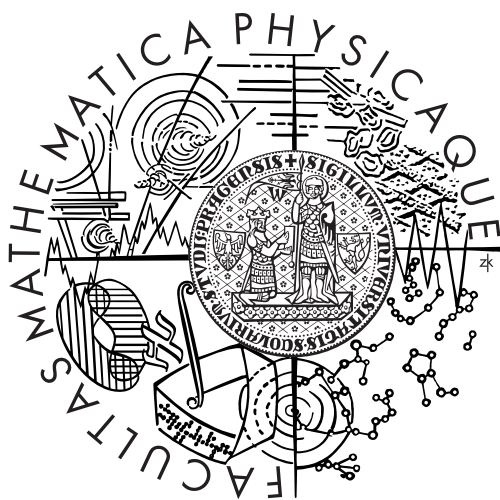


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Nina Benešová

Modelování termální konvekce v plášti

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Hana Čížková, Dr.

Studijní program: Fyzika

Na tomto místě bych chtěla poděkovat všem, kteří mi se vznikem této práce jakkoliv pomohli. Největší dík patří mé vedoucí Mgr. Haně Čížkové, Dr. za trpělivost a cenné rady v průběhu celé práce. Děkuji doc. Ondřeji Čadkovi za pomoc zvláště v počátcích práce a za poskytnutí programů CLEB1, CLEGEN a SIXJ1. Další dík patří Jakubovi Velímskému za pomoc a všem členům a studentům katedry za vytvoření příjemného pracovního prostředí. V neposlední řadě děkuji své rodině za podporu v průběhu celého studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 9.8.2006

Nina Benešová

Obsah

Abstrakt	4
1 Úvod	5
2 Termální konvekce v plášti	7
2.1 Formalismus sférických harmonických funkcí	9
2.2 Skalární součin vektorů	10
2.2.1 Rozklad vektorů na kartézské složky a výpočet skalárního součinu	11
2.2.2 Harmonická analýza skalárního součinu	12
3 Testy podprogramu SOUCIN	14
3.1 Porovnání s analytickým vzorcem	14
3.2 Porovnání s dvourozměrným konvekčním programem	14
3.3 Přesnost podprogramu	16
4 Stabilita konvekce	17
4.1 Konstrukce vstupních modelů teploty	17
4.2 Výsledky	19
5 Závěr	44
A Definice sférických harmonických funkcí a vybrané operace s nimi	46
B Popis podprogramu SOUCIN	48
Literatura	51

Název práce: Modelování termální konvekce v plášti

Autor: Nina Benešová

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Hana Čížková, Dr.

e-mail vedoucího: hk@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Cílem práce bylo vytvoření podprogramu pro výpočet skalárního součinu vektorů daných sférickými harmonickými rozvoji a jeho včlenění do programu pro třírozměrné simulace termální konvekce v plášti. Pomocí tohoto programu jsme pak studovali stabilitu teplotního rozložení odvozeného na základě seismických tomografických modelů. Stabilitou zde rozumíme především zachování dlouhovlnného charakteru spektra vstupního rozložení teploty. Simulace konvekce jsme provedli v několika modelech (Rayleighovo číslo 10^6 nebo 10^7 , konstantní nebo hloubkově proměnná viskozita). Model s nárůstem viskozity v hloubce 1000 km je stabilnější, než model s konstantní viskozitou v celém plášti. Ve všech modelech bylo nicméně patrné, že charakter spektra se mění k výrazně krátkovlnnému a modely nejsou dlouhodobě stabilní.

Klíčová slova: termální konvekce, sférické harmonické funkce, seismická tomografie

Title: Modeling the thermal convection in the mantle

Author: Nina Benešová

Department: Department of geophysics

Supervisor: Mgr. Hana Čížková, Dr.

Supervisor's e-mail address: hk@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: We study here the stability of the thermal models derived from tomographic models of seismic velocity anomalies in the mantle. We wrote subroutine for effective evaluation of the scalar product of two vectors given as series of vector spherical harmonic functions and incorporated it into the 3-D convection code. The code was then applied to the problem of the stability of thermal models derived from seismic tomographic models. We consider the model as stable if the long-wavelength character of input temperature anomalies spectra is preserved. We carried out the simulations in several models (Rayleigh number 10^6 or 10^7 , constant or depth-dependent viscosity). The model with increase of the viscosity at the depth of 1000 km is more stable than the model with constant viscosity. Nevertheless, in all models the character of spectra is more or less rapidly changing to short-wavelength and models are not stable on long time scale.

Keywords: thermal convection, spherical harmonic functions, seismic tomography

Kapitola 1

Úvod

Termální konvekce v zemském plášti je buzena vztlakovými silami způsobenými hustotními nehomogenitami v plášti. Jejím povrchovým projevem jsou pohyby litosferických desek. Informaci o struktuře pláště a charakteru hustotních heterogenit nám dává seismická tomografie. Spektra modelů anomálií seismických rychlostí ukazují převládající dlouhovlnné struktury zejména ve spodním plášti (tzv. superplumy) charakterizované ve spektru stupni 1–3 [Su a kol., 1994; Becker a Boschi, 2002].

Toto pozorování je v rozporu s výsledky modelování termální konvekce v plášti. Spektrum anomálií teploty v numerických simulacích termální konvekce totiž vykazuje spíše středněvlnné a krátkovlnné anomálie a to především v modelech s parametry konstantními s hloubkou. Řada prací se snaží tento rozpor vysvětlit a přiblížit spektra konvekčních a tomografických modelů [Bunge a Richards, 1996]. Vytvořit konvekční modely s dlouhovlnnými anomáliemi teploty se pokoušejí např. zahrnutím vlivu fázového přechodu v hloubce 670 km [Tackley a kol., 1993], nárustu viskozity s hloubkou [Bunge a kol., 1996], vlivu nesubdukovatelných desek [Gurnis a Zhong, 1991], vlivu pohybujících se litosferických desek na povrchu, které se do modelu zahrnou pomocí hraniční podmínky [Davies, 1988]. Dalšími faktory, které by mohly lokálně snížit Rayleighovo číslo ve spodním plášti a tak vést ke vzniku dlouhovlnných teplotních anomálií, jsou pokles koeficientu teplotní roztažnosti [Chopelas a Boehler, 1992] nebo nárůst teplotní difusivity s hloubkou [Hofmeister, 2005]. Vliv endotermního fázového přechodu v hloubce 670 km se ukazuje být malý v porovnání s vlivem nárustu viskozity. Výsledkem zahrnutí obou efektů jsou teplotní heterogenity dominující na stupních 4–8 spíše než 1–3 jako v seismické tomografii [Bunge a kol., 1996]. Jsou-li do výpočtů spolu s nárustem viskozity ve spodním plášti zahrnuty i pohyby litosferických desek vykazuje model spektrum, ve kterém převládají nižší stupně [Bunge a Richards, 1996].

Přístup výše zmíněných prací byl následující. Autoři zvolili model charakterizovaný danými parametry (hloubkový průběh viskozity, fázové přechody, hraniční podmínky atd.) a nechali probíhat výpočet simulací až do statisticky vyrovnaného

stavu. Pak porovnali charakteristické spektrum konvekčního modelu se spektry tomografických modelů. Náš postup je jiný. Předpokládejme, že seismická tomografie více méně správně odráží termální anomálie v plášti. Hustotní (a rychlostní) anomálie způsobené změnami chemického složení v této práci nebereme v úvahu. Rozložení teploty v plášti odvozené z tomografického modelu anomálií seismických rychlostí použijeme jako počáteční podmínku konvekční simulace. Pokud byl tomografický obraz struktury pláště správný, měl by konvekční běh být stabilní v tom smyslu, že charakter spektra teploty by se neměl příliš prudce měnit. Pokud se spektrum prudce změní, buď to máme nesprávné fyzikální parametry pláště a nebo tomografií poskytnutý počáteční model neodráží správně strukturu pláště.

Pro posouzení stability teplotního modelu odvozeného ze seismické tomografie je potřeba provádět třírozměrné simulace konvekce. My jsme měli k dispozici otestovaný program pro dvourozměrné (osově symetrické) simulace konvekce a dále rozpracovanou verzi třírozměrného programu. Ta obsahovala řešení pohybové rovnice a rovnice kontinuity a dále časovou integraci rovnice přenosu tepla. Chyběl v ní ale klíčový (časově náročný) výpočet nelineárního konvekčního členu v rovnici přenosu tepla. Cílem této práce tedy bylo vytvořit efektivní podprogram pro výpočet skalárního součinu dvou vektorů vyjádřených sférickými harmonickými rozvoji, otestovat jej a zařadit do hotové části třírozměrného konvekčního programu. Dále pak provést výpočty v několika modelech s různými parametry (Rayleighovo číslo, hloubkový profil viskozity, různé startovací modely teploty) a ověřit jejich stabilitu.

Práce obsahuje ve druhé kapitole stručný popis řešení soustavy rovnic popisujících termální konvekci v plášti pomocí sférických harmonických funkcí. Podrobněji je popsán algoritmus pro efektivní a rychlý výpočet skalárního součinu vektorů daných sférickými harmonickými rozvoji. V kapitole tři jsou popsány testy podprogramu. Podprogram byl zkoušen nejdříve samostatně a poté i po začlenění do hlavního programu provádějící numerické simulace proudění v plášti. Ve čtvrté kapitole jsou popsány výsledky simulací termální konvekce pro vstupní modely teplot, které byly vytvořeny na základě tomografických modelů anomálií seismických rychlostí. Na závěr práce je zařazen Dodatek A obsahující definice sférických harmonických funkcí a některé vybrané operace s nimi a Dodatek B se stručným popisem podprogramu.

Kapitola 2

Termální konvekce v plášti

Termální konvekce v plášti buzená vztlakovými silami je popsána soustavou rovnic vycházejících ze základních zákonů zachování. Je to rovnice kontinuity (zákon zachování hmoty),

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

kde ϱ je hustota, t je čas a \mathbf{v} je rychlost proudění. Dále máme pohybovou rovnici (zákon zachování hybnosti),

$$\varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \varrho \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je tenzor napětí a \mathbf{g} je gravitační zrychlení. Člen na levé straně rovnice (2.2) je setrvačná síla, člen $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ představuje povrchovou sílu a člen $\varrho \mathbf{g}$ je zdrojový člen — vztlková síla. Rovnice přenosu tepla (zákon zachování energie) má tvar,

$$\varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) - \varrho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T - \varrho v_r \alpha T g + \sigma : \nabla \mathbf{v} + H, \quad (2.3)$$

kde c_p je specifické teplo za konstantního tlaku, T je teplota, k je tepelná vodivost, v_r je radiální složka rychlosti, α je koeficient teplotní roztažnosti, σ je deviatorická část tenzoru napětí a H jsou objemové zdroje tepla. V rovnici (2.3) člen $\nabla \cdot (k \nabla T)$ na pravé straně popisuje kondukcii, $\varrho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T$ je advekce, $\varrho v_r \alpha T g$ je adiabatické ochlazování nebo oteplování a $\sigma : \nabla \mathbf{v}$ je viskozni disipace. Dále je potřeba předepsat reologický vztah,

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(\mathbf{v}), \quad (2.4)$$

a stavovou rovnici,

$$\varrho = \varrho(p, T), \quad (2.5)$$

kde p je tlak.

Materiál pláště aproximujeme nestlačitelnou newtonovskou kapalinou a uvažujeme klasickou Boussinesqovu aproximaci. Pak rovnici kontinuity dostaneme ve tvaru,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.6)$$

a reologický vztah je

$$\tau = -pI + \eta(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v}), \quad (2.7)$$

kde I je identický tenzor a η viskozita. V pohybové rovnici neuvažujeme setrvačný člen, který je v případě pomalé konvekce v zemském plášti zanedbatelný vůči vztlakové síle. Formálně tak dostáváme rovnici rovnováhy, nezávislou na čase,

$$\nabla \cdot \tau + \varrho\mathbf{g} = 0. \quad (2.8)$$

V rovnici přenosu tepla neuvažujeme viskozní disipaci, adiabatické ochlazování či oteplování ani objemové zdroje tepla a dostáváme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\Delta T - \mathbf{v} \cdot \nabla T, \quad (2.9)$$

kde κ je termální difusivita, ($\kappa = \frac{k}{\varrho c_p}$).

Hustota závisí lineárně na teplotě a stavovou rovnici dostáváme ve tvaru

$$\varrho = \varrho_{ref}(1 - \alpha(T - T_{ref})), \quad (2.10)$$

kde ϱ_{ref} je referenční hustota odpovídající referenční teplotě T_{ref} . Referenční hustota ϱ_{ref} , gravitační zrychlení \mathbf{g} , koeficient α , isobarické specifické teplo c_p a teplotní vodivost k jsou konstantní.

Soustavu rovnic (2.6)-(2.10) řešíme na oblasti omezené dvěma sférickými plochami, povrchem a rozhraním jádro-plášť. Na obou hranicích předepisujeme podmínku nulové radiální rychlosti,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = 0 \quad (2.11)$$

a nulového tečného napětí,

$$\tau \cdot \mathbf{e}_r - ((\tau \cdot \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r = 0, \quad (2.12)$$

kde \mathbf{e}_r je jednotkový vektor v radiálním směru. V termální rovnici na povrchu předepisujeme konstantní teplotu T_a , na rozhraní jádro-plášť předepisujeme konstantní teplotu T_b .

Styl konvekce v plášti závisí na parametrech pláště, jejichž vliv lze popsat jediným bezrozměrným číslem,

$$Ra = \frac{\varrho\alpha g(T_b - T_a)d^3}{\kappa\eta}, \quad (2.13)$$

kde d je tloušťka pláště. Ra se nazývá Rayleighovo číslo.

2.1 Formalismus sférických harmonických funkcí

Na soustavu parciálních diferenciálních rovnic (2.6)-(2.12) aplikujeme formalismus sférických harmonických funkcí. Všechny veličiny (skaláry, vektory i tenzory) aproximujeme konečným počtem členů zobecněné Fourierovy řady,

$$T(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^N \sum_{m=-j}^j T_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.14)$$

$$\varrho(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^N \sum_{m=-j}^j \varrho_{jm}(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{v}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^N \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} \mathbf{v}_{jm}^l(r) \mathbf{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi), \quad (2.16)$$

$$\tau(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^N \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} \sum_{k=0}^2 \tau_{jm}^{lk}(r) \mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\vartheta, \varphi), \quad (2.17)$$

kde Y_{jm} , \mathbf{Y}_{jm}^l , \mathbf{Y}_{jm}^{lk} jsou skalární, vektorové a tenzorové sférické harmonické funkce (viz Dodatek A) a N je stupeň rozvoje.

Dosazením řad (2.14)-(2.17) do rovnic (2.6)-(2.12) se tyto rovnice značně zjednoduší. Místo soustavy parciálních diferenciálních rovnic dostaneme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic [Kývalová, 1994] — časově závislou rovnicí přenosu tepla a soustavu (2.6)-(2.8), zahrnující rovnici kontinuity, pohybovou rovnici a reologický vztah, které explicitně nezávisí na čase. Schéma řešení soustavy rovnic (2.6)-(2.12) je následující. Vezmeme počáteční rozložení teploty $T_0(r, \vartheta, \varphi)$ v plášti. Dosazením teploty T_0 do stavové rovnice získáme rozložení hustoty $\varrho_0(r, \vartheta, \varphi)$. Pak vyřešíme soustavu rovnic (2.6)-(2.8) a dostaneme rychlost $\mathbf{v}_0(r, \vartheta, \varphi)$. Tu spolu s teplotou T_0 dosadíme do rovnice přenosu tepla a vyčíslíme její pravou stranu. Integrací pak získáme teplotu v dalším časovém kroku $T_1(r, \vartheta, \varphi)$ a postup opakujeme.

Soustavu rovnic (2.6)-(2.8) řešíme metodou konečných diferencí. Pro výpočet obyčejných derivací podle r používáme schéma druhého řádu

$$\frac{df}{dr}(r_1) = \frac{1}{2h}(-3f(r_1) + 4f(r_2) - f(r_3)) + o(h^2), \quad h = r_i - r_{i-1} \quad (2.18)$$

$$\frac{df}{dr}(r_i) = \frac{1}{2h}(f(r_{i+1}) - f(r_{i-1})) + o(h^2), \quad i = 1, \dots, I \quad (2.19)$$

$$\frac{df}{dr}(r_{I+1}) = \frac{1}{2h}(3f(r_{I+1}) - 4f(r_I) + f(r_{I-1})) + o(h^2), \quad (2.20)$$

s následující diskretizací. Plášť máme rozdělen na I vrstev. Na středech diskretizačních vrstev požadujeme platnost pohybové rovnice a počítáme koeficienty rychlosti.

Na rozhraních vrstev předepisujeme rovnici kontinuity a reologický vztah, zadáváme viskozitu a počítáme koeficienty napětí. Na hranicích oblasti, tj. na povrchu a na rozhraní jádro-plášť, předepisujeme rovnici kontinuity, hraniční podmínky a reologický vztah a počítáme koeficienty napětí i rychlosti. Vzhledem k tomu, že rovnice (2.6)-(2.8) jsou lineární, je možné získat řešení pomocí Greenových funkcí. Greenova funkce je řešením homogenní rovnice tzn. diferenciální rovnice bez pravé strany. Řešením celé soustavy je pak konvoluce Greenových funkcí s pravými stranami — hustotními heterogenitami. Takový postup je výhodný v případě, že pohybovou rovnici řešíme opakovaně, což je náš případ. Greenovy funkce počítáme jen jednou, na začátku celého výpočtu a v každém časovém kroku pak provádíme pouze konvoluci s hustotními heterogenitami danými rozložením teploty v daném časovém kroku.

