Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Čochner

Elektromagnetická indukce s umělým zdrojem: Řešení přímé úlohy v cylindrických souřadnicích

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D.
Studijní program: Obecná fyzika

2008

Rád by som sa poďakoval RNDr. Jakubovi Velímskému, PhD. za príkladné vedenie bakalárskej práce, za jeho neoceniteľné rady, ľudský prístup a obdivuhodnú trpezlivosť. Moje vďaka patrí aj rodine, ktorá mi omožnila sa na túto prácu plne sústrediť.

Prehlasujem, že som dvoju bakalársku prácu napísal samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičaním práce a jej zverejnením.

V Praze dne Martin Čochner

Obsah

Název práce: Elektromagnetická indukce s umělým zdrojem: řešení přímé úlohy v cylindrických souřadnicích
Autor: Martin Čochner
Katedra (ústav): Katedra geofyziky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D.
e-mail vedoucího: Jakub.Velimsky@mff.cuni.cz

V predloženej práci skúmame elektromagnetickú indukciu v 1-D vrstevnatom rozložení vodivosti zeme v cylindrických súradniciach. V prvej časti odvodíme z Maxwellových rovníc difúzne rovnice elektromagnetickej indukcie v kvazistatickom priblížení a vyriešime ich s aparátom cylindrických harmonických funkcií. Do cylindrických harmonických funkcií rozložíme známe budiace pole a aplikáciou hraničných podmienok a podmienok regularity zostavíme maticu, sústavu lineárnych rovníc, pomocou ktorej určíme odozvu systému. V ďaľšej časti je popísaný program v prostredí MATLAB. Nakoniec v práci diskutujeme niekoľko vybraných rozložení vodivosti.

Klíčová slova: CSEM, elektromagnetická indukcia, 1-D vrstevnatý model, Besselove funkcie

Title: Controlled source electromagnetic induction: solution of forward problem in cylindrical coordinates
Author: Martin Čochner
Department: Department of Geophysics
Supervisor: RNDr. Jakub Velímský, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Jakub.Velimsky@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the control source electromagnetic induction (CSEM) in a 1-D layered conductivity model. We use harmonically driven vertical magnetic dipole as a source of magnetic field, which induces electric currents in the layered model. After formulating the problem in the frame of the quasi-static Maxwell electromagnetic equations in frequency domain we derive the Helmholtz equation and its solution using the apparatus of cylindrical harmonic functions. Applying the boundary conditions and transforming problem from spatial to frequency domain leads us to a linear system of equations. In the next chapters we describe program which simulates the response of a layered medium and discuss some well known physical phenomena obtained in our simulation.

Keywords: CSEM, electromagnetic induction, 1-D layered model, Hankel transformation

Kapitola 1

Úvod

Elektromagnetická indukcia s umelým zdrojom (controlled source electromagnetic induction, CSEM) je nedeštruktívna metóda geofyzikálneho prieskumu so širokým spektrom aplikácií v detekcii a klasifikácii podpovrchových objektov. Časovo premenný prúd v horizontálnej smyčke generuje magnetické pole, ktoré preniká pod povrch a vo vodivom materiáli indukuje sekundárne prúdy. Odozva prostredia je snímaná detekčnými smyčkami. Detailne je táto metóda popísaná napríklad v [1].

Ak poznáme úplný popis fyzikálneho systému, potom sme schopní pomocou fyzikálnych teórií predpovedať výsledky meraní niektorých veličín. Toto predpovedanie sa nazýva simulácia alebo tiež *priama úloha*. Opačný problém, kedy sa z výsledov merania niektorých veličín pokúšame zostaviť obraz fyzikálneho systému, sa nazýva *obrátená úloha* [2]. Priama úloha má za predpokladu determiničnosti fyzikálnej teórie na rozdiel od obrátenej úlohy zaručené jednoznačné riešenie.

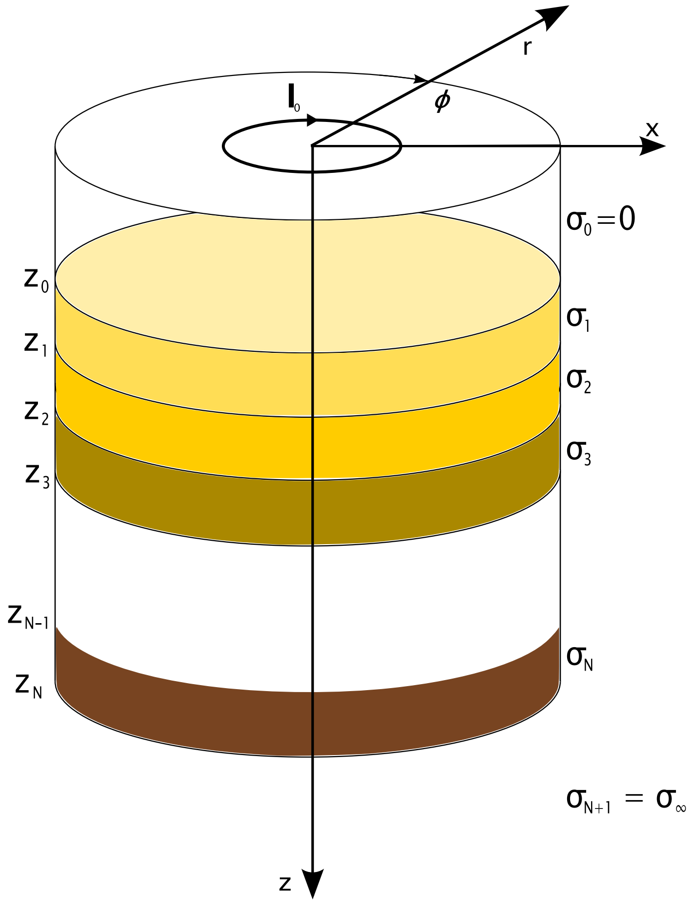
V praktickom použití CSEM-u sa zväčša z nameraných údajov pokúšame rekonštruovať rozloženie vodivosti prostredia. Jedná sa teda o obrátenú úlohu. Na vývoj a testovanie komplexných algoritmov, ktoré ju riešia, je kľúčové mať spoľahlivé data, nad ktorými môžeme tieto algoritmy testovať. Preto má aj praktický význam zaoberať sa priamou úlohou.

Riešenie priamej úlohy CSEM v 1-D vrstevnatom prostredí je už známe a popísané v geofyzikálnej literatúre , napríklad v [1]. Cielom tejto práce je predovšetkým zoznámenie sa s úlohou z matematického, fyzikálneho i programátorského hľadiska a pripraviť sa k formulácii a riešení úlohy v zložitom 3-D prostredí.

Fyzikálne veľmi blízkou CSEM-u je magnetotellurická metóda, kde však experimentátor nemá vplyv na magnetické pole indukujúce prúdy v médiu. Využívajú sa prírodné vysokoenergetické magnetické polia generované prúdmi v ionosfére a magnetosfére [3].

Vzhľadom ku geometrií zdroja je prirodzenou voľbou riešiť priamu úlohu v cylindrických súradniciach (r, Φ, z). Pre 1-D vrstevnaté rozloženie vodivosti σ si n-tou vrstvou označíme oblasť vymedzenú súradnicou z: $z_n < z < z_{n+1}$, pričom $n = (0, 1, 2, \ldots, N))$. Vodivosť σ_n je v každej oblasti konštantná. Nultá vrstva predstavuje vzduch, ktorý idealizujeme vákuom s $\sigma_0 = 0$ S/m. Posledná $(N+1)$-vá vrstva je zdola neohraničená. Oblasť pokladáme za horizontálne neobmedzenú $(0 \leq r < \infty)$; numerická realizácia spojitej Hankelovej transformácie zavedenej v nasledujúcich kapitolách je aproximovaná na konečnom intervale $(0, R)$. Zdroje primárneho poľa sa obecne môžu vyskytovať v polpriestore $z \leq 0$. V prípadě vertikálneho magnetického dipóla je tento umiestený v počiatku súradníc. Práve popísaný model zobrazuje Obr 1.1.

Obr. 1.1: Jednoduchý model



Kapitola 2

Formulácia úlohy

2.1 Maxwellove rovnice

Ak predpokladáme platnosť Ohmovho zákona

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{2.1}$$

nemagnetické prostredie ($\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$), môžeme kvázistatické Maxwellove rovnice spolu s rovnicou kontinuity elektrického prúdu písať v tvare:

$$\begin{aligned} \nabla . \boldsymbol{B} &= 0 && (2.2)\\ \nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial B}{\partial t} && (2.3)\\ \nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{j} = \mu_0 \sigma \boldsymbol{E} && (2.4)\\ \nabla . \boldsymbol{j} &= 0 && (2.5) \end{aligned}$$

Rovnice budeme riešiť vo frekvenčnej oblasti pre komplexné Fourierove koeficienty $\widetilde{\boldsymbol{B}}(\omega)$, $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\omega)$ a harmonický časový priebeh:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 2\, Re[\widetilde{\boldsymbol{B}}(\omega) exp(i\omega t)] \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 2\, Re[\widetilde{\boldsymbol{E}}(\omega) exp(i\omega t)] \tag{2.7}$$

Ďalej, pre jednoduchosť, tildu nad funkciami vynechávame.

2.2 Hraničné podmienky

Vektorové polia $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$ sú ako riešenia rovníc (2.2 až 2.5) v jednotlivých vrstvách spojité. Na hraniciach dvoch prostredí $z = z_n$ s vodivosťami σ_n a σ_{n+1} spĺňajú $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$ hraničné podmienky:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}]_-^+ &= 0, && (2.8)\\ [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B}]_-^+ &= 0, && (2.9)\\ [\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}]_-^+ &= 0, && (2.10)\\ [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}]_-^+ &= 0, && (2.11) \end{aligned}$$

kde prvá rovnica (2.8) platí obecne a vyplýva z neexistencie magnetických monopólov (2.2), druhá hraničná podmienka (2.9) platí za predpokladu, že uvažujeme lineárnu závislosť $\mu_0 H = B$ a naopak neuvažujeme žiadne voľné povrchové prúdy, tretia podmienka (2.10) vyplýva priamo z rovnice kontinuity prúdu (2.5) a štvrtá (2.11) platí obecne a je dôsledkom Faradayovho zákona (2.3).

Normála k rozhraniu $\boldsymbol{n}$ je v našom modeli totožná s jednotkovým vektorom $\boldsymbol{e_z}$.

2.3 Odvodenie Helmholtzovej rovnice

Po rotácií rovnice (2.4) a dosadení elektrickej intenzity z Ohmovho zákona (2.1) dostávame:

$$\nabla \times (\frac{1}{\sigma}\nabla \times \boldsymbol{B}) = \mu_0 \nabla \times \boldsymbol{E} \tag{2.12}$$

Na rozpísanie užijeme známe vzorce z vektorovej analýzy:

$$\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = f\nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla f \times \boldsymbol{A} \tag{2.13}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla\nabla.\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A} \tag{2.14}$$

Potom ľavá strana:

$$\nabla \times (\frac{1}{\sigma}\nabla \times \boldsymbol{B}) = \nabla\frac{1}{\sigma} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + \frac{1}{\sigma}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) = -\frac{1}{\sigma}\Delta\boldsymbol{B}$$

Prvý člen vypadol vďaka tomu, že v n-tej vrstve uvažujeme σ_n=konst. Pri úprave druhého člena na $-\Delta\boldsymbol{B}$ sme využili vzorec (2.14) a nulovosť divergencie magnetického poľa (2.2).

