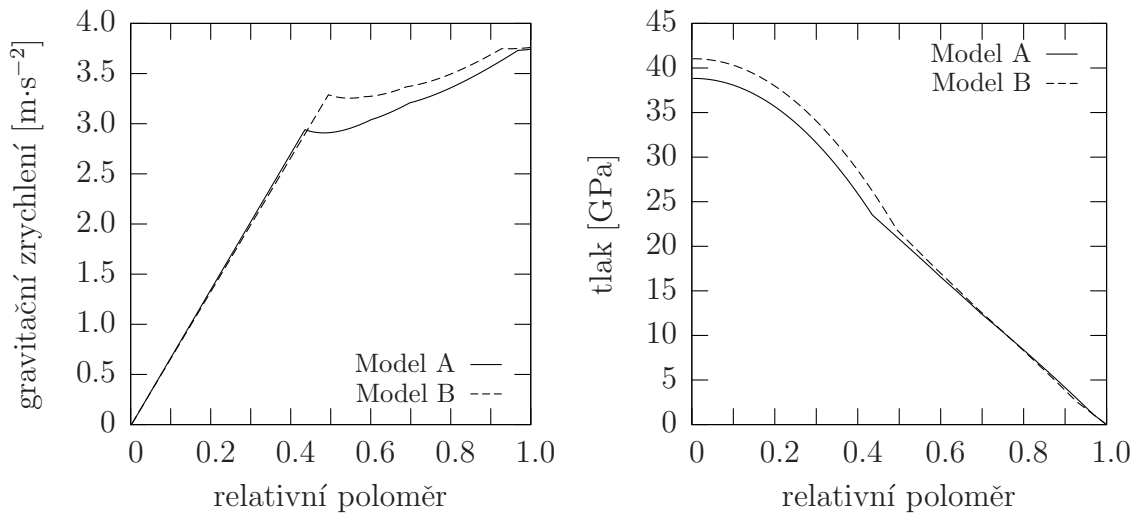
a B. Na Obrázku 6.1 znázorňujeme hustotu a seismické rychlosti a na Obrázku 6.2 gravitační zrychlení a hydrostatický tlak pro oba modely.

V Tabulkách 6.3 a 6.4 uvádíme periody toroidálních a sféroidálních kmitů pro úhlová čísla $n \leq 10$ pro modely A a B. Spektrum vlastních kmitů začíná na 37 minutách pro model A a na 33 minutách pro model B, v obou případech sféroidálním módem ${}_0S_2$. Na Obrázku 6.3 je pro tento mód vykresleno radiální a tečné posunutí. Rozdíly mezi modely, které se projevují v periodách, nemají na průběh posunutí žádný patrný vliv. Na Obrázku 6.4 je vykreslena závislost frekvence toroidálních a sféroidálních kmitů na úhlovém čísle pro model A, pro který jsme dostali podobná spektra frekvencí jako (Gudkova & Zharkov, 2002) pro model Marsu M6.

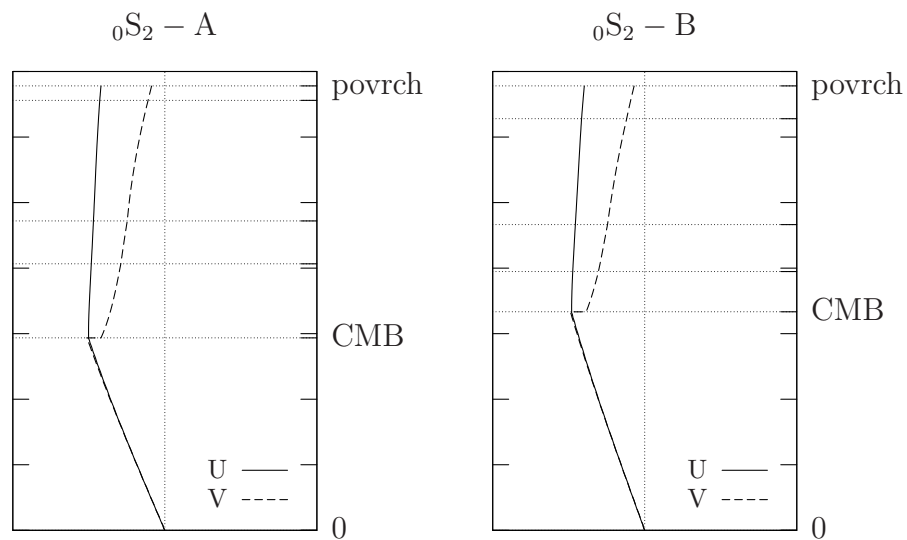
V Tabulce 6.5 shrnujeme povrchová Loveova čísla pro $n = 2, 3, 4$ počítaná pro slapovou frekvenci Marsova měsíce Phobosu $1104/n$ hodiny (Sohl & Spohn, 1997).

| n | Model A | | | Model B | | |
|-----|---------|-------|-------|---------|-------|-------|
| | h_n | l_n | k_n | h_n | l_n | k_n |
| 2 | 0.172 | 0.036 | 0.093 | 0.212 | 0.038 | 0.113 |
| 3 | 0.083 | 0.010 | 0.031 | 0.095 | 0.008 | 0.034 |
| 4 | 0.057 | 0.005 | 0.016 | 0.060 | 0.004 | 0.016 |

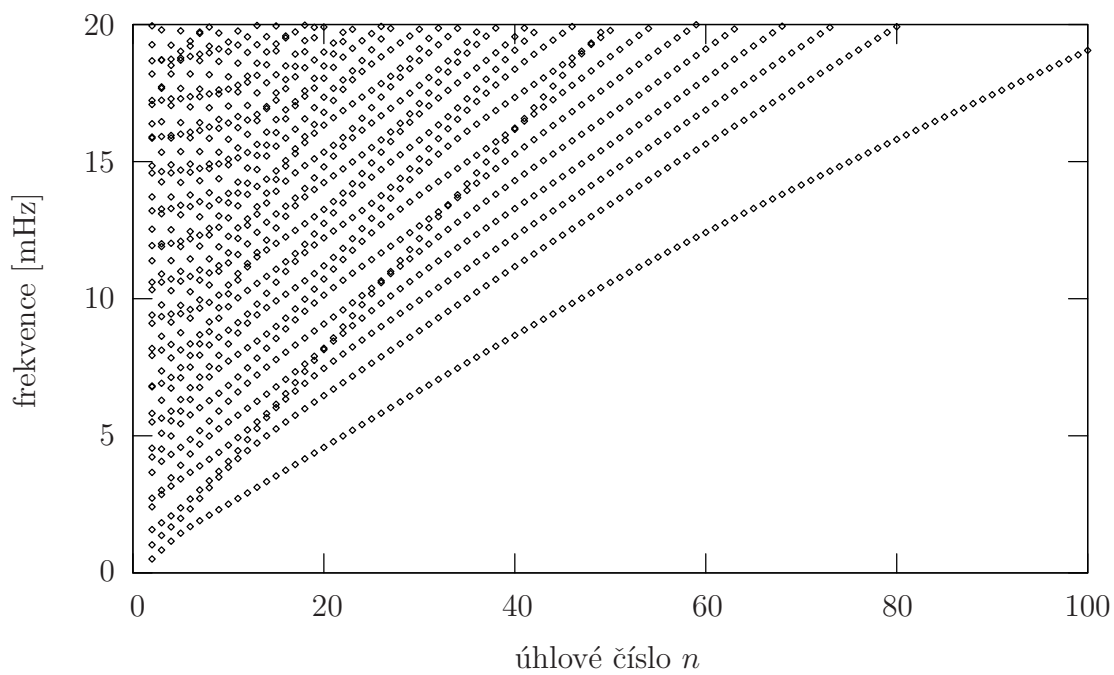
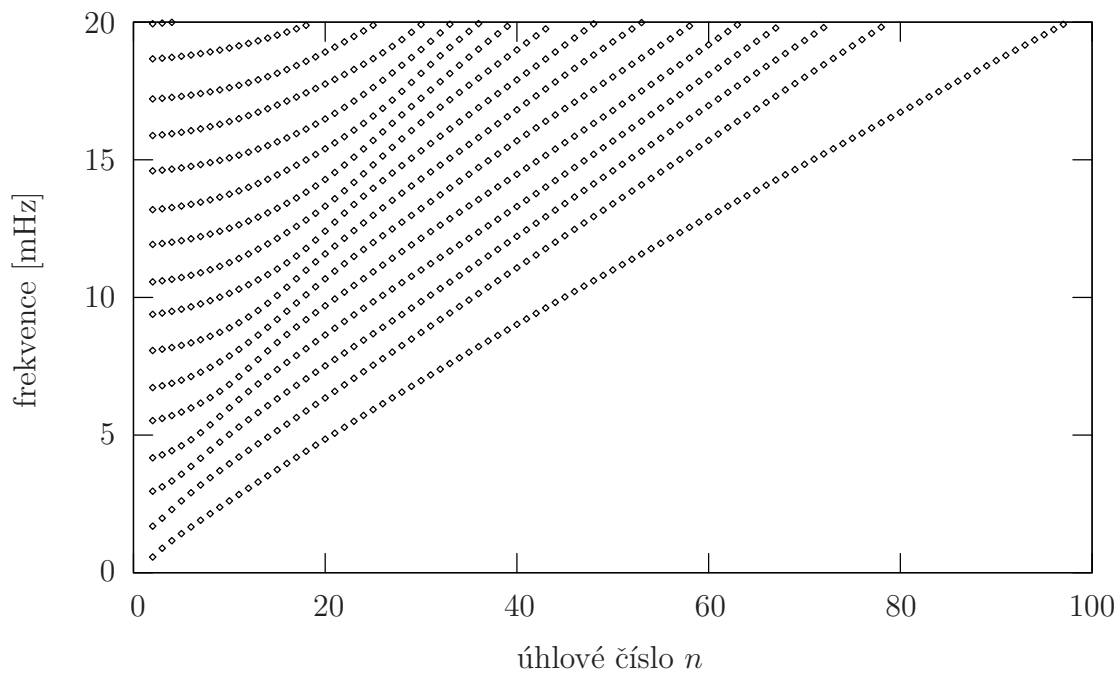
Tabulka 6.5: Loveova čísla pro modely Marsu.