Radiální derivace v rovnici přenosu tepla (2.9) jsou aproximovány metodou konečných diferencí — Fornbergovou procedurou [Fornberg, 1988]. K integraci rovnice je použita Runge-Kuttova metoda druhého řádu (Eulerova metoda) [Čížková a Čadek, 1997].

2.2 Skalární součin vektorů

Formalismus sférických harmonických funkcí nabízí efektivní metodu řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic (2.6)-(2.8), (2.11) a (2.12). Situace je však poněkud komplikovanější u rovnice přenosu tepla (2.9) díky nelineárnímu členu $\mathbf{v} \cdot \nabla T$, kde bychom měli vyčíslit skalární součin dvou harmonických řad. Analytický vzorec pro výpočet skalárního součinu dvou vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vyjádřených sférickými harmonickými funkcemi má následující tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \sum_{j_1 m_1 l_1} \sum_{j_2 m_2 l_2} v_{j_1 m_1}^{l_1} v_{j_2 m_2}^{l_2} \mathbf{Y}_{j_1 m_1}^{l_1} \cdot \mathbf{Y}_{j_2 m_2}^{l_2} \\ \mathbf{Y}_{j_1 m_1}^{l_1} \cdot \mathbf{Y}_{j_2 m_2}^{l_2} &= (-1)^{j_2+l_2} \frac{\prod_{j_1 j_2 l_1 l_2}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{jm} \frac{1}{\prod_j} C_{l_1 0 l_2 0}^{j 0} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ l_2 & l_1 & 1 \end{matrix} \right\} Y_{jm} \end{aligned} \quad (2.21)$$

kde $\prod_{j_1 j_2 \dots} = \sqrt{2j_1+1} \sqrt{2j_2+1} \dots$, $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$ je Clebsch-Gordanův koeficient

a $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ l_2 & l_1 & 1 \end{matrix} \right\}$ Wignerův 6-j symbol [Varshalovic a kol., 1989].

Ve výrazu pro skalární součin se tedy vyskytuje osm různých indexů přičemž přes všechny z nich musíme sčítat. Zjednodušeně řečeno pro maximální stupeň rozvoje N bychom měli osm do sebe vnořených cyklů, kde indexy j by probíhaly od 0 do N , $m = -j, \dots, j$ a l nabývá tří různých hodnot. Počet průchodů takovým cyklem značně roste s rostoucím N .

Druhý faktor, který negativně ovlivňuje dobu potřebnou k vyčíslení výrazu (2.21), jsou obecné Clebsch-Gordanovy koeficienty $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$, které potřebujeme znát. Můžeme je buď počítat v každém časovém kroku znovu, což je samozřejmě zbytečné zpomalení, nebo je možné napočítat je všechny předem, což zase vede k tomu, že jsme pak nuceni pracovat s příliš velkými poli nebo soubory. Celý výpočet je pak náročný i paměťově.

Z uvedených důvodů jsme k výpočtu členu $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ zvolili efektivnější postup — vyčíslení skalárního součinu na síti [Martinec, 1989]. Výpočet má následující čtyři kroky:

1. Napočtení harmonických koeficientů kartézských složek obou vektorových polí v každé vrstvě.
2. Napočtení velikostí kartézských složek na síti v každé vrstvě.
3. Výpočet skalárního součinu v každém bodě sítě v každé vrstvě.
4. Výpočet sférických harmonických koeficientů rozvoje výsledného skalárního součinu.

2.2.1 Rozklad vektorů na kartézské složky a výpočet skalárního součinu

Použijeme-li definice vektorů cyklické báze \mathbf{e}_{-1} , \mathbf{e}_0 a \mathbf{e}_1 (Dodatek A), lze snadno ukázat, že jednotkové bázové vektory v kartézské soustavě lze vyjádřit jako

$$\mathbf{e}_x = \sqrt{2\pi}(\mathbf{Y}_{1-1}^0 - \mathbf{Y}_{11}^0), \quad (2.22)$$

$$\mathbf{e}_y = \sqrt{2\pi}i(\mathbf{Y}_{1-1}^0 + \mathbf{Y}_{11}^0), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{e}_z = \sqrt{4\pi}\mathbf{Y}_{10}^0. \quad (2.24)$$

Pak kartézské složky v_x, v_y a v_z vektoru \mathbf{v} jsou

$$v_x(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x = \left(\sum_{jml} v_{jm}^l(r) \mathbf{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi) \right) \cdot \sqrt{2\pi}(\mathbf{Y}_{1-1}^0 - \mathbf{Y}_{11}^0), \quad (2.25)$$

$$v_y(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y = \left(\sum_{jml} v_{jm}^l(r) \mathbf{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi) \right) \cdot \sqrt{2\pi}i(\mathbf{Y}_{1-1}^0 + \mathbf{Y}_{11}^0), \quad (2.26)$$

$$v_z(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = \left(\sum_{jml} v_{jm}^l(r) \mathbf{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi) \right) \cdot \sqrt{4\pi}\mathbf{Y}_{10}^0. \quad (2.27)$$

Po úpravách dostaneme

$$v_x(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{jml} v_{jm}^l \frac{(-1)^{l+j}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2j+1}{2l+1}} (C_{jm1-1}^{lm-1} Y_{lm-1} - C_{jm11}^{lm+1} Y_{lm+1}), \quad (2.28)$$

$$v_y(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{jml} v_{jm}^l \frac{(-1)^{l+j} i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2j+1}{2l+1}} (C_{jm1-1}^{lm-1} Y_{lm-1} + C_{jm11}^{lm+1} Y_{lm+1}), \quad (2.29)$$

$$v_z(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{jml} v_{jm}^l (-1)^{l+j} \sqrt{\frac{2j+1}{2l+1}} C_{jm10}^{lm} Y_{lm}. \quad (2.30)$$

Koeficienty vektoru rychlosti $v_{jm}^l(r_i)$ máme zadány v I diskretizačních vrstvách. Dále zavedeme diskretizaci i v ϑ a φ a na síti pak vyčíslíme složky vektoru rychlosti $v_{x,y,z}(r_i, \vartheta_k, \varphi_l)$, kde $i = 1, \dots, I, k = 1, \dots, K, l = 0, \dots, L - 1$. Volbě diskretizačních uzlů v laterálním směru ϑ_k, φ_l se budeme věnovat níže. Vzhledem k tomu, že ve sférických harmonických funkcích máme člen $e^{im\varphi}$ (viz definice sférických harmonických funkcí v Dodatku A), je vhodné k výpočtu sumace přes m využít diskrétní rychlou Fourierovu transformaci. Podívejme se na velikost složky v_x , známe-li její sférické harmonické koeficienty v_{jm}^x

$$v_x(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{jm} v_{jm}^x(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = \sum_{jm} v_{jm}^x(r) P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (2.31)$$

Výraz $\sum_j v_{jm}^x(r) P_{jm}(\cos \vartheta)$ označíme $v_m^x(r)$. Pak

$$v_x(r, \vartheta, \varphi) = \sum_m v_m^x(r) e^{im\varphi}. \quad (2.32)$$

Suma na pravé straně představuje diskrétní Fourierovu transformaci a k jejímu vyčíslení existuje efektivní algoritmus — rychlá Fourierova transformace. Stejně postupujeme i u ostatních složek vektoru rychlosti a gradientu teploty $\mathbf{g} = \nabla T$.

Pak provedeme skalární součin $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ v každém bodě sítě,

$$f(r_i, \vartheta_k, \varphi_l) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} = v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z. \quad (2.33)$$

2.2.2 Harmonická analýza skalárního součinu

Nyní je potřeba výsledné skalární pole $f(r, \vartheta, \varphi)$ rozvinout zpět do řady sférických harmonických funkcí, tedy spočítat koeficienty $f_{jm}(r)$. Pro $f_{jm}(r)$ platí (viz Dodatek A)

$$f_{jm}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta, \varphi) Y_{jm}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta, \quad (2.34)$$

Zavedeme substituci $x = \cos \vartheta$ a máme

$$f_{jm}(r) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f(r, x, \varphi) P_{jm}(x) e^{-im\varphi}(\vartheta, \varphi) \, d\varphi dx \quad (2.35)$$

neboli

$$f_{jm}(r) = \int_{-1}^1 f_m(r, x) P_{jm}(x) \, dx, \quad (2.36)$$

kde

$$f_m(r, x) = \int_0^{2\pi} f(r, x, \varphi) e^{-im\varphi} \, d\varphi. \quad (2.37)$$

Integrály (2.36), (2.37) představují Legendrovu a Fourierovu transformaci. Zavedeme diskrétní hodnoty x_k pro $k = 1, \dots, K$ jako kořeny Legendrových polynomů stupně K a dále L diskrétních hodnot $\varphi_l = 2\pi l/L$ pro $l = 0, \dots, L-1$.

Integrál (2.37) spočteme pomocí inverzní diskrétní rychlé Fourierovy transformace [Velímský, 2003]. Tedy

$$f_m(r_i, x_k) = \frac{2\pi}{L} \sum_{l=0}^{L-1} f(r_i, x_k, \varphi_l) e^{-2\pi i m l / L}. \quad (2.38)$$

K výpočtu integrálu (2.36) použijeme Gaussův-Legendrův kvadrurní vzorec s váhami w_k

$$f_{jm}(r_i) = \sum_{k=1}^K w_k f_m(r_i, x_k) P_{jm}(x_k). \quad (2.39)$$

Gaussův kvadrurní vzorec na K bodech umožňuje integrovat přesně polynomy do stupně $2K-1$, tedy $K > \frac{3}{2}N$. Abychom při Fourierově transformaci předešli alias efektu musíme volit $L > 3N$. Vzhledem k tomu, že používáme rychlou Fourierovu transformaci musí být navíc L mocnina dvou [Martinec, 1989].

Výše uvedený algoritmus pro výpočet skalárního součinu reálných vektorů provádí podprogram SOUCIN. Popis podprogramu uvádíme v Dodatku B.

Kapitola 3

Testy podprogramu SOUCIN

3.1 Porovnání s analytickým vzorcem

Smyslem tohoto testu bylo zjistit jak se shodují hodnoty spočtené podprogramem SOUCIN s hodnotami napočtenými podle analytického vzorce (2.21). Nezávisle na podprogramu SOUCIN jsme tedy vytvořili testovací program, který počítá součin podle vztahu (2.21). K výpočtu obecných Clebsch-Gordanových koeficientů jsme použili program CLEGEN a k výpočtu Wignerových 6-j symbolů jsme použili program SIXJ1. Vstupem pro testovací program i pro podprogram SOUCIN byla pole koeficientů, reprezentující dva reálné vektory. Porovnávali jsme koeficienty výsledného skalárního součinu. Testy jsme prováděli pro $N = 10, 20, 30$. Ve všech případech byly odchylky nulové. Pro vyšší N jsme test neprováděli, protože používaný program na výpočet obecných Clebsch-Gordanových koeficientů nezaručuje pro vyšší stupně rozvoje dostatečnou přesnost (O. Čadek, osobní sdělení).

3.2 Porovnání s dvourozměrným konvekčním programem

Podprogram SOUCIN je součástí programu 3D-KONVO pro třírozměrné simulace konvekce v plášti. Dále jsme měli k dispozici program 2D-KONVO pro simulace konvekce ve dvourozměrném osově symetrickém případě [Čížková a Čadek, 1997]. Následující testy spočívají ve srovnávání výstupů z obou programů.

TEST I.

Vstupem pro oba programy bylo stejné dvourozměrné osově symetrické rozložení teploty v plášti, popsané koeficienty $T_{j0}(r)$, kde $j = 0, 1, \dots, N$. Koeficienty $T_{jm}(r)$ jsou pro $m \neq 0$ nulové. Po jednom časovém kroku jsme porovnávali koeficienty $f_{jm}(r)$ členu $f = \mathbf{v} \cdot \nabla T$. Sledovali jsem zda se koeficienty pro $j = 0$ z obou programů

shodují a dále zda ve třírozměrném programu jsou koeficienty pro $m \neq 0$ nulové.

Test jsme prováděli pro různé stupně rozvoju ($N = 40, 100, 150, 200$). Odchylky výstupů dvourozměrného a třírozměrného programu nepřesahují 10^{-4} % a koeficienty T_{jm} pro $m \neq 0$ jsou skutečně nulové.

TEST II.

Abychom ověřili správnost výpočtu i pro koeficienty T_{jm} , $m \neq 0$ provedli jsme následující test. Vstupem pro program 2D-KONVO bylo opět axisymetrické rozložení teplot,

$$T^{2D}(t_i, r, \vartheta) = \sum_{j=0}^N T_j^{2D}(t_i, r) Y_{j0}(\vartheta), \quad (3.1)$$

kde t_i značí i -tý časový krok. Vstupní rozložení teploty pro třírozměrný program bylo stejné axisymetrické pole jako ve dvourozměrném případě, ale toto pole jsme pootočili tak, že jeho osa symetrie svírá s osou souřadného systému úhel β . V takto otočeném poli teplot již jsou obecně všechny koeficienty T_{jm} nenulové. Máme-li (obecně třírozměrné) rozložení teplot,

$$T^{3D}(t_i, r, \vartheta, \varphi) = \sum_{jm} T_{jm}^{3D}(t_i, r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (3.2)$$

pak pro koeficienty pootočeného pole teploty T_{jm}^{3D} platí [Matyska, 1995]:

$$\sum_{m'=-j}^j T_{jm'}^{3D} Y_{jm'}(\vartheta', \varphi') = \sum_{m'=-j}^j \sum_{m=-j}^j T_{jm}^{3D} D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma) Y_{jm}(\vartheta', \varphi'), \quad (3.3)$$

kde čárka značí otočený systém souřadnic, $D_{mm'}^j$ je Wignerova D -funkce, kterou lze zapsat jako

$$D_{mm'}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-im\alpha) d_{mm'}^j(\beta) \exp(-im'\gamma), \quad (3.4)$$

kde α, β a γ jsou Eulerovské úhly a pro definici $d_{mm'}^j$ viz např. Varshalovich a kol., 1989.

V našem případě jsme měli $\beta = 30^\circ$ a $\alpha = \gamma = 0$. Koeficienty vstupního (neotočeného) třírozměrného pole T_{jm}^{3D} jsou totožné s T_j^{2D} pro $m = 0$ a nulové pro $m \neq 0$. Po jednom časovém kroku jsme pak dostali z dvourozměrného programu rozložení teplot $T^{2D}(t_{i+1}, r, \vartheta)$. Výstup z třírozměrného programu tedy pole $T^{3D}(t_{i+1}, r, \vartheta, \varphi)$, jsme otočili zpět o úhel $-\beta$ a dostali jsme tak rozložení teplot $T^{3D}(t_{i+1}, r, \vartheta, \varphi)$. To jsme pak porovnávali s polem $T^{2D}(t_{i+1}, r, \vartheta)$.

Odchylky koeficientů $T_j^{2D}(t_{i+1}, r)$ a $T_{jm}^{3D}(t_{i+1}, r)$ pro $m = 0$ nepřesahují 10^{-2} % s výjimkou koeficientů, které jsou blízké nule, a u kterých je odchylka pochopitelně vyšší.

3.3 Přesnost podprogramu

Cílem tohoto testu bylo ověřit přesnost podprogramu v závislosti na maximálním stupni rozvoje. Porovnání s analytickým vzorcem (odstavec 3.1) nám v tomto nepomůže, protože program pro výpočet obecných Clebsh-Gordanových koeficientů je přesný jen do velmi nízkého stupně rozvoje ($N \sim 30$). Testy uvedené v odstavci 3.2 ověřují správnost podprogramu SOUCIN. Neověřují ale jeho přesnost, protože i program 2D-KONVO používá při vyčíslení konvekčního členu $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ výpočet skalárního součinu na síti a Gaussovu-Legendrovu kvadraturu. V tomto testu se tedy pokusíme odhadnout spolehlivost a přesnost výpočtu skalárního součinu na síti a stanovit maximální stupeň rozvoje, do kterého je naše metoda přesná.

Při výpočtu součinu provádíme 1) harmonickou syntézu složek obou vektorů, 2) výpočet skalárního součinu vynásobením složek na síti a 3) harmonickou analýzu výsledného skalárního součinu. Přesnost první části je závislá na přesnosti výpočtu složek vektorů (2.28)-(2.30) a tedy na přesnosti vyčíslení Clebsh-Gordanových koeficientů $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$ pro $j_2 = 1$. K jejich výpočtu jsme použili program CLEB1, který je spolehlivý nejméně do stupně rozvoje 500 (O. Čadek, osobní sdělení).

Nepřesnosti do třetí části výpočtu může vnášet výpočet přidružených Legendrových funkcí nebo numerická integrace při výpočtu koeficientů sférické harmonické řady (viz vzorec (2.39)). Přesnost této části programu, jsme zjišťovali tak, že jsme vzali koeficienty v_{jm} sférického harmonického rozvoje libovolného skaláru, provedli jsme syntézu na síti a pak zpět harmonickou analýzu, jíž jsme získali koeficienty v'_{jm} . Probíhá-li výpočet bez chyb pak $v_{jm} = v'_{jm}$. Test jsme prováděli pro různá N . Ověřili jsme, že pro $N \leq 300$ je výpočet přesný, pro $N \sim 320$ je rozdíl mezi v_{jm} a v'_{jm} asi 10^{-4} %, pro $N \sim 340$ jsou chyby již v řádu jednotek procent a pro $N \sim 360$ se již jedná o nepřesnosti řádu desítek procent.