Pravú stranu pôvodnej rovnice (2.12) môžeme $\boldsymbol{B}$ upraviť podľa Faradayovho zákona (2.3) a po vykonaní časovej derivácie dostávame pre Fourierov koeficient $\boldsymbol{B}$:

$$\Delta\boldsymbol{B} = \mu_0\sigma i\omega\boldsymbol{B}$$

Keď si označíme $k_n^2 = -\mu_0\sigma_n i\omega$ môžeme predchádzajúcu rovnicu prepísať do konečného tvaru:

$$\Delta\boldsymbol{B} + k_n^2\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.15}$$

Ak rovnicu (2.4) zderivujeme podľa času, z Faradayovho zákona (2.3) dosadíme za $\partial B/\partial t$, použijeme rovnicu kontinuity (2.5) a na pravej strane vykonáme časovú deriváciu dostaneme pre Fourierov koeficient $\boldsymbol{E}$ rovnicu rovnakého tvaru:

$$\Delta\boldsymbol{E} + k_n^2\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.16}$$

2.4 Helmholtzova rovnica

Rovnica (2.15) resp. (2.16) sa nazýva Helmholtzova rovnica. Podľa zadania úlohy ju budeme riešiť v cylindrických súradniciach (r, ϕ, z). V nich má vektorový Laplacián tvar [5]:

$$\Delta\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} - \frac{B_r}{r^2} \\ \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{B_\phi}{r^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Rovnicu (2.15) budeme riešiť separáciou premenných. To je možné priamočiaro urobiť len pre zložku B_z.

2.5 Vertikálne zložky $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$

Riešime rovnicu

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial r} + k_n^2 B_z = 0, \tag{2.18}$$

Dosadením $B_z(r,\phi,z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$ do Helmholtzovej rovnice (2.18) dostávame:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r} + k_n^2 = 0 \tag{2.19}$$

Separujeme funkciu závislú len na súradnici z a položíme ju rovnú separačnej konštante :

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = a^2 - k_n^2 = q^2, \tag{2.20}$$

s riešením:

$$Z(z) = c_{1,2}e^{\pm qz}, (c_{1,2} \text{ sú konštanty}) \tag{2.21}$$

Po vynásobení r^2 a zapísaním separačnej konštanty nadobúda (2.19) tvar:

$$r^2\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r} + q^2 + k_n^2\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \tag{2.22}$$

Znova môžeme separovať funkciu tentokrát závislú len na súradnici ϕ:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2, \tag{2.23}$$

riešenie ktorej môžeme písať v tvare:

$$\Phi(\phi) = c_{3,4}e^{\pm im\phi}, (c_{3,4} \text{ sú konštanty}) \tag{2.24}$$

Na to aby Φ bola funkciou uhla, musí byť periodická, tj. $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$. Predchádzajúca rovnosť platí pri $m \in \mathbb{N}_0$.

Rovnicu (2.22) môžeme po zavedení novej konštanty $a^2 = k_n^2 + q^2$ písať v tvare:

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r\frac{\partial R}{\partial r} + \left(r^2a^2 - m^2\right)R = 0$$

Nakoniec zavedieme novú premennú $\rho = ra$:

$$\rho^2\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial R}{\partial \rho} + \left(\rho^2 - m^2\right)R = 0, \tag{2.25}$$

tak sme dostali známu Besselovu rovnicu, ktorej riešenie je popísané v Dodatku A:

$$R(r) = c_5 J_m(ra) \tag{2.26}$$

Dosadením $R(r), \Phi(\phi), Z(z)$ späť do (2.18) dostávame

$$B_z(r, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{d=-1,1} \int_0^{\infty} B_m^{n,d}(a) J_m(ar) e^{im\phi + d\sqrt{a^2 - k_n^2} z} da \tag{2.27}$$

Rovnako napíšeme riešenie aj pre elektrickú intenzitu:

$$E_z(r, \phi, z) = \sum_{m,d} \int_0^{\infty} E_m^{n,d}(a) J_m(ar) e^{im\phi + d\sqrt{a^2 - k_n^2} z} da \tag{2.28}$$

Riešenie v n-tej vrstve je teda možné popísať koeficientami v závislosti na vlnových číslach m, a. Uhlové vlnové číslo m je prirodzené. Radiálne vlnové číslo a je pre horizontálnu neobmedzenú oblasť spojité, reálne a nezáporné. Obmedzenie oblasti na $r \leq R < \infty$ a predpísanie hraničných podmienok v $r = R$, napr. $B_z = 0$, $E_z = 0$, by viedlo na diskretizáciu radiálneho vlnového čísla $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

2.6 Horizontálne zložky $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$

Z práve vypočítaných z-tových zložiek riešenia (2.27), (2.28) dopočítame pomocou Maxwellovych rovníc zvyšné zložky $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$.

Zapíšeme Faradayov (2.3) a Ampérov (2.4) zákon v n-tej vrstve:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -i\omega \boldsymbol{B} \text{ a } \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \sigma_n \boldsymbol{E} \tag{2.29}$$

Rotácia má v cylindrických súradniciach tvar:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right) \tag{2.30}$$

Keďže E_z a B_z obsahujú exponenciálne funkcie závislé od z, divergenčné rovnice (2.2), (2.5) môžu byť splnené len ak zvyšné komponenty E_r, E_ϕ, B_r, B_ϕ obsahujú rovnaké funkcie z:

$$B_r = \sum_d B_r^\circ(a, d, r, \phi) e^{d\sqrt{a^2 - k_n^2} z}, \; B_\phi = \sum_d B_\phi^\circ(a, d, r, \phi) e^{d\sqrt{a^2 - k_n^2} z} \tag{2.31}$$

$$E_r = \sum_d E_r^\circ(a, d, r, \phi) e^{d\sqrt{a^2 - k_n^2} z}, \; E_\phi = \sum_d E_\phi^\circ(a, d, r, \phi) e^{d\sqrt{a^2 - k_n^2} z}, \tag{2.32}$$

pričom znak „ ° “ v predchádzajúcich štyroch rovniciach slúži na zavedenie novej funkcie, nezávislej na súradnici z. Derivácie A={ E_r, E_ϕ, B_r, B_ϕ } podľa z-tovej zložky majú tvar:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \sum_{d=-1,1} A^\circ(a, d, r, \phi) e^{d\sqrt{a^2 - k_n^2} z} d\sqrt{a^2 - k_n^2} \tag{2.33}$$

Derivácie B_z a E_z (2.27), (2.28) [1]:

[1] čiarka „′“ pri Besselovej funkcii označuje deriváciu podľa r

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \sum_{d=-1,1} \sum_m B^{n,d}_{a,m} J'_m(ar) e^{im\phi + d\sqrt{a^2-k_n^2}z} \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial \phi} = \sum_{d=-1,1} \sum_m im\, B^{n,d}_{a,m} J_m(ar) e^{im\phi + d\sqrt{a^2-k_n^2}z} \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \sum_{d=-1,1} \sum_m E^{n,d}_{a,m} J'_m(ar) e^{im\phi + d\sqrt{a^2-k_n^2}z} \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \phi} = \sum_{d=-1,1} \sum_m im\, E^{n,d}_{a,m} J_m(ar) e^{im\phi + d\sqrt{a^2-k_n^2}z} \tag{2.37}$$

Zložky rovnice $\nabla \times \boldsymbol{E} = -i\omega \boldsymbol{B}$:

$$-i\omega B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \tag{2.38}$$

$$-i\omega B_\phi = \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{2.39}$$

Zložky rovnice $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \sigma_n \boldsymbol{E}$:

$$\mu_0 \sigma_n E_r = \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \tag{2.40}$$

$$\mu_0 \sigma_n E_\phi = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \tag{2.41}$$

Je vidieť, že rovnice musia platiť aj pre každé pevné d (tj. môžeme ísť do vnútra sumy). Ostáva nám iba suma cez m. Dosadením (2.33 až 2.37) do (2.38 až 2.41) vzniká lineárna sústava 4 rovníc:

$$-i\omega B_r^\circ = \frac{1}{r}\sum_m E^{n,d}_m J_m(ar) im e^{im\phi} - E_\phi^\circ d\sqrt{a^2-k_n^2} \tag{2.38a}$$

$$-i\omega B_\phi^\circ = E_r^\circ d\sqrt{a^2-k_n^2} - \sum_m E^{n,d}_m J'_m(ar) e^{im\phi} \tag{2.39a}$$

$$\mu_0 \sigma_n E_r^\circ = \frac{1}{r}\sum_m B^{n,d}_m J_m(ar) im e^{im\phi} - B_\phi^\circ d\sqrt{a^2-k_n^2} \tag{2.40a}$$

$$\mu_0 \sigma_n E_\phi^\circ = B_r^\circ d\sqrt{a^2-k_n^2} - \sum_m B^{n,d}_m J'_m(ar) e^{im\phi} \tag{2.41a}$$

ktorej riešenie dosadíme do (2.31),(2.32) a dostávame vyjadrenie zložiek E_r, E_ϕ, B_r a B_ϕ pomocou $E^{n,d}_m$ a $B^{n,d}_m$ z rozvojov B_z, E_z. Výsledkom je:

$$B_r = \sum_{m,d} e^{im\phi} e^{d\sqrt{a^2-k_n^2}z} \left[\frac{\mu_0 \sigma_n}{ra^2} E^{n,d}_m J_m(ar) im + \frac{d\sqrt{a^2-k_n^2}}{a^2} B^{n,d}_m J'_m(ar) \right] \tag{2.42}$$

$$B_\phi = \sum_{m,d} e^{im\phi} e^{d\sqrt{a^2-k_n^2}z} \left[\frac{d\sqrt{a^2-k_n^2}}{ra^2} B^{n,d}_m J_m(ar) im - \frac{\mu_0 \sigma_n}{a^2} E^{n,d}_m J'_m(ar) \right] \tag{2.43}$$

$$E_r = \sum_{m,d} e^{im\phi} e^{d\sqrt{a^2-k_n^2}z} \left[-\frac{i\omega}{ra^2} B_m^{n,d} J_m(ar) im + \frac{d\sqrt{a^2-k_n^2}}{a^2} E_m^{n,d} J'_m(ar) \right] \quad (2.44)$$

$$E_\phi = \sum_{m,d} e^{im\phi} e^{d\sqrt{a^2-k_n^2}z} \left[\frac{d\sqrt{a^2-k_n^2}}{ra^2} E_m^{n,d} J_m(ar) im + \frac{i\omega}{a^2} B_m^{n,d} J'_m(ar) \right] \quad (2.45)$$

2.7 Výpočet spektrálnych koeficientov

$\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$ musia spĺňať na hraniciach podmienky (2.8 až 2.11). Vodivosť sa mení skokovo na hraniciach $z = z_n$. V našom prípade je z normálová zložka k hranici, kým ϕ a r sú zložky rovnobežné s hranicou. Keďže v r žiadne nespojitosti σ a teda ani $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ nie sú, z člena $J_m(ar)$ vyplýva, že a musí byť rovnaké pre všetky vrstvy a dané m.

Podľa podmienky (2.8) má byť normálová zložka $\boldsymbol{B}$ pri prechode rozhraním spojitá, teda z vyjadrenia B_z (2.27) dostávame prvú podmienku:

$$\sum_d B_m^{n,d} e^{d\sqrt{a^2-k_n^2}z_n} = \sum_d B_m^{n+1,d} e^{d\sqrt{a^2-k_{n+1}^2}z_n} \quad (2.46)$$

Spojitosť σE_z na hranici (2.10) dáva:

$$\sigma_n \sum_d E_m^{n,d} e^{d\sqrt{a^2-k_n^2}z_n} = \sigma_{n+1} \sum_d E_m^{n+1,d} e^{d\sqrt{a^2-k_{n+1}^2}z_n} \quad (2.47)$$

Hraničná podmienka pre B_r (2.42) a B_ϕ (2.43) dáva podľa (2.9) a s využitím (2.47) vzťah:

$$\sum_d d\sqrt{a^2-k_n^2}\, B_m^{n,d} e^{d\sqrt{a^2-k_n^2}z_n} = \sum_d d\sqrt{a^2-k_{n+1}^2}\, B_m^{n+1,d} e^{d\sqrt{a^2-k_{n+1}^2}z_n} \quad (2.48)$$

Podobne aj podmienka spojitosti E_r a E_ϕ na hranici (2.11) s využitím (2.46) vedie na:

$$\sum_d d\sqrt{a^2-k_n^2} E_m^{n,d} e^{d\sqrt{a^2-k_n^2}z_n} = \sum_d d\sqrt{a^2-k_{n+1}^2} E_m^{n+1,d} e^{d\sqrt{a^2-k_{n+1}^2}z_n} \quad (2.49)$$

Predchádzajúce podmienky musia byť splnené na všetkých vnútorných hraniciach z_n, kde $n \in \{1, \ldots, N\}$.