Obrázek 6.2: Gravitační zrychlení (vlevo) a hydrostatický tlak (vpravo) pro modely Marsu.



Obrázek 6.3: Průběh radiálního (U) a tangenciálního (V) posunutí mezi volným povrchem a středem Marsu pro nejdelší sféroidální mód ${}_0S_2$ pro model A vlevo, pro model B vpravo. Na obrázcích jsou vyznačena rozhraní podle Tabulek 6.1 a 6.2.



Obrázek 6.4: Závislost frekvencí toroidálních (horní obrázek) a sféroidálních (dolní obrázek) kmitů na úhlovém čísle pro model Marsu A.

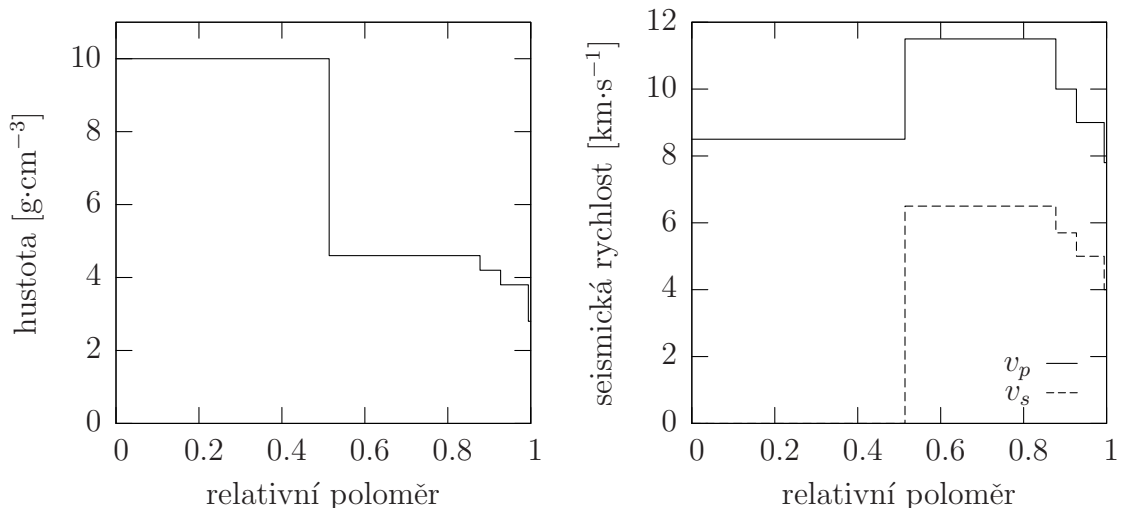
6.2 Venuše

Venuše je svou velikostí a průměrnou hustotou velmi podobná Zemi, přesto však jsou mezi nimi podstatné rozdíly. Předně, na Venuši neprobíhá desková tektonika, povrch planety tvoří asi 100 km mocná litosféra. Použitím gravitačních a topografických dat byla určena průměrná šířka kůry Venuše na 35 km (Konopliv & Sjogren, 1994). Dalším rozdílem je pomalá rotace Venuše s periodou 243 dní a nepřítomnost vnitřního magnetického pole (Phillips & Russell, 1987). Relativně pomalá rotace ale sama o sobě není důvodem, proč Venuše nemá vlastní magnetické pole (Stevenson, 2003). Možným vysvětlením je to, že v kapalném jádře neprobíhá termální konvekce v důsledku špatného ochlazování vnitřku Venuše kvůli nepřítomnosti deskové tektoniky. V jádře Venuše nejsou splněny fázové podmínky pro krystalizaci železa, v důsledku nižších tlaků a vyšších teplot než v Zemi, takže nedochází k diferenciaci na vnější kapalně a vnitřní pevně jádro, a tedy neprobíhá ani geochemická konvekce (Stevenson, 1983).

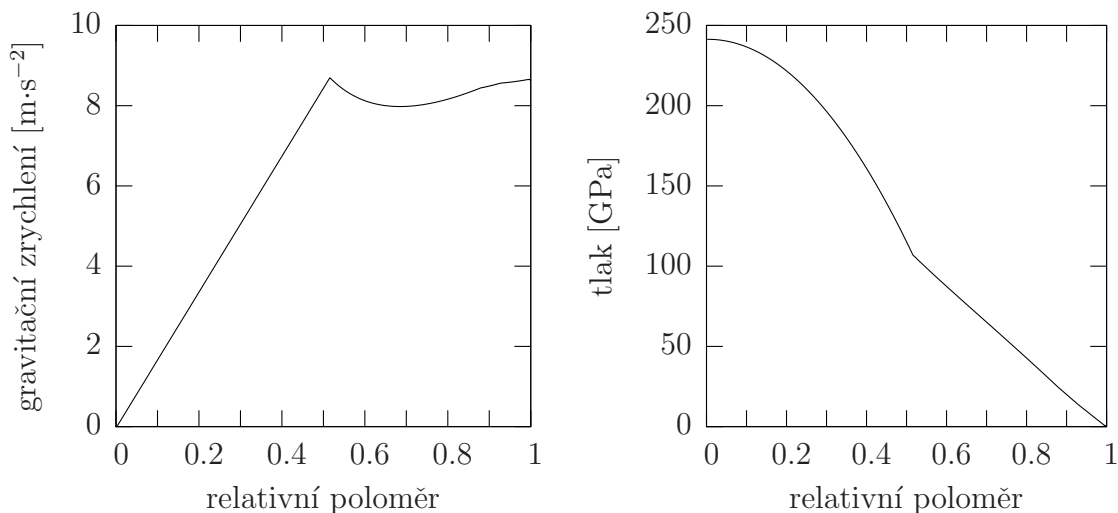
Plášť Venuše rozdělíme na tři vrstvy: svrchní plášť, přechodovou oblast a spodní plášť. Hranice těchto vrstev položíme do hloubek podle (Schubert et al., 2001). Z důvodů nižších tlaků panujících v plášti Venuše položíme endotermní fázový přechod olivínu do hloubky 440 km (410 km pro Zemi) a exotermní fázový přechod do hloubky 740 km (660 km pro Zemi). Poloměr rozhraní jádro – plášť budeme uvažovat 3110 km.

Pro určení hustotní struktury Venuše budeme vycházet z analogie se Zemí. Hustotu kůry budeme uvažovat $2.8 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, pro svrchní plášť použijeme hodnotu $3.8 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, po fázovém přechodu olivínu na β -spinel stoupne hustota v přechodové oblasti na $4.2 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ a ve spodním plášti budeme počítat s hodnotou $4.6 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Konečně pro kapalně jádro budeme počítat s hodnotou $10 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Radiální průběh hustoty pro uvažovaný model Venuše je zakreslen v Obrázku 6.5 vlevo. Na pravé straně obrázku jsou vykresleny použité hodnoty seismických



Obrázek 6.5: Hustota (vlevo) a seismické rychlosti (vpravo) pro model Venuše.



Obrázek 6.6: Gravitační zrychlení (vlevo) a hydrostatický tlak (vpravo) pro model Venuše.

rychlostí s hloubkou, které jsme určili opět z analogie Venuše – Země. Na Obrázku 6.6 je znázorněn průběh gravitačního zrychlení a nárůst tlaku s hloubkou pro model Venuše. V Tabulce 6.6 jsou shrnuty použité parametry pro každou vrstvu, kde místo seismických rychlostí uvádíme elastické Laméovy koeficienty.

Na Obrázku 6.7 jsou vykresleny závislosti frekvencí toroidálních a sféroidálních kmitů na úhlovém čísle. Konkrétní hodnoty period jsou uvedeny v Tabulce 6.7 pro úhlová čísla $n \leq 10$.

V Tabulce 6.8 uvádíme povrchová Loveova čísla pro $n \leq 4$. Loveovo číslo k_2 bylo pro Venuši určeno z časových variací gravitačních koeficientů C_{22} a S_{22} způsobených sluneční periodou, (Konopliv & Yoder, 1996) určili jeho hodnotu na $k_2 = 0.295 \pm 0.066$.

| | poloměr [km] | ρ [g·cm ⁻³] | μ [GPa] | λ [GPa] |
|-----------------|--------------|------------------------------|-------------|-----------------|
| jádro | 3110 | 10.0 | 0 | 722 |
| spodní plášť | 5311 | 4.6 | 194 | 220 |
| přechodová zóna | 5611 | 4.2 | 136 | 147 |
| svrchní plášť | 6016 | 3.8 | 95 | 118 |
| kůra | 6051 | 2.8 | 45 | 81 |

