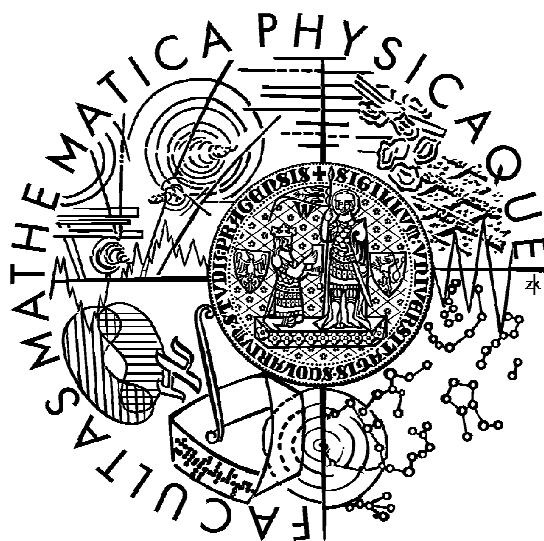


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavla Procházková

Historický vývoj názorů na tvar Země

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Novotný, CSc.

Studijní program: Obecná fyzika

2008

Děkuji doc. RNDr. Oldřichu Novotnému, CSc., za odborné vedení při vypracování této bakalářské práce, za jeho trpělivost, všestrannou pomoc, věnovaný čas a přínosné odborné rady.

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne: 16. 7. 2008

Pavla Procházková

Obsah

Obsah	3
Abstrakt	4
Úvod	6
1 První názory na tvar Země	7
2 Počátky měření velikosti Země	9
3 Triangulace	11
3.1 Triangulace a význam dalekohledu v jejím rozvoji	11
3.2 Země není kulatá	12
4 Geodetická a geocentrická šířka	15
5 Zploštění Země	18
5.1 Gravimetrická metoda	18
5.2 Geometrická metoda určování zploštění založená na stupňových měřeních	20
5.3 Družicové metody	22
6 Geoid jako tvar Země	24
6.1 Družicová měření	24
6.2 Radiová interferometrie a globální poziční systém	26
6.3 Gravimetrická metoda	27
7 Geodetický referenční systém	30
8 Tíhové pole tuhé homogenní rotující kulové Země	32
8.1 Gravitační potenciál	32
8.2 Výpočet odstředivého potenciálu	33
8.3 Rovnice ekvipotenciálních ploch	34
9 První členy rozvoje tíhového potenciálu pro reálnou Zemi	37
10 Nadmořské výšky	42
Závěr	46
Literatura	47

Název práce: Historický vývoj názorů na tvar Země

Autorka: Pavla Procházková

Katedra (ústav): Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Novotný, CSc.

e-mail vedoucího: on@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce je zaměřena na vývoj názoru na tvar Země od prvních starověkých představ až po moderní měřicí metody. Součástí jsou i odvození tíhového potenciálu pro Zemi jako homogenní rotující koule a Zemi tvaru sféroidu. Čtenář se dozví základní informace o měřících metodách tvaru Země, které lidstvo postupně používalo. Práce zároveň sleduje, jak výsledky těchto metod ovlivnily názor na tvar Země. První vědecká měření započala již ve 2. století př.n.l., kdy Eratosthenes provedl první stupňová měření. Dalším důležitým krokem byl objev triangulace a následně dalekohledu, který umožnil měřit do velké vzdálenosti. Posledním velkým zlomovým okamžikem v těchto měřeních byl rozvoj letů do vesmíru a satelitních měření. V posledních desetiletích dochází k širokému využití těchto metod ve vědě a v praxi díky novým přesným metodám měření velkých vzdáleností pomocí laserů. V závěru práce jsou uvedeny různé druhy dnes používaných nadmořských výšek a způsoby jejich měření.

Klíčová slova: tvar Země, historický přehled, geoid, sféroid, družicové metody

Title: Historical development of the concept on the figure of the Earth

Author: Pavla Procházková

Department: Department of Geophysics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Novotný, CSc.

Supervisor's e-mail address: on@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: This work is focused on the development of the concept on figure of the Earth since the first ancient ideas until modern measurement methods. Parts of the work are derivations of gravity potential for the Earth as a homogenous rotating sphere and for the Earth as a spheroid. The reader will be acquainted with basic information about measuring methods of the Earth shape which humankind used in the past. The work also follows how results of these methods have influenced opinion on figure of the Earth. First scientific measurements have begun in the 2nd

century BC when Eratosthenes made the first arc measurements. The next important step was the invention of triangulation and telescope, which allowed to measure long distances. The last big break event in these measurements was development of space flights and satellite measurements. In the end of the work we describe different types of presently used altitudes and their measurement techniques.

Keywords: figure of the Earth, historical review, geoid, spheroid, satellite method.

Úvod

Tato práce si klade za cíl poskytnout přehled o vývoji názorů na tvaru Země. Práce by měla být srozumitelná pro široké spektrum čtenářů a měla by být schopna poskytnout základní informace pro zájemce o tento obor poznání. První úvahy o tom, jak vlastně vypadá naše planeta, zaměstnávaly lidskou mysl již od starověku. Tak jako v jiných vědeckých disciplínách byly i v tomto oboru lidské znalosti silně závislé na přesnosti měření a vynálezech různých měřicích technik.

Práce bude sledovat právě dopad technického vývoje lidstva na jeho schopnost určit tvar a velikost tělesa, kterou obývá. Podrobně se pak bude zabývat nejvýznamnějšími objevy v tomto směru poznání – stupňovými měřeními, triangulací a nástupem satelitních měření ve druhé polovině 20. století. Kromě samotného historického vývoje názoru lidstva na tvar Země budou odvozeny některé důležité vztahy, které s měřeními a výpočty tvaru Země úzce souvisí. Práce by rovněž měla poskytnout informace o mezinárodně uznávaných konstantách určujících pohyb, tvar a hmotnost Země a také o způsobech měření nadmořské výšky a správné interpretaci rozdílných výsledků, které mohou z měření vyjít.

Při přípravě historických částí této práce jsme nejvíce čerpali z rozsáhlého přehledu od I. Fischerové z r. 1975 [1], odkazy na tento přehled často ani neuvádíme. Pokud jsme čerpali z jiné literatury, příslušné odkazy jsou však uvedeny.

1 První názory na tvar Země

Různé odpovědi na otázky týkající se tvaru Země napadaly lidstvo už od nepaměti. Úplně první zmínky, které se dochovaly, nalezneme v sumersko-babylonském eposu o Gilgamešovi, z nějž většina vznikla okolo roku 2500 př. n. l. Zde se objevuje popis světa, který bychom v současné době mohli interpretovat tak, že Země má tvar horizontálně nekonečné desky a svět je tudíž dvojrozměrný. Postupně se přešlo k názoru, že Země má tvar plochého disku. Zde se ovšem vyskytla otázka, čím je disk nadnášen. Jedna z mýtických představ říká, že disk drží čtyři sloni stojící na krunýři velké želvy, která plave v mléce. Koncept ploché Země se zdá být přirozený a vychází ze zkušenosti lidí žijících v omezené oblasti. Myšlenka s mlékem ukazuje, že již v této době měli lidé znalost o zdánlivé ztrátě váhy v kapalině [1].

Trojrozměrná představa o tvaru světa se objevuje až v souvislosti s uvědoměním si polokulového tvaru oblohy poseté hvězdami. S myšlenkou, že Země diskovitěho tvaru podpírá oblohu, přišel jako první Homér (9. století př. n. l.) a později na jeho myšlenku navázali iónští filozofové (6. století př. n. l.). Thales Milétský (625 – 545 př. n. l.) předpokládal, že disk plave ve vodě, což bylo velmi podobné babylonské představě. Podle Anaximena Milétského (6. století př. n. l.) byla Země nadnášena vzduchem sahajícím do nekonečné hloubky. V tomto případě by ale existoval jen jeden obzor a pro každé místo na Zemi by byl stejný čas a délka dne. Tato myšlenka ovšem narážela na zjištěné pozorování, že délka dne se mění a hvězdy a Slunce se vracejí na původní místo. Pokud podpěra pod Zemí sahá do nekonečné hloubky, pak noční pohyb Slunce po zapadnutí na západě a vystoupení za východě nemůže vést pod Zemí, ale může vést pouze stranou kolem disku. Aby se vysvětlilo, proč je v noci tma, objevila se myšlenka s vysokými horami na severním obzoru, kde se Slunce při své zpětné cestě schová.

S novým nápadem, který vyřešil spoustu dohadů a rozepří, přišel Anaximandros (611 – 547 př. n. l.). Vzdal se představy nekonečných vzduchových podpěr a podle něj Slunce a hvězdy pokračují v pohybu po kruhových drahách pod Zemí. Celá nebesa i s hvězdami se otáčejí kolem Země, která je ve středu a nepotřebuje nadnášet. Představu o kruhovém tvaru drah Slunce a hvězd však

Anaximandros ještě nerozšířil na představu o kulovém tvaru Země. Jeho Země má ještě válcovitý tvar a poměr průměru k výšce je 3:1.

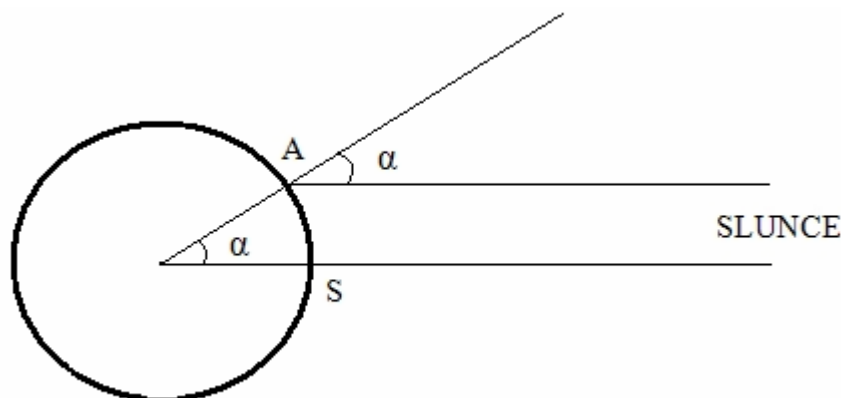
S novou, zcela převratnou myšlenkou přišel Pythagoras (asi 580 – 500 př. n. l.) a jeho škola. Jeho představy o dokonalosti a harmonii světa a stejně tak dokonalém kulovém tvaru, i když bez jakéhokoliv experimentálního podložení, vedly k propojení těchto názorů a propagaci myšlenky, že Země je koule. Pythagorejci dokonce Zemi přesunuli do polohy jedné z planet pohybující se po kruhových drahách okolo středu světa a místo ní umístili do středu světa Slunce.