Čo sa týka hraničných podmienok 0−tej vrstvy (idealizovaný vzduch) tam treba byť mierne opatrnejší. Rovnice (2.46) a (2.48) môžeme bez problémov rozšíriť na nultú hranicu z_0:

$$\sum_d B_m^{0,d} e^{daz_0} = \sum_d B_m^{1,d} e^{d\sqrt{a^2-k_1^2}z_0} \quad (2.50)$$

$$\sum_d da\, B_m^{0,d} e^{daz_0} = \sum_d d\sqrt{a^2-k_1^2}\, B_m^{1,d} e^{d\sqrt{a^2-k_1^2}z_0} \quad (2.51)$$

Vo vzduchu je $\sigma_0 = 0$ S/m a prúdová hustota je nulová. To implikuje cez hraničnú podmienku (2.10) vynulovanie E_z na hranici:

$$0 = \sigma_1 \sum_d E_m^{1,d}\, e^{d\sqrt{a^2-k_1^2}z_0} \tag{2.52}$$

Rozšíriť na nultú vrstvu môžeme aj (2.49). Spojitosť E_r a E_ϕ na nultej hranici dáva:

$$\sum_d daE_m^{0,d}e^{daz_0} = \sum_d d\sqrt{a^2-k_1^2}E_m^{1,d}e^{d\sqrt{a^2-k_1^2}z_0} \tag{2.53}$$

Ďalej budeme požadovať regularitu $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$. Regularita v r dáva vylúčenie Besselových funkcií druhého druhu z riešenia Helmholtzovej rovnice.

Posledným bodom je podmienka plynúca z regularity v súradnici z, ktorá sa vyskytuje v člene $e^{d\sqrt{a^2-k_{N+1}^2}z}$. Komplexnú odmocninu získame vyjadrením v exponenciálnom tvare[2] $\sqrt{a^2+i\omega\mu_0\sigma_{N+1}} = \sqrt{R}e^{i\varphi/2}$. Keďže a^2 je čisto reálne a $i\omega\mu_0\sigma_{N+1}$ je čisto imaginárne, φ leží v prvom kvadrante komplexnej roviny, teda $\varphi \in (0,\pi)$. Je vidieť, že reálna časť [3] z odmocniny je vždy nezáporná. Regularita člena $e^{+d\sqrt{a^2-k_{N+1}^2}z}$ pre $z\to\infty$ tak ukladá dve jednoduché podmienky:

$$B_m^{N+1,+1} = 0 \tag{2.54}$$

$$E_m^{N+1,+1} = 0 \tag{2.55}$$

Nech a, m sú dané. Spolu so vzduchom máme $(N+2)$ vrstiev - viz.(Obr. 1.1). V každej tejto vrstve máme 4 neznáme koeficienty $(B_m^{n,d}, E_m^{n,d})$, pomocou ktorých sú vyjadrené všetky zložky $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{E}$; celkovo 4(N+2) neznámych. Podmienky (2.46) až (2.49) dávajú na tieto koeficienty 4N lineárnych rovníc. Podmienky (2.50) až (2.53) z 0−tej vrstvy dávajú štyri rovnice. Regularita (2.54,2.55) dáva ďalšie dve. Ostávajú nám dva stupne voľnosti, aby sústava mala jednoznačné riešenie. Tieto vyplníme z rozvoja budiaceho zdroja do Besselových funkcií.

Dôležité je pozorovanie, že jednotlivé hraničné podmienky nám nezväzujú koeficienty $B_m^{n,d}$ a $E_m^{n,d}$. Tým sa nám riešenie rozpadá na dva prípady - *módy*. TM (Toroidal Magnetic) mód je charakterizovaný prúdovými smyčkami v r-z rovinách a toroidným magnetickým poľom (solenoidálne pole, ktoré nemá z-tovú komponentu). PM (Poloidal Magnetic) mód je tvorený prúdovými smyčkami ležiacimi v rovinách kolmých na súradnicu z, ktoré generujú poloidálne magnetické pole (solenoidálne pole, ktorého rotácia nemá z-tovú zložku). Podrobnejšie viz. [1]. Keďže nás zaujíma hlavne prípad, kedy sú prúdy v zemi budené magnetickým dipólom, ďalej sa budeme zaoberať len PM módom a položíme

$$E_m^{n,d} = 0 \qquad \forall n \tag{2.56}$$

Rovnicu (2.27) môžeme vo vzduchu voľbou pevného $d=+1$ alebo $d=-1$ prepísať na sumu dvoch častí:

$$B_z = B_z^+ + B_z^- \tag{2.57}$$

[2]Druhá možnosť, ktorú neuvažujeme je $\sqrt{a^2+i\omega\mu_0\sigma_{N+1}} = \sqrt{R}e^{i(\varphi/2+\pi)}$.

[3]imaginárna časť neovplyvňuje regularitu, e^{ix} je ombedzená pre všetky $x\in\mathbb{R}$

Časť B_z^- s rastúcou súradnicou z klesá a odpovedá budiacemu poľu. Naopak B_z^+ odpovedá poľu odozvy.

Systém lineárnych rovníc (2.46 až 2.55) môžeme napísať pomocou maticového formalizmu

$$\mathbf{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2.58}$$

kde $\boldsymbol{x} = (B_m^{0,-1}, B_m^{0,1}, B_m^{1,-1}, B_m^{1,1}, \ldots, B_m^{N+1,-1}, B_m^{N+1,1})^T$, $\boldsymbol{b} = (B_m^{0,-1}, 0, \ldots, 0)^T$ a $\mathbf{A}$ je matica v tvare:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ e^{-q_0 z_0} & e^{q_0 z_0} & -e^{-q_1 z_0} & -e^{+q_1 z_0} & & & & & & \\ -q_0 e^{-q_0 z_0} & q_0 e^{q_0 z_0} & q_1 e^{-q_1 z_0} & -q_1 e^{q_1 z_0} & & & & & & \\ & & e^{-q_1 z_1} & e^{q_1 z_1} & -e^{-q_2 z_1} & -e^{+q_2 z_1} & & & & \\ & & -q_1 e^{-q_1 z_1} & q_1 e^{q_1 z_1} & q_2 e^{-q_2 z_1} & -q_2 e^{q_2 z_1} & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.59}$$

Matica $\mathbf{A}$ je pásová s dvoma pásmi nenulových prvkov nad i pod diagonálou. Prvky matice sú závislé na a, ω a samozrejme aj na zvolenom vodivostnom modeli, teda z_n a σ_n. Všimnime si, že matica nezávisí od vlnového čísla m. Naopak vektor pravej strany obsahujúci len jeden nenulový prvok, známy rozvoj budiaceho zdroja, obecne na m závisí.

2.8 Pole dipólu vo vákuu

Pole budiacej smyčky s plochou S, ktorou preteká prúd I je možné aproximovať poľom magnetického dipólu umiestneného v počiatku, ktoré má tvar:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(3\frac{(\boldsymbol{m}.\hat{\boldsymbol{r}})}{|\,\boldsymbol{r}|^3}\hat{\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{m}}{|\,\boldsymbol{r}|^3}\right) \tag{2.60}$$

Kde $\boldsymbol{m}$ je vektor magnetického momentu veľkosti $|\,\boldsymbol{m}| = IS$. V našom prípade máme horizontálne umiestnenú smyčku so stredom v počiatku a $\boldsymbol{m} = IS\hat{\boldsymbol{z}}$. Pole budiacej cievky môžeme písať po zložkách:[4]

$$B_{r\,dip}(\boldsymbol{r}) = \tfrac{\mu_0 IS}{4\pi}\tfrac{3zr}{(r^2+z^2)^{5/2}} \tag{2.61}$$

$$B_{\phi\,dip}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.62}$$

$$B_{z\,dip}(\boldsymbol{r}) = \tfrac{\mu_0 IS}{4\pi}\tfrac{2z^2-r^2}{(r^2+z^2)^{5/2}} \tag{2.63}$$

[4]Keď si pre väčšiu prehľadnosť uhol, ktorý zviera osa z s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ označíme θ, r_s veľkosť polohového vektora a r_c veľkosť príslušného cylindrického polomeru (priemetu $|\,\boldsymbol{r}|$ do roviny xy), tak jednotkový polohový vektor $\hat{\boldsymbol{r}}$ môžeme prepísať ako

$$\hat{\boldsymbol{r}} = sin(\theta)cos(\phi)\hat{\boldsymbol{x}} + sin(\theta)sin(\phi)\hat{\boldsymbol{y}} + cos(\theta)\hat{\boldsymbol{z}} = sin(\theta)\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{c}} + cos(\theta)\hat{\boldsymbol{z}},$$

kde $\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{c}}$ je jednotkový vektor v smere polomeru cylindrických súradnic (r, ϕ, z). Po rozpísaní $sin(\theta) = \frac{r_c}{|\,\boldsymbol{r}|}$ a $cos(\theta) = \frac{z}{r_s}$ dostávame z (2.60) po doplnení kosínu výsledky (2.61), (2.62), (2.63).

$B_{z\,dip}$ môžeme v nultej vrstve zjavne stotožniť s členom $B_z^-(r,z)$ vo vzorci (2.57). Vzhľadom k osovej symetrii dipólového poľa môžeme písať:

$$B_z^-(r,z) = B_{z\,dip} = \int_0^\infty B_0^{0,-1}(a) J_0(ar) e^{-az} da, \quad B_m^{0,-1} = 0 \quad \forall m \neq 0 \tag{2.64}$$

Hankelova transformácia nultého rádu má tvar (B.1):

$$A(r) = \int_0^\infty a\tilde{A}(a) J_0(ar) da, \quad \text{kde } \tilde{A}(a) = \int_0^\infty r A(r) J_0(ar) dr \tag{2.65}$$

Porovnaním vidíme, že $\tilde{A} = \frac{B_0^{0,-1}(a)e^{-az}}{a}$ a pre $B_0^{0,-1}(a)$ musí platiť:

$$B_0^{0,-1}(a) = ae^{az} \int_0^\infty r B_z^-(r,z) J_0(ar) dr, \tag{2.66}$$

Vzťah (2.66) musí platiť pre ľubovoľné z. Položíme teda napríklad hodnotu $z = z_0 > 0$ a dosadíme $B_{z\,dip}$ za $B_z^-(r)$:

$$B_0^{0,-1}(a) = ae^{az_0} \int_0^\infty r \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \frac{2z_0^2 - r^2}{(r^2 + z_0^2)^{5/2}} J_0(ar) dr \tag{2.67}$$

Integrál Hankelovej transformácie je možné analyticky vyjadriť

$$\int_0^\infty r \frac{2z_0^2 - r^2}{(r^2 + z_0^2)^{5/2}} J_0(ar) dr = ae^{-a|z_0|}, \quad z_0 \neq 0 \tag{2.68}$$

a dostávame:

$$B_0^{0,-1}(a) = a^2 \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \tag{2.69}$$

Vidíme, že $B_0^{0,-1}(a)$ podľa predpokladu nezávisí na zvolenom z_0.

$B_0^{0,-1}(a)$ sme mohli získať analogickým spôsobom zo vzorcov pre B_r (2.42) a $B_{r\,dip}$ (2.61). $E_m^{n,d}$ v (2.42) vďaka $m = 0$ vypadne, $J_0'(ar)$ je rovné podľa (A.5) $-aJ_1(ar)$ a po aplikácií Hankelovej transformácie prvého rádu[5] by sme dostali už známy výsledok (2.69), čo slúži ako určitá kontrola správnosti tohto výsledku.