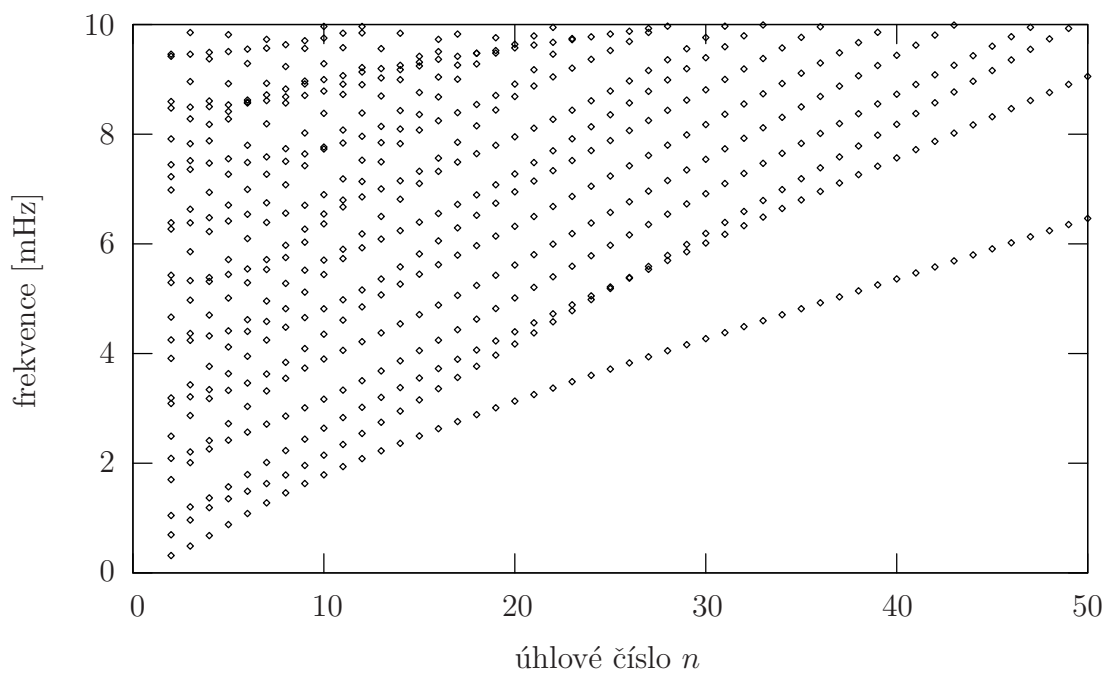
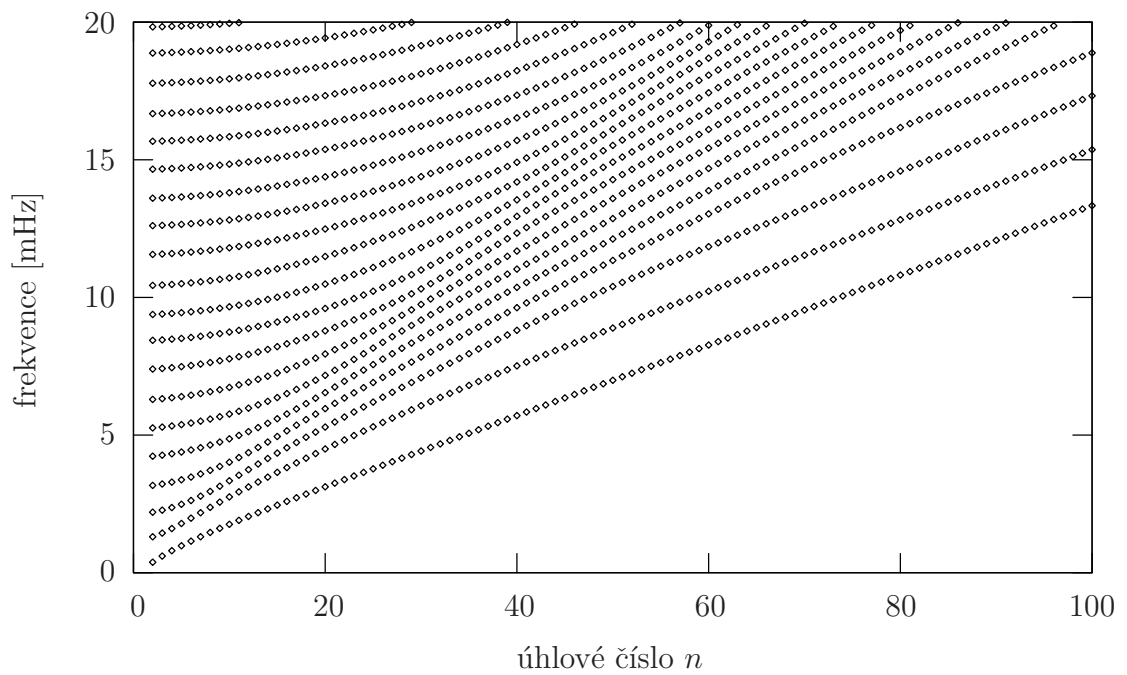
Tabulka 6.6: Parametry pro model Venuše.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 2682.3 | 766.7 | 454.8 | 315.3 | 2 | 3159.1 | 1437.0 | 955.1 | 588.0 |
| 3 | 1653.5 | 694.2 | 440.2 | 310.2 | 3 | 2042.2 | 1037.3 | 830.5 | 497.3 |
| 4 | 1250.3 | 623.1 | 422.4 | 303.8 | 4 | 1469.8 | 840.8 | 731.4 | 442.6 |
| 5 | 1021.7 | 559.2 | 402.4 | 296.2 | 5 | 1135.1 | 739.4 | 637.1 | 413.4 |
| 6 | 871.8 | 504.7 | 381.2 | 287.8 | 6 | 924.1 | 671.8 | 557.9 | 389.6 |
| 7 | 764.9 | 459.1 | 359.7 | 278.6 | 7 | 783.3 | 613.8 | 496.4 | 368.7 |
| 8 | 684.0 | 421.4 | 338.5 | 269.0 | 8 | 685.0 | 560.1 | 448.4 | 349.7 |
| 9 | 620.3 | 389.9 | 318.3 | 259.1 | 9 | 613.6 | 510.5 | 410.2 | 332.2 |
| 10 | 568.7 | 363.3 | 299.5 | 249.1 | 10 | 559.2 | 466.0 | 379.0 | 315.7 |

Tabulka 6.7: Periody vybraných vlastních kmitů pro model Venuše.

| n | h_n | l_n | k_n |
|-----|-------|-------|-------|
| 2 | 0.550 | 0.082 | 0.281 |
| 3 | 0.261 | 0.014 | 0.089 |
| 4 | 0.160 | 0.008 | 0.041 |

Tabulka 6.8: Loveova čísla pro model Venuše.



Obrázek 6.7: Závislost frekvencí toroidálních (horní obrázek) a sféroidálních (dolní obrázek) kmitů na úhlovém čísle pro model Venuše.

6.3 Ledové měsíce

V následujících odstavcích se budeme věnovat vlastním kmitům a slapům ledových měsíců velkých planet Sluneční soustavy. Rozměry ledových měsíců jsou velmi proměnlivé, od desítek kilometrů až po průměr 5262 km největšího měsíce Sluneční soustavy, Jupiterova Ganymedu. (Ganymédés byl milencem boha Dia, původem z Tróje.) Složení měsíců je charakterizováno vysokým obsahem vodního ledu ve vysokotlakých modifikacích. Jejich povrchové teploty se pohybují hluboko pod bodem mrazu, přesto se u některých z různých důvodů uvažuje o existenci vrstvy kapalné vody (podpovrchového oceánu). Zdroj energie je připisován disipaci slapové energie třením. Slapová disipace může být natolik silná, že možná pohání v plášti měsíců konvekci, která má vliv na to, jestli je daný měsíc diferencovaný na ledový plášť a silikátové jádro nebo je led se silikáty promíchán. Alternativním zdrojem energie může být radioaktivní rozpad, který zřejmě hrál významnou roli v počátečních fázích evoluce měsíců. Znalost vnitřní stavby měsíců je velice omezená, proto i parametry pro výpočty jsou často voleny na základě teoretických úvah a nejsou podloženy přímým pozorováním. Zaměříme se na Jupiterův měsíc Europu a Saturnovy měsíce Titan a Enceladus, jejichž parametry jsou uvedeny v Tabulce 6.9 (Hussmann et al., 2007).

| | poloměr r [km] | střední hustota $\bar{\rho}$ [kg.m ⁻³] | gravitační zrychlení na povrchu g [m.s ⁻²] |
|-----------|---------------------|---|---|
| Europa | 1565 | 3010 | 1.32 |
| Titan | 2575 | 1881 | 1.35 |
| Enceladus | 252 | 1610 | 0.113 |

Tabulka 6.9: Základní parametry ledových měsíců.

6.3.1 Europa

Europa je jedním z nejméně šedesáti měsíců Jupitera. Nese jméno jedné z nejméně tolika milenek boha Dia, jinde Jupitera. Podle momentu setrvačnosti Europy lze usoudit, že její vnitřek je diferencovaný na vnitřní převážně železné jádro, vnější silikátové jádro a ledový plášť. Hypotéza existence podpovrchového oceánu oddělujícího jádro a plášť je podpořena magnetometrickým měřením v okolí Europy. Kromě magnetického pole Jupiteru bylo naměřeno i indukované magnetické pole. Jedním z možných vysvětlení je odezva podpovrchového oceánu z vodivého materiálu (Zimmer et al., 2000). Pro výpočty použijeme tři modely podle (Moore & Schubert, 2000). První model (A) bude složen ze tří pevných vrstev – vnitřního železného jádra, vnějšího silikátového jádra a ledového pláště. Ve druhém modelu B budeme uvažovat plášť (o mocnosti 119 km) složený z vrstvy tekuté vody pod 10 km širokou vrstvou ledu, zatímco ve třetím modelu (C) budeme počítat se 100 km širokou vrstvou ledu. Vnější poloměry, hustota a moduly torze jednotlivých vrstev podle (Moore & Schubert, 2000) jsou uvedeny v Tabulce 6.10. Hodnota μ v plášti platí pouze pro ledovou

| | poloměr [km] | ρ [kg.m ⁻³] | μ [GPa] |
|------------------|--------------|------------------------------|-------------|
| železné jádro | 704 | 5150 | 0 |
| silikátové jádro | 1446 | 3300 | 100 |
| ledový plášť | 1565 | 1000 | 1 |

Tabulka 6.10: Parametry vrstev Europy.

vrstvu, pro kapalinu samozřejmě uvažujeme $\mu = 0$. Kvůli nedostatečné znalosti Laméova koeficientu λ použijeme v pevných vrstvách aproximaci tzv. Poissonovým tělesem, $\lambda = \mu$, v kapalně vrstvě pláště použijeme hodnotu μ pro led, $\lambda = 1$ GPa, a pro kapalně jádro odhadneme $\lambda = 100$ GPa.