V době Aristotelově (384 – 322 př. n. l.) byl už sice kulový tvar Země všeobecně přijímán, ale stále ještě scházely pádné důvody, proč tomu je právě tak. Až Aristotelovy argumenty, že všechny těžké předměty padají ke středu světa, což vede ke kulovému uspořádání, změna horizontu při putování na sever a také kulový stín Země při měsíčních zatměních podpořily názory na kulový tvar Země.

2 Počátky měření velikosti Země

První měření velikosti Země se objevují v počátku třetího století př. n. l. Využívá se změření délky poledníkového oblouku procházejícího dvěma místy a příslušného středového úhlu. Délka oblouku se určovala podle cestovní doby a rozdíl zeměpisných šířek byl určován z rozdílné polohy slunce v pravé poledne nebo ze vzájemné polohy souhvězdí. Všechny výpočty byly ale hodně nepřesné, tudíž vypovídají jen o hrubé představě velikosti Země.

Měření s výsledky odpovídajícími skutečným hodnotám poprvé provedl Eratosthenes (276 – 195 př. n. l.) v Egyptě a to na základě vědecké a dostatečně přesné metody. Vybral si dvě města ležící na stejném poledníku – Alexandrii a Syéne (obr. 2.1). Syéne leží v blízkosti obratníku Raka, což zaručovalo, že v době letního slunovratu bylo možné v pravé poledne vidět odraz slunce v hluboké studni. Toto bylo důsledkem, že zenitová vzdálenost od Slunce byla v té době téměř nulová. Eratosthenes ve stejnou dobu změřil v Alexandrii úhel, který svírají sluneční paprsek a kolmice k zemskému povrchu. Ten odpovídá $1/50$ celé kružnice, z čehož lehce určíme, že i vzdálenost mezi Syénou a Alexandrií musí být také rovna $1/50$ obvodu zeměkoule. Nyní už jen potřeboval znát vzdálenost obou měst. Některé legendy říkají, že k určení využil znalosti, že velbloudí karavaně trvá doba přesunu ze Syény do Alexandrie 50 dní při rychlosti 100 stadií za den, ale mnohem pravděpodobnější je využití, v té době již existujících egyptských katastrálních map. Vynásobením 5000 stadií padesáti dostal pro obvod Země hodnotu 250 000 stadií. Někdy se jako Eratostenova hodnota uvádí 252 000 stadií. Tuto hodnotu dostal po zaokrouhlení na celistvý násobek 360, aby délka jednoho stupně měla ucelený počet stadií. Délka egyptského stadia se obvykle odhaduje mezi 148 a 158 m. Z toho pro obvod Země dostáváme 37 296 až 39 816 km. Tento výsledek je až překvapivě blízko skutečné hodnotě 40 075 km.



Obr. 2.1: Eratostenova metoda určení velikosti Země
(*A* značí město Alexandrie a *S* značí Syéne)

Samozřejmě, svou roli sehrála také notná dávka štěstí. Zdá se, že některé z chyb se navzájem vyloučily. Zaprvé, Syéne a Alexandrie neleží přesně na stejném poledníku, jak Eratosthenes předpokládal. Dále určení vzdálenosti obou měst bylo nepřesné, zejména pokud bylo odvozeno z rychlosti karavan [2]. Přesto princip metody byl správný a Eratosthenes bývá proto právem označován za otce geodézie. Později bylo prováděno mnoho dalších měření, ale většina nedala ani zdaleka tak přesnou hodnotu. V dnešní době tuto metodu označujeme jako tzv. stupňová měření. Jedná se o měření délky poledníkového oblouku, který odpovídá změně zeměpisné šířky o 1° . Tento způsob se využívá k určení rozměrů a zploštění Země.

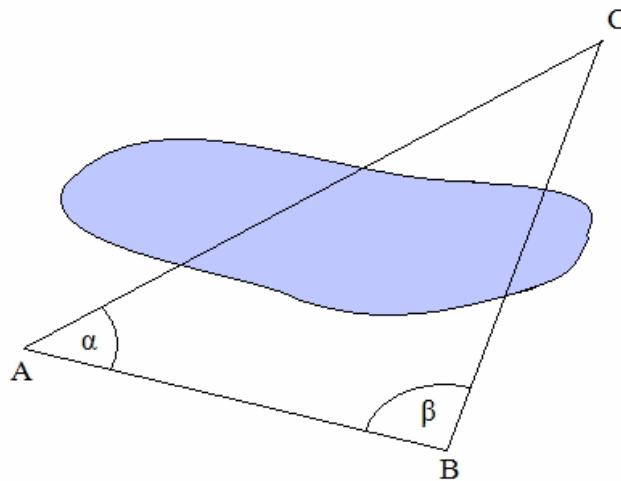
Okolo roku 827 bylo z příkazu chalífy al-Ma'múna vykonáno nové stupňové měření, aby tím byly ověřeny výsledky dosažené Eratosthenem [3]. Měření provedly dvě skupiny na území dnešního Iráku. První, vedená významným a uznávaným arabským vědcem Ibn Júnus, měřila od výchozího bodu k severu a druhá, vedená matematikem a zeměpiscem Abú Rajhán al-Bírúni, od výchozího bodu na jih. Jako jednotky míry používali černý loket, který podle legendy odpovídal délce předloktí al-Ma'múnovy černé otrokyně. Ovšem neznalost vztahu mezi černým loktem a metrem bránila přepočtení na metrickou míru. Až Mahmúd-Bey určil převodní vztah. Konečný výsledek délky oblouku byl 40 008 384 m. Tato hodnota je obdivuhodně přesná. Odpovídá mezinárodnímu standardu přijatém v roce 1967.

3 Triangulace

3.1 Triangulace a význam dalekohledu v jejím rozvoji

Na přelomu 16. a 17. století dochází k zásadní změně díky nové metodě na měření vzdálenosti, tzv. triangulaci. Do té doby způsoby určování velikosti Země narážely zejména na potíže s přesným určením vzdálenosti na zemském povrchu.

Triangulace je velmi jednoduchá metoda založená na principu trojúhelníku a jeho úhlů (obr. 3.1). Velmi často potřebujeme určit vzdálenost mezi dvěma body A a C , mezi nimiž se může nacházet překážka v podobě lesa, kopce, propasti či vodní plochy. Při určování vzdálenosti mezi body A a C využijeme pomocného bodu B , který si vhodně zvolíme tak, abychom mohli určit vzdálenosti mezi A a B . Nyní dostáváme trojúhelník ABC a díky znalosti základny trojúhelníku AB a změřením dvou úhlů můžeme vzdálenost AC velmi lehce vypočítat ze sinové věty:



Obr. 3.1: Triangulace.

$$\frac{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]}{\sin \beta} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Poprvé princip triangulace využil Tycho Brahe v roce 1589 k určení vzdálenosti jednoho ostrova od dánské pevniny. Pro určení úhlů využil tzv. dioptř. Tento přístroj byl však záhy nahrazen dalekohledem, který vynalezl Hans Lippershey roku 1608. Díky dalekohledu se triangulace výrazně zpřesnila a začala se hojně využívat v geodézii.

V roce 1615 Willebrord Snellius použil jako první triangulaci k určení obvodu Země. Při svém výpočtu vycházel z Eratostenovy metody a využil 33 různých trojúhelníků v oblasti dolního Rýna v Holandsku. Změřené vzdálenosti zkombinoval s astronomickými zeměpisnými šířkami vrcholů trojúhelníků. Výsledná hodnota poloměru Země se jen o několik málo kilometrů lišila od dnes uznávané hodnoty [2].

Zvýšené možnosti měření novou metodou inspirovaly francouzskou vládu k založení Královské akademie věd (Académie Royale des Sciences) v roce 1666 za účelem zpřesnění map a studia přidružených problémů, jako například metod určování zeměpisných délek [4]. Z toho důvodu bylo třeba přesně určit rozměry Země, aby bylo možno do map zakreslit přesnou souřadnicovou síť zeměpisných délek a šířek. Tohoto úkolu se ujal Jean Picard, který v letech 1669 až 1670 provedl měření mezi městy Melvoisine a Sourdon, které leží na stejném poledníku. Astronomicky určil zeměpisné šířky obou měst. Vzdálenost mezi nimi určil pomocí triangulace podobně jako Willebrord Snellius, ale na rozdíl od něj měl přesnější systém k určení délky základen trojúhelníků. Využíval dřevěné tyče dané délky, kterou přikládal podél lana napjatého mezi vrcholy trojúhelníků. Jeho výslednou hodnotu obvodu Země později využíval i Newton při svém výpočtech a úvahách.