2.9 Analytické vzorce pre vertikálny dipól nad homogénnym polpriestorom

V prípade osovo symetrického zdroja môžeme zjednodušiť vzorce (2.42), (2.27), (2.45) a pre polia v n-tej vrstve písať[6]:

$$B_r(r,\phi,z) = \int_0^\infty \frac{q_n}{a^2} \left[B_0^{n,-1}(a)e^{-q_n z} - B_0^{n,+}(a)e^{q_n z}\right] aJ_1(ar)\, da \tag{2.70}$$

$$B_z(r,\phi,z) = \int_0^\infty \frac{1}{a} \left[B_0^{n,-1}(a)e^{-q_n z} + B_0^{n,+}(a)e^{q_n z}\right] aJ_0(ar)\, da \tag{2.71}$$

$$E_\phi(r,\phi,z) = -\int_0^\infty \frac{i\omega}{a^2} \left[B_0^{n,-1}(a)e^{-q_n z} + B_0^{n,+}(a)e^{q_n z}\right] aJ_1(ar)\, da \tag{2.72}$$

[5] integračné jadro obsahuje Besselovu funkciu prvého rádu

[6] ak zdroj nie je osovo symetrický suma cez m vo vzorcoch ostáva

Zvyšné zložky $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ sú v prípade PM módu nulové. Koeficient $B_0^{0,-1}(a)$ je daný veľkosťou momentu dipólu podľa (2.69).

Pre úplnosť napíšeme aj analytické vyjadrenie koeficientov $B_0^{0,+1}$ a $B_0^{1,-1}$ pre prípad dipólu nad polpriestorom:

$$B_0^{0,+1}(a) = a^2 \frac{\mu_0 IS}{4\pi} e^{-2az_0} \frac{a - q_1}{a + q_1} \tag{2.73}$$

$$B_0^{1,-1}(a) = a^2 \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \frac{2ae^{-az_0} e^{q_1 z_0}}{a + q_1}, \tag{2.74}$$

Dosadíme (2.69) a(2.73) do (2.70), (2.71) a (2.72) a získame analytické vzorce pre pole dipólu vo vzduchu nad homogénnym polpriestorom.

$$B_r(r, \phi, z) = \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \int_0^\infty a \left[e^{-az} - e^{a(z-2z_0)} \frac{a - q_1}{a + q_1} \right] a J_1(ar)\, da \tag{2.75}$$

$$B_z(r, \phi, z) = \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \int_0^\infty a \left[e^{-az} + e^{a(z-2z_0)} \frac{a - q_1}{a + q_1} \right] a J_0(ar)\, da \tag{2.76}$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = -i\omega \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \int_0^\infty \left[e^{-az} + e^{a(z-2z_0)} \frac{a - q_1}{a + q_1} \right] a J_1(ar)\, da \tag{2.77}$$

Dosadením (2.74) do (2.70), (2.71) a (2.72) dostávame analytické vyjadrenia polí v polpriestore:

$$B_r(r, \phi, z) = \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \int_0^\infty q_1 \left[\frac{2ae^{-az_0} e^{q_1 z_0}}{a + q_1} e^{-q_1 z} \right] a J_1(ar) da \tag{2.78}$$

$$B_z(r, \phi, z) = \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \int_0^\infty a \left[\frac{2ae^{-az_0} e^{q_1 z_0}}{a + q_1} e^{-q_1 z} \right] a J_0(ar) da \tag{2.79}$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = -i\omega \frac{\mu_0 IS}{4\pi} \int_0^\infty \left[\frac{2ae^{-az_0} e^{q_1 z_0}}{a + q_1} e^{-q_1 z} \right] a J_1(ar) da \tag{2.80}$$

Kapitola 3

Program

Program, teda balíček funkcií, bol napísaný a odladený v prostredí MATLAB 7. Jazyk MATLAB[1] bol zvolený preto, že obsahuje veľké množstvo vstavaných funkcií a poskytuje tiež solídne možnosti v zobrazovaní spočítaných výsledkov. Rýchlosť výpočtu v prípade 1-D rozloženia vodivosti nie je kritickým faktorom.

Celkový program je rozdelený do viacerých funkcií. Je koncipovaný tak, aby užívateľ mohol jednoducho modelovať vlastný 1-D rozmerný problém budený dipólom.

Pásovú maticu **A** (2.59) zostaví a vektor x $(B_0^{0,\pm1} \dots B_0^{N+1,\pm1})^T$ vráti pre daný model funkcia *Bb.m.* Na jej vyriešenie sa pre malý počet vrstiev (približne do 10) môže použiť vstavaná metóda MATLABU, ktorá využíva Gaussovej eliminácie. Pre väčší počet začína mať táto metóda kvôli zaokrúhlovacím chybám problémy.

Klúčová funkcia, ktorú MATLAB nemal zabudovanú, bola Hankelova transformácia (ďalej HT). Tú vzhľadom na chovanie sa Besselovej funkcie nie je možné počítať niektorou zo štandartných metód na počítanie integrálov. Ako prvý sme použili preto balíček programov *hankel.zip* od B. Borchersa[2], založený na implementácií algoritmu adaptívnej digitálnej filtrácie popísaného Andersonom [7], ďalej HTA. V balíčku je okrem funkcie hankel01.m, ktorá vracia HT nultého aj prvého rádu aj program *test.m.* Ten slúži na prevedenie HT na niekoľko vybraných funkcií a výsledok porovnáva so známym analytickým riešením. Tak si môžeme ľahko spraviť približný obrázok o presnosti použitej implementácie.

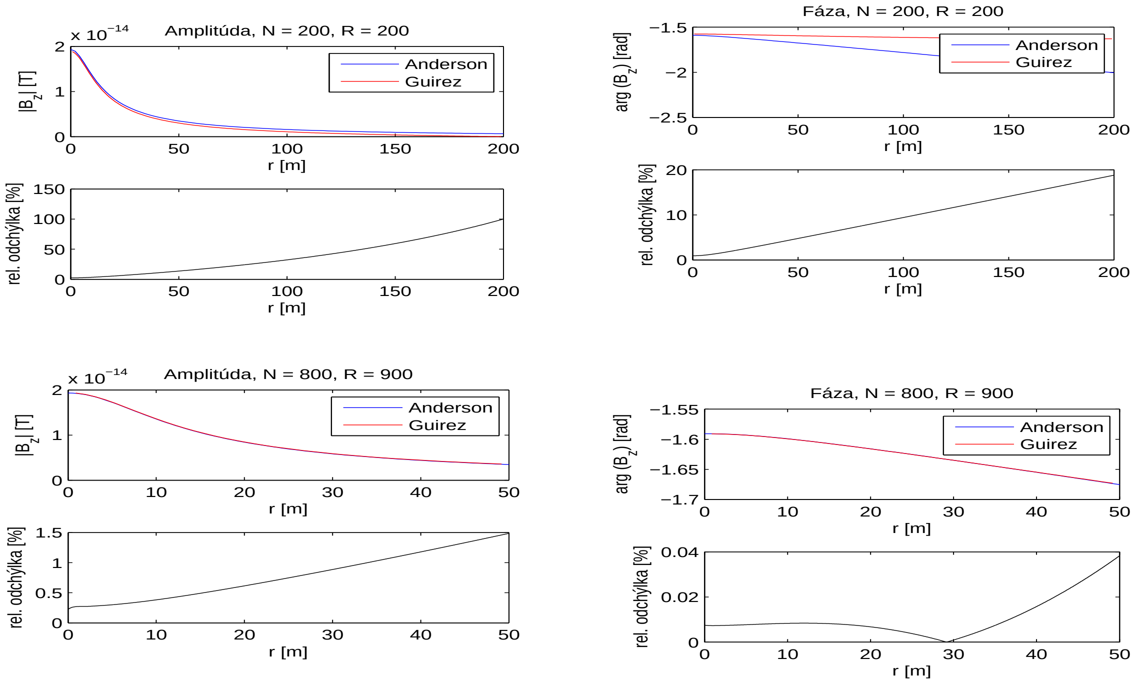
Andersonov algoritmus je podľa týchto testovacích funkcií presný, od analytického riešenie sa nelíši o viac než $10^{-3}\%$. Jeho jedinou nevýhodou je, že potrebuje transformovanú funkciu definovanú na veľkom rozsahu škál 10^{-14}–10^{21}. V prípade komplikovanejšieho modelu ako polpriestor sme použili iný balíček a to *Hankel_transform.m*[3] od M. Guizara (ďalen HTG), ktorého algoritmus je založený na kvázidiskrétnej HT [8]. Na tomto kóde je tiež založená naša funkcia modelG.m, ktorá pre model určený parametrami (σ_n, z_n, z, f) vracia graf 2D polpriestoru.

Presnosť HTG sa nastavuje dvoma parametrami, počtom bodov N_b a R (definičný obor výsledku transformácie je (0,R)). Ak nastavíme R príliš malé, umelo pokladáme výslednú funkciu nule v $r = R$. Ak nastavíme R príliš veľké, pomer

[1] kompatibilita programov bola vyskúšaná aj v jeho voľne šíriteľnej alternatíve GNU Octave ver. 3, rozdiely medzi Octave a MATLABom napríklad: http://wiki.octave.org/wiki.pl?MatlabOctaveCompatibility

[2] B. Borchers, 2001, http://infohost.nmt.edu/~borchers/hankel.html

[3] M. Guizar-Sicairos, 2004, http://www.optics.rochester.edu/ mguizar



Obr. 3.1: Porovnanie HTA a HTG pre polpriestor s homogénnou vodivosťou $\sigma = 1$ S/m, v hladine $z = 1$m

R/N bude veľký a klesá citlivosť. Správne nastavenie R je závislé od chovania sa transformovanej funkcie.

Testovanie HTG sme robili predovšetkým oproti HTA na odozvu polpriestoru. Porovnanie je spracované programom *porov.m*, ktorý vytvorí graf amplitúdy a fázy odozvy B_z^+ vo vzduchu v hladine $z = 0$m pre model polpriestoru s parametrami $z_0 = 5$m, $\sigma = 1$ S/m, $f = 1$ Hz, $IS = 1$A.m^2. Pre dve dvojice zobrazuje problém voľby N_b a R Obr. 3.1. Vidíme tak prípadné úskalia v odstránení príliš veľkej časti priestorových frekvencií.

Kapitola 4

Výsledky

4.1 Homogénny polpriestor

Prvú sériu výpočtov sme previedli pre prípad vertikálneho magnetického dipólu s momentom $|m| = 1\text{Am}^2$ vo výške 5m nad povrchom (teda $z_0 = 5\text{m}$) s harmonickým signálom vo frekvenčnom rozsahu 1Hz až 10 Mhz. K výpočtu zložiek elektrického a magnetického poľa E_ϕ, B_r, B_z nad povrchom ($z < z_0$) a pod povrchom ($z > z_0$) sme použili analytické vzorce (2.74-6), resp. (2.77-9). Hankelovu transformáciu sme počítali presnejším algoritmom HTA pre úhlové vlnové čísla a v rozsahu 10^{-14}–10^{21}. Výsledky zobrazujeme do horizontálnej vzdialenosti 50 m a hĺbbky 70 m s diskretizáciou 0.5 m, resp. 0.7 m v súradniciach r, resp. z. Pre frekvencie 10 kHz a jeden MHz je hĺbkový rozsah znížený na 20 m a diskretizácia zahustená na 0.2 m.

Obr. 4.1 zobrazuje amplitúdu a fázu elektrického poľa E_ϕ, ktoré vzhľadom k jednotkovej vodivosti číselne odpovedá aj veľkosti toroidálneho elektrického prúdu ve vodivom polpriestore. Frekvencii 1 Hz odpovedá v kartézskej geometrií hĺbka prieniku 2 km, pre 1 MHz sú to už len 2m [3]. Pre rastúce frekvencie sa teda energia zaostruje do menších hĺbok a zároveň dochádza k rýchlejšiej oscilacii fázy v závislosti od hĺbky z. Na rozdiel od magnetotellurickej metódy, ktorá pracuje s predpokladom nekonečnej rovinnej vlny, vedie použitie konečného zdroja tiež na pokles amplitúd s rastúcou horizontálnou vzdialenosťou od dipólu. Rovnaké závery platia aj pre zložky magnetického poľa B_r a B_z, ktoré sú zobrazené na Obr. 4.2 a 4.3.

