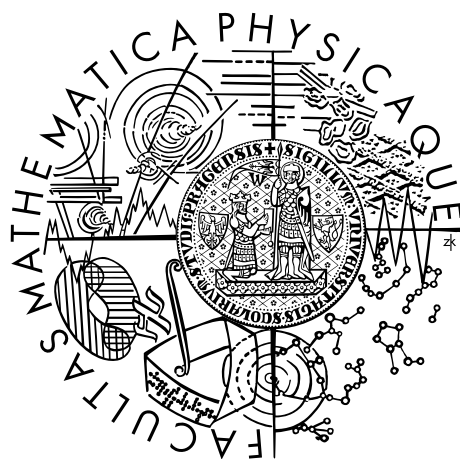


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Tomáš Pergler

Postseismická relaxace modelů Země
s maxwellovskou reologií

Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Studijní program: Matematické a počítačové modelování ve fyzice a v technice

Chtěl bych na tomto místě poděkovat vedoucímu své diplomové práce Doc. RNDr. Ctiradu Matyskovi, DrSc. za jeho velkou podporu a odbornou pomoc, bez které by tato práce nebyla vznikla, a současně za jeho trpělivost a ochotu při zodpovídání mých nesčetných dotazů. Dále bych rád poděkoval Mgr. Milanu Pokornému, Ph.D. za jeho dobře mířené rady, podněty a čas věnovaný dlouho trvajícím diskuzím, které mně velice pomohly při tvorbě zde používaného matematického aparátu. Také bych chtěl poděkovat Mgr. Jaroslavu Hronovi, Ph.D., který mně nejen poskytl svůj numerický kód, ale zároveň velmi pomohl při jeho adaptaci k účelům této práce. Nakonec bych chtěl poděkovat Mgr. Liboru Inoveckému, který při práci na svém diplomovém úkolu spolupracoval také se mnou, především na úpravě užívaného kódu. Tato práce byla částečně podporována z grantu Karlovy University, vedeného pod číslem 238/2001/B-GEO/MFF.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 16. 4. 2004

Tomáš Pergler

Obsah

1	Úvod	6
2	Rovnice popisující deformace Země	7
2.1	Pohybová rovnice	7
2.2	Reologické vlastnosti	7
3	Formulace problému	8
3.1	Elastický problém	9
3.2	Viskoelastický problém	10
3.3	Vlnový problém	11
4	Slabá formulace problému	11
4.1	Elastický případ	11
4.2	Existence a jednoznačnost řešení elastického problému	15
4.3	Viskoelastický problém	17
4.4	Existence a jednoznačnost řešení viskoelastického problému	19
4.5	Vlnový problém	25
4.6	Existence a jednoznačnost řešení vlnového problému	26
5	Spektrální rozklad 3D problému	34
5.1	Fourierova transformace	35
5.2	Elastický problém	35
5.3	Časově závislé problémy	37
6	Funkce popisující skluz na zlomu	37
6.1	2D případ	37
6.2	3D případ	39
6.3	Funkce pro vlnový problém	41
7	Numerické metody	41
7.1	Metoda konečných prvků	41
7.2	Diskretizace Fourierovy transformace	42
7.3	Časová diskretizace	44
7.4	Praktická implementace	45
8	Geofyzikální modely	45
8.1	Testovací úloha ve 2D	45
8.2	2D/3D test	48
8.3	Zemětřesení Kanto 1923	49

8.4	Elastický model ve 3D	51
8.5	Viskoelastický 2D test	54
8.6	Coulombovo napětí	56
8.7	Lefkada a Cephalonia	58
8.8	Vlnový 2D model	60
9	Závěr	63
A	Pomocná lemmata	64
	Literatura	65

Název práce: Postseismická relaxace modelů Země s maxwellovskou reologií

Autor: Tomáš Pergler

Katedra (ústav): Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc., Katedra geofyziky

e-mail vedoucího: cm@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: Věnujeme se modelování následků tektonického skluzu podél zlomu mezi litosférickými deskami. Nejprve jsou uvedeny rovnice popisující malé deformace Země a rovnice zahrnující elastickou a viskoelastickou reologii. Jsou odvozeny jejich slabé formulace a dokázána existence a jednoznačnost řešení. Posléze je komentována numerická realizace zahrnující především metodu konečných prvků, Fourierovu transformaci a popis funkce aproximující skluz. Druhá část je věnována počítačovým simulacím pro různé geofyzikální modely. Nejprve je uvedeno porovnání dosažených výsledků s jinými pracemi a následně jsou prezentovány reálné modely, jako například výsledné povrchové posunutí při japonském zemětřesení, nebo určování Coulombova napětí v oblasti řeckých ostrovů. Závěr je věnován modelům popisujícím šíření zemětřesných vln. Výsledky ve formě filmů lze nalézt na přiloženém CD.