3.2 Země není kulatá

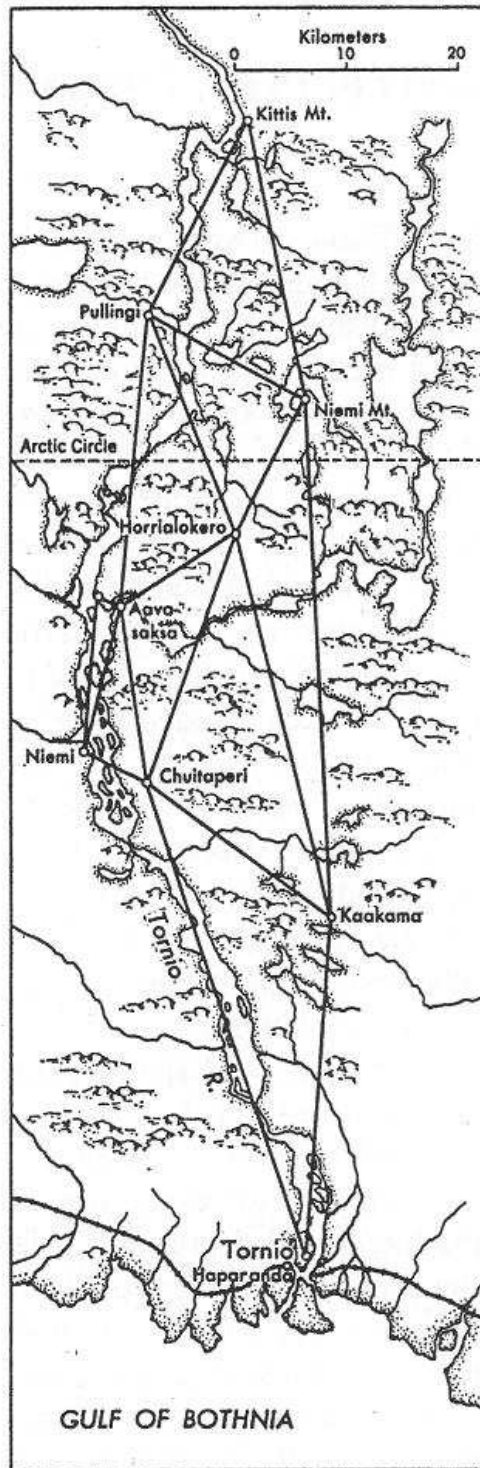
S podnětem pro pochyby o přesné kulatosti Země přišel Jean Richer, který zjistil při své cestě do francouzské Guyany, že doba kyvu matematického kyvadla se liší v závislosti na zeměpisné šířce (kyvadlové hodiny se zpozdňovaly o 2,5 minuty za den po přesunu z Paříže do Guyany).

Proto na přelomu 17. a 18. století z podnětu ředitele pařížské hvězdárny Jeana Dominic Cassiniho bylo provedeno pod jeho vedením měření na severně a jižně prodlouženém picardově oblouku. Po osmnácti letech měření porovnáním výsledků ze severní a jižní části oblouku bylo zjištěno, že jeden stupeň zeměpisné šířky na severní části oblouku je kratší než hodnota naměřená pro část jižní. Pokud by tomu bylo tak, Země by byla na pólech protažená (viz vysvětlení v kap. 4). Toto tvrzení ovšem neodpovídalo Newtonovým předpokladům, že Země je na pólech zploštělá v důsledku odstředivé síle působené rotací Země.

Bylo zřejmé, že přesnost tehdejších měření ve středních zeměpisných šířkách na území Francie byla nedostatečná k vyřešení tohoto sporu. Francouzská akademie věd se proto rozhodla spor vyřešit vysláním dvou expedicí do míst s výrazně odlišnou zeměpisnou šířkou a porovnáním jejich výsledků. První měřila v rovníkové oblasti Peru. Pro větší přesnost se výprava rozdělila na dvě části a každá z nich provedla vlastní měření. Jako výsledek této expedice bylo zjištěno, že v rovníkové oblasti jeden stupeň zeměpisné šířky odpovídá přibližně dnešním 110 600 m.

Druhá expedice měřila v Laponsku v severním Švédsku (obr. 3.2). Drsné podmínky během celého roku nutily výpravu k co možná nejrychlejšímu dokončení měření. Za necelý rok byla měření dokončena s výslednou hodnotou pro délku 1° asi 112 600 m. Délka oblouku odpovídající 1° zeměpisné šířky v severních oblastech byla tedy delší než v oblasti rovníku, což popíralo předchozí výsledky z území Francie. Porovnáním obou hodnot byla potvrzena Newtonova teorie, že Země má tvar rotačního elipsoidu zploštělého na pólech. O těchto expedicích i dalších stupňových měřeních podrobněji pojednává [1] a [2].

Tato měření vedla k sjednocení délkových jednotek, kterých bylo do té doby velké množství, např. myriády, stádie, různé druhy mílí, loktů aj. Nová jednotka byla definovaná na doporučení Královské akademie věd v roce 1791 jako desetimiliontá část poledníkového kvadrantu a začala se nazývat metr. Tato definice byla ovšem nepraktická, jelikož dodnes je určení délky poledníkového kvadrantu velmi obtížné. Proto v roce 1799 byla zavedena definice nová, a to jako vzdálenost dvou rysek na platino-iridiové tyči. V druhé polovině 20. století byla nahrazena definicí pomocí vlnové délky spektrální čáry kryptonu Kr^{86} a brzy nato pomocí rychlosti světla ve vakuu.



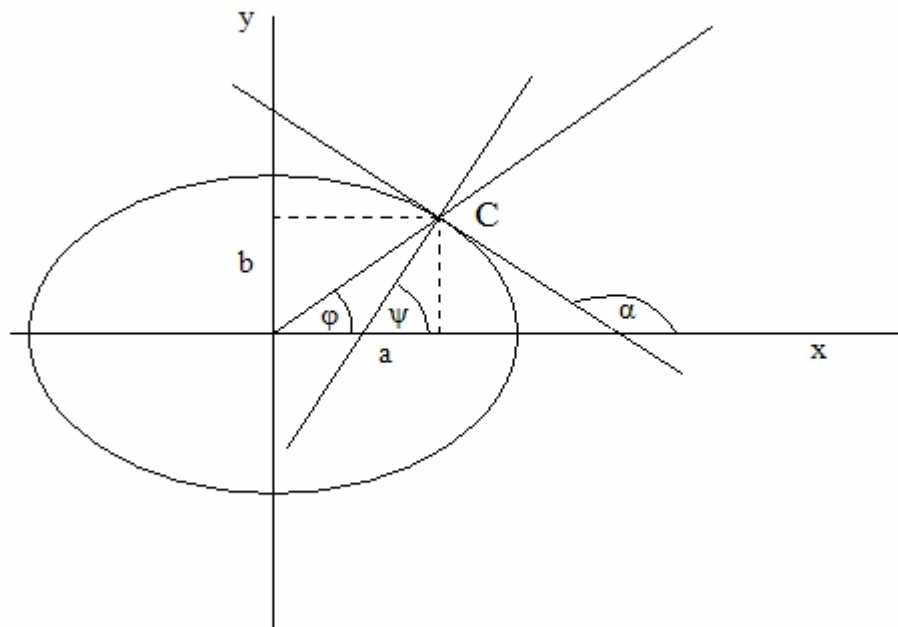
Obr. 3.2: Triangulační měření v Laponsku. Převzato z [20], viz též [2].

4 Geodetická a geocentrická šířka

Astronomicky měřená zeměpisná šířka je úhel mezi kolmicí k zemskému povrchu a rovinou procházející zemským rovníkem. V praxi je to doplněk do 90° k úhlu mezi kolmicí k zemskému povrchu a směrem na světový pól. Tato zeměpisná šířka se nazývá geodetická a běžně se používá k zakreslování map.

Oproti tomu při fyzikálních výpočtech obvykle používáme tzv. geocentrickou šířku, což je úhel, který svírá rovina zemského rovníku s přímkou procházející uvažovaným bodem a středem Země. Tato zeměpisná šířka je výhodná při přechodu do sférických souřadnic. Často tyto dvě šířky zaměňujeme, jelikož jejich rozdíl není příliš velký. Maximální rozdíl je asi 11,55 úhlových minut pro šířky okolo 45° . Při přesných měřeních, kdy zploštění Země nelze zanedbávat, se však musí mezi těmito šířkami rozlišovat.

Vztah mezi geodetickou šířkou ψ a geocentrickou šířkou φ můžeme snadno odvodit. Situace je schématicky znázorněna na poledníkovém řezu v obr. 4.1, kde však pro názornost je zploštění Země silně zvětšeno.



Obr. 4.1: Geodetická (ψ) a geocentrická šířka (φ).

Vyděme z rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.1)$$

Vyjádřením y z (4.1) dostáváme

$$y = \sqrt{b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}. \quad (4.2)$$

Zderivováním (4.2) dostaneme směrnici tečny

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right)}_y^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-2x \frac{b^2}{a^2}\right) = -\frac{xb^2}{ya^2}. \quad (4.3)$$

Směrnici přímky odpovídá tangenta úhlu, který přímka svírá s kladným směrem osy x :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-xb^2}{ya^2}. \quad (4.4)$$

Zavedme polární souřadnice r a φ vztahy

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi, \\ y &= r \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dosazením do rovnice (4.4) dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (4.6)$$

Z obrázku je zřejmé, že platí

$$\alpha = 90^\circ + \psi . \quad (4.7)$$

Ze známých součtových vzorců pro sinus a kosinus po dosazení (4.7) dostaneme

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(90^\circ + \psi) = \cos \psi, \\ \cos \alpha &= \cos(90^\circ + \psi) = -\sin \psi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Odtud plyne dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} . \quad (4.9)$$

Výsledný vztah mezi geodetickou a geocentrickou zeměpisnou šířkou získáme dosazením (4.9) do (4.6):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi . \quad (4.10)$$

Při stupňových měřeních se určuje délka oblouku příslušející změně geodetické šířky o 1° , nikoliv změně šířky geocentrické. Touto technikou se tedy určuje poloměr křivosti elipsoidu, nikoliv délka průvodiče ke středu Země. Na Zemi zploštělé na pólech je poloměr křivosti větší v polárních oblastech a delší je tam i oblouk pro jeden stupeň. Tento výsledek prokázala měření v Laponsku a v Peru.

5 Zploštění Země

Následkem předešlých pozorování a měření se došlo k závěru, že Země opravdu není koule, ale lepší aproximací jejího tvaru je rotační elipsoid, a proto se na popis místo jednoho parametru začaly používat parametry dva. Poloměr koule byl nahrazen délkami poloos elipsoidu nebo délkou hlavní poloosy a zploštěním Země.

Zploštění α se zavádí vzorcem

$$\alpha = \frac{a - c}{a}, \quad (5.1)$$

kde a je hlavní poloosa a c je vedlejší poloosa.