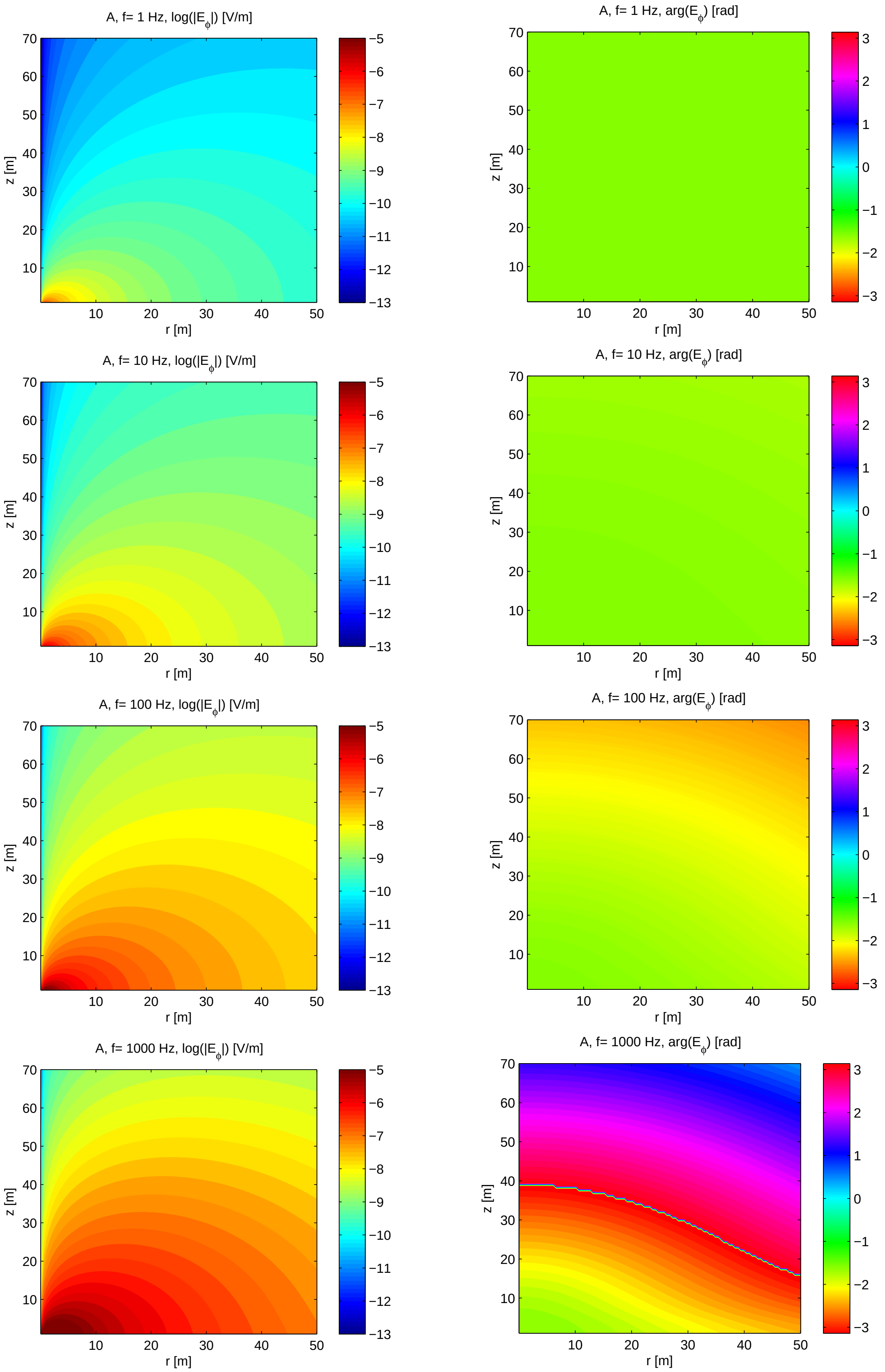
4.2 Vodivá doska

Druhým modelom, ktorý sme pre jeho názorný fyzikálny význam skúmali bol prípad vodivej dosky. Model aj zdroj sú rovnaké ako v predchádzajúcej kapitole homogénneho priestoru, až na to, že do modelu teraz umiestnime jednu vodivú vrstvu s vysokou vodivosťou $\sigma_2 = 10^5\text{S/m}$, ktorú postupne umiestňujeme do hĺbky 0.1, 5, 45 m pod povrch (horný okraj dosky sa teda nachádza na súradnici z_1=5.1 10 a 50m). Pri výpočtoch používame, na rozdiel od homogénneho polpriestoru, HTG. Pre extrémne malé alebo extrémne veľké radiálne vlnové čísla a,ktoré vyžaduje metóda HTA, je sústava (2.58), riešená numericky v jednoduchej presnosti, singulárna.

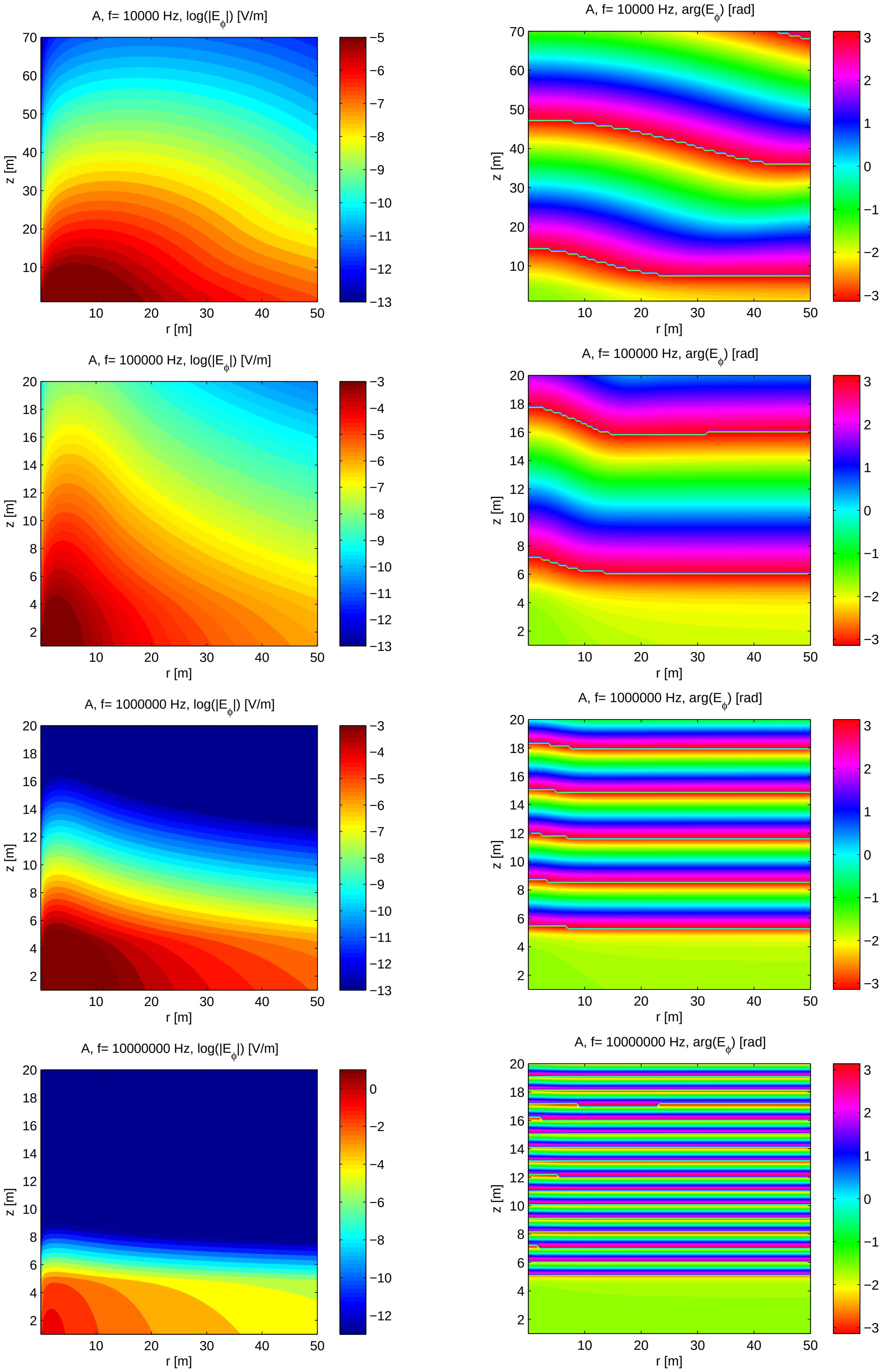
Obr. 4.4 ukazuje prípad takejto vysoko vodivej dosky vloženej 10 cm pod povrchom. S nárastom frekvencie klesá intenzita elektrického poľa za doskou; vodivá doska signál silno odtieni. Môžeme si všimnúť zvláštny priebeh fázy pre $f = 1$Hz. Toto správanie však nemá fyzikálny obsah a je len numerickou chybou HTG ako odhalilo vykreslenie s väčším počtom bodov N_b (a znateľne dlhším výpočtom). S rastúcou fázou narastajú aj oscilácie fázy v závislosti na z.

Keď posunieme dosku hlbšie, do 5 m pod povrch (Obr. 4.5), pozorujeme podobný priebeh. V prípade vrstvy v hĺbke 45 m môžeme vidieť, že pre vyššie frekvencie už je vrsva prakticky neviditeľná ako ukazuje prípad pre f=100 Hz. Dobre je to taktiež vidieť na fázovom grafe.

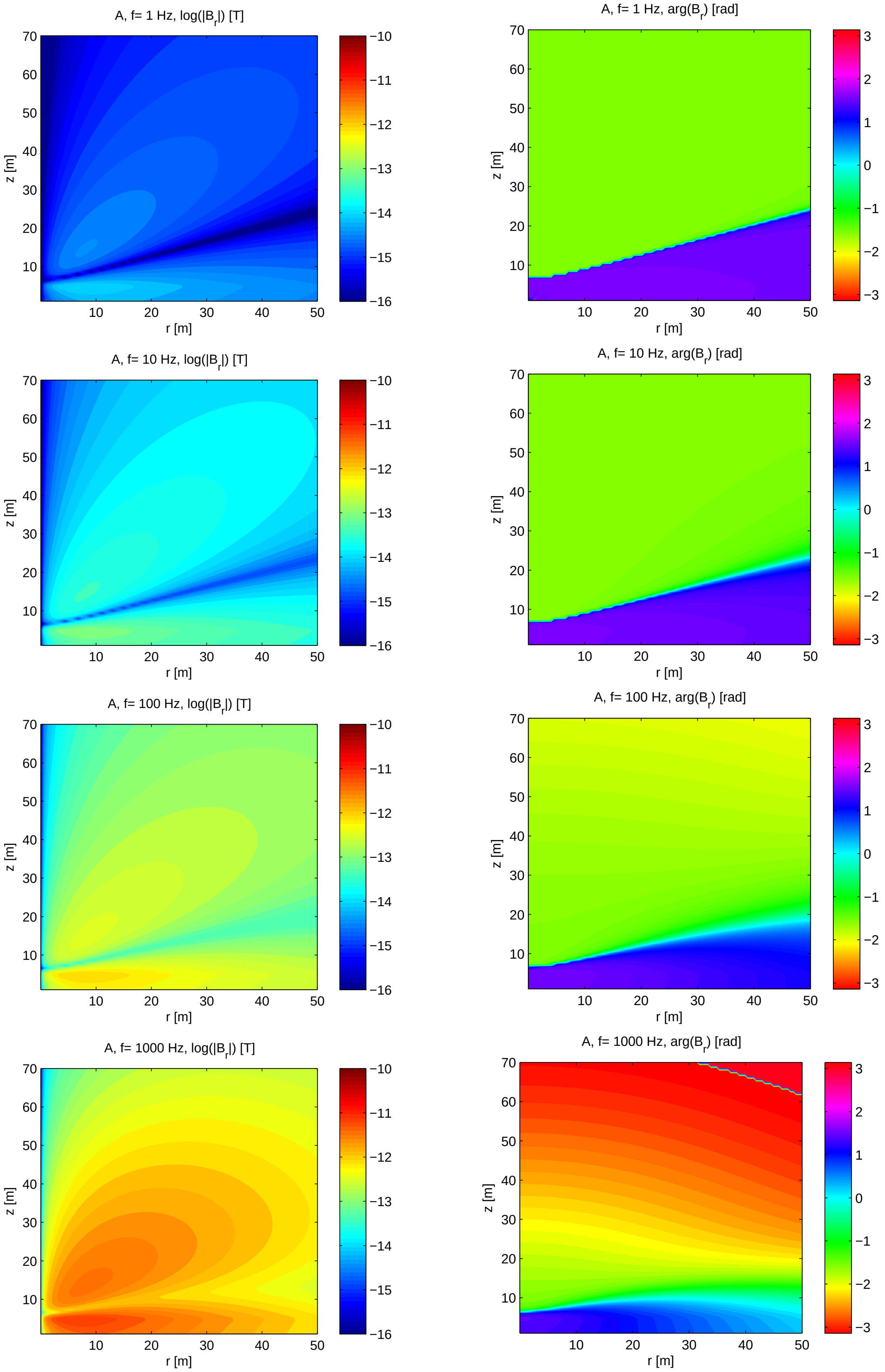
Obr. 4.1: Amplitúda (vľavo) a fáza (vpravo) E_ϕ s rastúcou frekvenciou budiaceho poľa f v polpriestore s $\sigma_1 = 1$ S/m