Klíčová slova: tektonické zemětřesení, viskoelastická, slabá formulace, metoda konečných prvků, spektrální rozklad, 2D a 3D modely, Coulombovo napětí.

Title: Postseismic Relaxation of the Earth's Models Described by Maxwell Rheology

Author: Tomáš Pergler

Department: Institute of Mathematics

Supervisor: Doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc., Department of Geophysics

Supervisor's e-mail address: cm@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: The work is dedicated to modelling of the impact of a tectonic slip along a fault between lithospheric plates. First, we introduce the equations describing the Earth's infinitesimal deformations and the equations containing elastic and viscoelastic rheological models. Next, their weak formulation is derived and the existence and uniqueness of solution is proved. Further on, we comment the numerical implementation, which involved mainly the finite element method, the Fourier transform and the function approximating the rupture. In the second part, we discuss the performed computer simulations for various geophysical models. Obtained results are compared with those found in the literature. We also present some realistic models, like surface displacement for the Japanese earthquake, or calculation of Coulomb's stress in the region of Greek islands. The model describing the propagation of seismic waves is noted at the end. Results in the form of movies can be found on the enclosed CD.

Keywords: tectonic earthquake, viscoelasticity, weak formulation, finite element method, spectral decomposition, models in 2D and 3D, Coulomb stress.

1 Úvod

V této práci se zabýváme modelováním následků skluzu podél zlomu mezi litosférickými deskami, tzn. řešíme otázku, jak ovlivní deformaci Země vzájemný pohyb dvou horninových bloků. Tyto pohyby vytvářejí tektonická zemětřesení a vyskutují se především na rozhraní desek, které se vůči sobě v geologické minulosti pohybovaly. Existuje mnoho různých kritérií pro stanovení toho, zda na místě oddělujícím tyto desky může dojít v budoucnosti k zemětřesení, tyto záležitosti jsou však předmětem seismotektonických studií a my se jim zde nebudeme věnovat.

Pozornost obrátíme na úlohu, kde z pozorování seismických vln známe informace o poloze a síle zemětřeseného ohniska a dále se zabýváme důsledky takového porušení zlomu, tj. jaké je výsledné posunutí a rozložení vzniklého napětí v oblasti okolí zlomu. Tyto veličiny studujeme nejprve pomocí elastického přístupu a následně se věnujeme viskoelastické relaxaci těchto hodnot, tj. změnám posunutí a napětí v čase s ohledem na velká časová měřítká. Budeme se také zabývat časovým vývojem samotného zemětřesení v měřítkách řádově vteřin, nicméně v tomto seismologickém problému si neklademe za cíl diskutovat správnost výsledků, ale pouze ukázat možnost modelovat tento případ použitím zde uvedených metod.

Pro výpočty jsou v geofyzikálních pracích hojně použity metody založené na spektrálních rozkladech (uveďme například články [10] a [11]), neboť jsou vhodné při uvažování sféricky symetrických vlastností Země. Pokud se zabýváme lokálními problémy, kde již není nutné uvažovat zakřivení Země, ale naopak je dobré rozlišit konkrétní místa s odlišnými vlastnostmi materiálu, je rozumné použití metody konečných prvků. Časté je také kombinování obou těchto metod mnoha různými způsoby (např. [3]). My jsme zde k výpočtům zvolili použití konečných prvků na 2D oblasti v kombinaci s Fourierovou transformací přes třetí rozměr.

Práce prochází postupně všechny potřebné části k dosažení spolehlivých numerických výsledků. Nejprve ukážeme rovnice popisující chování Země, a přitom prodiskutujeme jaké fyzikální vlivy uvažujeme a které zanedbáváme. V matematické části odvodíme slabou formulaci zadaných problémů, a pro všechny postupně dokážeme existenci a jednoznačnost řešení. Zmíníme se o dílčích částech práce, které byly užity k numerickým výpočtům, což zahrnuje především metodu konečných prvků, Fourierovu transformaci, časovou diskretizaci, zvolení aproximace skluzu na zlomu a konečně i samotnou praktickou implementaci problémů. Dále se věnujeme porovnání dosažených výsledků s hodnotami, které jsou uváděny ve standardních geofyzikálních textech a většinou jsou počítány odlišnými metodami. Na závěr jsou prezentovány výsledky zajímavé z geofyzikálního pohledu, jmenujme například výsledné povrchové posunutí při reálných zemětřeseních, nebo určení Coulombova napětí v oblasti řeckých ostrovů.