5.1 Geometrická metoda určování zploštění založená na stupňových měřeních

První pokusy o výpočet zploštění Země vycházely z měření v Peru, Laponsku a Francii. První práci na toto téma sepsal roku 1755 Ruđer Josip Bošković (1711 – 1787) – známý chorvatský matematik a fyzik. Využil nejen dosud publikovaných výsledků měření, ale také je doplnil o svá vlastní měření pocházející z Itálie. Dalším z vědců, kteří se zabývali tímto tématem, byl finský astronom Henrik Johan Walbeck (1793 – 1822). Při svých výpočtech vycházel z měření z Peru, Anglie, Švédska, Francie a Indie a používal metodu nejmenších čtverců pro co nejlepší aproximaci naměřených výsledků pomocí zemského elipsoidu. Jeho hodnota zploštění Země byla $1/302,76$.

Nejznámější a ve své době nejpoužívanější výpočet parametrů zemského elipsoidu pochází z roku 1841, jeho autorem je Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846). K tomu účelu vypracoval vlastní metodu. Využil při ní deset různých

stupňových měření z Evropy, Asie a Jižní Ameriky. Jím vypočtený elipsoid měl tyto parametry:

$$a = 6\,377\,397,16 \text{ m}$$

$$c = 6\,356\,078,99 \text{ m}$$

$$\alpha = 1/299,1528 \text{ m}$$

Zlom nastal roku 1828, kdy Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) zjistil, že díky nerovnoměrnému rozložení hmoty nemá Země tvar rotačního elipsoidu, jak se doposud všichni domnívali, ale tvar mírně odlišný. Nicméně pro výpočty zůstala výhodná aproximace pomocí tzv. referenčního elipsoidu, což byl elipsoid, který co možná nejlépe odpovídal reálnému tvaru Země.

Vývoj vypočtených hodnot zploštění Země a délky hlavní poloosy je uveden v tabulce 1. V prvním sloupci jsou uvedeni autoři příslušného výpočtu, ve druhém sloupci je uveden rok zveřejnění, v následujících dvou jsou vypočtené hodnoty a v posledním sloupci najdeme oblasti, v nichž se daný elipsoid používal v geodézii ještě v roce 1970 nebo později. Poznamenejme, že později byly při určování zploštění Země vedle stupňových měření používány i jiné metody, zmíněné níže.

Tabulka 1. Vývoj hodnot zploštění Země (převzato z [3], doplněno o údaje z [5]).

Autor	rok	rovníkový poloměr	$1/\alpha$	země
Bouguer, Maupertuis	1738	6 397 300	216,8	
Delambre, Méchain, Académie Royale	1799	6 375 730	334,29	
Everest	1830	6 377 276,345	300,8017	Indie
Bessel	1841	6 377 397,155	299,1528	Čína, Japonsko
Clarke	1866	6 378 206,4	294,9787	severní Amerika
Modified Clarke	1880	6 378 249,145	293,465	Afrika
Helmert	1901		298,3	
Helmert	1907	6 378 200	298,3	
Hayford, mezinárodní elipsoid	1924	6 378 388	297,0	západní Evropa
Krasovskij	1940	6 378 245	298,3	Sovětský svaz
Buchar	1958		297,9	
Reference Ellipsoid	1967	6 378 160	298,25	Austrálie, jižní Amerika
Geodetický referenční systém 1980	1980	6 378 137	298,257	
Světový geodetický systém 1984 (WGS84)	1984	6 378 137	298,2572236	
I.A.G.	1995	6 378 136	298,25642	

Dlouho používaná stupňová měření měla jednu velkou nevýhodu, a to že se dala použít jen na pevnině. Vědci si ale uvědomovali, že dvě třetiny povrchu naší planety zabírá právě voda. Proto bylo zcela nezbytné začít používat také metodu jinou, schopnou měřit tvar Země i v oblasti moří a oceánů.

5.2 Gravimetrická metoda

Už v roce 1672 si francouzský astronom Jean Richer všiml, že se gravitační zrychlení mění se zeměpisnou šířkou, když se kyvadlové hodiny po přesunu z Paříže do Guyany náhle začaly opožďovat o dvě a půl minuty za den. Později francouzský matematik Alexis Clairaut (1713 – 1765) ve svém díle „O tvaru Země“

odvodil vztah mezi gravitačním zrychlením a zploštěním Země. Clairautův vzorec (Clairautův teorém) je ve tvaru:

$$\gamma_{\varphi} = \gamma_e \cdot \left[1 + \left(\frac{5\omega^2 a}{2\gamma_e} - \alpha \right) \sin^2 \varphi \right], \quad (5.2)$$

kde

γ_{φ} .. tíhové zrychlení v bodě o zeměpisné šířce φ ,

γ_e .. tíhové zrychlení na rovníku,

ω .. úhlová rychlost rotace Země,

α .. zploštění Země,

a .. délka hlavní poloosy zemského elipsoidu.

Tento vztah ke svým výpočtům použil Friedrich Robert Helmert (1843 – 1917), který v roce 1884 ze 122 různých hodnot tíhových zrychlení vypočítal zploštění Země jako: $\alpha = 1/299,26$. Po dalším zpřesnění Clairautova teorému dospěl roku 1901 k hodnotě $\alpha = 1/298,3$, která je velmi blízká hodnotě dodnes uznávané.

K měření tíhového zrychlení se nejprve používaly kyvadlové přístroje zpravidla s kyvadlem délky přibližně 25 cm. Pro získání výsledků s přesností $2 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ bylo potřeba určit dobu kyvu na šest desetinných míst, takže měření byla velmi náročná. Počátkem dvacátého století sestrojil maďarský fyzik Conrád Eötvös (1848 – 1919) torzní váhy – přístroj k měření derivací tíhového zrychlení. Nevýhodou kyvadlového přístroje a torzních vah byla nutnost stabilního ukotvení. Proto zpočátku nebyla ani gravimetrická měření, stejně jako stupňová, použitelná na moři.

Až ve dvacátých letech dvacátého století Andries Vening-Meinesz (1887 – 1966) vymyslel metodu dvou izochronních kyvadel na společném stojanu a v opačné fázi, která byla použitelná i na vratkém podkladu, např. palubě lodi. Aparatura měla dvě kyvadla stejné velikosti. Rozdíl v amplitudách těchto dvou kyvadel byl přenášen na film pomocí zrcadel a světelných paprsků. Andries Vening-Meinesz zjistil, že horizontální zrychlení (jako od vln na lodi) nemá vliv na

rozdíl amplitud mezi těmito dvěma kyvadly. Zaznamenaný rozdíl je tedy amplituda teoretického, nerušeného kyvadla.

Dvě izochronní kyvadla byla nahrazena čtyřkyvadlovými až šestikyvadlovými přístroji a později dále zdokonalována. V dnešní době krom již výše zmiňovaných dynamických kyvadlových gravimetrů používáme k měření i gravimetry statické. Ty fungují na principu srovnání tíhové síly s jinou silou, která je s časem neměnná (např. tlaková síla plynu). Měření pomocí statických přístrojů je často jednodušší a rychlejší.

5.3 Družicové metody

Třetí skupinou metod určování zploštění Země jsou metody družicové. Jsou založeny na měření odchylek v pohybu družice od Keplerových zákonů. Kdyby totiž rozložení hmoty v Zemi bylo kulově symetrické, bylo by její vnější gravitační pole centrální (intenzita pole by všude mířila do středu Země a její velikost by závisela jen na vzdálenosti od středu Země) a v takovém poli by se družice pohybovala přesně podle Keplerových zákonů. Jakákoliv odchylka od kulově symetrického uspořádání hmoty však působí odchylky v pohybu družice od Keplerových zákonů (poruchy dráhy). Měřením těchto poruch můžeme pak studovat odchylky zemského gravitačního pole od pole kulově symetrického. Největší odchylka od kulově symetrického uspořádání hmoty v Zemi je způsobena jejím zploštěním. Hlavními poruchami dráhy družice působenými zploštěním Země jsou stáčení roviny oběžné dráhy vzhledem k inerciální soustavě a stáčení perigea v rovině oběžné dráhy.

Družicové metody bylo možné používat až od roku 1957, kdy 4. října byla vypuštěna první umělá družice Sputnik 1. Z dráh pohybu družic se později počítalo zploštění a další parametry tvaru Země. První výpočty provedl český vědec Emil Buchar (1901 – 1979), jehož výpočet zploštění Země vycházel z oběžné dráhy Sputniku 2. Hodnota zploštění mu vyšla $\alpha = 1/297,9$, což se výrazně lišilo od do té doby mezinárodně uznávané hodnoty $1/297,0$. Další měření v tomto oboru dala

českému profesoru astronomické geodézie za pravdu. Na jeho počest byla po něm pojmenovaná roku 1984 nově objevená planetka číslo 3141.

Z hlediska měření tvaru Země lze první družice považovat za pasivní. Jejich jediným úkolem bylo kroužit na oběžné dráze a veškerá pozorování a měření probíhala ze Země. Současné družice jsou vybaveny přístroji a jsou schopny samy naměřit a vyhodnotit mimo jiné i tvar povrchu Země. Výsledky jsou radiově posílány na Zem. Tyto družice nazýváme družicemi aktivními.