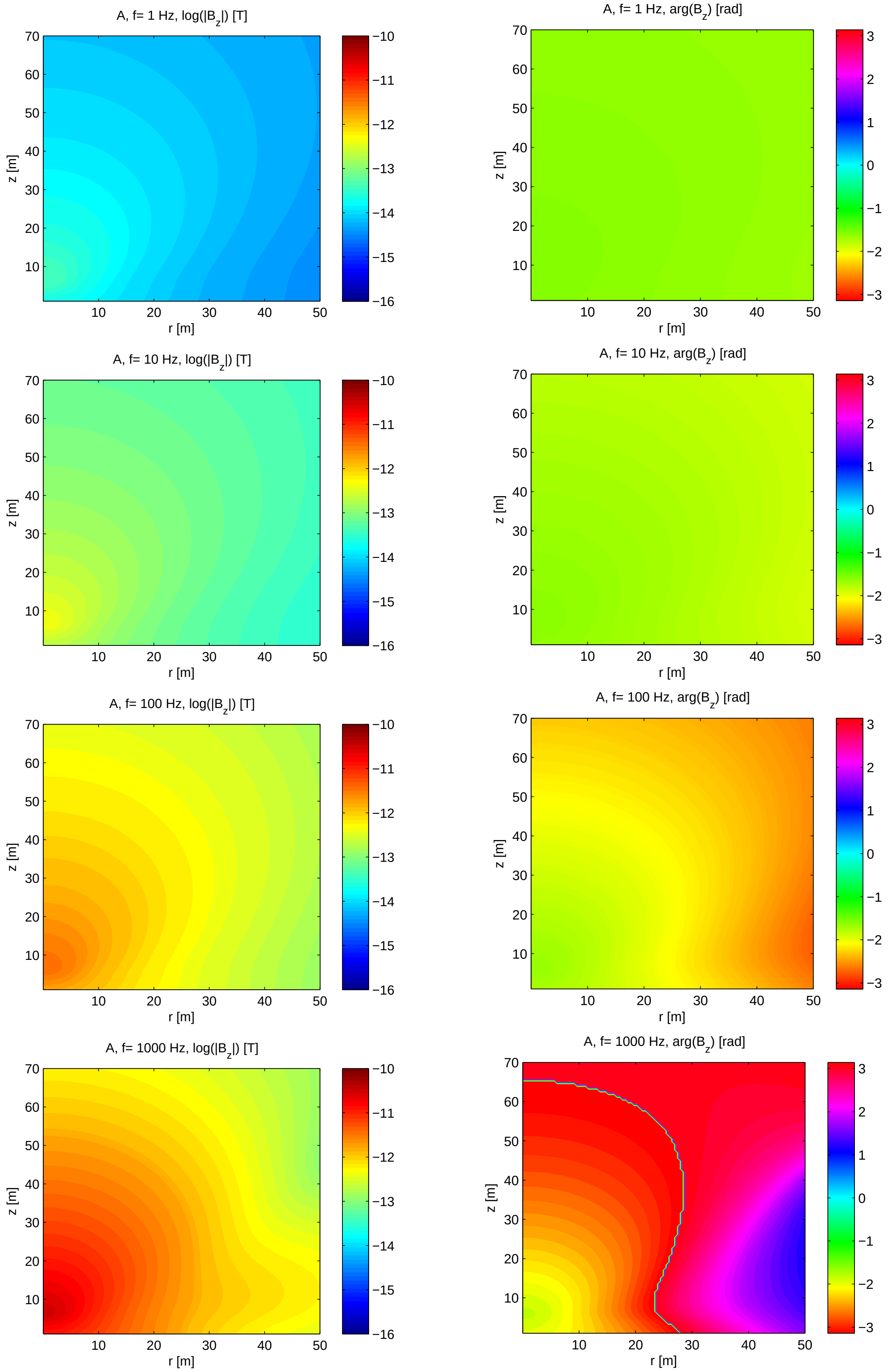
Obr. 4.1: (Pokračovanie)



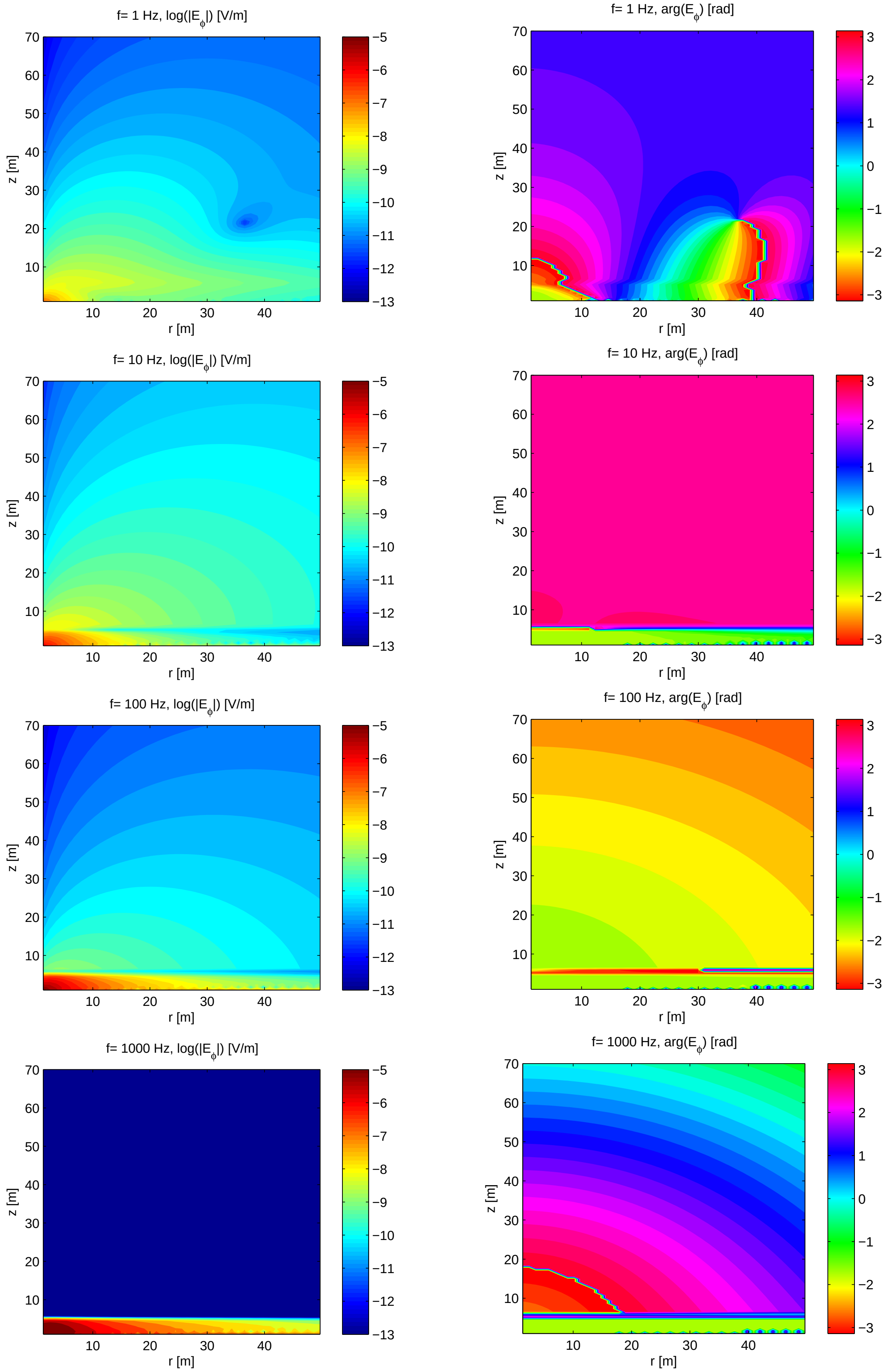
Obr. 4.2: Amplitúda a fáza B_r s rastúcou frekvenciou budiaceho poľa f (do 1kHz) v polpriestore s $\sigma_1 = 1$ S/m



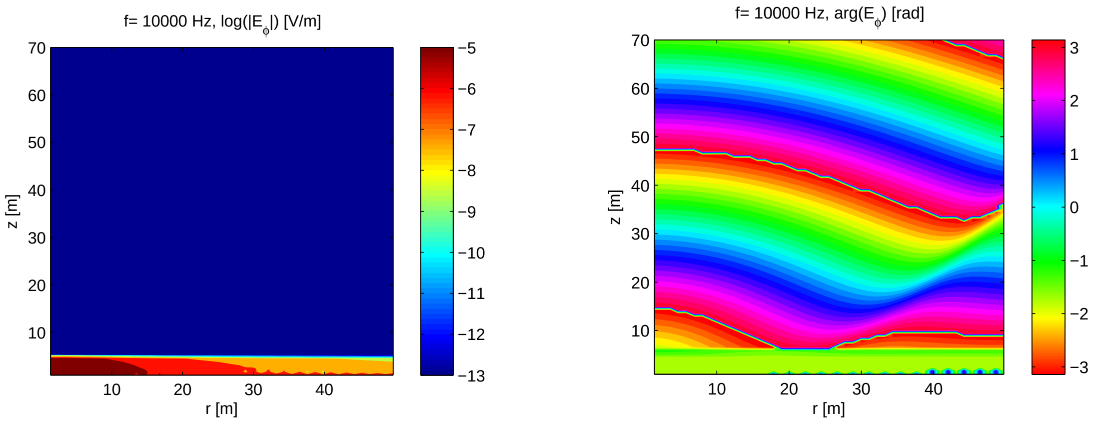
Obr. 4.3: Amplitúda a fáza B_z s rastúcou frekvenciou budiaceho poľa f v polpriestore s $\sigma_1 = 1$ S/m