Lze tedy říci, že maximální stupeň rozvoje, do kterého je možné program SOUCIN bezpečně používat je, $N \sim 300 - 320$.

Kapitola 4

Stabilita konvekce

V této kapitole se zabýváme stabilitou termálních modelů pláště odvozených na základě tomografických modelů anomálií rychlostí seismických vln. Zjišťovali jsme, zda a na jakých časových škálách může být stabilní obraz teplotních anomálií v plášti odvozených ze seismické tomografie. Pojmeme stabilní zde rozumíme především zachování charakteru spektra vstupního rozložení teploty. Testovali jsme několik modelů ($Ra = 10^6$, $Ra = 10^7$, konstantní nebo hloubkově proměnná viskozita).

4.1 Konstrukce vstupních modelů teploty

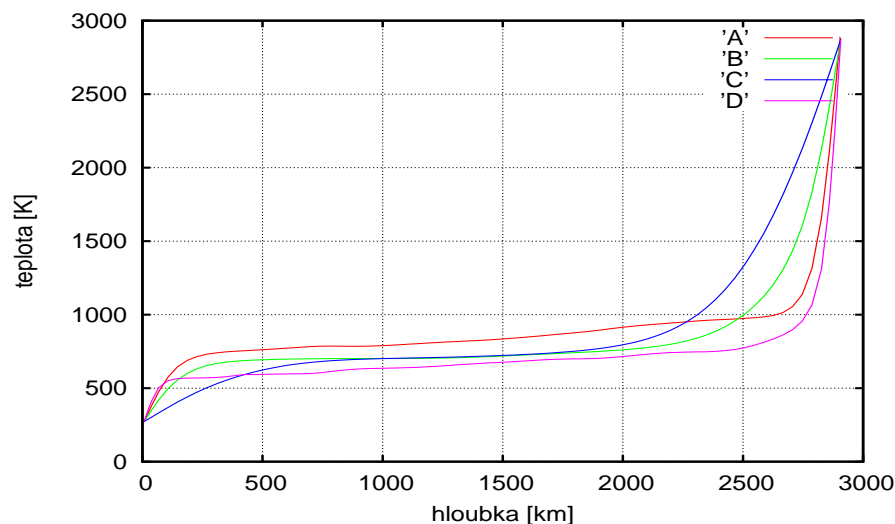
Tomografické modely udávají rozložení relativních anomálií seismických rychlostí $\delta u/u_0$ v plášti, kde δu jsou odchylky skutečného třírozměrného rozložení seismických rychlostí od referenčního sféricky symetrického modelu u_0 . Znali jsme koeficienty $u_{jm}(r_i)$ sférických harmonických rozvoju těchto relativních odchylek v I vstvách. Pro přepočítání anomálií seismických rychlostí na teploty jsme použili vztah

$$\delta T = -\frac{p}{\alpha} \frac{\delta u}{u_0}, \quad (4.1)$$

kde δT jsou odchylky teploty od radiálně symetrického modelu, p je parametr konverze ($p = \frac{d \ln g}{d \ln u}$) a α je koeficient teplotní roztažnosti. Zde jsme používali konstantní hodnoty $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$ a $p = 0.4$ pokud byl tomografický model vytvořen na základě času příchodu vln P a $p = 0.2$ v případě, že tomografický model byl vytvořen na základě času příchodu vln S. Pro sférické harmonické koeficienty T_{jm} rozvoje odchylek teploty δT pak platí

$$T_{jm}(r) = -\frac{p}{\alpha} u_{jm}(r) \quad \text{pro } j \neq 0. \quad (4.2)$$

Pro získání rozumného stabilního obrazu teploty je dále potřeba zkonstruovat radiálně symetrický profil teploty $T_{00}(r)$ — geotermu. Každý model s daným



Obrázek 4.1: Charakteristické geotermy. Červená křivka A odpovídá modelu s konstantní viskozitou a $Ra = 10^6$, zelená křivka B odpovídá modelu s desetinásobným nárůstem viskozity v hloubce 1000 km a $Ra = 10^6$, modrá křivka C je pro model se stonásobným nárůstem viskozity v hloubce 1000 km a $Ra = 10^6$ a fialová křivka D je pak pro model s nárůstem viskozity a $Ra = 10^7$.

Rayleighovým číslem a hloubkovým profilem viskozity má jinou charakteristickou geotermu. Tu jsme získávali následovně. Pro každý model s daným Rayleighovým číslem Ra a hloubkovým profilem viskozity $\eta(r)$ jsme provedli simulaci konvekce ve dvourozměrném případě (program 2D-KONVO). Běh jsme nastartovali z libovolného počátečního rozložení teploty a nechali vyvíjet tak dlouho, až se dostal do statisticky vyrovnaného stavu, tj. takového kdy časový průběh Nusseltova čísla nemá ani klesající ani rostoucí tendenci. Radiální profil $T_{00}(r)$ jsme pak použili při konstrukci počátečního třírozměrného modelu teploty. Na obr. 4.1 jsou příslušné geotermy pro čtyři různé případy: a) model s konstantní viskozitou v celém plášti, $Ra = 10^6$ (červená křivka A), b) model se vzrůstem viskozity o jeden řád v hloubce 1000 km, $Ra = 10^6$ (zelená křivka B), c) model se vzrůstem viskozity o dva řády v hloubce 1000 km, $Ra = 10^6$ (modrá křivka C) a d) model s nárůstem viskozity o jeden řád v hloubce 1000 km a $Ra = 10^7$ (fialová křivka D).

Pro konstrukci počátečního rozložení teploty jsme použili dva tomografické modely. Prvním byl model konstruovaný na základě časů příchodu vln S [Ritsema a kol., 1999], který máme do stupně 20 v 80 vrstvách. Vrstvy byly více zahuštěné u povrchu a CMB, tloušťka vrstvy zde byla 10-20 km, ve zbytku pláště pak 40 km. Řez rozložením relativních odchylek anomálií seismických rychlostí $\delta u/u_0$ je zobrazen na obrázku 4.2 a). Vstupní modely rozložení teploty vytvořené na jeho základě značíme písmenem R.

Tabulka 4.1: Parametry teplotních modelů.

model	povrchové Ra	$\eta_{sp.pl}/\eta_{sv.pl}$	N	I
R10 ⁶ - η_1	10 ⁶	1	50	80
R10 ⁶ - η_{10}	10 ⁶	10	50	80
R10 ⁶ - η_{100}	10 ⁶	100	50	80
R10 ⁷ - η_{10}	10 ⁷	10	50	80
H10 ⁶ - $\eta_{10}A$	10 ⁶	10	180	120
H10 ⁶ - $\eta_{10}B$	10 ⁶	10	180	120
H10 ⁷ - η_{10}	10 ⁷	10	180	120

Druhým tomografickým modelem byl model konstruovaný na základě času příchodu vln P [Karason a van der Hilst, 2001]. Ten je dán do stupně 128 v 64 vrstvách s rovnoměrnou hloubkovou diskretizací (tloušťka vrstev byla 45 km). Řez rozložením relativních odchylek anomálií seismických rychlostí $\delta u/u_0$ je zobrazen na obrázku 4.2 b). Teplotní modely vytvořené na jeho základě značíme písmenem H.

Pro posouzení stability modelů konvekce jsme používali výkonová spektra teplotních anomálií

$$P_j = T_{j0}^2 + 2Re \sum_{m=1}^j T_{jm} T_{jm}^* \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Na obrázku 4.3 jsou normovaná výkonová spektra vstupních teplotních anomálií v modelech R (červené křivky) a H (zelené křivky) v hloubkách 200 km (obr. a), 660 km (obr. b) a 2000 km (obr. c). Spektra jsou normovaná tak, aby maximální hodnota byla jedna.

Dále jsme sledovali časový vývoj střední kvadratické hodnoty rychlosti v plášti

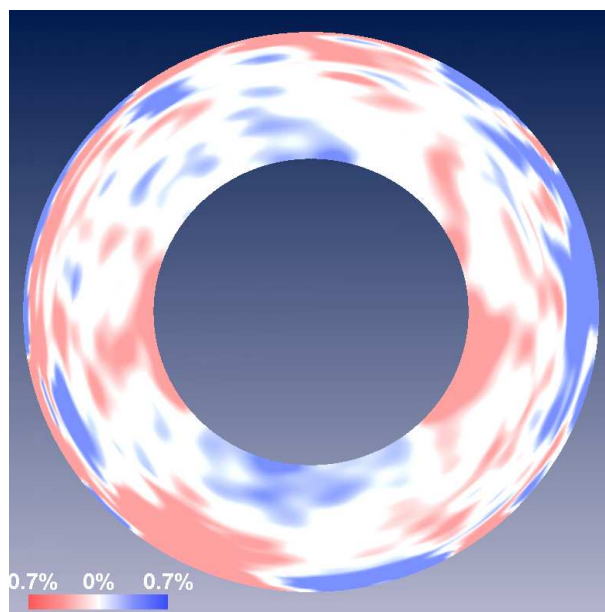
$$v_{RMS} = \sqrt{\int_{V_{pl}} \mathbf{v}^2(r, \vartheta, \varphi) dV_{pl}}, \quad (4.4)$$

kde V_{pl} značí objem pláště.

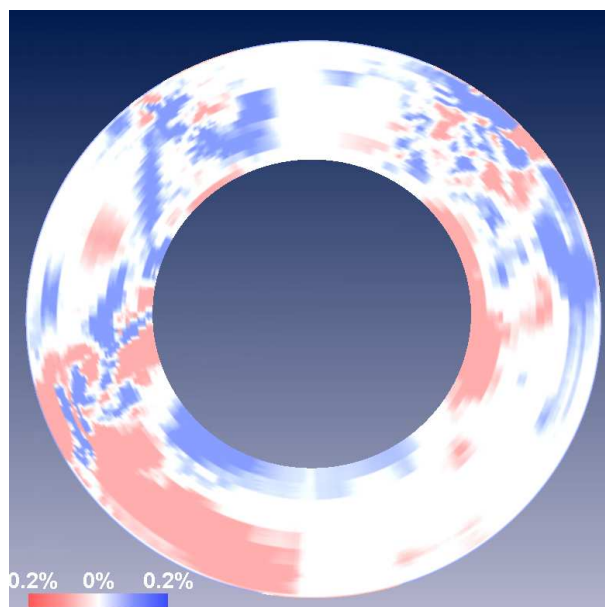
4.2 Výsledky

Uskutečnili jsme několik výpočtů pro různá Rayleighova čísla v modelech s konstantní viskozitou nebo s nárůstem viskozity ve spodním plášti (v hloubce 1000 km). Hloubkový profil η_r v modelech s nárůstem viskozity je na obr. 4.4. Poměr velikosti

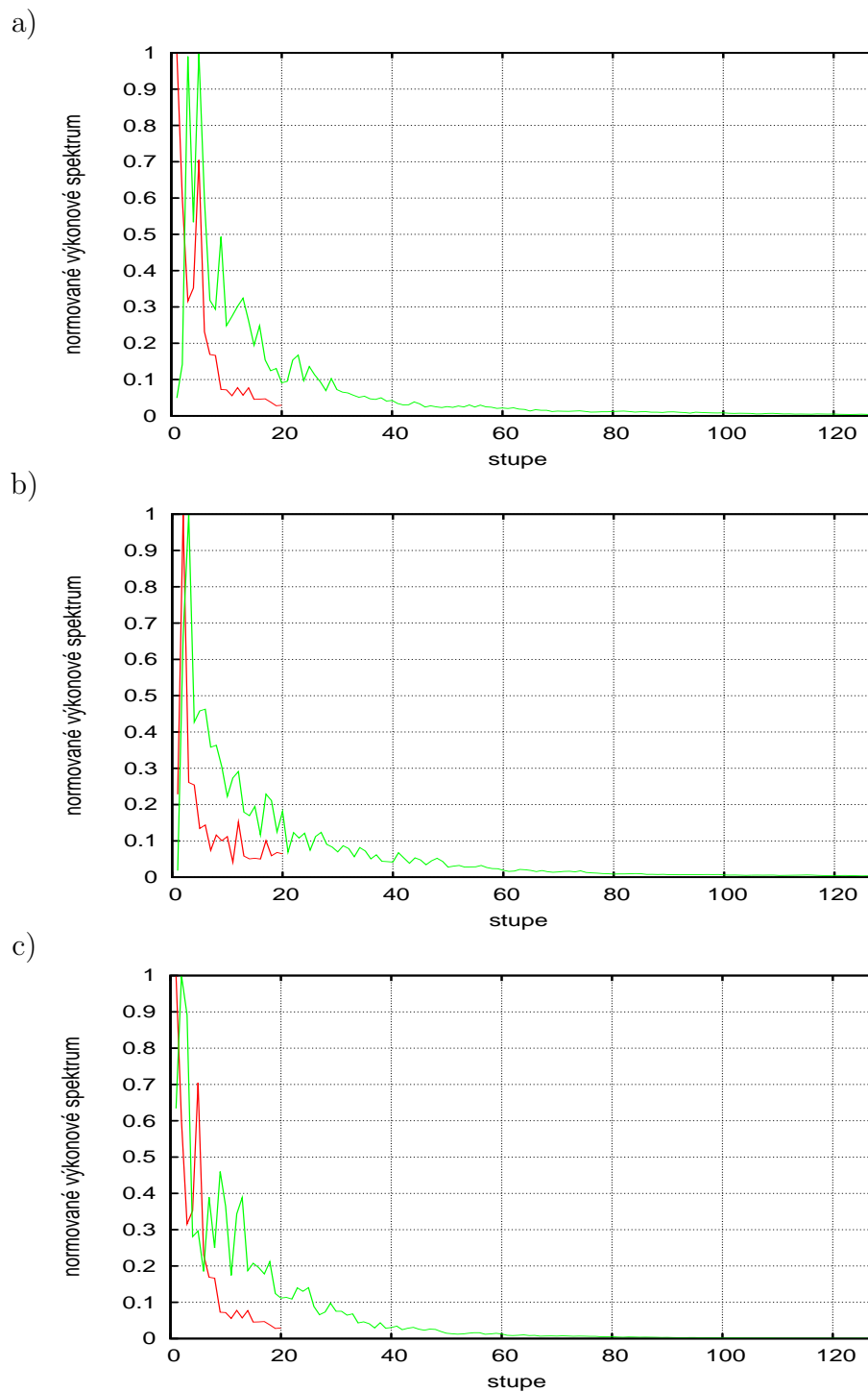
a)



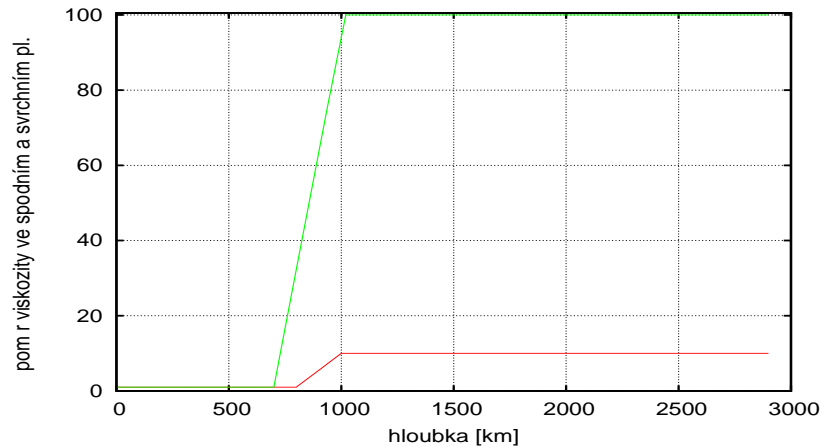
b)



Obrázek 4.2: Relativní odchylky seismických anomálií $\delta u/u_0$ v modelech R, obr. a) a v modelech H, obr. b). Řez na nultém poledníku.



Obrázek 4.3: Normovaná výkonová spektra vstupních teplotních anomálií pro model R (červené křivky) a pro model H (zelené křivky) v hloubkách 200 km (obr. a), 660 km (obr. b) a 2000 km (obr. c).

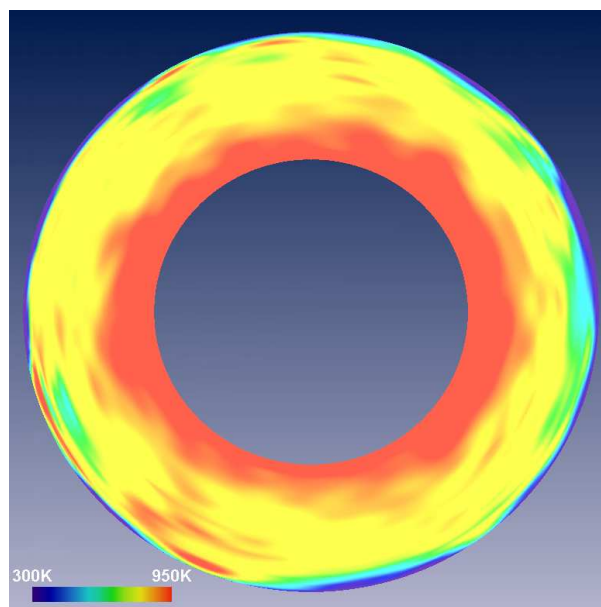


Obrázek 4.4: Hloubkový profil poměru $\eta_{sp.pl}/\eta_{sv.pl}$ v modelech, ve kterých viskozita vzrůstá ve spodním plášti desetkrát (červená křivka) a v modelu ve kterém viskozita vzrůstá ve spodním plášti stokrát (zelená křivka).

viskozity ve spodním plášti $\eta_{sp.pl}$ a velikosti viskozity ve svrchním plášti $\eta_{sv.pl}$, $\eta_{sp.pl}/\eta_{sv.pl} = 10$ nebo 100 .