Na Obrázku 6.8 je vykreslena závislost frekvencí toroidálních kmitů na úhlovém čísle pro modely A a C. Pro model C se jedná o kmity pouze ledové slupky. U modelu A je patrné, že kmity se zvětšujícím se n ztrácejí citlivost na hloubku a "vidí" také pouze svrchní ledovou vrstvu. Záleží tedy na počtu uzlových ploch kmitu, jak rychle se citlivost s hloubkou vytrácí. Výsledky pro model B na Obrázku 6.8 nezobrazujeme, protože frekvence vyšších módů jsou proti základnímu módu ${}_0T_n$ podstatně větší a padly by mimo panel.

V Tabulkách 6.11, 6.12 a 6.13 uvádíme periody toroidálních a sféroidálních kmitů pro úhlová čísla $n \leq 5$ a modely A, B a C. Spektrum vlastních kmitů začíná na 16 minutách pro model A, na 96 minutách pro model B a pro model C dokonce na 183 minutách, ve všech případech sféroidálním módem ${}_0S_2$. Na Obrázku 6.9 je pro tento mód vykresleno radiální a tečné posunutí.

Na Obrázku 6.10 je vykreslena závislost frekvencí sféroidálních kmitů na úhlovém čísle. Pro pevný model A je spektrum tvořeno jednak pozvolna rostoucími větvemi módů, jejichž energie je soustředěna především ve svrchní ledové vrstvě, jednak rychle rostoucími větvemi, pro které dochází k deformaci v celém objemu tělesa. Pro model B spektrum v průsečících větví někdy obsahuje dvojici komplexně sdružených frekvencí. Pro model C nastává dokonce situace, kdy se dvě větve spojují a komplexně sdružené dvojice frekvencí pak zasahují až přes několik desítek úhlových čísel – tzv. bifurkace (dle soukromé korespondence s vedoucím práce).

Je tedy patrné, že existují podstatné rozdíly ve spektrech toroidálních i sféroidálních kmitů zvolených modelů Europy, které by při případném měření měly být dobře rozlišitelné.

V Tabulce 6.14 jsou uvedena slapová Loveova čísla h_2 , l_2 a k_2 pro modely A, B a C. Modely obsahující v plášti kapalnou vrstvu se na povrchu deformují až desetkrát více.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 775.1 | 463.8 | 222.3 | 159.3 | 2 | 966.4 | 537.4 | 395.2 | 296.7 |
| 3 | 568.1 | 393.6 | 198.4 | 158.7 | 3 | 589.2 | 503.7 | 316.0 | 264.4 |
| 4 | 525.7 | 315.9 | 176.8 | 157.0 | 4 | 488.9 | 414.0 | 287.8 | 239.1 |
| 5 | 507.9 | 261.7 | 162.8 | 150.9 | 5 | 469.3 | 333.0 | 268.3 | 215.1 |

Tabulka 6.11: Períody vybraných vlastních kmitů pro model A Evropy.

| n | ${}_0T_n$ [s] | n | ${}_0T_n$ [s] | n | ${}_1T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|-----|---------------|-----|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 5647.1 | 6 | 1569.3 | 2 | 20.0 | 2 | 5740.8 | 3591.7 | 2640.2 | 1455.3 |
| 3 | 3265.0 | 7 | 1346.2 | 3 | 20.0 | 3 | 4417.0 | 2572.4 | 1807.0 | 1154.8 |
| 4 | 2376.4 | 8 | 1179.9 | 4 | 20.0 | 4 | 3791.9 | 2033.5 | 1375.6 | 661.0 |
| 5 | 1885.9 | 9 | 1050.8 | 5 | 20.0 | 5 | 3365.6 | 1676.6 | 1114.5 | 488.6 |

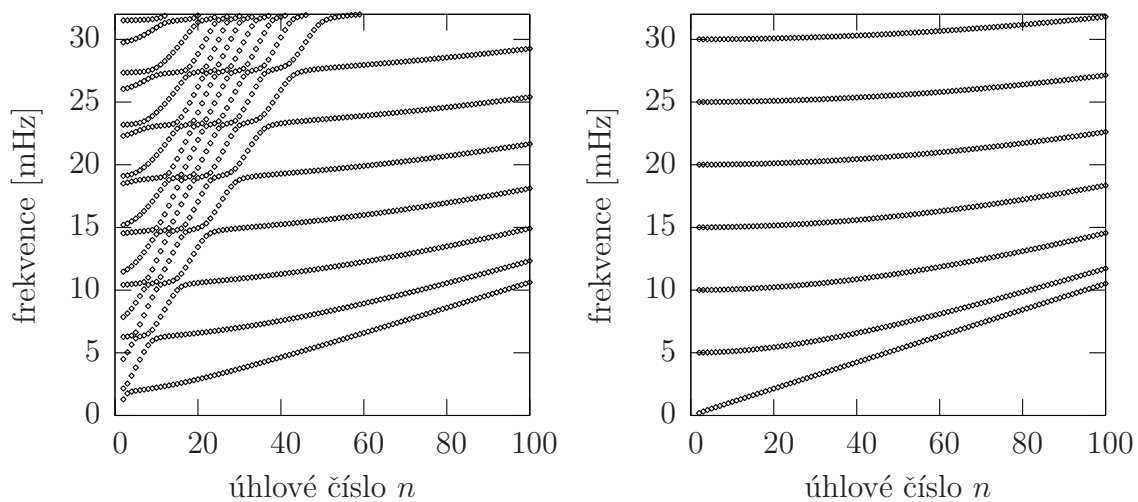
Tabulka 6.12: Períody vybraných vlastních kmitů pro model B Evropy.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 5390.6 | 199.6 | 100.0 | 66.7 | 2 | 10956.8 | 3492.1 | 2793.6 | 1455.4 |
| 3 | 3154.2 | 199.4 | 99.9 | 66.6 | 3 | 9080.6 | 2498.4 | 1955.4 | 1124.7 |
| 4 | 2302.4 | 199.0 | 99.9 | 66.6 | 4 | 7720.6 | 1974.9 | 1442.7 | 667.1 |
| 5 | 1829.4 | 198.6 | 99.8 | 66.6 | 5 | 6771.8 | 1627.0 | 1158.7 | 500.1 |

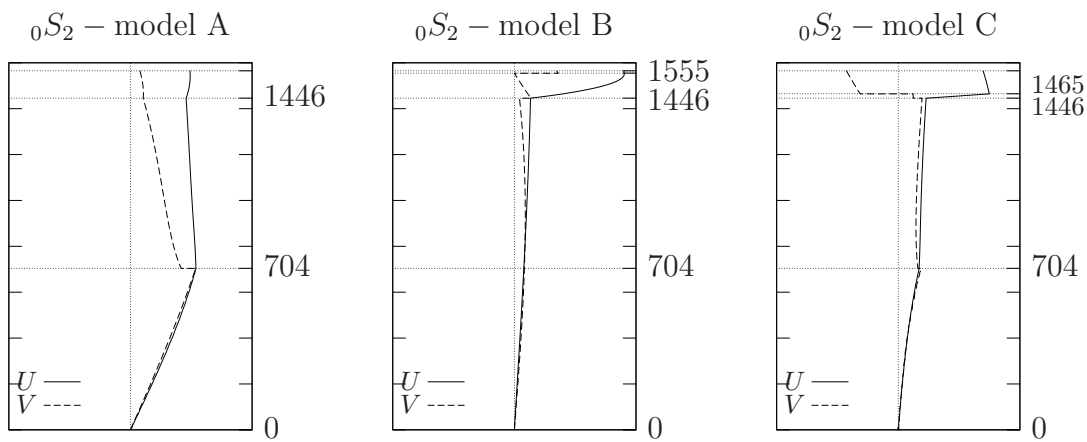
Tabulka 6.13: Períody vybraných vlastních kmitů pro model C Evropy.

| | h_2 | l_2 | k_2 |
|---------|-------|-------|-------|
| Model A | 0.033 | 0.010 | 0.016 |
| Model B | 0.352 | 0.082 | 0.150 |
| Model C | 0.340 | 0.064 | 0.141 |