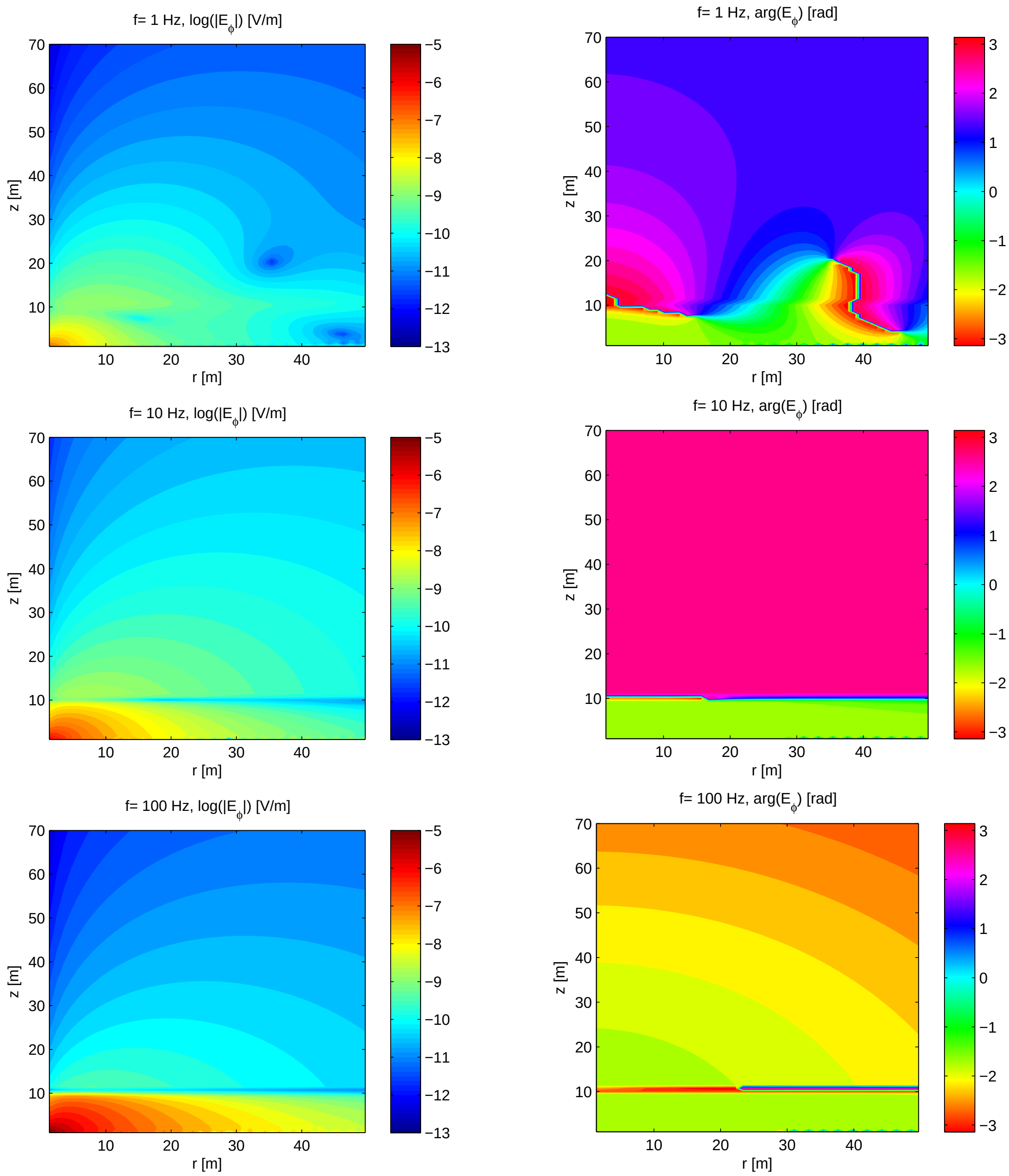
Obr. 4.4: Amplitúda a fáza E_ϕ s rastúcou frekvenciou budiaceho poľa f v polopriestore s $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$ S/m a vloženou silno vodivou doskou ($\sigma_2 = 10^5$S/m) hrúbky 1m s horným okrajom v hĺbke 0.1 m.



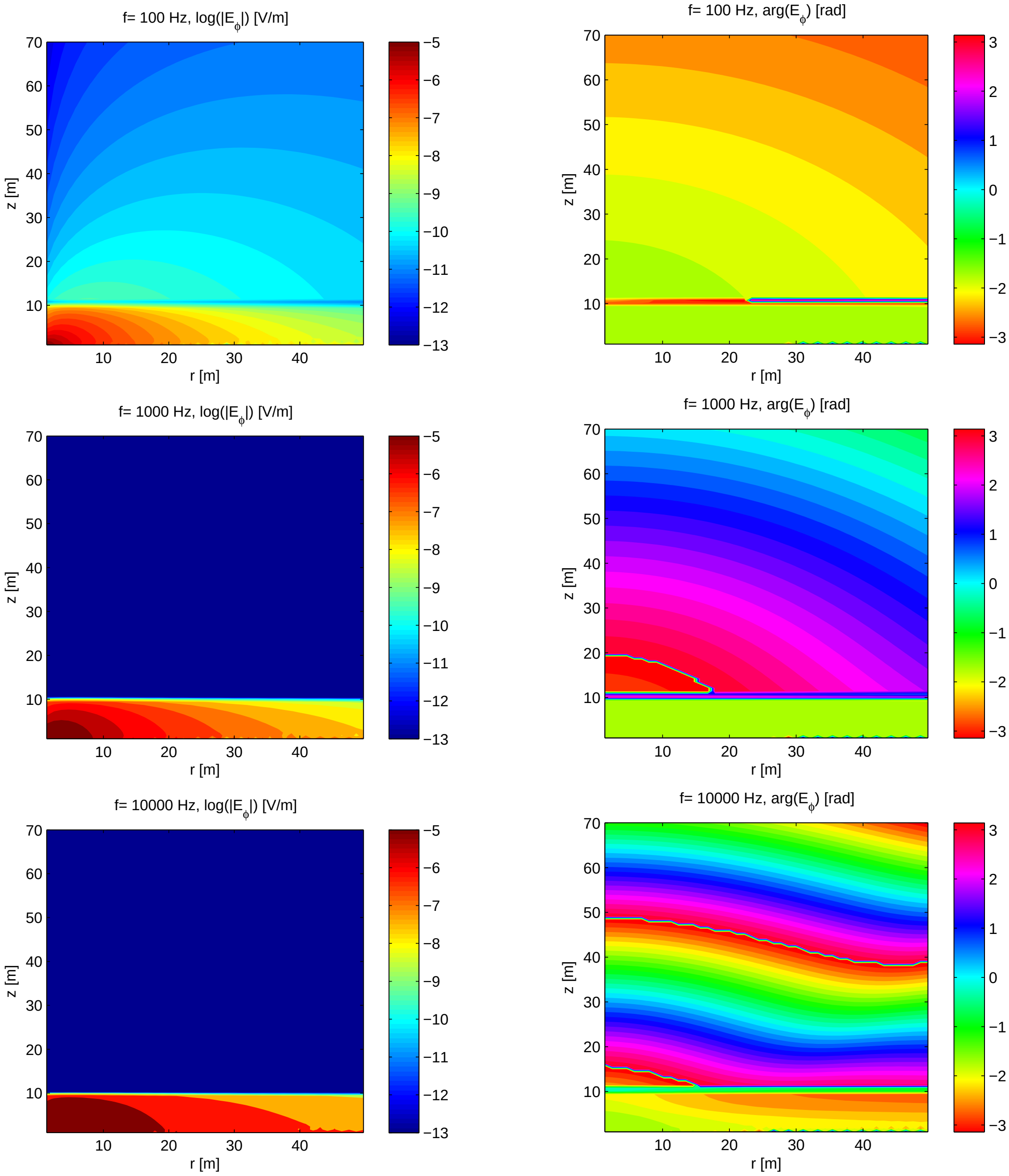
Obr. 4.4: Pokračovanie



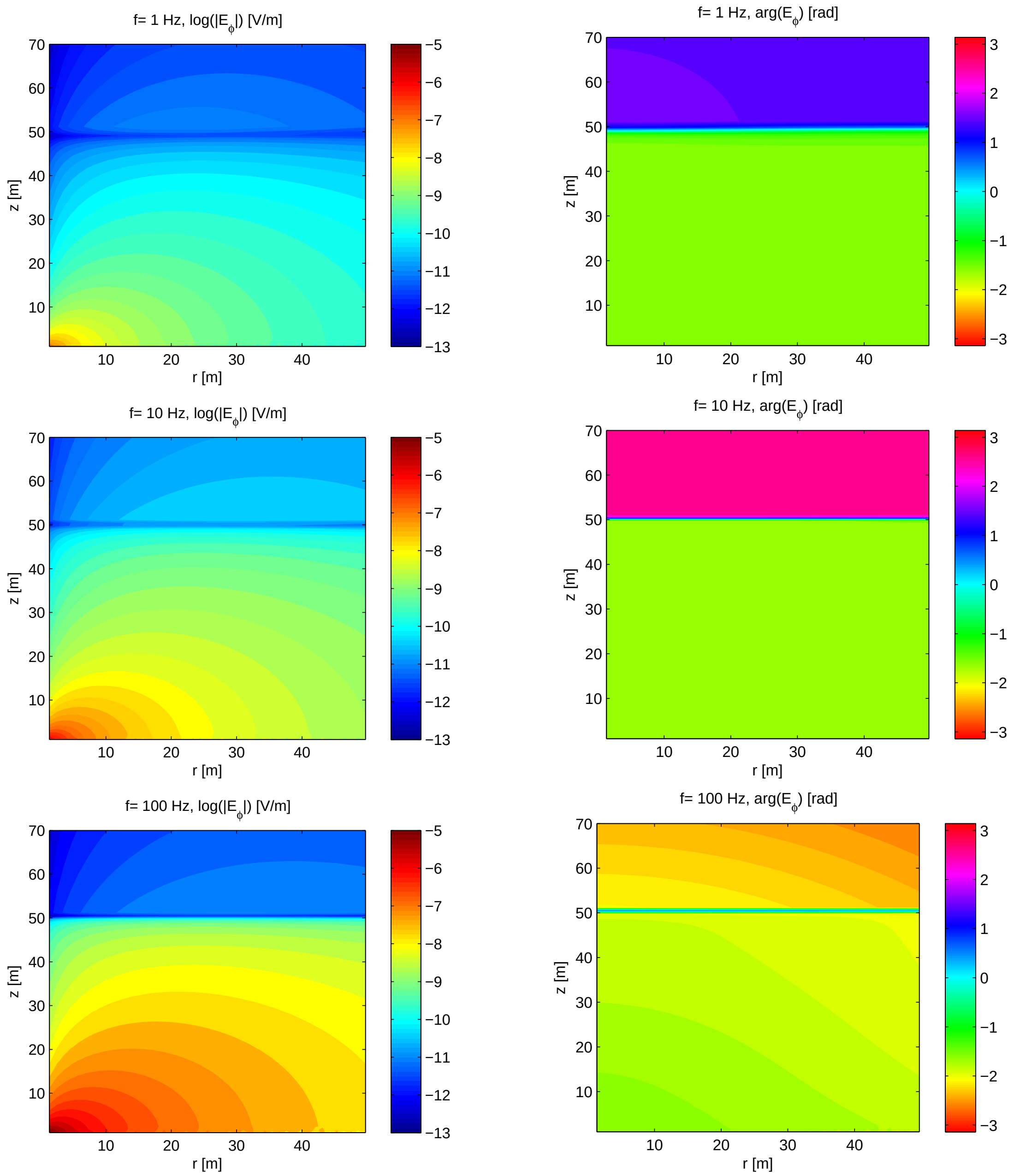
Obr. 4.5: Amplitúda a fáza E_ϕ s rastúcou frekvenciou budiaceho poľa f v polopriestore s $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$ S/m a vloženou silno vodivou doskou ($\sigma_2 = 10^5$S/m) hrúbky 1m s horným okrajom v hĺbke 5 m.