Zavedli jsme následující označení modelů:

- R10⁶- η_1** : model konstruovaný na základě časů příchodu vln S s Rayleighovým číslem 10^6 a konstantní viskozitou v celém plášti. Stupeň rozvoje $N = 50$ a hloubkové rozlišení bylo 10 km v hraničních vrstvách, tzn. ve vrstvě silné 200 km u povrchu a ve vrstvě 150 km nad CMB a 40 km ve zbytku pláště (dohromady 80 vrstev).
- R10⁶- η_{10}** : model konstruovaný na základě časů příchodu vln S s desetinasobným nárůstem viskozity v hloubce 1000 km. Povrchové Rayleighovo číslo je 10^6 . Hloubkové rozlišení bylo 10 km v hraničních vrstvách, tzn. v 200 km silných vrstvách u povrchu a CMB, 80 km pak ve zbytku pláště ($N = 50$, $I = 80$).
- R10⁶- η_{100}** : model konstruovaný na základě časů příchodu vln S se stonásobným nárůstem viskozity v hloubce 1000 km. Povrchové Rayleighovo číslo je 10^6 . Laterální i hloubkové rozlišení bylo shodné s předchozím modelem R10⁶- η_{10} ($N = 50$, $I = 80$).
- R10⁷- η_{10}** : model konstruovaný na základě časů příchodu vln S, povrchové Rayleighovo číslo je 10^7 . Ve spodním plášti v hloubce 1000 km viskozita o řád vzrůstá. Laterální i hloubkové rozlišení bylo shodné s modelem R10⁶- η_1 ($N = 50$, $I = 80$).
- H10⁶- η_{10} A**: model konstruovaný na základě časů příchodu vln P, povrchové Rayleighovo číslo je 10^6 . Ve spodním plášti (v hloubce 1000 km) je viskozita o řád



Obrázek 4.5: Počáteční teplota v modelu $R10^6-\eta_1$. Řez na nultém poledníku.

vyšší. Hlubkové rozlišení bylo 20 km až do hloubky 1400 km, v hloubkách 1400 km až 2500 km bylo rozlišení 40 km a 20 km až nad rozhraní jádro-plášť (celkem 120 vrstev). Simulace jsme prováděli pro maximální stupeň rozvoje $N = 180$.

H10⁶- η_{10} B: model konstruovaný na základě časů příchodu vln P, povrchové Rayleighovo číslo je 10^6 . Ve spodním plášti (v hloubce 1000 km) je viskozita o řád vyšší. Jedná se o model shodný s modelem H10⁶- η_{10} A rozdílné bylo radiální rozlišení. Model měl rozlišení 10 km do hloubky 800 km a u hranice jádro-plášť 15 km. Ve zbytku oblasti byla tloušťka vrstev 85 km. $N = 180, I = 120$.

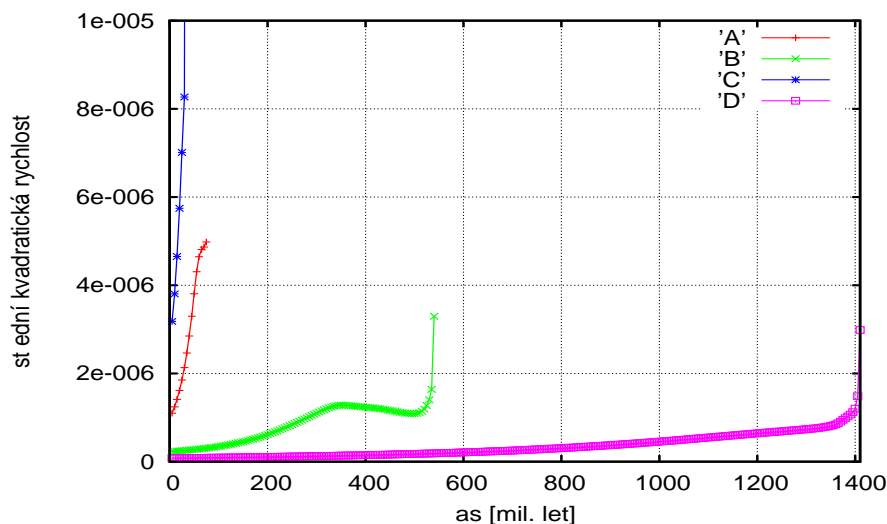
H10⁷- η_{10} : model konstruovaný na základě časů příchodu vln P, povrchové Rayleighovo číslo je 10^7 . Ve spodním plášti (v hloubce 1000 km) je viskozita o řád vyšší. Radiální diskretizace byla stejná jako u modelu H10⁶- η_{10} A.

Přehled modelů je uveden v tabulce 4.1.

Model $R10^6-\eta_1$

Poledníkový řez vstupním rozložením teplot je na obrázku 4.5.

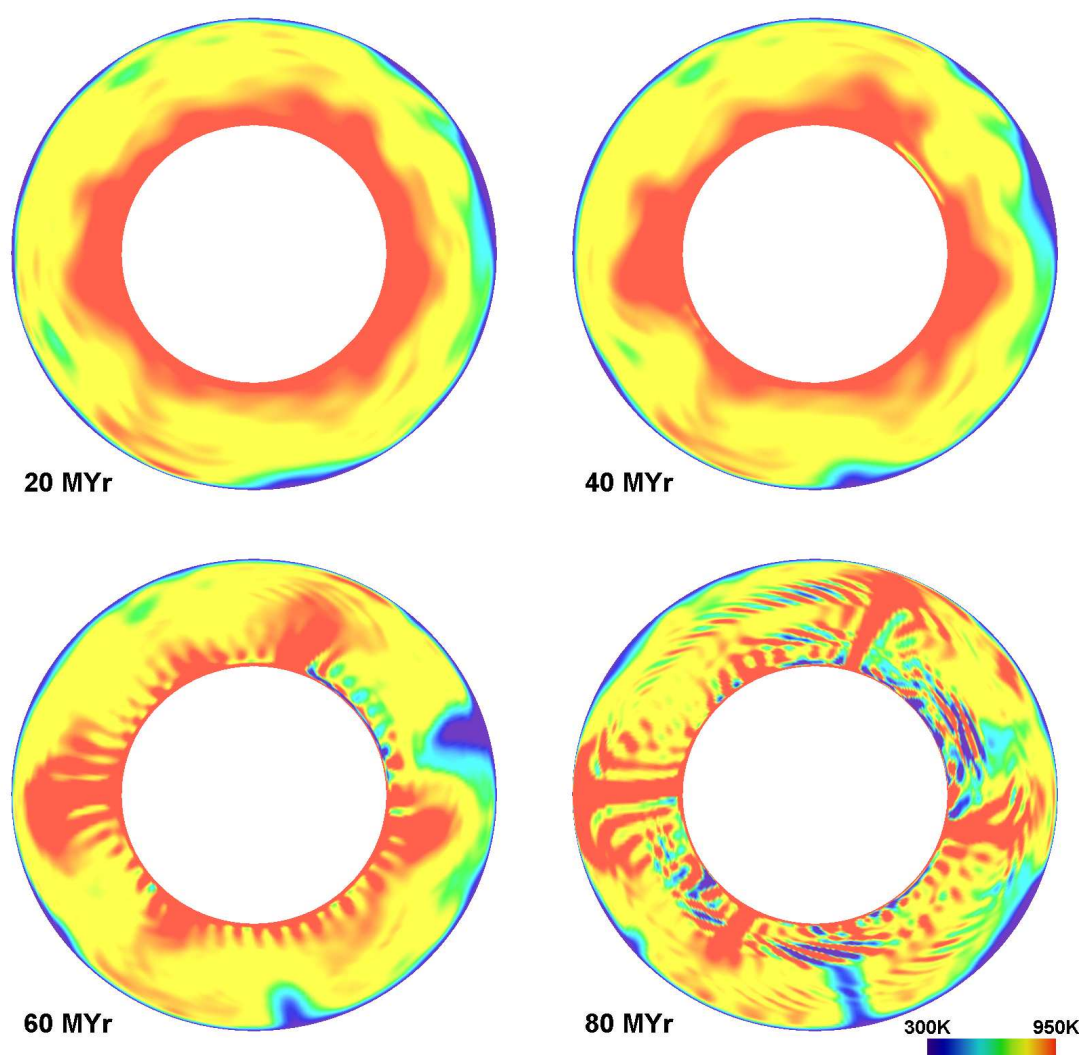
Simulace trvala 80 milionů let. Na obrázku 4.7 je časový vývoj rozložení teploty. Z dlouhovlnných teplých útvarů ve spodním plášti (obrázek 4.7, levý horní panel) se během asi 50 milionů let vyvíjejí rychle stoupající horké plумы, a stejně tak studené sestupné útvary, které se stávají výrazně krátkovlnnější. Střední kvadratická rychlost



Obrázek 4.6: Střední kvadratická hodnota rychlosti v_{RMS} jako funkce času. Červená křivka A odpovídá modelu $R10^6-\eta_1$, zelená křivka B je pro model $R10^6-\eta_{10}$, modrá křivka C je pro model $R10^7-\eta_{10}$ a fialová křivka D je pro model $R10^6-\eta_{100}$.

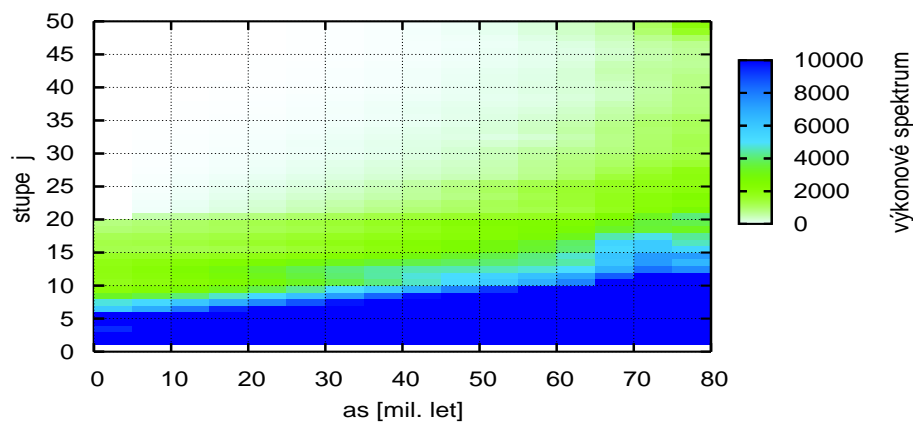
v_{RMS} monotónně a poměrně rychle roste (4.6, červená křivka A). Po 60 milionech let jsou již vzestupné horké plumy příliš úzké a ve spodním plášti jsou patrné laterální oscilace teploty. Laterální rozlišení ($N = 50$) již není schopné postihnout vyvíjející se útvary a po asi 80 milionech let se proto výpočet zhroutí.

Na obrázku 4.8 je časový vývoj výkonových spekter pro 3 různé hloubky — a) 200 km, b) 660 km a c) 2000 km. Vstupní teplotní model byl dán do maximálního stupně rozvoje $N = 20$. Z obrázků je patrné, že spektrum se postupně zaplňuje i pro vyšší stupně, nejrychleji v nejspodnějším plášti (4.8 c). Je tedy patrné, že charakter spektra vstupního modelu se velmi rychle (na časové škále 80 milionů let) změnil. Model vycházející z dlouhovlnného tomografického modelu ($N = 20$) s konstantní viskozitou je tedy nestabilní byť Rayleighovo číslo je relativně nízké.

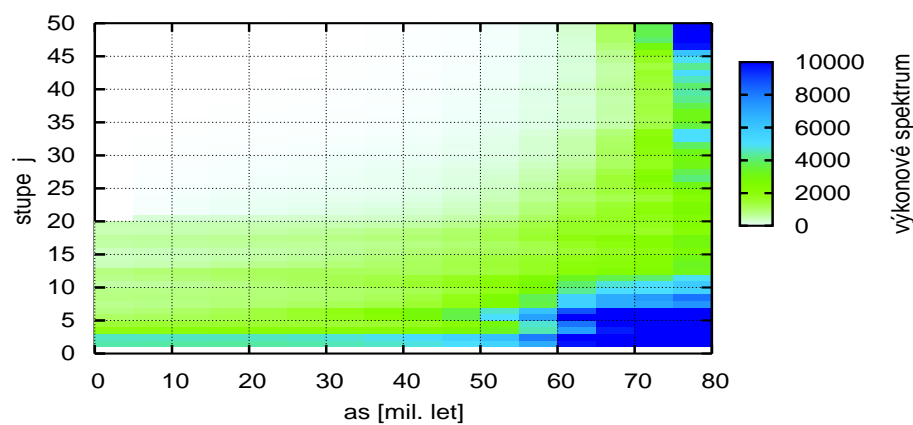


Obrázek 4.7: Časový vývoj rozložení teploty v modelu $R10^6-\eta_1$. Řez nultým poledníkem.

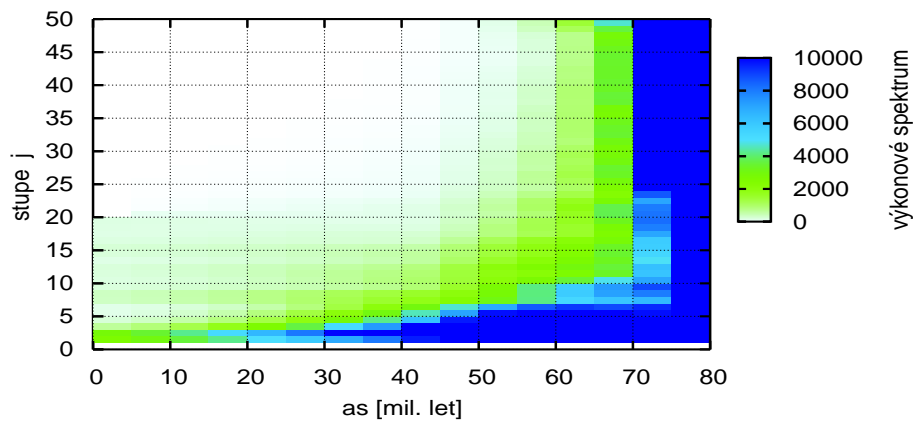
a)



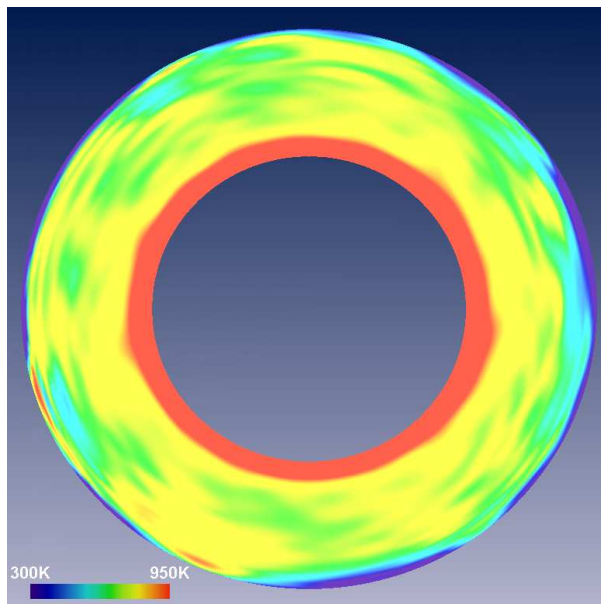
b)



c)



Obrázek 4.8: Časový vývoj výkonových spekter pro model $R10^6-\eta_1$. Jedná se o hloubky 200 km (obr. a), 660 km (obr. b) a 2000 km (obr. c).