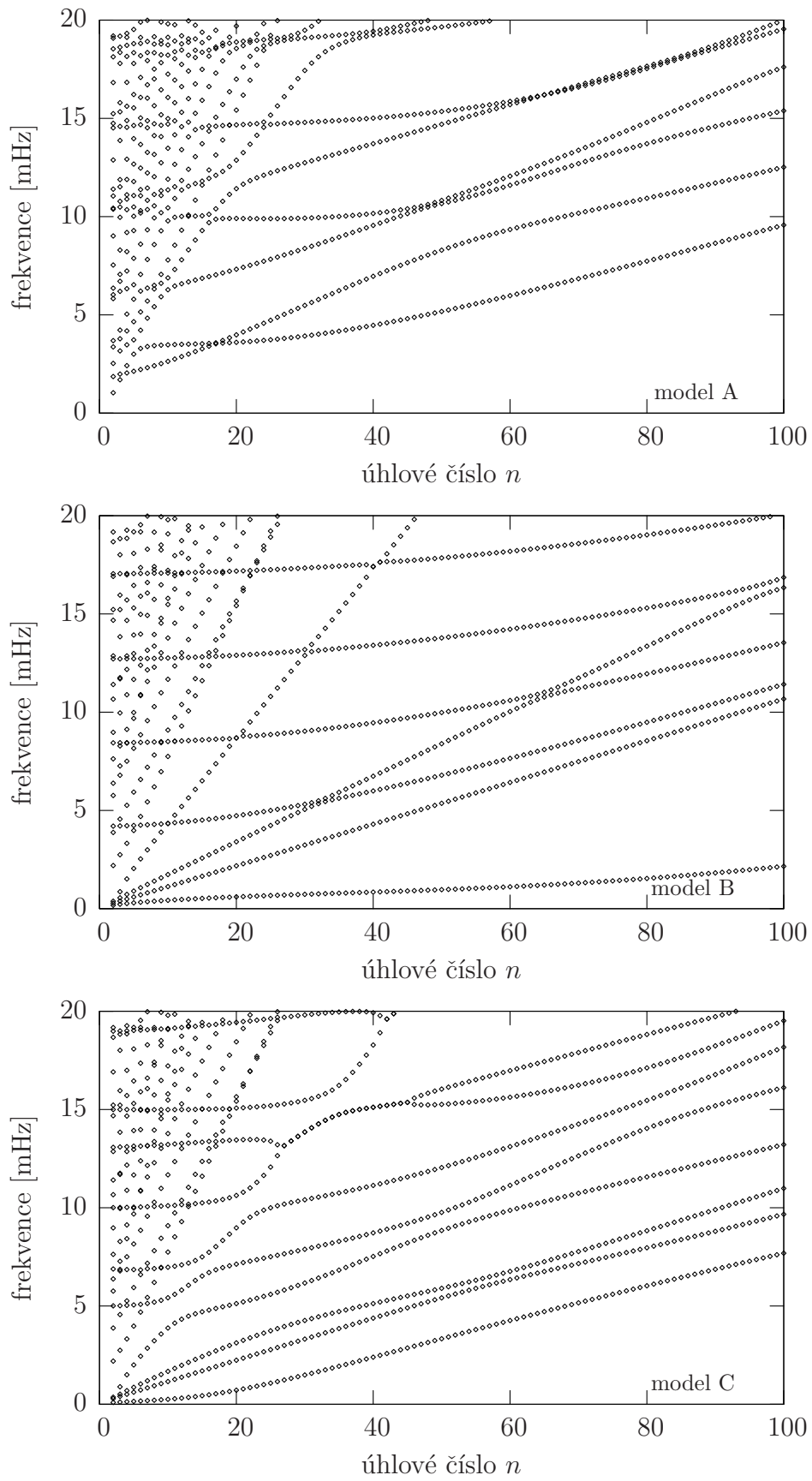
Tabulka 6.14: Povrchová Loveova čísla pro modely Evropy.



Obrázek 6.8: Závislost frekvencí toroidálních kmitů na úhlovém čísle. Vlevo pro model A Evropy, vpravo pro model C.



Obrázek 6.9: Průběh radiálního (U) a tangenciálního (V) posunutí mezi středem a povrchem modelu Evropy pro sféroidální mód ${}_0S_2$. Na obrázku jsou vyznačeny hranice jednotlivých vrstev podle Tabulky 6.10.



Obrázek 6.10: Závislost frekvencí sféroidálních kmitů na úhlovém čísle pro modely A, B a C Europy.

6.3.2 Titan

Titan je největším měsícem Saturnu. Pojmenován byl po dětech bohů Úrana a Gaie zvaných Títáni, z nichž nejmladším byl Kronos alias Saturnus. Jako jediný z ledových měsíců má hustou atmosféru tvořenou hlavně dusíkem a metanem. Pro Titan budeme uvažovat tři rozdílné modely vnitřní stavby podle (Sohl et al., 1995). První model předpokládá, že uvnitř Titanu k diferenciaci materiálu nedošlo, budeme tedy uvažovat homogenní směs ledu a silikátů. V Tabulce 6.15 je tento případ označen jako model A. Další dva modely (B, C) počítají s vnitřní diferenciací na silikátové jádro a ledový plášť. Rozdíl mezi modely B a C spočívá v existenci kapalného oceánu uvnitř pláště. V Tabulce 6.16 jsou uvedeny hustota a moduly torze pro různé materiály, o kterých předpokládáme, že tvoří Titan. Laméův koeficient λ položíme stejně jako dříve v pevných vrstvách roven modulu torze a kapalně vrstvě modulu torze ledu.

| model A | | model B | | model C | |
|----------------|--------------|----------|--------------|------------------------------------|--------------|
| složení | mocnost [km] | složení | mocnost [km] | složení | mocnost [km] |
| led + silikáty | 2575 | led I | 100 | led I | 150 |
| | | led II | 300 | NH ₃ - H ₂ O | 200 |
| | | led V | 75 | led V | 325 |
| | | led VI | 200 | silikáty | 1900 |
| | | silikáty | 1900 | | |

Tabulka 6.15: Tři modely Titanu. Model A je homogenní směsí materiálů, modely B a C jsou složeny z vrstvy silikátů a vrstev vysokotlakých modifikací ledu. V modelu C je navíc kapalná vrstva.

| | ρ [kg.m ⁻³] | μ [GPa] |
|------------------------------------|------------------------------|-------------|
| Led I | 930 | 3.5 |
| NH ₃ - H ₂ O | 950 | 0 |
| Led II | 1180 | 3.5 |
| Led V | 1280 | 3.5 |
| Led VI | 1430 | 3.5 |
| Silikáty | 2895B(3085C) | 65.0 |
| Led + silikáty | 1881 | 14.0 |

Tabulka 6.16: Hustota a moduly torze pro jednotlivé vrstvy modelů Titanu.

Vypočtené periody toroidálních a sféroidálních vlastních kmitů pro modely A, B a C jsou uvedeny v Tabulkách 6.17 až 6.19. Na Obrázku 6.11 je vykreslena závislost frekvencí toroidálních kmitů na úhlovém čísle. Pro model B, stejně jako pro pevný model A Europy, je patrná klesající citlivost na hlubší vrstvy s rostoucím n . Stejně

jako v modelu C Europy dochází i pro toroidální kmitu modelu C Titanu k rychlému tlumení period, jak ukazuje Obrázek 6.11 vpravo.

Na Obrázku 6.12 je vynesena průběh radiálního a tangenciálního posunutí pro sféroidální mód ${}_0S_2$.

Na Obrázku 6.13 je vykreslena závislost frekvence sféroidálních kmitů na úhlovém čísle pro jednotlivé modely Titanu. Pro model B a C vycházejí stejně jako pro modely Europy některá vlastní čísla komplexně sdružená a rovněž dochází k bifurkacím větví, i když méně patrným.

Periody toroidálních a sféroidálních kmitů jsou uvedeny v Tabulce 6.17. Spektrum vlastních kmitů začíná na 40 minutách pro homogenní model A, na 36 minutách pro pevný model B a na 77 minutách pro model C s kapalnou vrstvou. Je zajímavé, že všechny tyto periody náležejí toroidálnímu kmitu ${}_0T_2$.

V Tabulce 6.20 jsou uvedena slapová Loveova čísla, počítaná pro slapovou periodu jeden den. Nejmenší deformace povrchu vyšla pro pevný diferencovaný model B, v modelu C s kapalnou vrstvou stoupne deformace dvacetkrát. K Tabulce 6.20 připojujeme hodnoty viskoelastických Loveových čísel pro stejné modely podle (Sohl et al., 1995). Pokud do hry nevstoupí nízkoviskózní kapalná vrstva, jsou výsledky až překvapivě podobné.

Povrchová Loveova čísla nestlačitelného homogenního modelu můžeme počítat analyticky podle vzorce, který je odvozen v (Melchior, 1978),

$$h_2 = \frac{5}{2} \left(1 + \frac{19\mu}{2g\rho R} \right)^{-1}, \quad (6.1)$$

kde g je gravitační zrychlení na povrchu a R poloměr modelu. Prostým dosazením dostaneme pro nestlačitelný nediferencovaný model Titanu $h_2 = 0.117$. Této hodnoty jsme schopni dosáhnout na pět platných míst zvýšením nestlačitelnosti v modelu A, tj. zvýšením Laméova koeficientu λ o šest řádů oproti původní hodnotě. Při dalším navýšení λ o několik řádů náš program neposkytuje stabilní výsledky. Explicitní formulace úlohy pro limitu $\lambda \rightarrow \infty$ není přímočará.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 2371.1 | 831.1 | 564.0 | 430.6 | 2 | 2199.1 | 1235.5 | 713.5 | 609.4 |
| 3 | 1534.5 | 702.3 | 499.1 | 390.8 | 3 | 1493.3 | 925.1 | 611.8 | 506.2 |
| 4 | 1164.1 | 610.6 | 448.9 | 358.4 | 4 | 1172.9 | 737.7 | 537.8 | 438.1 |
| 5 | 964.5 | 541.6 | 408.7 | 331.6 | 5 | 976.7 | 615.8 | 480.0 | 390.9 |

Tabulka 6.17: Períody vybraných vlastních kmitů pro homogenní model A Titanu.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 2123.4 | 915.0 | 519.1 | 359.0 | 2 | 1617.6 | 1203.8 | 731.9 | 593.3 |
| 3 | 1697.0 | 684.3 | 490.8 | 325.2 | 3 | 1289.8 | 1015.3 | 598.8 | 520.4 |
| 4 | 1449.2 | 585.1 | 445.2 | 315.0 | 4 | 1099.3 | 928.7 | 520.5 | 462.7 |
| 5 | 1264.1 | 543.3 | 393.6 | 307.1 | 5 | 1000.5 | 833.3 | 478.2 | 408.9 |