6 Geoid jako tvar Země

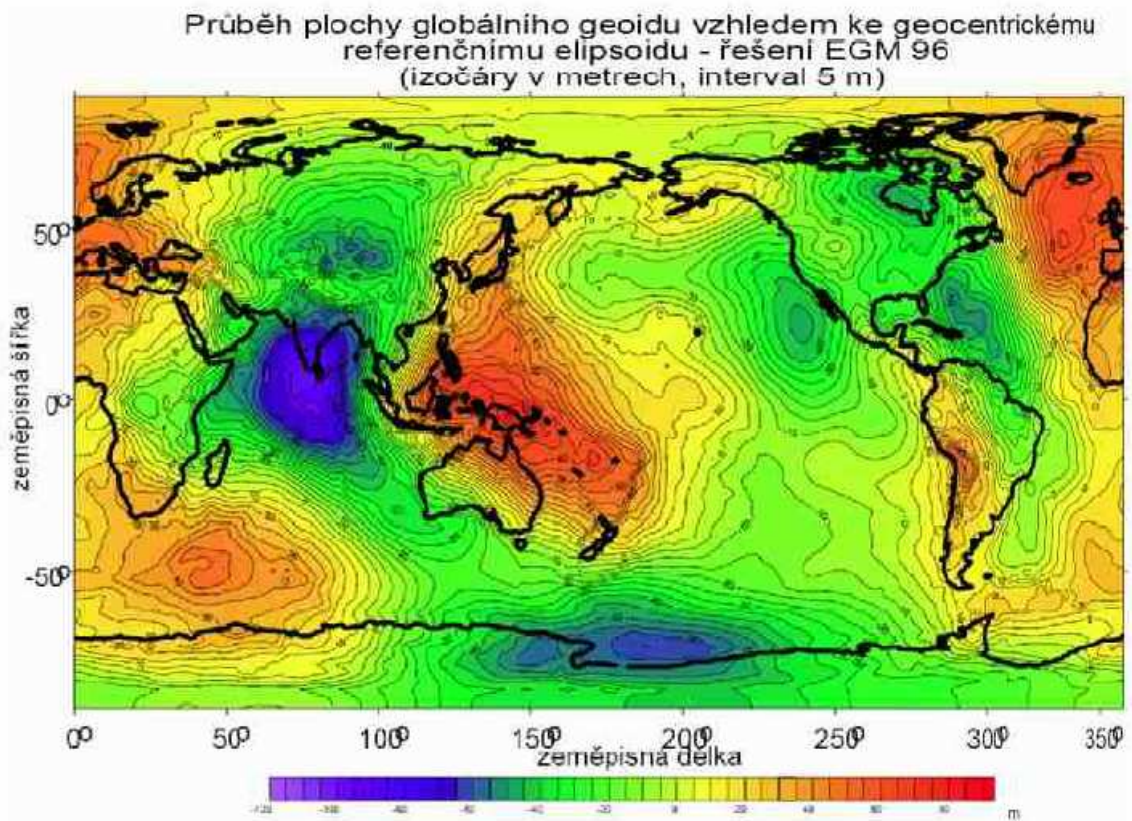
Již dříve bylo zmiňováno, že v roce 1828 známý fyzik a matematik Johann Carl Friedrich Gauss zjistil odchylky ve tvaru Země a roku 1837 tento fakt Friedrich Wilhelm Bessel odůvodnil tím, že Země je tvořena nehomogenní hmotou a tudíž rozložení hustoty Země má za následek nepravidelný tvar ekvipotenciálních ploch tíhového potenciálu. Jak známo, klidná vodní hladina odpovídá právě těmto ekvipotenciálním plochám, a proto hladiny zemských oceánů by měly ležet právě na jedné takové ekvipotenciální ploše. Z praxe ovšem víme, že tomu tak úplně není, některá moře jsou až o metr výše nebo níže oproti střední hladině [14]. Tento jev je ale způsoben mořskými proudy, zvýšenou koncentrací srážek a také rozdílným počtem vlévajících se řek. Další odchylky od společné ekvipotenciální plochy jsou způsobeny slapovými jevy a mořskými vlnami, ale i tak rozdíl výšek hladin není zas tak markantní.

Těmito úvahami došel Friedrich Wilhelm Bessel k názoru, že takováto ekvipotenciální plocha nejlépe vystihuje tvar Země. Jeho myšlenku podpořili i jiní vědci a v roce 1872 navrhl Johann Benedict Listing (1808 – 1882) název geoid. Je definován jako ekvipotenciální plocha tíhového potenciálu, která se nejlépe přimyká ke střední hladině světových moří [2]. Touto střední hladinou rozumíme hladinu, z níž byly odstraněny zmíněné fluktuace. Tato plocha je uvažována i pod kontinenty. Pokud mluvíme v geofyzice o tvaru Země, myslíme tím právě tvar geoidu. Bylo proto potřebné vypracovat vhodné metody na určování odchylek geoidu od nějaké jednodušší plochy, např. od elipsoidu.

6.1 Gravimetrická metoda

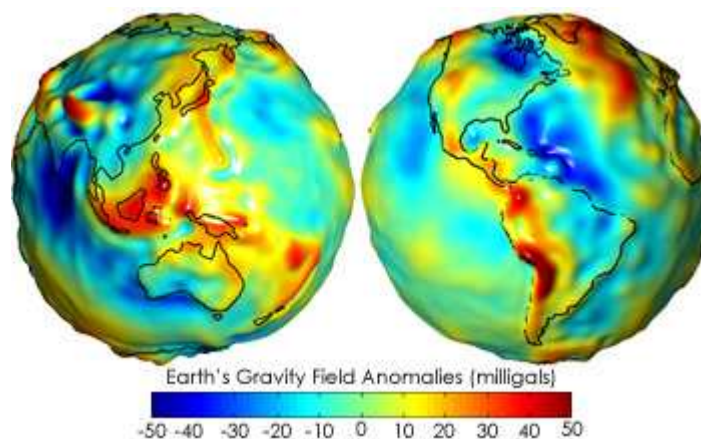
V roce 1849 na Cambridžské univerzitě George Gabriel Stokes (1819 – 1903) odvodil z Clairautova teorému postup výpočtu odchylek geoidu od rotačního elipsoidu, pokud známe odchylky naměřených hodnot tíhového zrychlení od

předpokládaných pro rotační elipsoid. A až v době rozšíření gravimetrických měření i na moře a oceány bylo možno přesněji určit reálný tvar geoidu. Odchytky byly změřeny v rozmezí 70 m až -100 m, kde záporné znaménko znamená, že geoid je níž než referenční elipsoid. Největší snížení geoidu je v oblasti Indie a Srí Lanky



Obr. 6.1: Odchytky geoidu od referenčního elipsoidu. Převzato z [8].

a oproti tomu největší zvýšení je v oblastech Indonésie a severní části Atlantického oceánu (obr. 6.1). Obrázek 6.2 ukazuje stejné odchytky geoidu od referenčního elipsoidu ve zvětšeném plastickém zobrazení a kromě toho barevně i příslušné anomálie tíhového zrychlení.

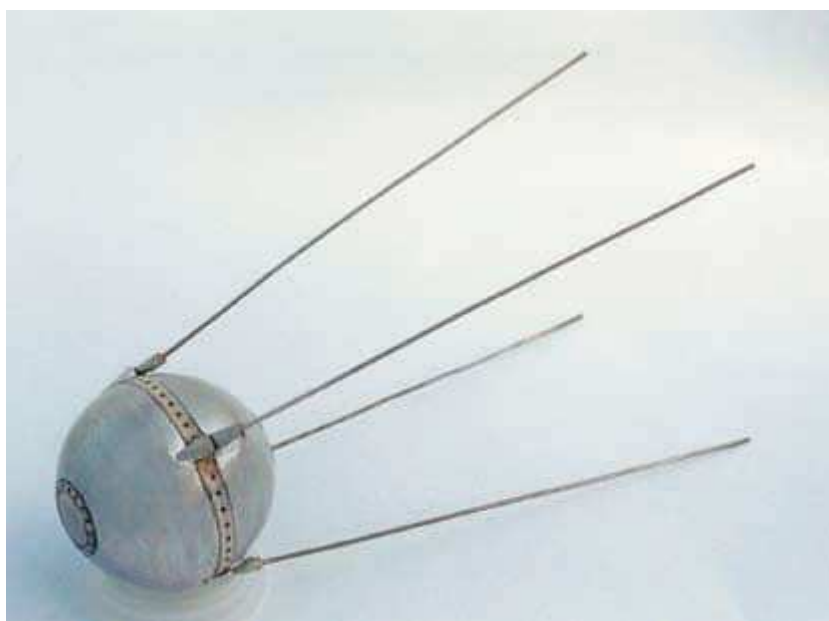


Obr. 6.2: Anomálie tíhového pole Země. Převzato z [7].

Už od počátku zavedení geoidu se vědci dohadovali, do jaké míry ho lze vůbec přesně určit. Například Friedrich Wilhelm Bessel byl k možnostem určení tvaru Země poměrně skeptický. Oproti tomu Friedrich Robert Helmert zastával názor, že technické nedostatky měření a nedostupnost části zemského povrchu mohou být dobře doplněny teoretickými analýzami. K velkému vývoji došlo s rozvojem měření tíhového zrychlení na mořích a oceánech zahájené Andriesem Vening-Meineszem počátkem dvacátého století. Přesto roku 1945 došel Michail Sergejevič Moloděnskij (1909 – 1991) k závěru, že pouze z povrchových měření není možné určit přesný tvar geoidu. Důvodem je neznalost rozložení hustoty mezi geoidem a zemským povrchem v oblasti kontinentů.

6.2 Družicová altimetrie

Velmi často používaným typem měření tvaru geoidu na mořích (tvaru klidné vodní hladiny) je družicová altimetrie. Družice, jejíž dráha je přesně známá, je vybavena radiolokačním výškoměrem, který určuje její vzdálenost od zemského povrchu. Poprvé byl tento přístroj vyslán na oběžnou dráhu v roce 1973 na palubě kosmické lodi Skylab 1.



Obr. 6.3: Družice Sputnik 1. Převzato z [16].