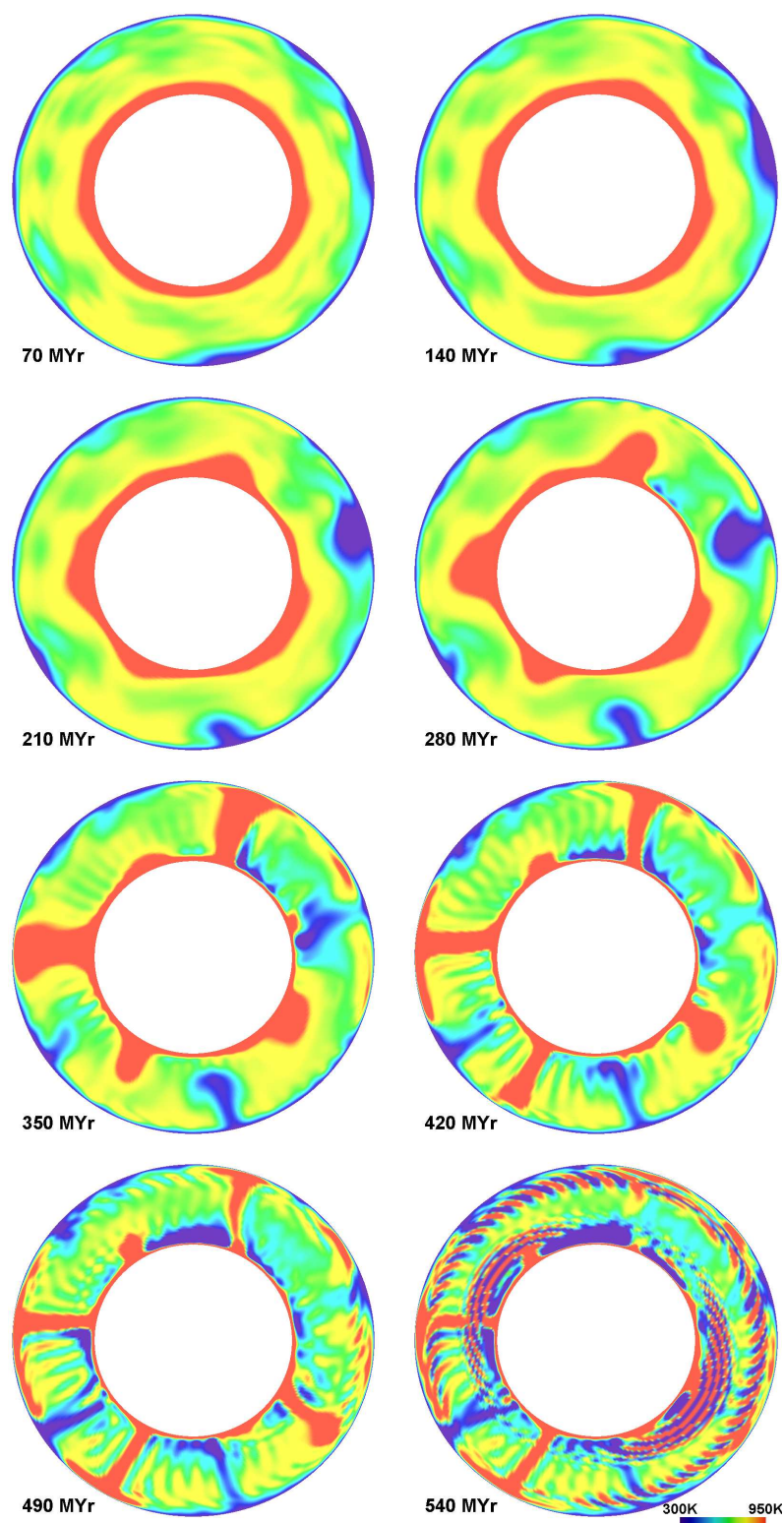


Obrázek 4.9: Počáteční rozložení teploty v modelu $R10^6\text{-}\eta_{10}$. Řez na nultém poledníku.

Model $R10^6\text{-}\eta_{10}$

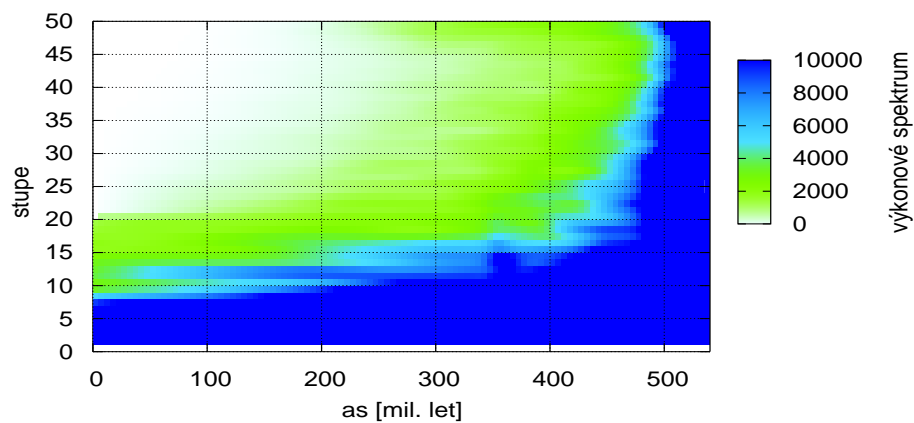
Model jsme se pokusili stabilizovat zavedením desetinásobného nárůstu viskozity v hloubce 1000 km. Řez vstupním rozložením teplot je na obrázku 4.9. Od počátečního rozložení teploty v modelu $R10^6\text{-}\eta_1$ (obr. 4.5) se liší díky tomu, že má jinou charakteristickou geotermu (obr. 4.1).

Zavedením nárůstu viskozity došlo podle očekávání k výrazné stabilizaci systému. Simulace probíhala 540 milionů let než došlo k numerickému zhroucení výpočtu. Časový vývoj teploty je znázorněn na obr. 4.10 a na obrázku 4.6 (křivka B) je časový vývoj střední kvadratické rychlosti. Z obr. 4.6 je patrné, že střední kvadratická rychlost v_{RMS} je nižší než v modelu $R10^6\text{-}\eta_1$ a její nárůst s časem je pomalejší. Nárůst výkonu na vyšších stupních (obr. 4.11) je ovšem i zde patrný a po asi 200 milionech let se velmi rychle zaplní spektrum až do maximálního stupně rozvoje ($N = 50$) a výpočet se po 540 milionech let hroutí. Podařilo se nám tedy zlepšit stabilitu modelu a spektrum si zachovalo charakter vstupního modelu teplot po asi 200 milionů let. Poté se ale i v tomto případě charakter spektra začal prudce měnit k výrazně krátkovlnnému. Nejedná se tedy o stabilní model.

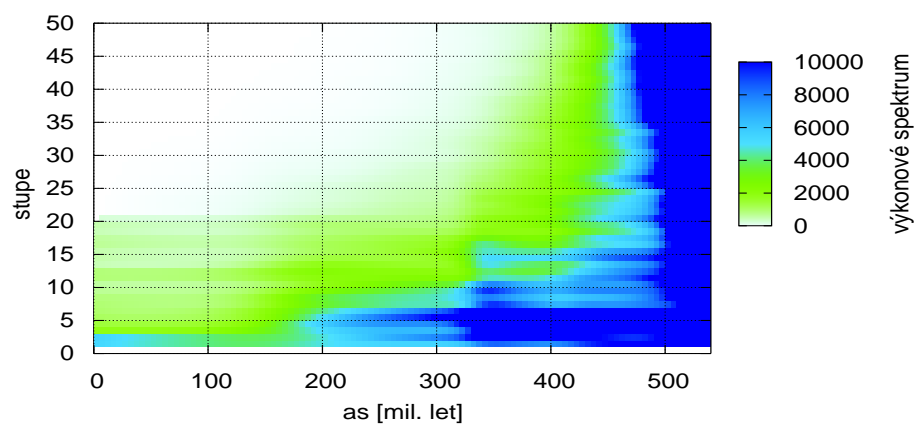


Obrázek 4.10: Časový vývoj rozložení teploty v modelu $R10^6-\eta_{10}$. Řez nulovým poledníkem.

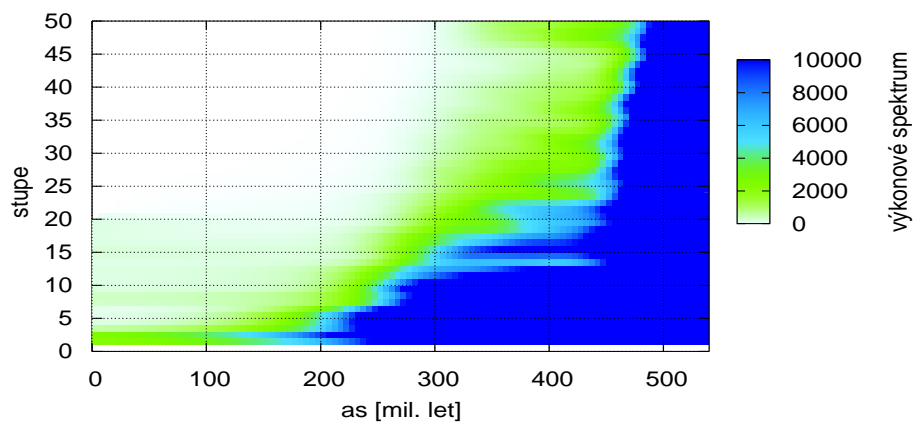
a)



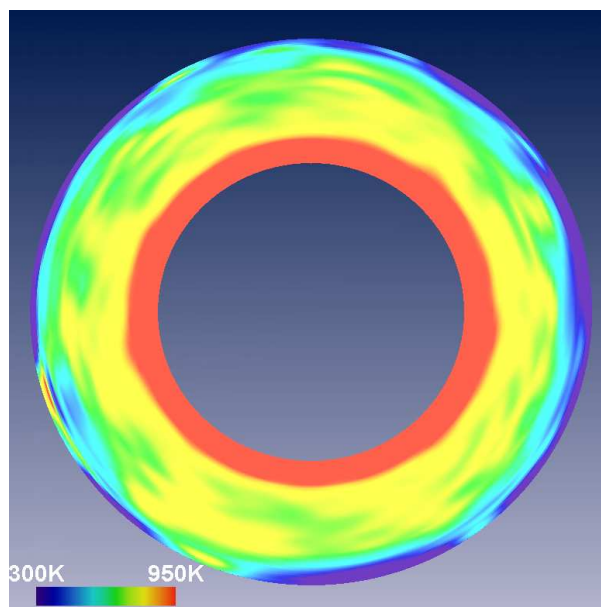
b)



c)



Obrázek 4.11: Časový vývoj výkonových spekter pro model $R10^6-\eta_{10}$. Jedná se o hloubky 200 km (obr. a), 660 km (obr. b) a 2000 km (obr. c).

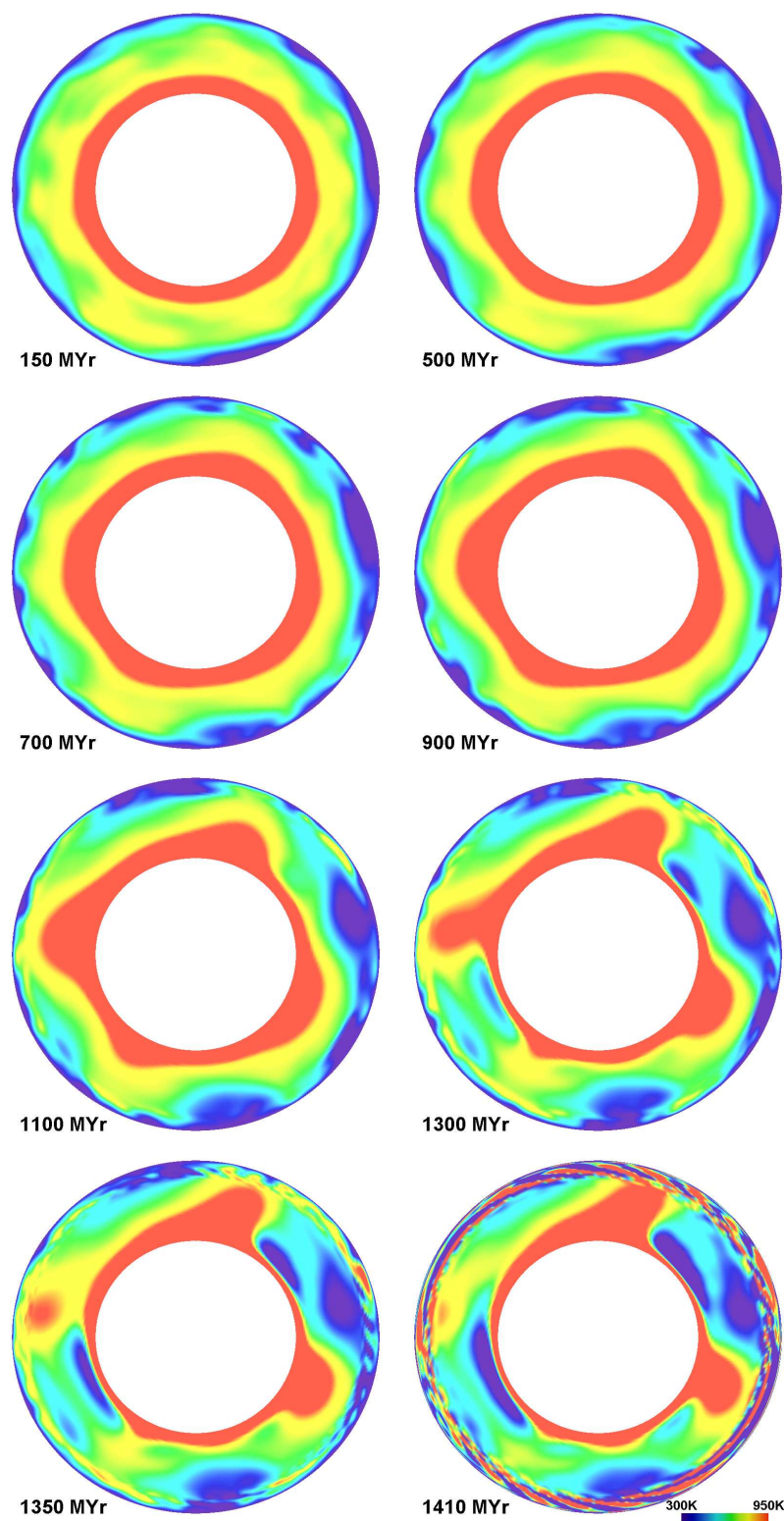


Obrázek 4.12: Počáteční rozložení teploty v modelu $R10^6-\eta_{100}$. Řez na nultém poledníku.

Model $R10^6-\eta_{100}$

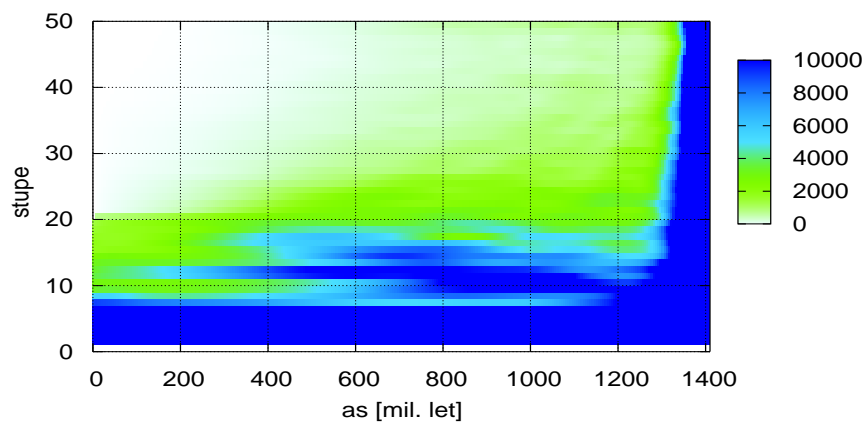
Pokusili jsme se o ještě větší stabilizaci modelu zavedením stonásobného nárůstu viskozity v hloubce 1000 km. Řez vstupním rozložením teplot je na obrázku 4.12.

Simulace probíhala 1410 milionů let než došlo k numerickému zhroucení výpočtu. Časový vývoj teploty je znázorněn na obr. 4.13 a na obrázku 4.6 (křivka D) je časový vývoj střední kvadratické rychlosti. Z obr. 4.6 je patrné, že střední kvadratická rychlost v_{RMS} je nižší než v modelu $R10^6-\eta_{10}$ a její nárůst s časem je pomalejší. Přesto ale monotonně roste, zatímco ve stabilním modelu bychom očekávali oscilace okolo nějaké střední hodnoty. Na obrázcích 4.14 je patrné, že spektrum si zachovává dlouhovlnný charakter vstupního rozložení po dobu asi 400 milionů let. Pak ovšem i v tomto modelu začal růst výkon na vyšších harmonických stupních. V plášti se začaly vyvíjet mohutné horké plumy a během svého vzestupu pláštěm se ztenčovaly. Ve chvíli, kdy dorazily k povrchu, projevíly se ve výpočtu numerické obtíže související zřejmě s nedostatečně jemnou diskretizací v horní hraniční vrstvě a výpočet se zhroutil. Ovšem i nebýt těchto radiálních oscilací, charakter spektra by se zřejmě (poměrně rychle) změnil na krátkovlnný. Ačkoli se nám tedy podařilo výrazným zvýšením viskozity spodního pláště stabilizovat model na relativně dlouhou dobu, charakteristické spektrum vstupních teplotních anomálií se nakonec zachovat nepodařilo.

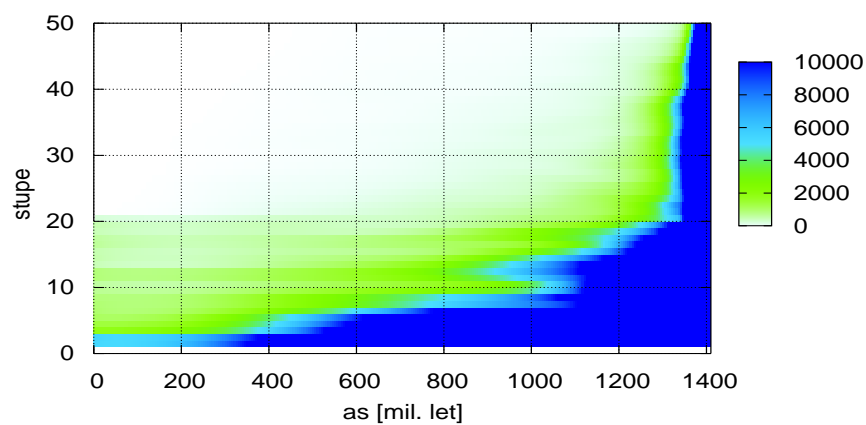


Obrázek 4.13: Časový vývoj rozložení teploty v modelu $R10^6-\eta_{100}$. Řez nulovým poledníkem.