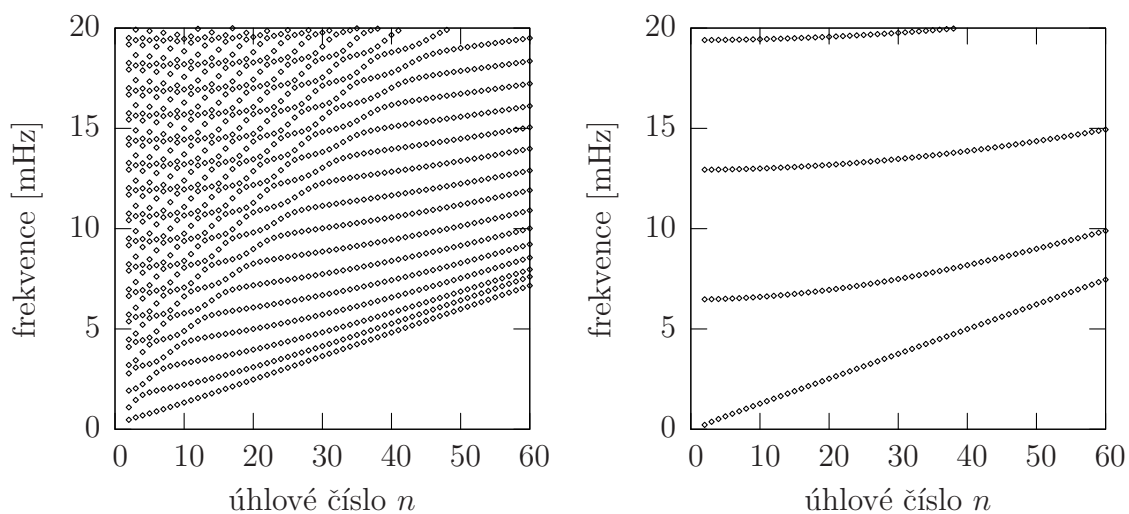
Tabulka 6.18: Períody vybraných toroidálních a sféroidálních vlastních kmitů pro vrstevnatý model B Titanu, neobsahující kapalinu.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 4592.5 | 154.4 | 77.3 | 51.5 | 2 | 3102.0 | 2218.5 | 1245.9 | 934.2 |
| 3 | 2684.2 | 154.2 | 77.3 | 51.5 | 3 | 2190.1 | 1516.8 | 1030.6 | 824.5 |
| 4 | 1958.8 | 154.0 | 77.2 | 51.5 | 4 | 1696.8 | 1171.9 | 955.4 | 738.1 |
| 5 | 1556.2 | 153.7 | 77.2 | 51.5 | 5 | 1348.3 | 994.7 | 876.2 | 664.0 |

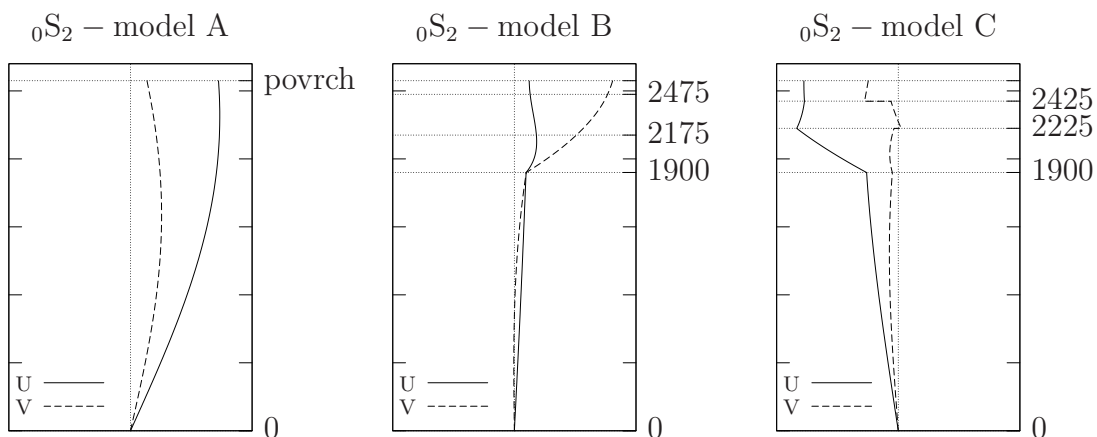
Tabulka 6.19: Períody vybraných toroidálních a sféroidálních vlastních kmitů pro vrstevnatý model C Titanu, zahrnující kapalnou vrstvou.

| | my | | Sohl et al., 1995 | |
|---------|-------|-------|-------------------|-------|
| | h_2 | k_2 | h_2 | k_2 |
| model A | 0.123 | 0.071 | 0.119 | 0.072 |
| model B | 0.061 | 0.028 | 0.059 | 0.026 |
| model C | 1.161 | 0.313 | 1.19 | 0.359 |

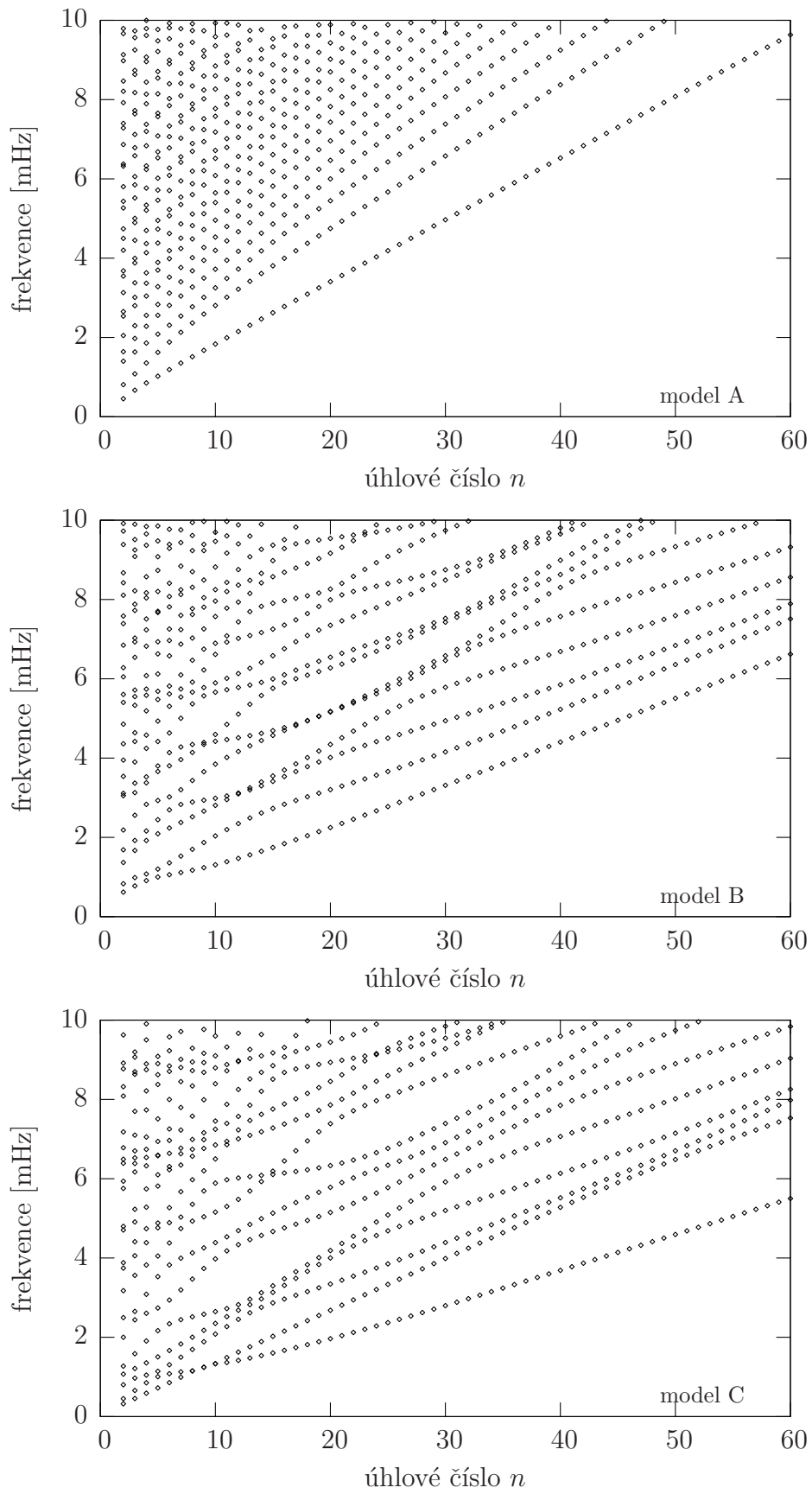
Tabulka 6.20: Loveova čísla pro modely Titanu.



Obrázek 6.11: Závislost frekvencí toroidálních kmitů na úhlovém čísle. Vlevo pro model B Titanu, vpravo pro model C.



Obrázek 6.12: Průběh radiálního (U) a tangenciálního (V) posunutí mezi středem a povrchem modelu Titanu pro sféroidální mód ${}_0S_2$. Na obrázku jsou vyznačeny hranice jednotlivých vrstev podle Tabulky 6.15.



Obrázek 6.13: Závislost frekvencí sféroidálních kmitů na úhlovém čísle pro modely A, B a C Titanu.

6.3.3 Enceladus

Enceladus je menším měsícem Saturnu, jedním z šedesáti. Enkelados byl jedním z Gigantů, tedy mladším bratrem boha Saturna; v Řecku je dodnes označován za příčinu zemětřesení. Fascinuje svou dichotomií – existencí chladné oblasti kolem severního pólu pokrytou krátery a existencí výrazně teplejší oblasti s hladkým povrchem a několika paralelními prasklinami kolem pólu jižního. Nad oblastí jižního pólu byla dokonce pozorována atmosféra, pravděpodobně tvořená vodní párou. Tepelný tok na jižní straně Enceladu je natolik velký, že jej není možné vysvětlit energií z radioaktivních rozpadů v silikátech. Jak ukazují (Maierová, 2006) a (Tobie et al., 2007), zvyšuje kapalná vrstva uvnitř Enceladu disipační výkon. Budeme uvažovat tři modely Enceladu podle (Tobie et al., 2007). Modelem A zachytíme diferenciaci Enceladu na ledový plášť a silikátové jádro, model B zahrne i 10 km širokou kapalnou vrstvu na rozhraní jádro – plášť a v modelu C budeme uvažovat kapalnou vrstvu širokou 40 km. Poloměry jednotlivých vrstev, hustota a moduly torze jsou uvedeny v Tabulce 6.21. Pro jednoduchost volíme hustotu i modul torze ledu a vody stejné a Laméův koeficient λ pevných vrstev položíme roven modulu torze.

| | poloměr [km] | ρ [kg.m ⁻³] | μ [GPa] |
|------------------|--------------|------------------------------|-------------|
| silikátové jádro | 170 | 3000 | 70.0 |
| ledový plášť | 252 | 1000 | 3.3 |

Tabulka 6.21: Parametry vrstev Enceladu.