6.3 Radiová interferometrie a globální poziční systém

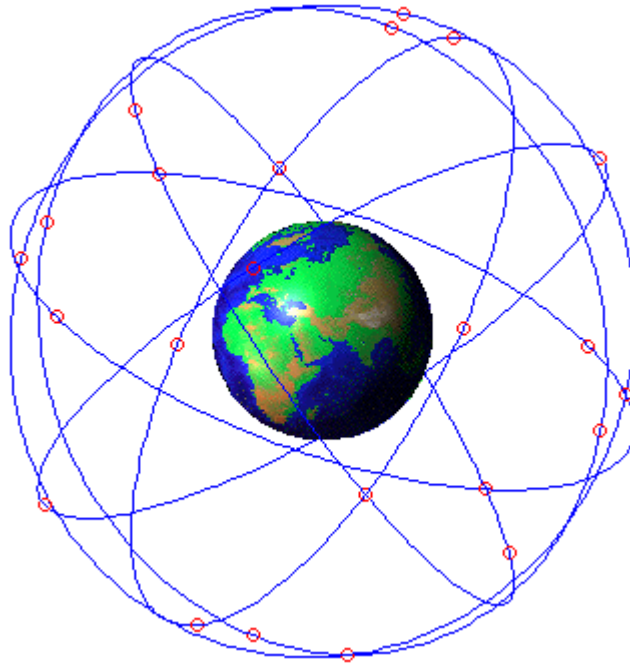
Okolo roku 1970 byla v Severní Americe vyvinuta metoda radiové interferometrie z velmi dlouhých základen (Very Long Baseline Interferometry, VLBI). Tato metoda umožňuje korelaci zaznamenaných radiových signálů, v podstatě šumů, z kvasarů. Pod pojmem kvasar si můžeme představit druh vzdálené galaxie s výrazně rudým posuvem spektra a se schopností vyzařovat až desetkrát více energie než běžná galaxie. Většina kvasarů leží více než 1 000 Mpc od Země. Protože urazit tyto vzdálenosti trvá světlu dlouho, dnes většinou pozorujeme již neexistující objekty [11]. Kvasary se pozorují pomocí obřích radiových teleskopů, vzdálených od sebe typicky tisíce km [10]. Díky VLBI můžeme velice přesně určit orientaci Země a velmi vzdálených galaxií navzájem.

V současné době kvasary a VLBI definují oficiální nebeský souřadnicový systém a také transformaci mezi terestrickým (vztaženým k Zemi) a nebeským souřadnicovým systémem. Oba systémy jsou zapotřebí pro všechny družicové

systemy, včetně Globálního pozičního systému (GPS) [12], což je v dnešní době jednoznačně nejpoužívanější navigační systém. Díky němu můžeme zjistit polohu sledovaného objektu v libovolném čase s vysokou přesností.

Původně byl GPS vytvořen pro vojenské účely Spojených států amerických, ale když 1983 sovětská stíhačka sestřelila civilní letadlo, rozhodl se tehdejší prezident USA Ronald Reagan, že po dokončení celého projektu bude GPS sloužit i pro civilní účely.

Vývoj systému byl započat v roce 1973 a úspěšně dokončen 17. ledna 1994 [6]. Systém se skládá ze tří hlavních částí. První je soubor 24 družic na různých oběžných drahách ve výšce 20 200 km. Družice jsou rovnoměrně rozmístěny tak, že z každého místa na Zemi lze vždy vidět nejméně čtyři z nich. Druhou částí je systém pozemních stanic, které určují parametry drah družic a zjištěné údaje vysílají družicím. Poslední částí jsou přijímače, které zpracovávají signály družic a z nich počítají polohu sledovaného objektu. Družice vysílá informaci o své poloze a čase na dvou frekvencích (1575,42 a 1227,6 MHz kterým odpovídají vlnové délky 19,0 a 24,4 cm). Přijímače pak z rozdílu času vyslání a přijetí signálu spočte vzdálenost od jednotlivých družic. Ke zpřesnění výsledků se používá také dopplerovský posuv frekvencí signálu. Jedna z frekvencí je šifrována vojenským bezpečnostním kódováním a široké veřejnosti je tedy přístupný pouze signál z jedné frekvence. V důsledku tohoto omezení je přesnost pro veřejné účely snížena řádově na desítky metrů.



Obr. 6.4: Dráhy družic GPS. Převzato z [15].

Po vzoru USA se rozhodla i Evropa vytvořit svůj vlastní civilní navigační systém. Spuštěn by měl být v roce 2010 pod názvem GALILEO, ale v důsledku finančních problémů došlo k jeho zpoždění. V plánu je jeho kompatibilita s GPS. Bližší informace o projektu GALILEO jsou k dispozici na [13].

7 Geodetický referenční systém

Jedná se o soubor parametrů popisujících tvar, hmotnost a rotaci Země. Na XVII. valném shromáždění *IUGG*, které se konalo v Austrálii v prosinci 1979, byl přijat Geodetický referenční systém 1980, tvořený těmito konstantami [9], viz také český článek [21]:

Rychlost světla ve vakuu:

$$c = (299\,792\,458 \pm 1,2) \text{ ms}^{-1}.$$

Newtonova gravitační konstanta:

$$G = (6\,672 \pm 4,1) \cdot 10^{-14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}.$$

Geocentrická gravitační konstanta (součin gravitační konstanty a hmotnosti Země, včetně hmotnosti atmosféry):

$$GM = (398\,600,47 \pm 0,05) \cdot 10^9 \text{ m}^3\text{s}^{-2}.$$

Rovňkový poloměr referenčního elipsoidu:

$$a = (6\,378\,137 \pm 2) \text{ m}$$

Zonální geopotenciální parametr druhého stupně (bez vlivů slapů) související se zploštěním Země:

$$J_2 = (1\,082\,630 \pm 5) \cdot 10^{-9}.$$

Střední úhlové zrychlení (zrychlení volného pádu) na rovníku:

$$\gamma_e = (978\,033 \pm 1) \cdot 10^{-5} \text{ms}^{-2}.$$

Pólové zploštění:

$$\alpha = 1/(298,257 \pm 0,001).$$

Roku 1984 byl zaveden Světový geodetický systém 1984 (WGS84), který definuje souřadnicový systém, referenční elipsoid a geoid pro geodézii a navigaci. Parametry referenčního elipsoidu jsou až na nepatrné odchylky stejné jako u Geodetického referenčního systému 1980. Roku 1996 byl WGS84 rozšířen o přesnější definici geoidu, která byla dále upřesněna při revizi v roce 2004. Tento geodetický systém by měl zůstat v platnosti nejméně do roku 2010. V současnosti používaný model geoidu má rozlišení přibližně 10 km a používá více než 4,6 milionu referenčních bodů. Vezmeme-li v úvahu pravidelnou imaginární síť pokrývající povrch Země, pak rozlišením rozumíme vzdálenost uzlových bodů. V těchto bodech je měřena výška geoidu.

8 Tíhové pole homogenní rotující kulové Země

Předvedeme si značně zjednodušený výpočet zploštění ekvipotenciální plochy tíhového pole Země. Zavedeme si následující aproximaci. Zemi uvažujeme jako homogenní rotující kouli. Tíhový potenciál je zaveden jako součet gravitačního a odstředivého potenciálu:

$$U = U_g + U_o . \quad (8.1)$$

8.1 Gravitační potenciál

Je známo, že homogenní kouli při výpočtu jejího vnějšího pole můžeme nahradit hmotným bodem o stejné hmotnosti v těžišti. Newtonův gravitační zákon pak dává pro intenzitu gravitačního pole \vec{E} jednoduchý vzorec

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} , \quad (8.2)$$

kde \vec{r} je polohový vektor měřený od středu Země.

Pro gravitační potenciál U_g platí

$$\vec{E} = -\text{grad} U_g . \quad (8.3)$$

V našem případě pro radiální složku intenzity platí

$$E(r) = -\frac{GM}{r^2} \quad (8.4)$$

a vzorec (8.3) má tvar

$$E(r) = -\frac{dU_g}{dr} . \quad (8.5)$$

Porovnáním pravých stran ve vzorcích (8.4) a (8.5) dostaneme známý výsledný vztah pro gravitační potenciál

$$U_g = -\frac{GM}{r} . \quad (8.6)$$

8.2 Výpočet odstředivého potenciálu

Zvolme kartézskou soustavu s počátkem ve středu Země tak, že osy x a y leží v rovině rovníku a osa z je osa rotační. Pak pro intenzitu odstředivé síly platí

$$\vec{E}_o(x, y, z) = (\omega^2 x, \omega^2 y, 0) . \quad (8.7)$$

kde ω je úhlová rychlost rotace. Opět použijeme vztah mezi intenzitou \vec{E}_o a potenciálem odstředivých sil U_o ,

$$\vec{E}_o = -\text{grad}U_o . \quad (8.8)$$

Mezi složkami intenzity a derivacemi potenciálu tedy platí vztahy:

$$(E_o)_x = \omega^2 x = -\frac{\partial U_o}{\partial x} , \quad (8.9)$$

$$(E_o)_y = \omega^2 y = -\frac{\partial U_o}{\partial y} , \quad (8.10)$$

$$(E_o)_z = 0 = -\frac{\partial U_o}{\partial z} . \quad (8.11)$$

Odtud snadno určíme (uhádneme) vzorec pro odstředivý potenciál

$$U_o = -\frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2} . \quad (8.12)$$

Vztahy (8.6) a (8.12) dosadíme do (8.1):

$$U = U_g + U_o = -\frac{GM}{r} - \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2} . \quad (8.13)$$

Převedením do polárních souřadnic získáme výsledný vztah pro tíhový potenciál

$$U = -\frac{GM}{r} - \frac{\omega^2 r^2 \cos^2 \varphi}{2} . \quad (8.14)$$

8.3 Rovnice ekvipotenciálních ploch

Rovnici ekvipotenciální plochy dostaneme tak, že ve vzorci (8.14) položíme U rovné konstantě a budeme hledat radiální souřadnici r jako funkci úhlu φ . Dále se zabývejme jen ekvipotenciálními plochami vně koule a příslušnou konstantu označme U_e (externí pole).

Vynásobením rovnice (8.14) výrazem r/U a dosazením $U = U_e$ dostáváme

$$r = -\frac{GM}{U_e} \left(1 + \frac{\omega^2 r^3}{2GM} \cos^2 \varphi \right) . \quad (8.15)$$

Na obou stranách rovnice (8.15) se vyskytuje r a tuto rovnici bychom tedy mohli řešit iterační metodou. Zavedeme si následující zjednodušení. Označme

$$q = \frac{\omega^2 r^3}{GM} . \quad (8.16)$$

Jelikož tato veličina je mnohem menší než jednička ($q \ll 1$, pokud neuvažujeme ekvipotenciální plochy příliš vzdálené od koule), budeme ji na pravé straně vzorce (8.15) považovat za malou konstantu. Aritmetickými úpravami (8.15) získáme vztahy

$$r \approx -\frac{GM}{U_e} \left(1 + \frac{q}{2} \cos^2 \varphi \right), \quad (8.17)$$

$$r \approx -\frac{GM}{U_e} \left(1 + \frac{q}{2} (1 - \sin^2 \varphi) \right), \quad (8.18)$$

Uvažujme podobnou rovnici

$$r \approx -\frac{GM}{U_e} \left(1 + \frac{q}{2} \right) \left(1 - \frac{q}{2} \sin^2 \varphi \right). \quad (8.19)$$

která se od (8.18) liší jen členem obsahujícím q^2 . Jelikož q je malé, budeme člen s q^2 zanedbávat a rovnice (8.18) a (8.19) budeme v tomto smyslu považovat za ekvivalentní.