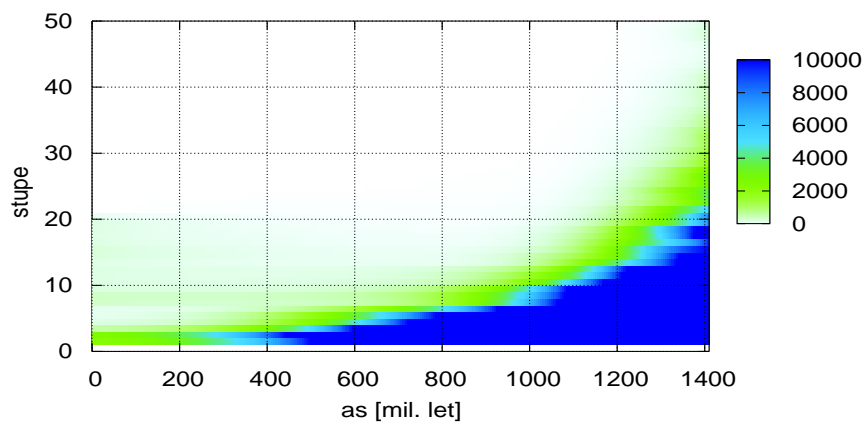
a)



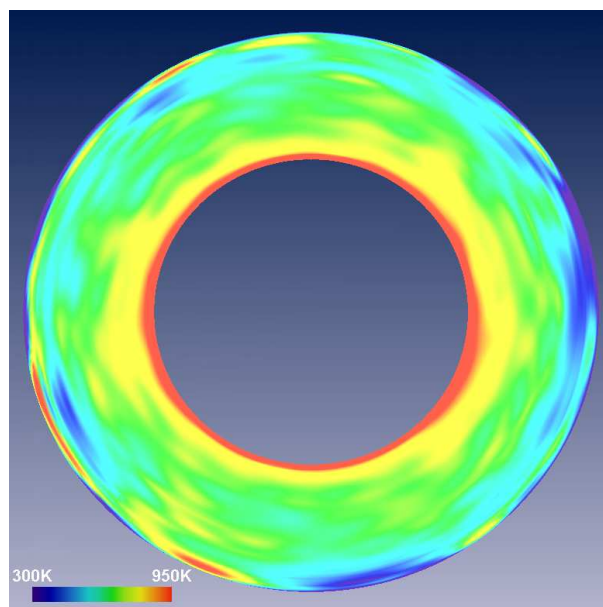
b)



c)



Obrázek 4.14: Časový vývoj výkonových spekter pro model $R10^6-\eta_{100}$. Jedná se o hloubky 200 km (obr. a), 660 km (obr. b) a 2000 km (obr. c).

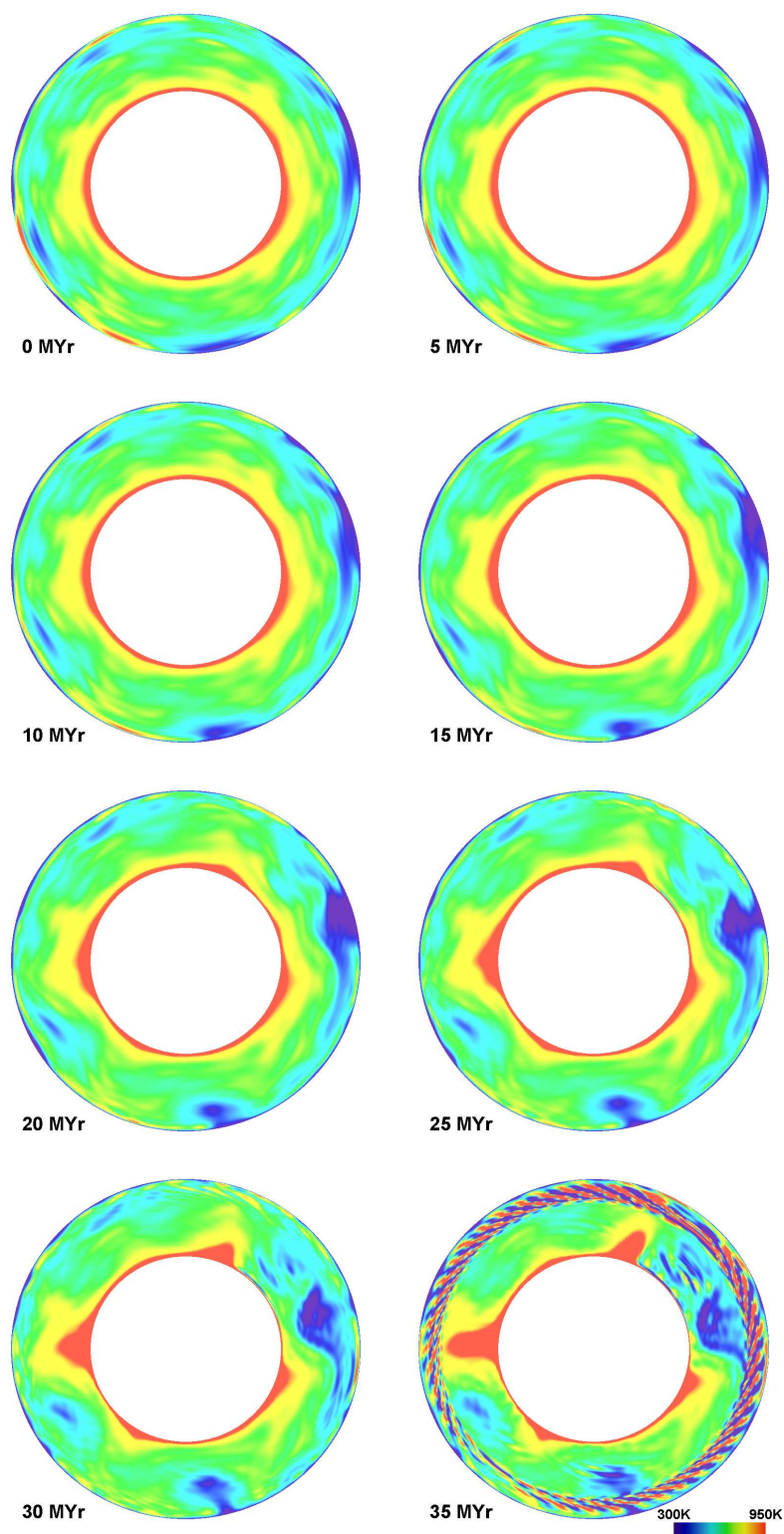


Obrázek 4.15: Počáteční rozložení teploty v modelu $R10^7-\eta_{10}$. Řez na nultém poledníku.

Model $R10^7-\eta_{10}$

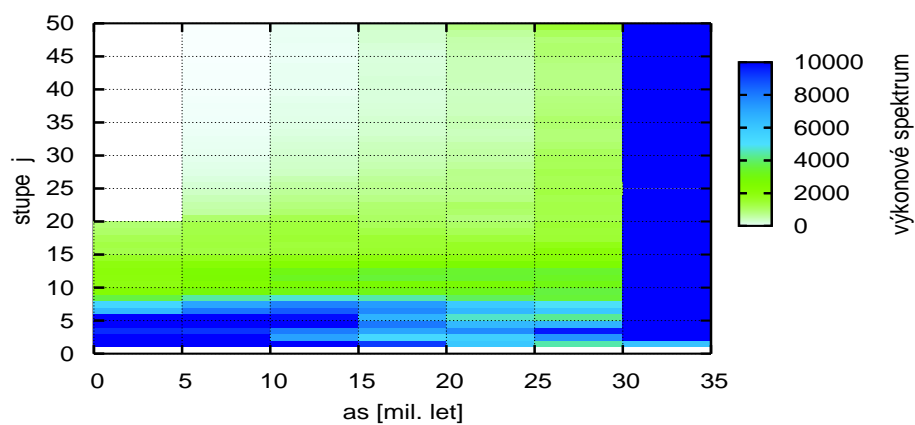
Poledníkový řez vstupním rozložením teplot je na obrázku 4.15.

Oproti předchozímu modelu jsme zvýšili Rayleighovo číslo o řád a konvekce je tedy podle očekávání "bouřlivější". Simulace probíhala pouze 35 milionů let. Časový vývoj rozložení teplot v tomto modelu je na obrázku 4.16 a časový vývoj střední kvadratické rychlosti v_{RMS} je na obrázku 4.6 (křivka C). Střední kvadratická rychlost roste velmi rychle a velmi rychle se také zaplňují vyšší harmonické stupně spektra (obr. 4.17). Je patrné, že i v tomto modelu dochází k rychlé změně charakteru spektra, model není stabilní a proto se výpočet zhroutí. Z časového vývoje teplot je navíc patrné, že dochází k oscilacím i v radiálním směru.

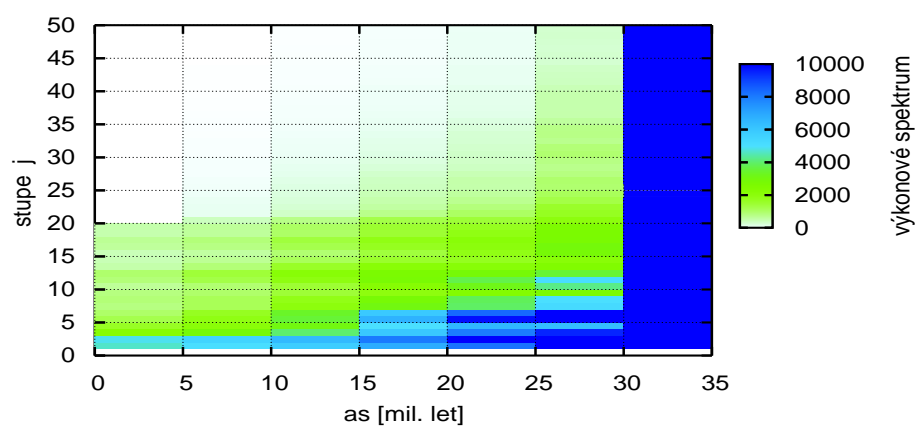


Obrázek 4.16: Časový vývoj rozložení teploty v modelu $R10^7-\eta_{10}$. Řez nulovým poledníkem.

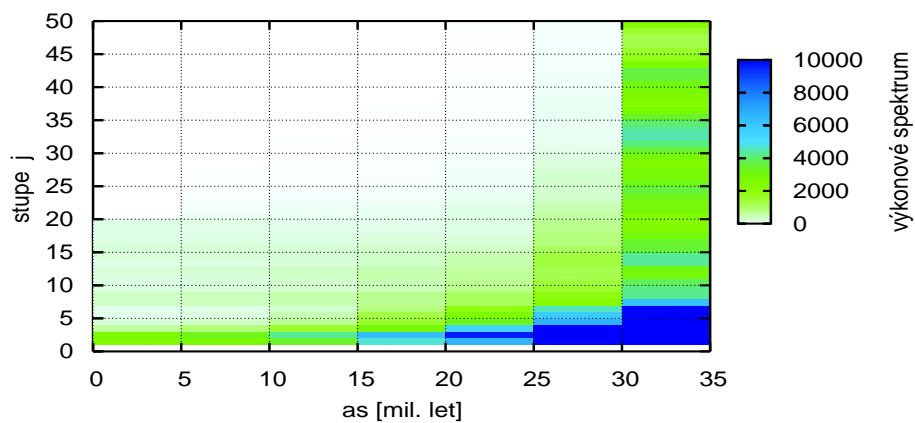
a)



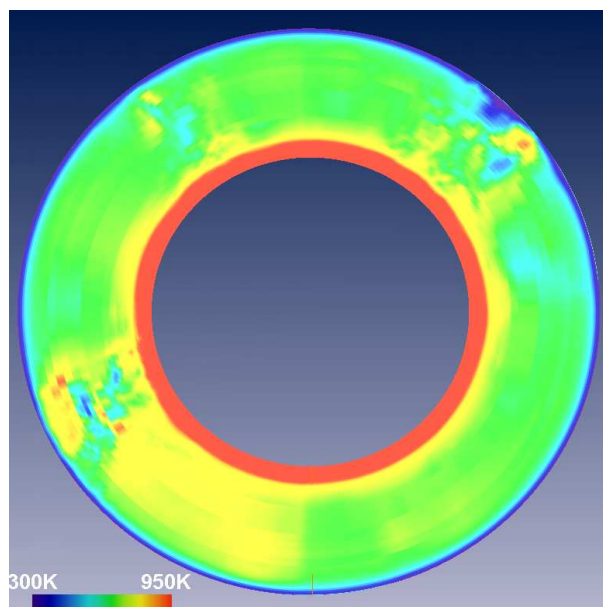
b)



c)



Obrázek 4.17: Časový vývoj výkonových spekter pro model $R10^7-\eta_{10}$. Jedná se o hloubky 200 km (obr. a), 660 km (obr. b) a 2000 km (obr. c).



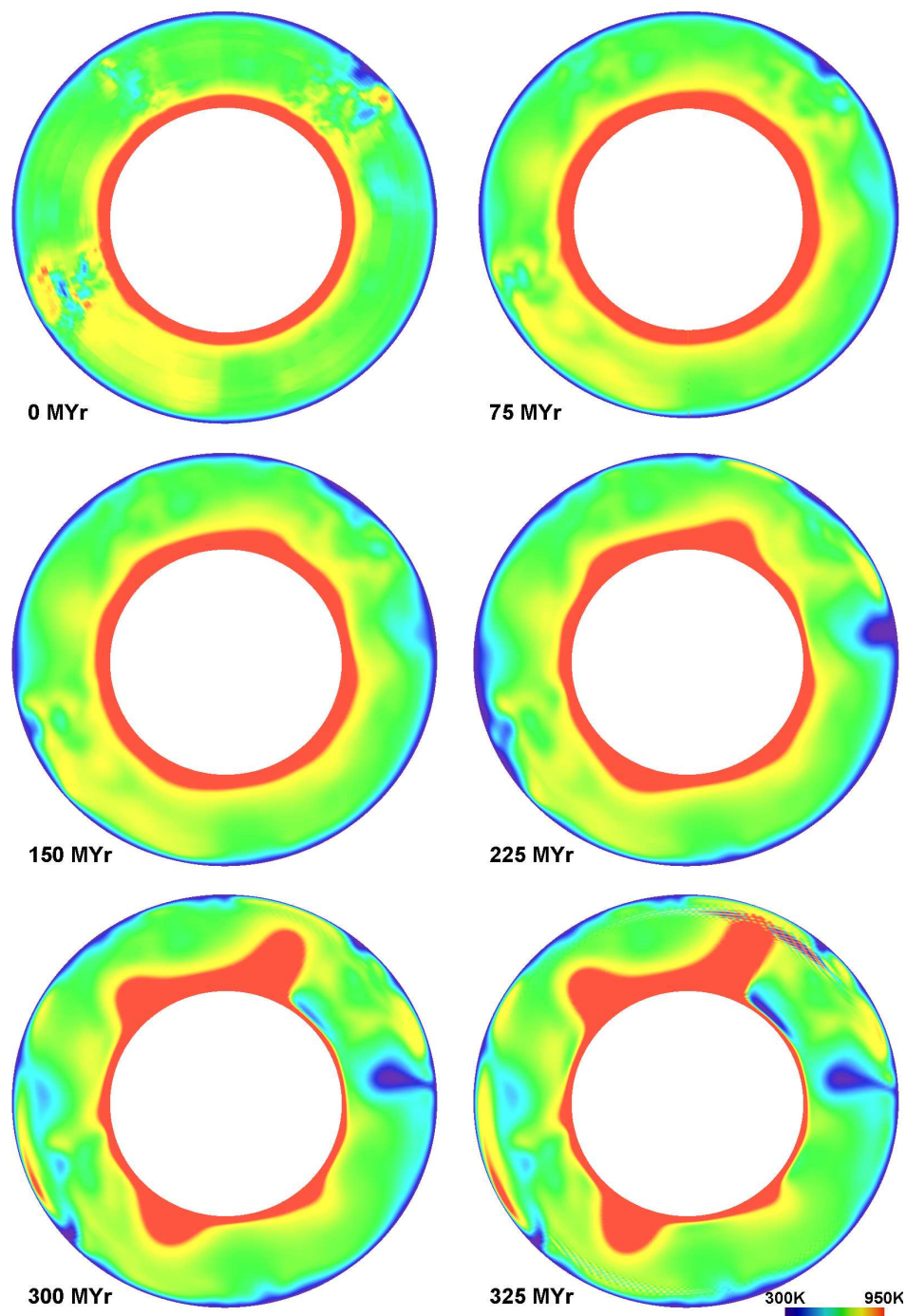
Obrázek 4.18: Počáteční rozložení teploty v modelu $H10^6-\eta_{10}$. Řez na nulovém poledníku.

Protože model $R10^6-\eta_1$ s konstantní viskozitou se podle očekávání ukázal být nestabilní, v případě modelů H jsme se omezili pouze na modely s nárůstem viskozity ve spodním plášti.

Model $H10^6-\eta_{10}A$

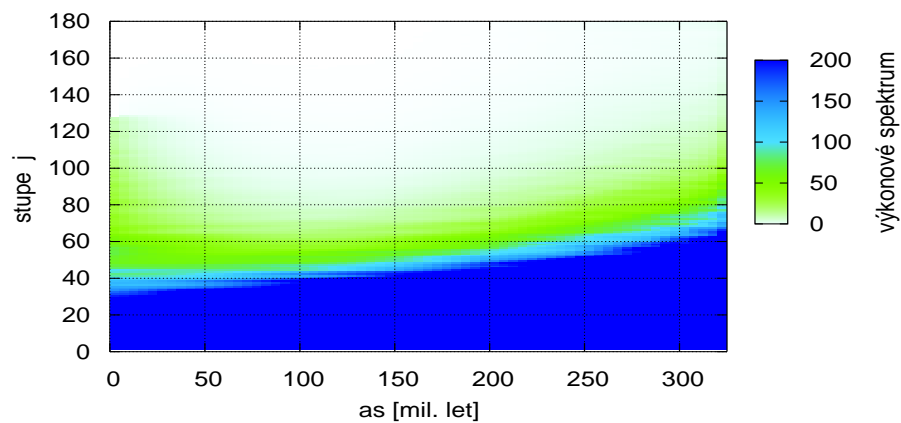
Poledníkový řez vstupním rozložením teplot je na obrázku 4.18.