Pro toroidální kmity modelů Enceladu platí stejně jako pro předchozí měsíce, že čím tenší vrstva ledu se na povrchu modelu nachází, tím rychleji se tlumí vyšší módy oproti základnímu módu ${}_0T_n$. Závislost frekvencí toroidálních kmitů na úhlovém čísle pro modely A a B je vykreslena na Obrázku 6.14.

Periody toroidálních a sféroidálních kmitů všech modelů jsou zapsány do Tabulek 6.22 až 6.24. Spektrum vlastních kmitů začíná na 4 minutách pro pevný model A a na 22 minutách pro modely B a C. Pro pevný model je nejdelší perioda toroidálního kmítu ${}_0T_2$, zatímco pro modely B a C s kapalnou vrstvou perioda sféroidálního módu ${}_0S_2$. Na Obrázku 6.15 je pro tento mód vykresleno radiální a tečné posunutí.

Závislost frekvencí na úhlovém čísle pro sféroidální módy ukazuje Obrázek 6.16.

V Tabulce 6.25 jsou uvedena slapová Loveova čísla, počítaná pro slapovou periodu jeden den. Nejmenší deformace povrchu jsme dostali pro pevný model A, v modelu B stouply hodnoty h_2 a k_2 dvacetkrát a v modelu C dokonce čtyřicetkrát.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 236.5 | 86.8 | 57.9 | 36.6 | 2 | 178.0 | 121.0 | 74.3 | 60.7 |
| 3 | 184.9 | 66.6 | 51.4 | 35.7 | 3 | 140.2 | 107.0 | 57.8 | 53.4 |
| 4 | 153.0 | 60.9 | 43.3 | 34.7 | 4 | 121.8 | 95.3 | 52.3 | 44.7 |
| 5 | 130.2 | 57.9 | 38.3 | 32.6 | 5 | 112.0 | 83.0 | 48.3 | 40.6 |

Tabulka 6.22: Periody vybraných vlastních kmitů pro model A Enceladu.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 407.9 | 76.2 | 39.4 | 26.5 | 2 | 1336.6 | 242.1 | 242.1 | 126.3 |
| 3 | 247.7 | 73.7 | 39.1 | 26.4 | 3 | 757.3 | 171.9 | 170.3 | 111.1 |
| 4 | 182.8 | 70.8 | 38.7 | 26.2 | 4 | 475.8 | 135.4 | 135.4 | 96.5 |
| 5 | 146.1 | 67.5 | 38.1 | 26.1 | 5 | 326.9 | 116.7 | 110.6 | 83.3 |

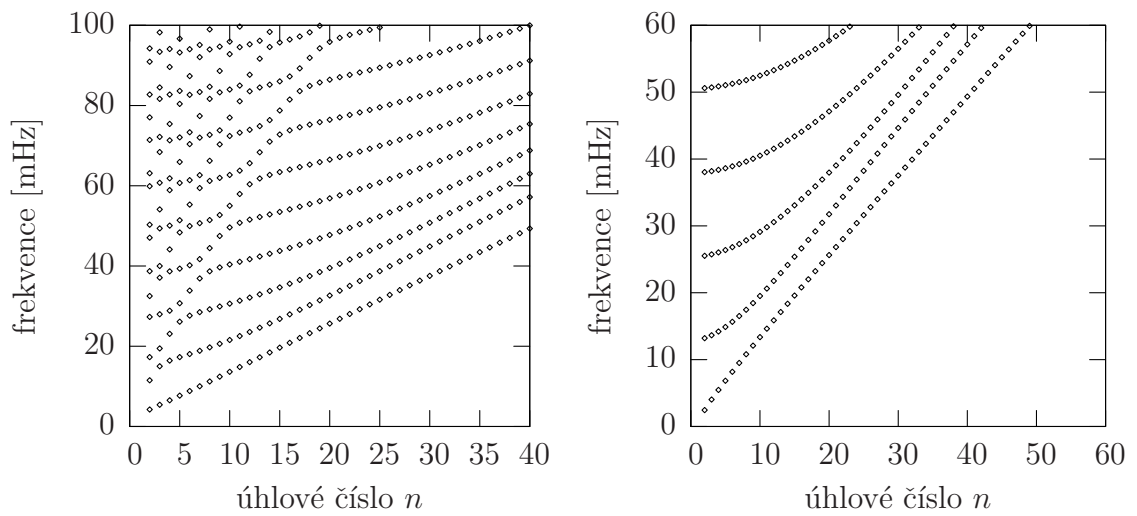
Tabulka 6.23: Periody vybraných vlastních kmitů pro model B Enceladu.

| n | ${}_0T_n$ [s] | ${}_1T_n$ [s] | ${}_2T_n$ [s] | ${}_3T_n$ [s] | n | ${}_0S_n$ [s] | ${}_1S_n$ [s] | ${}_2S_n$ [s] | ${}_3S_n$ [s] |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 2 | 441.6 | 46.1 | 23.3 | 15.8 | 2 | 1312.0 | 263.5 | 234.1 | 132.6 |
| 3 | 263.4 | 45.7 | 23.3 | 15.6 | 3 | 859.5 | 186.3 | 162.6 | 115.4 |
| 4 | 193.2 | 45.1 | 23.2 | 15.5 | 4 | 606.4 | 144.3 | 128.1 | 99.8 |
| 5 | 153.8 | 44.4 | 23.1 | 15.5 | 5 | 439.9 | 117.8 | 108.2 | 86.0 |

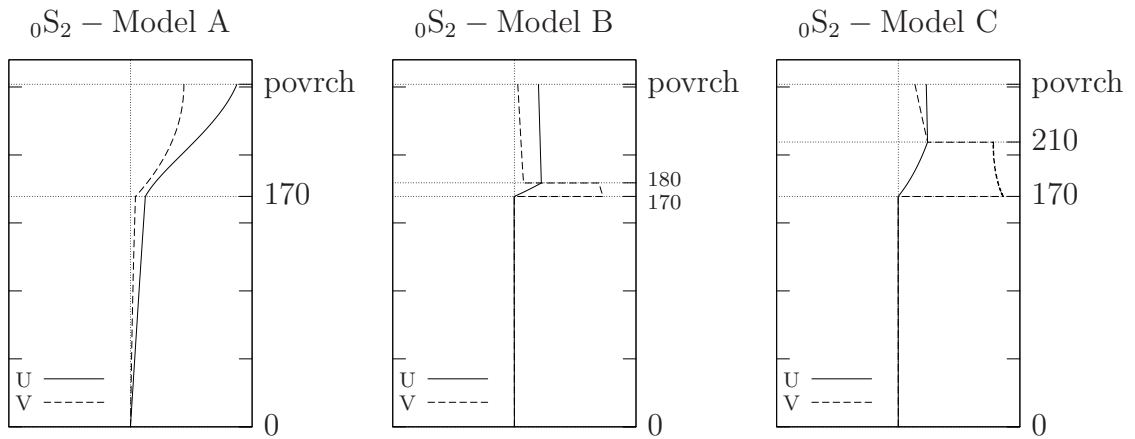
Tabulka 6.24: Periody vybraných vlastních kmitů pro model C Enceladu.

| | h_2 | l_2 | k_2 |
|---------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Model A | $0.86 \cdot 10^{-3}$ | $0.53 \cdot 10^{-3}$ | $0.27 \cdot 10^{-3}$ |
| Model B | $1.52 \cdot 10^{-2}$ | $0.27 \cdot 10^{-2}$ | $0.40 \cdot 10^{-2}$ |
| Model C | $3.07 \cdot 10^{-2}$ | $0.60 \cdot 10^{-2}$ | $0.80 \cdot 10^{-2}$ |

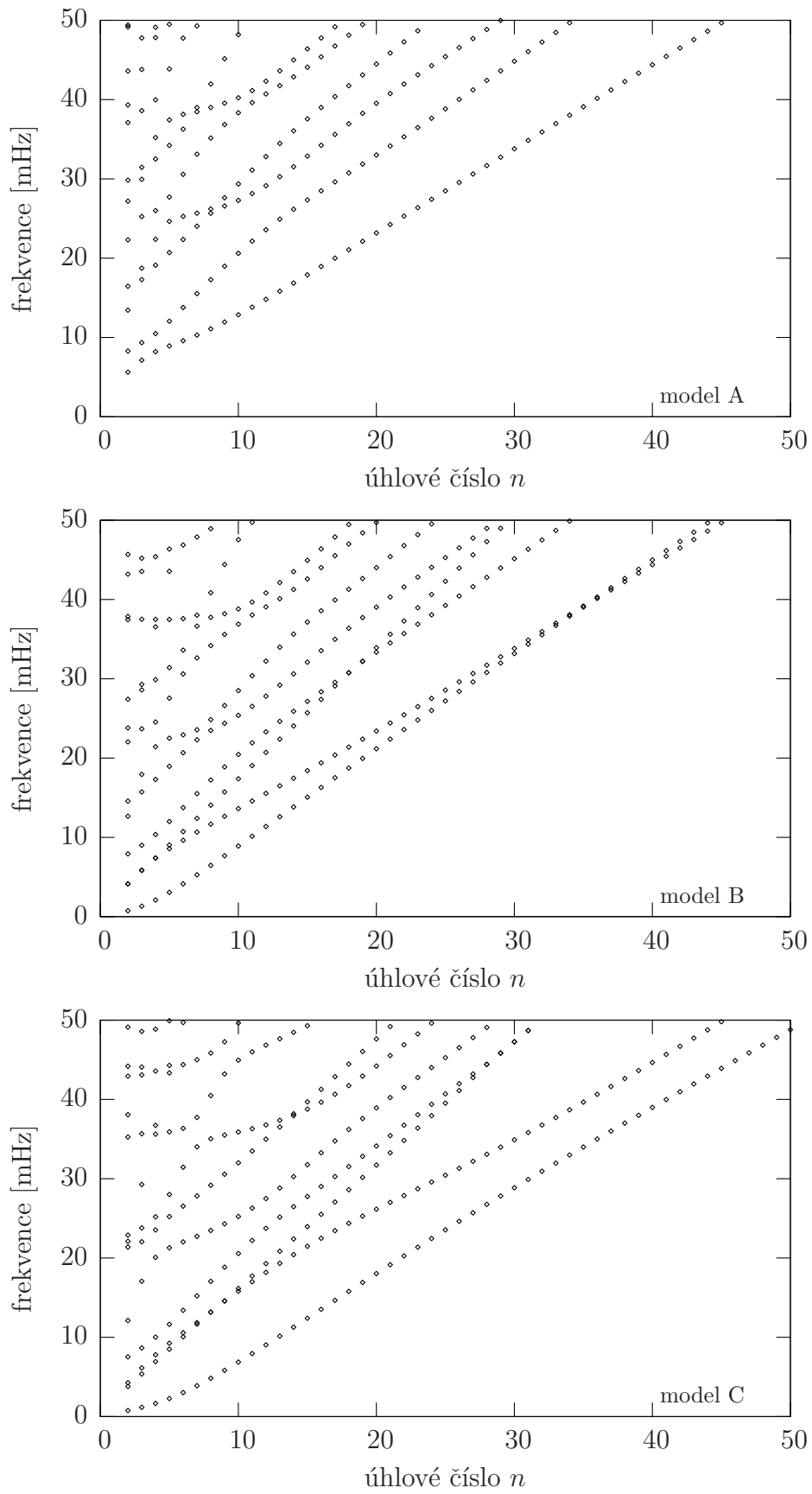
Tabulka 6.25: Loveova čísla pro modely Enceladu.