Na rovníku ($\varphi = 0$) platí

$$r \approx -\frac{GM}{U} \left(1 + \frac{q}{2} \right) = a, \quad (8.20)$$

kde a je rovníkový poloměr.

Dosazením (8.20) do (8.19) získáme přibližnou rovnici ekvipotenciální plochy ve tvaru

$$r \approx a \left(1 - \frac{q}{2} \sin^2 \varphi \right). \quad (8.21)$$

Tuto rovnici můžeme také zapsat ve tvaru

$$r = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi), \quad (8.22)$$

kde α je zploštění, což lze snadno ověřit porovnáním s (5.1).

Takže vztah (8.21) je rovnice ekvipotenciální plochy, kde pro zploštění α platí

$$\alpha \approx \frac{q}{2}. \quad (8.23)$$

Dosadíme-li do (8.23) za q ze vztahu (8.16), kde r nahradíme a (rozdíly jsou malé), získáme vztah pro zploštění ekvipotenciálních ploch tíhového zrychlení homogenní rotující koule:

$$\alpha \approx \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \quad (8.24)$$

Po dosazení za konstanty z Geodetického referenčního systému 1980 získáme hodnotu $\alpha \approx \frac{1}{581}$. Tato hodnota odpovídá přibližně poloviční hodnotě zploštění skutečné Země.

9 První členy rozvoje tíhového potenciálu pro reálnou Zemi

Tíhový potenciál lze opět vypočítat jako součet gravitačního a odstředivého potenciálu.

$$U = U_O + U_G \quad (9.1)$$

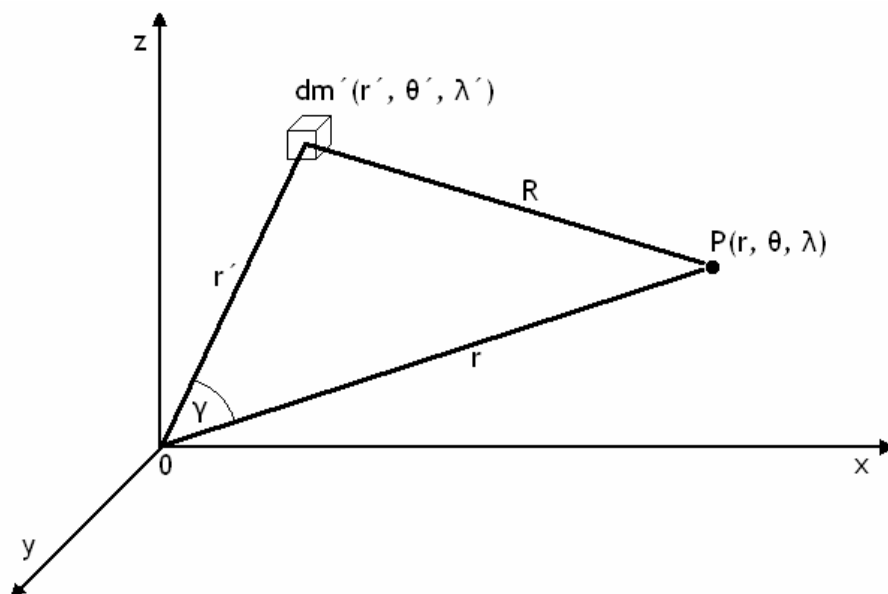
Pro odstředivý potenciál dostáváme stejně jako v předchozím případě

$$U_O = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \varphi \quad (9.2)$$

Pro gravitační potenciál v bodě P (viz obr. 9.1) způsobený malou částí tělesa o hmotnosti dm platí

$$dU_G(P) = -G \frac{dm}{R}, \quad (9.3)$$

kde R je vzdálenost bodu P od hmotného elementu dm .



Obr. 9.1: Souřadnice pozorovatele P a elementu hmotnosti dm .

Dále platí

$$dm = \rho dV, \quad (9.4)$$

kde ρ je hustota a dV příslušný element objemu. Po dosazení (9.4) do (9.3) a integraci přes objem tělesa získáme

$$U_G(P) = -G \iiint_V \frac{\rho}{R} dV \quad (9.5)$$

Dosazením (9.2) a (9.5) do (9.1) tedy dostáváme vztah pro tíhový potenciál

$$U = -G \iiint_V \frac{\rho}{R} dV - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \varphi. \quad (9.6)$$

Je-li r souřadnice bodu P , kde sledujeme potenciál, r' souřadnice té části tělesa, přes kterou právě integrujeme, a R vzdálenost bodu P od části, přes kterou

integrujeme, pak první členy rozvoje převrácené vzdálenosti do řady v mocninách (r'/r) mají tvar

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \gamma + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2} \right) + \dots \right]. \quad (9.7)$$

Poznamenejme, že v teorii Legendreových polynomů se celý rozvoj píše ve tvaru

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) \frac{1}{r} \quad (9.8)$$

kde $P_n(\cos \gamma)$ jsou příslušné Legendreovy polynomy. Legendreovy polynomy vycházejí z cosinové věty a jsou definovány jako

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad (9.9)$$

kde

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2u \cos \gamma + u^2}} \quad (9.10)$$

a $f^{(n)}(0)$ značí n-tou derivaci této funkce v bodě $r = 0$.

Dosazením rovnice (9.8) do rovnice (9.6) dostáváme

$$U = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\lambda, \nu)}{r^{n+1}} - \frac{1}{2} \omega^2 (r^2 \sin^2 \nu), \quad (9.11)$$

kde

$$Y_n = G \iiint_V (r')^n P_n(\cos \gamma) dm. \quad (9.12)$$

Zvolíme-li souřadný systém tak, aby byl počátek v hmotném středu tělesa a osy x , y a z rovnoběžné se směry hlavních momentů setrvačnosti, rovnice se nám značně zjednoduší a získáme

$$Y_0 = GM \quad (9.13)$$

$$Y_1 = 0 \quad (9.14)$$

$$Y_2 = G \left(C - \frac{A+B}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 \nu \right) + G \frac{3}{4} (B-A) \sin^2 \nu \cos 2\lambda \quad (9.15)$$

kde A , B , C jsou momenty setrvačnosti vzhledem k x , y , z

Pokud se omezíme jen na první tři členy rozvoje a zbylé členy označíme $T(r, \lambda, \nu)$, dosazením (9.13), (9.14) a (9.15) do (9.11) získáme vztah pro tíhový potenciál obecného tělesa

$$U(r, \lambda, \nu) = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \cos^2 \nu) - \frac{3G}{4r^3} (B-A) \sin^2 \nu \cos 2\lambda - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \nu + T(r, \lambda, \nu) \quad (9.16)$$

$T(r, \lambda, \nu)$ nazýváme poruchový člen.

Pokud předpokládáme, že Země má tvar sféroidu, musí platit

$$A=B \quad (9.17)$$

Dále zavedeme geocentrickou šířku φ , jelikož zeměpisné souřadnice na rozdíl od sférických začínají na rovníku

$$\varphi = 90^\circ - \nu \quad (9.18)$$

Dosazením (9.17) a (9.18) do (9.16) získáme

$$U = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3\sin^2 \varphi) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \varphi + T(r, \lambda, \varphi) \quad (9.19)$$

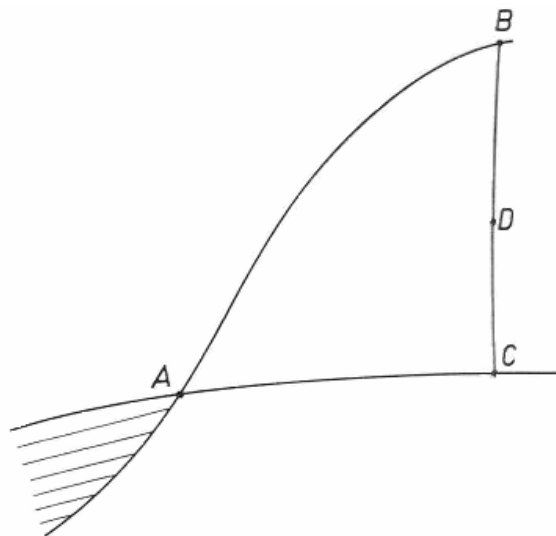
Regulární část rozvoje tíhového potenciálu se zavádí jako

$$V(r, \varphi, \lambda) = U(r, \varphi, \lambda) - T(r, \varphi, \lambda). \quad (9.20)$$

Regulární část vztahu (9.19) poměrně dobře aproximuje tíhový potenciál reálné Země a je funkcí pouze r a φ , tudíž je zonálně symetrická.

10 Nadmořské výšky

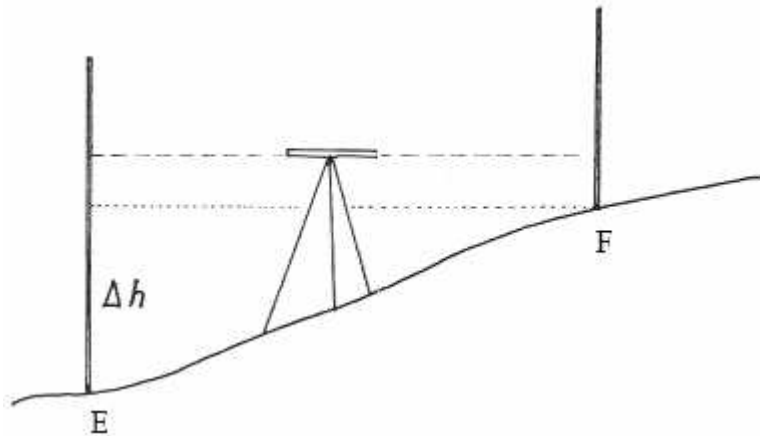
Z hlediska geofyziky je za tvar Země považován geoid. Z geodetického hlediska nás však také zajímá reálný, fyzický tvar Země – včetně kontinentů, proláclin a pohoří. Pro určení tohoto tvaru Země je potřeba ještě určit nadmořské výšky bodů na povrchu Země (obr. 10.1).