Simulace probíhala 325 milionů let. Časový vývoj teplot je na obr. 4.19. Je patrné, že po dobu asi 150 milionů let je model více méně stabilní a spektrum (obr. 4.20) se na vyšších harmonických stupních zaplňuje jen pomalu. Stejně tak nárůst střední kvadratické rychlosti (obr. 4.21 křivka A) je relativně pomalý. Po asi 200 milionech let se ovšem z teplých anomálií začnou vyvíjet rychle stoupající plumy. Po 325 milionech let, v době kdy plumy dorazí k povrchu, se výpočet numericky hroutí, zřejmě díky nedostatečnému radiálnímu rozlišení v horní hraniční vrstvě.

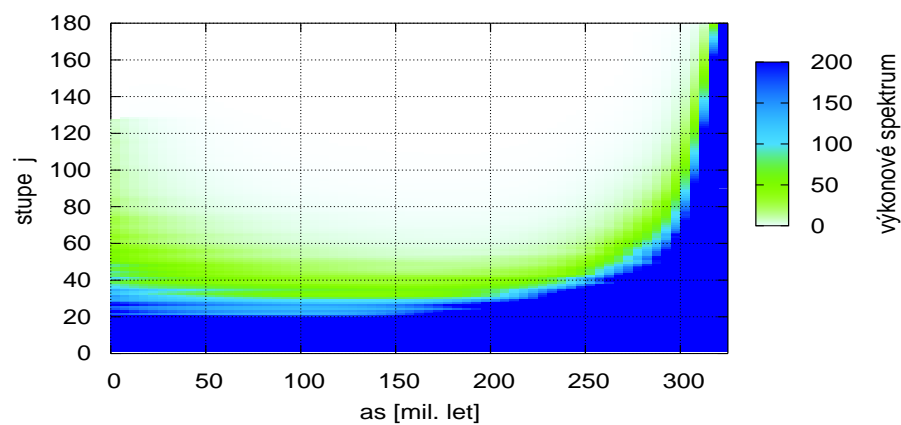


Obrázek 4.19: Časový vývoj rozložení teploty v modelu $H10^6\text{-}\eta_{10}A$. Řez nultým poledníkem.

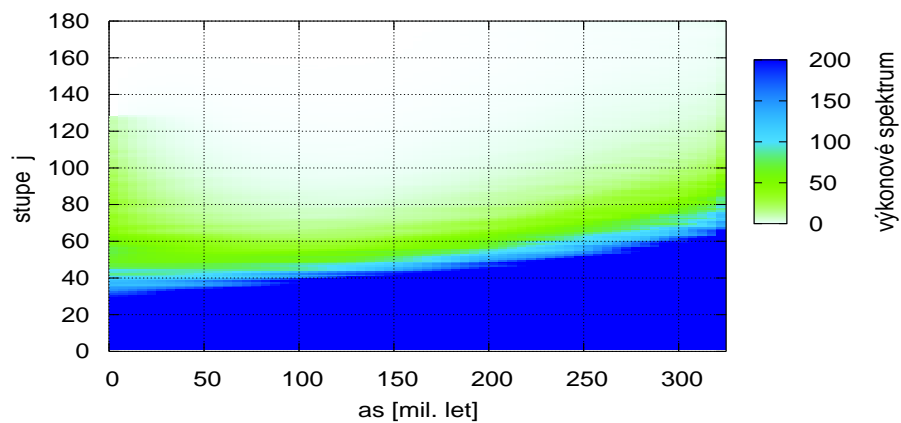
a)



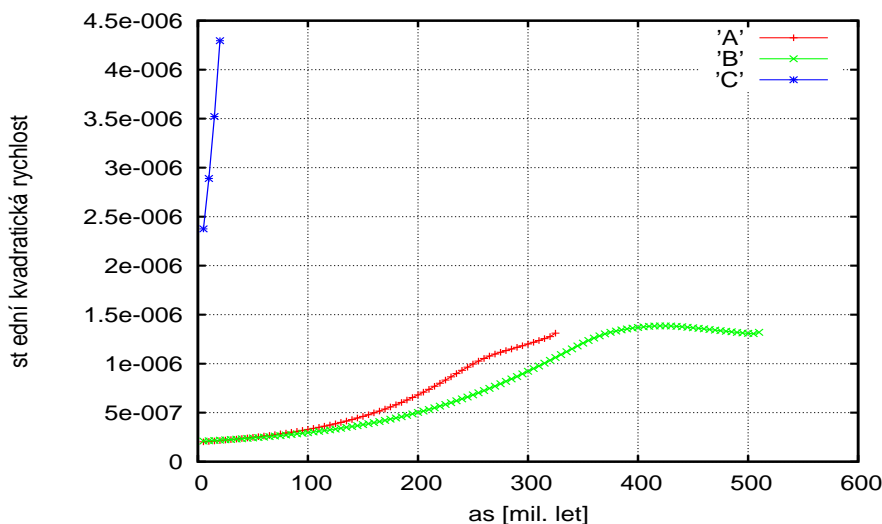
b)



c)



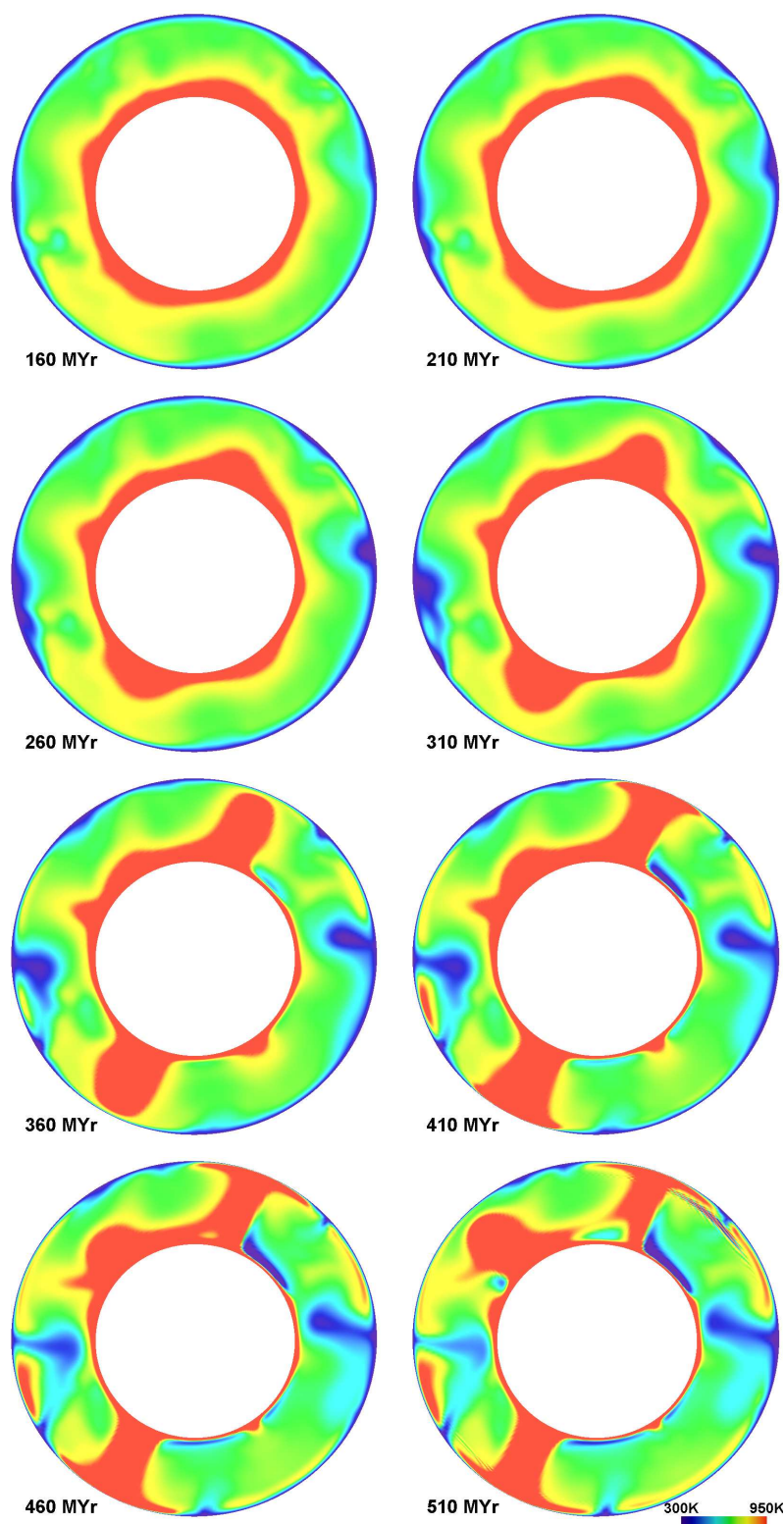
Obrázek 4.20: Časový vývoj výkonových spekter pro model $H10^6-\eta_{10}A$. Jedná se o hloubky 200 km (obr. a), 660 km (obr. b) a 2000 km (obr. c).



Obrázek 4.21: Střední kvadratická hodnota rychlosti v_{RMS} jako funkce času. Červená křivka A odpovídá modelu $H10^6-\eta_{10}A$, zelená křivka B je pro model $H10^6-\eta_{10}B$ a modrá křivka C je pro model $H10^7-\eta_{10}$.

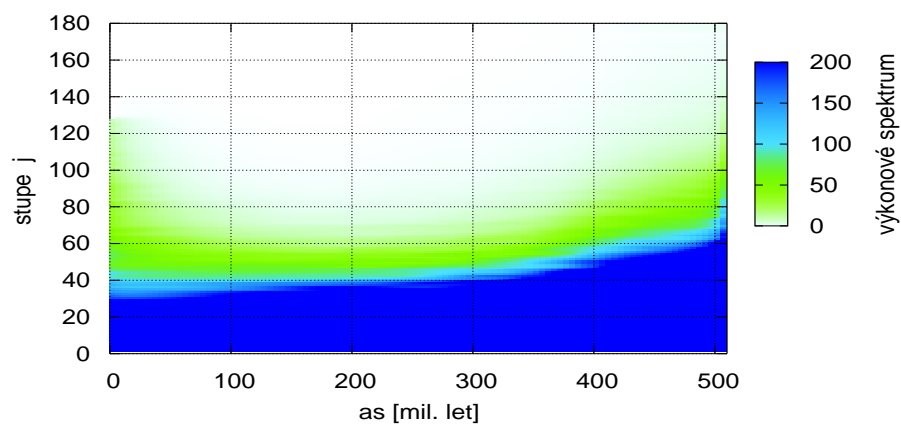
Model $H10^6-\eta_{10}B$

Model má stejné počáteční rozložení teplot jako model $H10^6-\eta_{10}A$ (obr. 4.18), liší se však radiálním rozlišením. Zachovali jsme počet vrstev 120, ale rozlišení až do hloubky 800 km bylo 10 km a v hraniční vrstvě nad rozhraním jádro-plášť (100 km silná vrstva) bylo rozlišení 15 km. Ve zbytku oblasti byly vrstvy silnější (85 km). Časový vývoj teplot v modelu je na obr. 4.22 a časový vývoj střední kvadratické rychlosti je na obr. 4.21, křivka B. Zjemnění radiální diskretizace u povrchu a ve svrchním plášti zřetelně vedlo k numerické stabilizaci výpočtu — simulace probíhala 510 milionů let. Pak se ovšem výpočet opět zhroutil, zřejmě díky stále nedostatečnému rozlišení ve spodním plášti, zejména ve spodní hraniční vrstvě. I tak je ovšem zřejmé, že spektrum anomálií teploty (4.23) se postupně zaplňuje a model $H10^6-\eta_{10}B$ patrně nebude fyzikálně stabilní (ve smyslu zachování dlouhověkého charakteru anomálií).

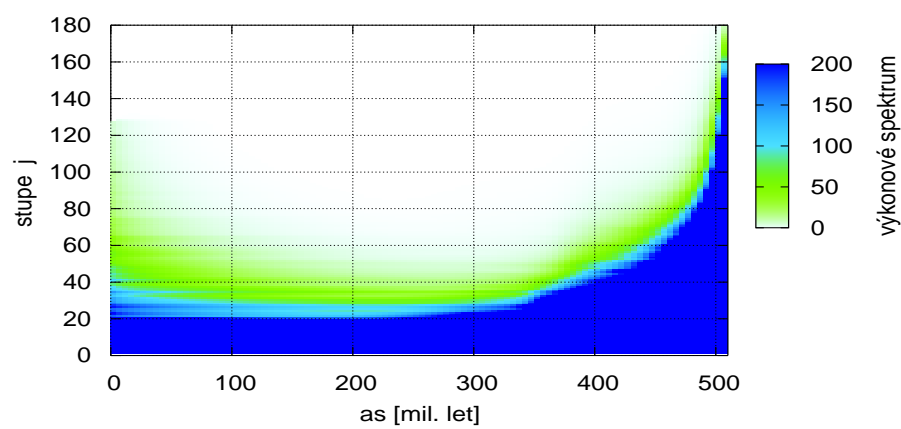


Obrázek 4.22: Časový vývoj rozložení teploty v modelu $H10^6$ - $\eta_{10}B$. Řez nulovým poledníkem.

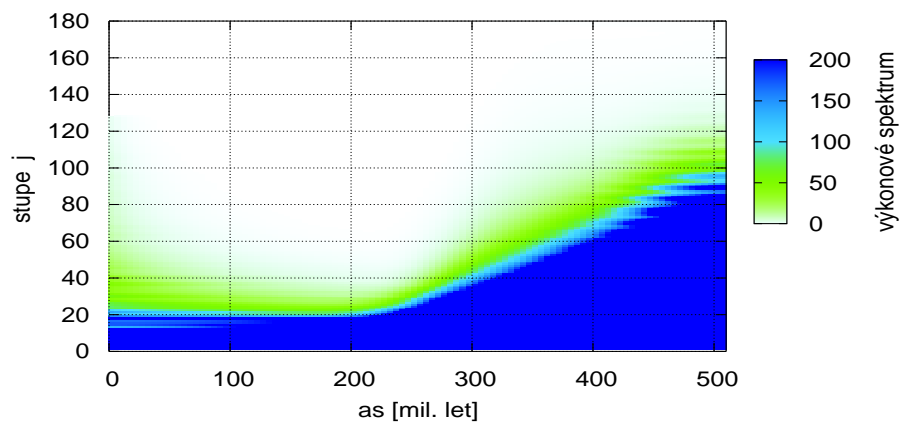
a)



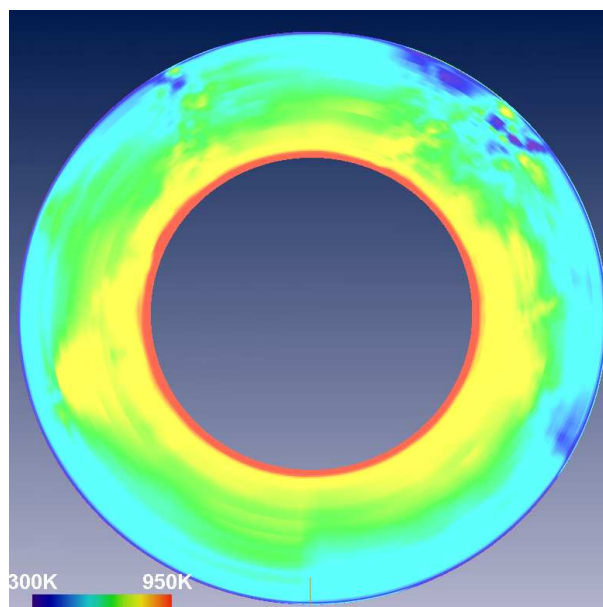
b)



c)



Obrázek 4.23: Časový vývoj rozložení teploty v modelu $H10^6-\eta_{10}B$. Řez nultým poledníkem.