Obrázek 6.14: Závislost frekvencí toroidálních kmitů na úhlovém čísle. Vlevo pro model A Enceladu, vpravo pro model B.



Obrázek 6.15: Průběh radiálního (U) a tangenciálního (V) posunutí mezi středem a povrchem modelu Enceladu pro sféroidální mód ${}_0S_2$. Na obrázku jsou vyznačeny hranice jednotlivých vrstev podle Tabulky 6.21.



Obrázek 6.16: Závislost frekvencí sféroidálních kmitů na úhlovém čísle pro modely A, B a C Enceladu.

Kapitola 7

Závěr

V práci jsme studovali vlastní kmity a slapy několika planet a měsíců. Odvodili jsme pohybovou rovnici v Lagrangeově tvaru, která společně s Poissonovou rovnicí pro přírůstkový potenciál a reologickým vztahem pro elastický materiál popisuje deformaci kontinua. Jako neznámé v této soustavě vystupují tři složky vektoru posunutí a přírůstkový potenciál. Rozkladem rovnic do sférických harmonických funkcí jsme získali neznámé závislé pouze radiálně a zároveň se úloha pro vlastní kmity rozpadla na toroidální a sféroidální část. Pro diskretizaci v radiálním směru jsme použili Čebyševovy polynomy. Pro vlastní kmity jsme dostali maticové vlastní problémy zvláště pro toroidální a zvláště pro sféroidální část pole posunutí. V případě slapů, kde frekvence není neznámou, ale je dána vnějším slapovým potenciálem, pak úloha přešla na řešení nehomogenní soustavy lineárních algebraických rovnic.

Metodu jsme testovali na jednoduchém modelu Země složeného ze tří vrstev proti příbuzné metodě a programu pro výpočet period vlastních kmitů a dále na modelu Země PREM ve vrstevnaté aproximaci, kde jsme rovněž dosáhli dobré shody s tabelovanými hodnotami.

Počítali jsme periody vlastních kmitů a slapová Loveova čísla pro dva modely Marsu lišící se velikostí kapalného jádra a tloušťkou kůry. Nejdelší perioda sféroidálního kmitu ${}_0S_2$ prvního modelu vyšla 33 minut a Loveova čísla $h_2 = 0.172$ a $k_2 = 0.093$. Pro druhý model jsme obdrželi periodu kmitu ${}_0S_2$ 37 minut a Loveova čísla $h_2 = 0.212$ a $k_2 = 0.113$.

Pro nedostatek dostupných dat jsme sestavili model Venuše na základě analogie se Zemí. Pro tento model jsme našli periodu ${}_0S_2$ 53 minut a Loveova čísla $h_2 = 0.550$ a $k_2 = 0.281$.

Pro modely ledových měsíců Europy, Titanu a Enceladu jsme diskutovali vliv kapalné vrstvy v ledovém plášti na spektra vlastních módů a velikosti Loveových čísel.

Dosažené výsledky mohou být nápomocny pro určení vnitřní struktury jednotlivých těles.

Literatura

- [1] Agnew, D. C., 2007. Earth tides, in *Treatise on Geophysics, Vol. 3: Geodesy*, ed. by Herring, T., Elsevier, 163–195.
- [2] Dahlen, F. A. & Tromp, J., 1998. *Theoretical Global Seismology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [3] Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L., 1981. Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25, 297–356.
- [4] Fang, M., 1998. Static deformation of the outer core, in *Dynamics of the Ice Age Earth: A Modern Perspective*, ed. by P. Wu, Trans Tech Publ., Zürich, Switzerland, 155–190.
- [5] Farrell, W. E., 1972. Deformation of the Earth by surface loads, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 10, 761–797.
- [6] Fornberg, B., 1999. *Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge, New York.
- [7] Hanyk, L., 1999. Viscoelastic response of the Earth: Initial-value approach, *dizertační práce*, MFF UK, Praha.
<http://geo.mff.cuni.cz/theses.htm>
- [8] Hanyk, L., Matyska, C. & Yuen, D. A., 2002. Determination of viscoelastic spectra by matrix eigenvalue analysis, in *Ice Sheets, Sea Level and the Dynamic Earth*, ed. by Mitrovica, J. X. & Vermeersen, B. L. A., Geodynamics Series, 29, AGU, 257–273.
- [9] Hussmann, H., Sotin, C. & Lunine, J. I., 2007. Interiors and evolution of icy satellites, in *Treatise on Geophysics, Vol. 10: Planets and Moons*, ed. by Spohn, T., Elsevier, 509–539.
- [10] Chinnery, M. A., 1975. The static deformation of an Earth with a fluid core: A physical approach, *Geophys. J. R.*, 42, 461–475.
- [11] Konopliv, A. S. & Sjogren, W. L., 1994. Venus spherical harmonic gravity model to degree and order 60, *Icarus*, 112, 42–54.

- [12] Konopliv, A. S. & Yoder, C. F., 1996. Venusian k_2 tidal Love number from Magellan and PVO tracking data, *Geophys. Res. Lett.*, 23, 1857–1860.
- [13] Longman, I. M., 1963. A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads, 2. Computations and numerical results, *J. Geophys. Res.*, 68, 485–496.
- [14] Maierová, P., 2006. Vliv slapového zahřívání na děje v nitrech ledových měsíců, *bakalářská práce*, MFF UK, Praha.
<http://geo.mff.cuni.cz/theses.htm>
- [15] Martin, R. et al., 1993. *Slovník Řecko-Římské mytologie a kultury*, EWA, Praha.
- [16] Martinec, Z., 1984. Free oscillations of the Earth, *Travaux Géophys.*, 591, 117–236.
- [17] Martinec, Z., 2003. *Continuum Mechanics (Lecture Notes)*.
<http://geo.mff.cuni.cz/vyuka.htm>
- [18] Masters, G., Barmine, M. & Kientz, S., 2007. *Mineos, User Manual, Ver. 1.0*, California Institute of Technology.
<http://www.geodynamics.org>
- [19] Matyska, C., 1982. Optimalizace stacionární rovnice vedení tepla podle pravé strany – teplotní pole pod středooceánskými hřbety, *diplomová práce*, MFF UK, Praha.
- [20] Melchior, P., 1978. *The Tides of the Planet Earth*, Pergamon Press, Oxford.
- [21] Moore, W. B. & Schubert, G., 2000. The tidal response of Europa, *Icarus*, 147, 317–319.
- [22] Phillips, J. L. & Russell, C. T., 1987. Upper limit on the intrinsic magnetic field of Venus, *J. Geophys. Res.*, 92, 2253–2263.
- [23] Schubert, G., Turcotte, D. L. & Olson, P., 2001. *Mantle Convection in the Earth and Planets*, Cambridge University Press, United Kingdom, 640–681.
- [24] Sohl, F., Sears, W. D. & Lorenz, R. D., 1995. Tidal dissipation on Titan, *Icarus*, 115, 278–294.
- [25] Stevenson, D. J., 2003. Planetary magnetic fields, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 208, 1–11.
- [26] Stevenson, D. J., Spohn, T. & Schubert, G., 1983. Magnetism and thermal evolution of the terrestrial planets, *Icarus*, 54, 466–489.
- [27] Tobie, G., Čadek, O. & Sotin, C., 2008. Solid tidal friction above a liquid water reservoir as the origin of the South Pole Hotspot on Enceladus, *Icarus*, v tisku.

- [28] Wahr, J. M., 1989. Earth tides, in *The Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*, ed. by James, D. E., VNR, New York, 359–363.
- [29] Woodhouse, J. H. & Deuss, A., 2007. Theory and observation – Earth’s free oscillation, in *Treatise on Geophysics, Vol. 1: Seismology and Structure of the Earth*, ed. by Romanowitz, B. & Dziewonski, A., Elsevier, 31–65.
- [30] Zimmer, C., Khurana, K. K. & Kivelson, M. G., 2000. Subsurface oceans on Europa and Callisto: Constraints from Galileo magnetometer observations, *Icarus*, 147, 329–347.