Obr. 10.1: Nadmořská výška

Jak jsme již uvedli, nadmořská výška je definována jako výška bodu nad geoidem. Stále však existuje několik způsobů zavedení takovéto nadmořské výšky. V této části budou podrobněji popsány tzv. nivelační převýšení h , dynamická výška h_D a ortometrická výška h_O . Podrobněji nejen o těchto nadmořských výškách pojednává [17].

Nivelační převýšení



Obr. 10.2: Nivelace

Nivelace je v současnosti nejpoužívanější metoda k určování nadmořské výšky. Její princip je schématicky znázorněn na obr. 10.2. V bodech E a F jsou vztyčeny svislé tyče, mezi nimi je umístěn nivelační přístroj. Ten vytvoří vodorovnou rovinu a určí výšku tyčí v této rovině. Rozdíl těchto výšek je pak nivelační převýšení bodů E a F (čerpáno z [19]). Pokud tímto způsobem postupujeme po malých krocích od mořské hladiny (bod A na obr. 10.1) až k bodu B , získáme pomocí nivelační metody jeho nadmořskou výšku.

Tato nadmořská výška je v současnosti zpravidla udávána na mapách a její výhodou je především možnost snadného měření. Nevýhodou je, že takto určená nadmořská výška mírně závisí na zvolené trase nivelování mezi body A a B , což je důsledek geometrické nerovnoběžnosti ekvipotenciálních ploch tíhového potenciálu (to je způsobeno zploštěním Země a nerovnoměrnostmi v rozložení hmoty v Zemi).

Pro Českou republiku je nadmořská výška vztažena od roku 1955 ke střední hladně Baltského moře. Dříve byla používána jako základ hladina Jaderského moře, která je asi o 0,46 m výše [18].

Pokud uvažujeme dostatečně malé kroky měření, pro nivelační převýšení platí

$$h = \int_A^B dh \quad (10.1)$$

Dynamická výška

Pro potenciál platí

$$\frac{\partial W}{\partial h} dh = -g \cdot dh \quad (10.2)$$

Pro rozdíl potenciálů dvou bodů tedy integrací (10.2) získáme

$$W(B) - W(A) = -\int_A^B g \cdot dh \quad (10.3)$$

Nyní aproximujme tíhové zrychlení g nějakou konstantou g_0 . Zpravidla se používá tíhové zrychlení na hladině moře na rovnoběžce 45°s.š. Vytvoříme nyní rovnici

$$-h_D = \frac{W(B) - W(A)}{g_0} \quad (10.4)$$

kde h_D je dynamická výška bodu B , pokud bod A leží na hladině moře (a tedy na povrchu geoidu).

Kombinací (10.3) a (10.4) můžeme dojít k rovnici

$$h_D(B) = \int_A^B dh + \int_A^B \frac{g - g_0}{g_0} dh \quad (10.5)$$

První člen je integrál nivelačních převýšení od A do B , druhý je dynamická korekce. Oba členy lze poměrně přesně získat z měření nivelace a tíhového zrychlení mezi body A a B . Dynamické výšce se též říká geopotenciální výška a často se používá například v meteorologii.

Poznamenejme, že u přesnějších geodetických měření je používána normální výška, která se dostane tak, že v (10.3) se tíhové zrychlení g neaproximuje konstantou g_0 , ale jistou funkcí, tzv. normální tíží, která závisí na zeměpisné šířce a na nadmořské výšce. Více se touto problematikou zabývá [17].

Ortometrická výška

Nyní uvažujme bod C (viz obr. 10.1), který leží na tížnici z bodu B a zároveň se nachází na povrchu geoidu (takže má stejný potenciál jako bod A).

Zřejmě musí platit

$$W(B) - W(A) = W(B) - W(C) \quad (10.6)$$

Nyní zavedeme ortometrickou výšku bodu B

$$h_o(B) = \int_C^B dh \quad (10.7)$$

Kombinací rovnic (10.4) až (10.7) dostáváme výraz pro ortometrickou výšku

$$h_o(B) = \int_A^B dh + \int_A^B \frac{g - g_0}{g_0} dh - \int_C^B \frac{g - g_0}{g_0} dh \quad (10.8)$$

První dva členy na pravé straně rovnice (10.8) odpovídají dynamické výšce bodu B , třetímu členu se říká vertikální dynamická korekce.

Námi zavedená ortometrická výška velmi dobře odpovídá výše uvedené definici nadmořské výšky jako výšky bodu nad povrchem geoidu. Její podstatnou nevýhodou je fakt, že pro přesný výpočet vertikální dynamické korekce bychom museli proměřit tíhové zrychlení po celé dráze BC , která však vede pod povrchem Země.

Stále rozšířenější je měření nadmořské výšky pomocí systému GPS, který udává právě ortometrickou výšku. Při používání tohoto systému nesmíme zapomenout na fakt, že na mapách je dodnes používáno nivelační převýšení.

Dalším především dříve používaným přístrojem je barometrický výškoměr, jeho výhodou je vysoká citlivost (přesnost určení změny výšky na desítky centimetrů), nevýhodou nutnost časté kalibrace z důvodu změn meteorologických podmínek.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo shrnout informace o historickém vývoji znalostí lidstva o tvaru Země a způsoby jeho měření.

V úvodu práce jsou prezentovány vůbec první zmínky a nápady lidí, jak by mohla Země vypadat. Jedná se o různé, pro nás již kuriózní, názory filozofů, až po první nápad, že Země by mohla být kulatá. Zatím to ale byly jen odhady, nepodložené měřením. Dále jsou popsány první pokusy změřit velikost poledníkového oblouku a následně odvodit velikost Země. V této době se předpokládalo, že Země je dokonale kulatá. Vzhledem k podmínkám a možnostem jsou Eratostenova měření z 2. st.př.n.l. překvapivě přesná.

Následující část je věnována triangulaci, což byla nová metoda na určování vzdáleností. Tato metoda umožňovala měřit vzdálenost dvou míst, i když mezi nimi byla překážka v podobě hustého lesa, jezera či rokle.

Dále zde čtenář nalezne odvození vztahu mezi geodetickou a geocentrickou šířkou.

Poměrně velká část je věnována diskusi, která probíhala v 18. století, o tom, zda je Země zploštělá na pólech nebo na rovníku. Nakonec byla rozřešena díky rozsáhlým měřením v Laponsku a Peru. Od té doby je obecně uznávaný názor, že Země je zploštělá na pólech.

Následuje zavedení pojmu geoid, který je definován jako ekvipotenciální plocha tíhového potenciálu, která se nejlépe přimyká ke střední hladině světových moří. Součástí práce je i grafické znázornění zemského geoidu. Toto těleso je dnes běžně uznáváno jako skutečný tvar Země. V kapitole je dále zmínka o družicových měřeních, radiové interferometrii a GPS. Tyto moderní techniky významnou měrou pomohly určit tvar geoidu. Dále je zde možno najít Geodetický referenční systém, různé typy nadmořských výšek a odvození tíhových potenciálů Země pro případ homogenní kulové rotující Země a pro Zemi s obecným rozložením hustoty.

Práce by v budoucnu mohla být použita jako studijní materiál k získání základních informací o daném tématu pro studenty i širokou veřejnost.

Literatura

- [1] Fischer I. (1975): The figure of the Earth – changes in concepts. *Geophysical Surveys* **2**, 3-54.
- [2] Novotný O. (1998): Motions, Gravity Field and Figure of the Earth. Salvador, Bahia, 247 s.
- [3] Vaicová M. (1993): Tíhové pole a tvar Země. Diplomová práce, MFF UK, Praha, 79 s.
- [4] Brown L.A. (1949): The Story of Maps. Little, Brown & Comp., Boston.
- [5] Jurkina M. I., Pick M. (2007): Problémy současné geodezie, 93 s (rukopis).
- [6] <http://en.wikipedia.org/wiki/Gps>
- [7] <http://science.hq.nasa.gov/oceans/physical/OST.html>
- [8] http://jihocas.astro.cz/ze_zivota/graviton/gravit_anomal-web.pdf
- [9] Moritz H. (1979): Report of Special Study Group No. 5.39 of IAG Fundamental Geodetic Constants. XVII. General Assembly of IUGG, Canberra.
- [10] Burša M., Kostecký J. (1994): Kosmická geodesie a kosmická geodynamika. Min. obrany – GŠ AČR, Praha.
- [11] <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kvasar>
- [12] Kouba J. (2004): GPS (Global Positioning System) v geofyzice. *Čs. čas. fyz.*, **54**, 221-225.

- [13] http://ec.europa.eu/dgs/energy_transport/galileo/index_en.htm
- [14] http://geoinfo.amu.edu.pl/wpk/pe/a/harbbook/c_vi/chap06.html
- [15] <http://hypo.ge-dip.etat-ge.ch/www/math/gif/gps.GIF>
- [16] http://www.iabc.cz/images/papir_arch/27/Sputnik01.jpg
- [17] Pick M., Pícha J., Vyskočil V. (1973): Úvod ke studiu tíhového pole Země. Academia, Praha.
- [18]
http://cs.wikipedia.org/wiki/Nadmo%C5%99sk%C3%A1_v%C3%BD%C5%A1ka
- [19] Čada V., Přednáškové texty z geodézie - <http://gis.zcu.cz/studium/gen1/html/>
- [20] Heiskanen W. A., Vening Meinesz F. A. (1958): The Earth and Its Gravity Field. McGraw-Hill Book Company, inc.
- [21] Burša M. (1983): Geodetický referenční systém 1980. *Čs. čas. fyz.*, **33**, 527-528.