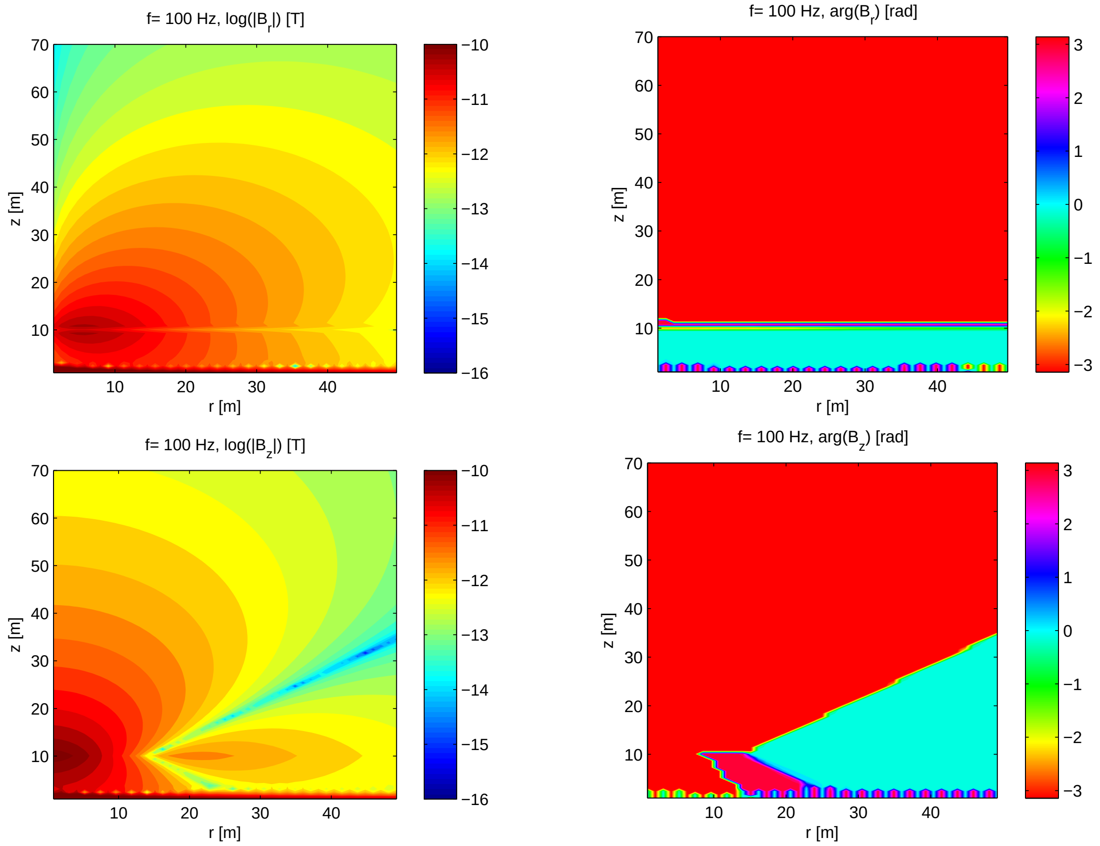
Obr. 4.5: Pokračovanie



Obr. 4.6: Amplitúda a fáza E_ϕ s rastúcou frekvenciou budiaceho poľa f v polopriestore s $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$ S/m a vloženou silno vodivou doskou ($\sigma_2 = 10^5$S/m) hrúbky 1m s horným okrajom v hĺbke 45 m.



Obr. 4.7: Amplitúdy a fázy B_r a B_ϕ v polopriestore s $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$ S/m a vloženou silno vodivou doskou ($\sigma_2 = 10^5$S/m) hrúbky 1m s horným okrajom v hĺbke 5 m. a frekvenciou $f = 100Hz$



Kapitola 5

Záver

Z kvázistatických Maxwellových rovníc sme previedli odvodenie Helmholtzovej rovnice a rovnice vyriešili. Pomocou hraničných podmienok a rozvojom zdroja - vertikálneho dipólu do Besselových funkcií sme odvodili obecné numerické riešenie pre vrstevnatý model a analytické pre prípad homogénneho polpriestoru. Vyskúšali sme a aplikovali dve metódy výpočtu Hankelovej transformácie. Na konci sme diskutovali prípad homogénneho polpriestoru a prípad vodivej dosky v homogénnom polpriestore. 1-D prípad ktorý sme rozoberali v tejto práci je prípravou na 2-D a hlavne 3-D rozloženie vodivosti, ktorej riešenie je podstatne komplikovanejšie, pretože rôzne vlnové čísla niesú nezávislé ale dochádza k prelievaniu energie medzi jednotlivými módmi, ktoré tak nemôžeme riešiť samostatne.

Dodatok A

Besselove funkcie

Besselova rovnica sa dá napísať v tvare:

$$x^2y'' + xy' + x^2y - s^2y = 0 \tag{A.1}$$

Riešenie hľadáme v tvare zobecnenej rady, kde x môžu byť obecne komplexné čísla:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$$

$$y'x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha}, \quad y''x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha}$$

Dosadíme do rovnice:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} + a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha} + a_k x^{k+\alpha+2} - s^2 a_k x^{k+\alpha} = 0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[a_k((k+\alpha)^2 - s^2) + a_{k-2}\right] x^{k+\alpha} + a_0(\alpha^2 - s^2)x^\alpha + a_1((\alpha^2+1)^2 - s^2)x^{\alpha+1} = 0$$

porovnanim koeficientov dostaneme 3 rovnice.

$$a_0(\alpha^2 - s^2) = 0, \quad a_1((\alpha^2+1)^2 - s^2) = 0, \quad a_k((k+\alpha)^2 - s^2) + a_{k-2} = 0$$

Vždy môžeme považovať $a_0 \neq 0$ (λ je zatiaľ neurčená). Z prvej rovnice dostávame $\alpha = \pm s$ (zaujímame sa hlavne o s celé čísla). Ďalej uvažujeme $\alpha = s$. Z druhej rovnice dostaneme po dosadení, že $a_1 = 0$ (a teda všetky $a_{2k+1} = 0$). Z tretej dostávame (po preznačení $k \to 2k$) rekurentný vzťah:

$$a_{2k} = \frac{-a_{2(k-1)}}{4k(k+s)}, k \geq 1$$

A z toho možno vyjadriť:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(s+1)(s+2)...(s+k))}, k \geq 1$$

$a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(s+1)}$ môžeme voliť tak aby sa predchádzajúci výraz čo najviac zjednodušil a konečne dostávame výsledok:

$$J_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+s}}{k!\Gamma(k+s+1)}$$

Tým sme dostali jedno riešenie (A.1). Keďže je to lineárna diferenciálna rovnica 2-ho rádu tak má 2 lineárne nezávislé riešenie. Daný posup by sa dal zopakovať pre $\alpha = -s$. Pre $s \neq \mathbb{Z}$ by sme tak dosali druhé lineárne nezávislé riešenie J_{-k}. Avšak je možné ukázať, že pre $s \in \mathbb{Z}$ platí:

$$J_{-s} = (-1)^s J_s(x) \tag{A.2}$$

a teda funkcie sú v tomto prípade lineárne zavislé. Druhé nezávislé riešenie nazývané ako Besselova funkcia druhého druhu prípadne Neumannova funkcia sa dá definovať [6] napr. ako:

$$Y_s(x) = \lim_{\delta \to s} \frac{J_\delta \cos(\delta\pi) - J_{-\delta}}{\sin(\delta\pi)}$$

Nás však toto druhé riešenie nebude príliš zaujímať z fyzikálneho dôvodu. V počiatku totiž diverguje do $-\infty$.

Riešenie (A.1) je teda jednoducho:

$$y(x) = K J_s(x) \tag{A.3}$$

Pri odvodzovaní budeme potrebovať deriváciu $J_s(ar)$:

$$\frac{\partial J_s(ar)}{\partial r} = \frac{a}{2}\left(J_{s-1}(ar) - J_{s+1}(ar)\right), \tag{A.4}$$

čo pre prípad $s = 0$ dáva spolu s (A.2) výsledok:

$$\frac{\partial J_0(ar)}{\partial r} = -aJ_1(ar), \tag{A.5}$$

Dodatok B

Hankelova transormácia

Hankelovou transormáciou označujeme 2-D Fourierovu transormáciu na radiálne symetrickú funkciu. My budeme uvažovať Hankelovu transformáciu ν-teho rádu vo forme:

$$A(r) = \int_0^\infty a\widetilde{A}(a)J_\nu(ar)da, \quad \text{kde } \widetilde{A}(a) = \int_0^\infty rA(r)J_\nu(ar)dr \tag{B.1}$$

Príjemná vlastnosť je, že dopredná a inverzná transformácia sú totožné.

Rovnako ako v prípade FT, aj HT môže byť zavedená rôznymi spôsobmi. Keďže na výpočet HT používame cudzí kód, upozorňujeme na odlišný tvar HT, ktorý používa Guizar v [8]:

$$f_2(a) = 2\pi \int_0^\infty f_1(r)J_\nu(2\pi ar)rdr \tag{B.2}$$

$$f_1(r) = 2\pi \int_0^\infty f_2(a)J_\nu(2\pi ar)ada \tag{B.3}$$

Anderson používa v [7] konvenciu podobnú našej s tým rozdielom, že premennú a pred Besselovou funkcou zahŕňa do transformovanej funkcie $\widetilde{A}(a)$.

Dodatok C

CD-ROM

Na priloženom CD-ROM disku sú uložené programy, ktorými sme kreslili všetky závislosti v kapitole (4). Uvedieme len tie najdôležitejšie: rutiny modelA.m a modelG.m, ktoré implementujú príslušnú HT, rutina Bb.m, ktorá vracia vektor $\boldsymbol{x} = (B_m^{0,-1}, B_m^{0,1}, B_m^{1,-1}, B_m^{1,1}, \ldots, B_m^{N+1,-1}, B_m^{N+1,1})^T$, rutiny polA.m a polG.m, ktoré nastavujú parametre modelu a kreslia vyfarbený konturový graf. Obmedzením polA.m oproti polG.m je môžnosť pracovať len s modelom polpriestoru, naopak jeho výhodou je väčšia spoľahlivosť výsledných dát a rýchlosť. Zvyšné súbory predstavujú pomocné funkcie. Zoznam aj s prácou v pdf je na CD.

Dodatok D

Použité značenie

$\boldsymbol{r}$	...	polohový vektor
(r, ϕ, z)	...	cylindrické súradnice
$\boldsymbol{B}$	...	vektor magnetickej indukcie
$\boldsymbol{E}$	...	vektor elektrickej intenzity
$B_m^{n,d}(a)$	...	Hankelov koeficient rozvoja B_z
$E_m^{n,d}(a)$	...	Hankelov koeficient rozvoja E_z
a	...	radiálne vlnové číslo
m	...	uhlové vlnové číslo
d	...	index nadobúdajúci ± 1
I	...	prúd v budiacej smyčke
S	...	plocha budiacej smyčky
σ_n	...	elektrická vodivosť n-tej vrstvy
z_n	...	vzdialenosť n-tej hranice od dipólu ležiaceho v počiatku súr. sústavy
f	...	frekvencia harmonického signálu budiacej smyčky
ω	...	kruhová frekvencia budiacej smyčky
r, r_c	...	cylindrický polomer
r_s	...	sférický polomer
B_z^-	...	magnetické pole zdroja vo vákuuE_z
B_z^+	...	magnetické pole odozvy vo vákuuE_z
$J_m(ar)$	...	Besselova funkcia prvého druhu, m-tého rádu
q_n	...	vertikálne vlnové číslo v n-tej vrstve, $q_n = \sqrt{a^2 - k_n^2}$
μ_0	...	permeabilita vákua, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\mathrm{H/m}$

Literatúra

[1] Boerner, D.E., 1992. Controlled source electromagnetic deep sounding: Theory, results and correlation with natural source results, Surveys in Geophysics, Volume 13, Issue 4-5, pp. 435–488.

[2] Tarantola, A., Inverse problem theory and methods for model parameter estimation SIAM, Philadelphia 2005.

[3] Simpson, F., Bahr, K., Practical magnetotellurics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[4] Spencer, D.E., 1951. Separation of Variables in Electromagnetic Theory, Journal, 22, p. 386. 1951, Journal of Applied Physics, 22, 386

[5] Weisstein, E.W., "Vector Lapalcian." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/VectorLaplacian.html

[6] Arfken, G.B., Weber H.J., Mathematical methods for physicists. Elsevier, Amsterdam, 2005.

[7] Anderson, W. L., 1979, Computer Program Numerical Integration of Related Hankel Transforms of Orders 0 and 1 by Adaptive Digital Filtering. Geophysics, 44(7):1287-1305.

[8] Guizar, S.M. and J.C. Gutierrez-Vega, 2004. Computation of quasi-discrete Hankel transforms of integer order for propagating optical wave fields, J. Opt. Soc. Am. A 21, 53-58 (2004). pp 53–58.