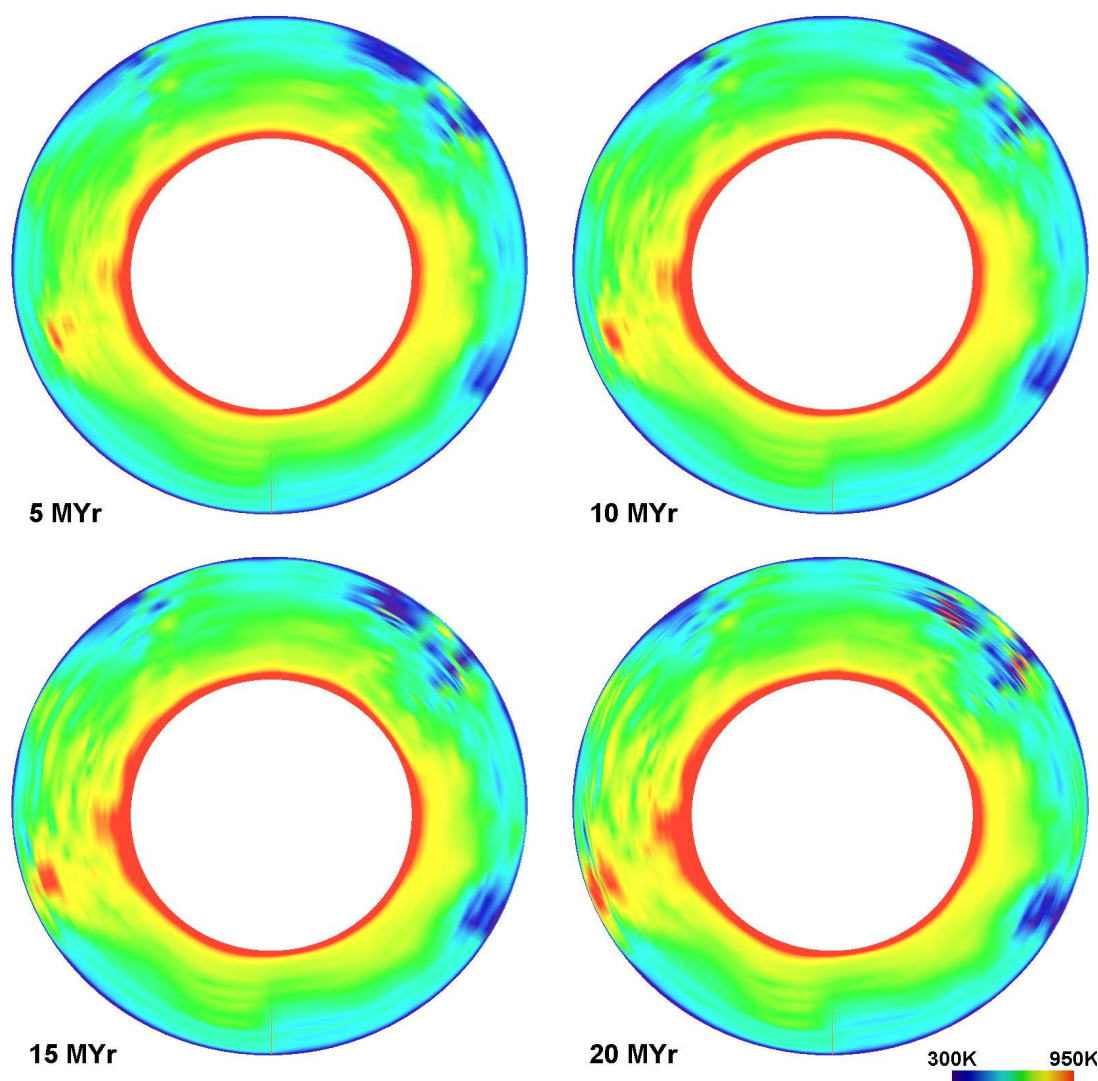


Obrázek 4.24: Počáteční rozložení teploty v modelu $H10^7-\eta_{10}$. Řez na 24. poledníku z.d.

Model $H10^7-\eta_{10}$

Poledníkový řez vstupním rozložením teplot je na obrázku 4.24.

Simulace tohoto modelu trvala 20 milionů let, pak došlo k numerickému zhroucení výpočtu opět zřejmě díky nedostatečnému radiálnímu rozlišení zejména v hraničních vrstvách. Časový vývoj rozložení teplot je na obrázku 4.25 a časový vývoj střední kvadratické rychlosti je na obr. 4.21, křivka C.



Obrázek 4.25: Časový vývoj rozložení teploty v modelu $H10^7-\eta_{10}$. Řez na 24. poledníku z.d.

Kapitola 5

Závěr

Vytvořili jsme podprogram na výpočet součinu vektorů vyjádřených sférickými harmonickými rozvoji. Jeho správnost jsme ověřili pomocí několika testů. Součin lze pomocí tohoto podprogramu vyčíslit přesně do stupně rozvoje 300–320. Výsledný podprogram je přiložen na disketě. Podprogram byl včleněn do třírozměrného konvekčního programu a ten byl pak použit pro simulace v několika jednoduchých modelech. Cílem simulací bylo ověřit stabilitu teplotního rozložení odvozeného na základě seismických tomografických modelů.

Testovali jsme několik modelů ($Ra = 10^6$, $Ra = 10^7$, viskozita konstantní nebo narůstající s hloubkou). Ukázalo se (podle očekávání), že model s nárustem viskozity v hloubce 1000 km je stabilnější, než model s konstantní viskozitou v celém plášti. V modelu $R10^6\eta_1$ odvozeného z dlouhovlnného tomografického modelu (stupeň rozvoje 20) docházelo k rychlému zaplňování spektra i na vyšších harmonických stupních až do maximálního stupně rozvoje (50) a výpočty se záhy numericky hroutily. V modelech $R10^6\eta_{10}$ a $R10^6\eta_{100}$ zůstává spektrum dlouhovlnné po relativně dlouhou dobu (~ 200 milionů let pro nárůst viskozity desetkrát ve spodním plášti; 400 milionů let pro nárůst viskozity stokrát ve spodním plášti). Pak se ale začínou tvořit relativně rychle stoupající plummy, charakter spektra se mění a roste výkon na vyšších harmonických stupních. V případě modelů H s Rayleighovým číslem 10^6 je výsledek podobný u viskozního profilu charakterizovaného desetinasobným nárustem ve spodním plášti. Spektrum zůstává dlouhovlnné po asi 200 milionů let, pak se ale relativně rychle zaplňuje na vyšších harmonických stupních a model tedy není fyzikálně stabilní. V těchto modelech ($H10^6\eta_{10A}$, $H10^6\eta_{10B}$), ale kromě této fyzikální nestability systému pozorujeme nestabilitu numerickou. Ta je pravděpodobně způsobena nedostatečným radiálním rozlišením v hraničních vrstvách nebo příliš rychle se měnící tloušťkou diskretizačních vrstev a vede k numerickému zhroucení výpočtu. Stejný numerický problém se projevuje v případě modelu $H10^7\eta_{10}$. Radiální rozlišení modelů bude ještě potřeba optimalizovat a zároveň důkladně otestovat numerickou stabilitu programu než bude možné vyslovit definitivní závěry o fyzikální stabilitě

modelů.

Dále je třeba říci, že jsme zkoumali jen poměrně úzkou množinu modelů. Na stabilitu modelů může mít vliv řada dalších parametrů. Bylo by vhodné studovat např. větší nárůst viskozity ve spodním plášti, eventuelně postupný nárůst místo skokového, nebo vliv dalších parametrů jako je nárůst termální difusivity nebo pokles koeficientu teplotní roztažnosti. Stabilitu konvekce nepochybně může ovlivnit také eventuelní chemicky odlišná vrstva ve spodním plášti. Skupinu modelů studovaných v této práci bude tedy potřeba ještě podstatně rozšířit, než budeme schopni formulovat robustní závěry o stabilitě či nestabilitě konvekčních modelů odvozených na základě seismického tomografického obrazu pláště.

Dodatek A

Definice sférických harmonických funkcí a vybrané operace s nimi

Skalární sférické harmonické funkce $Y_{jm}(\vartheta, \varphi)$ jsou definovány jako

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad \text{pro } m \geq 0, |m| \leq j, j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.1})$$

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{j|m|}^*(\vartheta, \varphi) \quad \text{pro } m < 0, \quad (\text{A.2})$$

kde * značí komplexní sdružení a $P_{jm}(\cos \vartheta)$ jsou normované přidružené Legendrovy funkce. Skalární sférické harmonické funkce jsou ortonormální přes jednotkovou sféru

$$\int_{\Omega} Y_{jm} Y_{kl}^* d\Omega = \delta_{jk} \delta_{ml}. \quad (\text{A.3})$$

Máme-li funkci $f(\vartheta, \varphi)$ na kouli vyjádřenou jako

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm} Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (\text{A.4})$$

lze s pomocí (A.3) snadno ukázat, že

$$f_{jm} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) Y_{jm}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta. \quad (\text{A.5})$$

Vektorové sférické harmonické funkce jsou definovány jako

$$\mathbf{Y}_{jm}^l(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu=-1}^1 \sum_{\nu=-l}^l C_{l\nu 1\mu}^{jm} Y_{l\nu} Y_{1\nu} \mathbf{e}_{\mu}, \quad (\text{A.6})$$

kde l je přirozené číslo z intervalu $\langle |j - 1|, j + 1 \rangle$, $C_{l\nu 1\mu}^{jm}$ je Clebsch-Gordanův koeficient a \mathbf{e}_μ vektor cyklické báze

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y). \quad (\text{A.9})$$

kde $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ jsou jednotkové vektory ve směrech os kartézské soustavy. Tenzorové sférické harmonické funkce jsou definovány jako

$$\mathbf{Y}_{jm}^{lk}(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu=-l}^l \sum_{\nu=-k}^k C_{l\mu k\nu}^{jm} Y_{l\mu} \mathbf{e}_{k\nu}, \quad (\text{A.10})$$

kde tenzorová báze $\mathbf{e}_{k\nu}$ je definována jako

$$\mathbf{e}_{k\nu} = \sum_{\xi=-1}^1 \sum_{\lambda=-1}^1 C_{1\xi 1\lambda}^{k\nu} \mathbf{e}_\xi \mathbf{e}_\lambda \quad k = 0, 1, 2 \quad (\text{A.11})$$

a $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\lambda$ jsou vektory cyklické báze (A.7)-(A.9). Clebsch-Gordanovy koeficienty jsou různé od nuly pokud platí následující podmínky:

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} \neq 0 \Leftrightarrow m_1 + m_2 = m \quad (\text{A.12})$$

$$|m| \leq j, \quad |m_1| \leq j_1, \quad |m_2| \leq j_2 \quad (\text{A.13})$$

$$\Delta(j, j_1, j_2) \quad (\text{platí trojúhelníková nerovnost}) \quad (\text{A.14})$$

$$j \geq 0, \quad j_1 \geq 0 \quad (\text{A.15})$$

Pro skalární součin dvou vektorových sférických harmonických funkcí platí

$$\mathbf{Y}_{j_1 m_1}^{l_1} \cdot \mathbf{Y}_{j_2 m_2}^{l_2} = (-1)^{j_2 + l_2} \frac{\prod_{j_1 j_2 l_1 l_2}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{jm} \frac{1}{\prod_j} C_{l_1 0 l_2 0}^{j0} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ l_2 & l_1 & 1 \end{matrix} \right\} Y_{jm}, \quad (\text{A.16})$$

kde $\prod_{j_1 j_2 \dots} = \sqrt{2j_1 + 1} \sqrt{2j_2 + 1} \dots$ a $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ l_2 & l_1 & 1 \end{matrix} \right\}$ je Wignerův 6-j symbol.

Podrobnější výklad, definice a tabulky Clebsch-Gordanových koeficientů a Wignerových 6-j symbolů apod. lze nalézt v literatuře např. *Varshalovich a kol.* [1989].

Dodatek B

Popis podprogramu SOUCIN

SOUCIN(*v,gt,koef*)

Podprogram pro výpočet skalárního součinu dvou vektorů daných sférickými harmonickými rozvoji maximálního stupně rozvoje $jmax$.

Vstup:

v, gt

- pole, obsahující sférické harmonické koeficienty vektorů
- koeficienty jsou seřazeny pomocí vektorového sdruženého indexu $invz$
- $v(j, m, l) = v(invz)$, $invz = 3(j(j+1)/2 + m) + l - j$, kde $j = 0, \dots, jmax$, $m = 0, \dots, j$ a $l \in \langle |j-1|, j+1 \rangle$.
- rozměr polí *v, gt*: $3(jmax(jmax+3)/2) + 1$.
- typ polí: complex ve dvojitě přesnosti.

Výstup:

koef

- pole, obsahující sférické harmonické koeficienty výsledného skalárního součinu
- koeficienty jsou seřazeny pomocí skalárního sdruženého indexu ind
- $koef(j, m) = koef(ind)$, $ind = j(j+1)/2 + m + 1$, kde $j = 0, \dots, jmax$, $m = 0, \dots, j$
- rozměr pole *koef*: $jmax(jmax+1)/2 + jmax + 1$
- typ pole: complex ve dvojitě přesnosti

Parametry v podprogramu:

jmax

- maximální stupeň rozvoje vstupních vektorů i výstupního skalárního součinu.
- typ proměnné: integer.

nthsou

- počet uzlů pro Gaussovu-Legendrovu kvadraturu.
- $nthsou > 3/2 jmax$.

— typ proměnné: integer.

nfisou

— počet uzlů pro rychlou Fourierovu transformaci.

— $nfisou > 3jmax$ a zároveň $nfisou$ musí být mocnina dvou.

— typ proměnné: integer.

Poznámka:

Zda jsou parametry $nthsou, nfisou$ zadány správně se nikde v programu netestuje.

SOUCIN volá následující podprogramy:

SLOZKY(jmax,v,cvx,cvy,cvz)

Podprogram pro výpočet sférických harmonických koeficientů kartézských složek vektoru v maximálního stupně rozvoje $jmax$.

Vstupní parametry:

jmax

— maximální stupeň rozvoje.

— typ proměnné: integer.

v

— pole, obsahující sférické harmonické koeficienty rozvoje vektoru — koeficienty jsou seřazeny pomocí vektorového sdruženého indexu $invz$

— $v(j, m, l) = v(invz)$, $invz = 3(j(j+1)/2 + m) + l - j$, kde $j = 0, \dots, jmax$, $m = 0, \dots, j$ a $l \in \{|j-1|, j+1\}$.

— rozměr pole: $3(jmax(jmax+3)/2) + 1$.

— typ pole: complex ve dvojitě přesnosti.

Výstupní parametry:

cvx, cvy, cvz

— pole, obsahující sférické harmonické koeficienty rozvoje kartézských složek v_x, v_y, v_z vektoru v — koeficienty jsou seřazeny pomocí skalárního sdruženého indexu ind

— $cvx(j, m) = cvx(ind)$, $ind = j(j+1)/2 + m + 1$, kde $j = 0, \dots, jmax$, $m = 0, \dots, j$.

— rozměr polí: $jmax(jmax+1)/2 + jmax + 1$.

— typ polí: complex ve dvojitě přesnosti.

FOUR1, GAULEG

Podprogramy pro výpočet rychlé diskrétní Fourierovy transformace a k napočtení uzlů a vah pro Gaussovu-Legendrovu integraci [Press a kol., 1992].

CLEB1

Program pro výpočet Clebsch-Gordanových koeficientů $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$ pro $j_2 = 1$. Autorem programu je O. Čadek.

DPNM

Slouží pro výpočet plně normalizovaných přidružených Legendrových funkcí. Autorem je Z. Martinec.

Literatura

Becker T. W., Boschi L., A comparison of tomographic and geodynamic mantle models, *Geochemistry Geophysics Geosystems* 3, art. no. 1003, 2002.

Bunge H.-P., Richards M. A., Baumgardner J. M., Effect of depth dependent viscosity on the platform of mantle convection, *Nature*, 379, 436-438, 1996.

Bunge H.-P. and M. A. Richards, The origin of long-wavelength structure in mantle convection: Effect of plate motions and viscosity stratifications, *Geophys. Res. Lett.*, 23, 2987-2990, 1996.

Čížková H., Čadek O., Effect of viscosity interface at 1000 km depth on mantle convection, *Studia geoph. et geod.*, 41, 297-306, 1997.

Davies G. F., Role of the lithosphere in mantle convection, *J. Geophys. Res.*, 93, 10451-10466, 1988.

Fornberg B., Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids, *Math. Comput.*, 51, 699-706, 1988.

Gurnis M., Zhong S., Generation of long-wavelength heterogeneity in the mantle by dynamic interaction between plates and convection, *Geophys. Res. Lett.*, 18, 581-584, 1991.

Hofmeister A. M., Dependence of diffusive radiative transfer on grain-size, temperature, and Fe-content: Implications for mantle processes, *Journal of Geodynamics* 40, 51-72, 2005.

Chopelas A., Boehler R., Thermal expansivity in the lower mantle, *Geophys. Res. Lett.* 19, 1983-1986, 1992.

Karason H., van der Hilst R. D., Tomographic imaging of the lowermost mantle with differential times of refracted and diffracted core phases (PKP, P-diff), *Journal of Geophysical research - solid Earth* 106 (B4), 6569-6587, 2001.

Kývalová H., *Fázové přechody a dynamika pláště Země*, diplomová práce, MFF UK, Praha, 1994.

Martinez Z., Program to calculate the spectral harmonic expansion coefficients of the two scalar fields product, *Comput. Phys. Commun.* 54, 177-182, 1989.

Matyska C., Axisymmetry of mantle aspherical structures, *Geophys. Res. Lett.*, 4, 521-524, 1995.

Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., *Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing*, Cambridge University Press, 1992.

Ritsema J., van Heijst H. J., Woodhouse J. H., Complex shear wave velocity structure imaged beneath Africa and Iceland, *Science* 286 (5446), 1925-1928, 1999.

Su W.-J., Woodward R. L., Dziewonski A. M., Degree 12 model of shear velocity heterogeneity in the mantle, *J. Geophys. Res.*, 99, 6945–6980, 1994.

Tackley P. J., Stevenson D. J., Glatzmaier G. A., Schubert G., Effects of an endothermic phase transition at 670 km depth on spherical model of convection in Earth's mantle, *Nature*, 361, 699–704, 1993.

Varshalovic D. A., Moskalev A. N., and Khersonskii V. K., *Quantum theory of angular momentum*, World Scientific Publ., Singapore, 1989.

Velínský J., *Electromagnetic Induction in a Heterogeneous Earth's Mantle: Time-Domain Modelling*, doktorská práce, MFF UK, Praha, 2003.