2 Rovnice popisující deformace Země

Ještě než přejdeme ke konkrétně zadaným problémům, věnujme se nejprve rovnicím popisujícím chování Země. Předem určíme, jaké jevy jsou pro řešení naší úlohy podstatné, a které můžeme případně zanedbat. Země jako deformovaný materiál má své specifické vlastnosti, je to předpjaté a sebegravitující těleso, čímž vyjadřujeme, že ještě než začneme přidávat jakékoli síly, je zde již nějaké nenulové rozložení napětí. My se zajímáme pouze o posunutí a změny napětí vůči tomuto stavu Země, přičemž tyto změny uvažujeme jako infinitesimální v porovnání s těmi původními.

2.1 Pohybová rovnice

Věnujme se nejprve pohybové rovnici, jejíž odvození je uvedeno například v knize [1] nebo také v článku [2]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho_0 [\nabla \varphi_1 + 2\boldsymbol{\omega} \times \partial_t \mathbf{u} + \partial_{tt} \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) g_0 \mathbf{e}_r + \nabla (g_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r)] = 0, \quad (2.1)$$

kde značíme infinitesimální posunutí \mathbf{u} , přírůstkové napětí $\boldsymbol{\tau}$ a gravitační potenciál φ_1 . Dále vystupující koeficienty jsou hustota Země ρ_0 , gravitační zrychlení g_0 , úhlová frekvence otáčení Země $\boldsymbol{\omega}$ a vektor směřující od středu Země \mathbf{e}_r .

Jako standardní podmínka rovnováhy poskytuje rovnice vztah mezi změnou napětí a ostatními silami a nyní si je přiblížíme po jednotlivých členech. Vliv přidané síly na rozložení gravitačního pole Země vyjadřuje $\nabla \varphi_1$ a v porovnání s ostatními silami je velice nepatrný, proto tento člen v dalším neuvádíme. Na Zemi, jakožto na otáčejícím se tělese, působí zároveň odstředivé síly, které jsou ukryty v dalším členu rovnice, dosahují ale opět zanedbatelné velikosti a v našem problému je není třeba uvažovat. Následuje člen obsahující setrvačné síly, a pokud je uvažován, odpovídá za vlnové chování řešení. Poslední dva členy vyjadřují již zmiňované předpětí Země jako sebegravitujícího tělesa a my je budeme do rovnic zahrnovat, nicméně z numerických výpočtů je zřejmé, že mají velice malý vliv na výsledky.

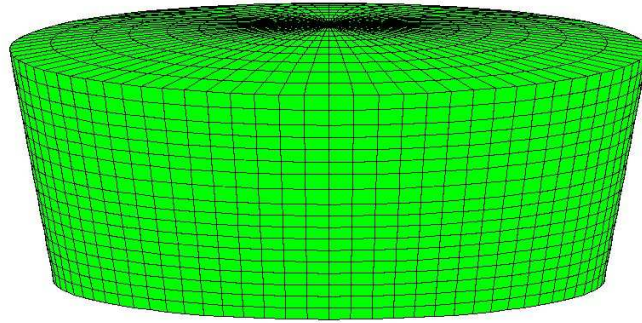
2.2 Reologické vlastnosti

K uvedené pohybové rovnici ještě přidáme vztah popisující chování Země z hlediska jejích materiálových vlastností. V úvahu lze vzít dva možné reologické modely. Prvním je Hookeův zákon vyjadřující elastické chování

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

a druhým možným přístupem je použití časově závislé maxwellovské reologie popisující viskoelastické chování Země

$$\partial_t \boldsymbol{\tau} - \partial_t [\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] + \frac{\mu}{\eta} [\boldsymbol{\tau} - K (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] = 0, \quad (2.3)$$



Obr. 1: Realisticky zakřivený válcový výřez Země s poloměrem 1000km a výškou 1000km.

který je empiricky odvozený ze zaznamenaných dat RSL (relative sea level).

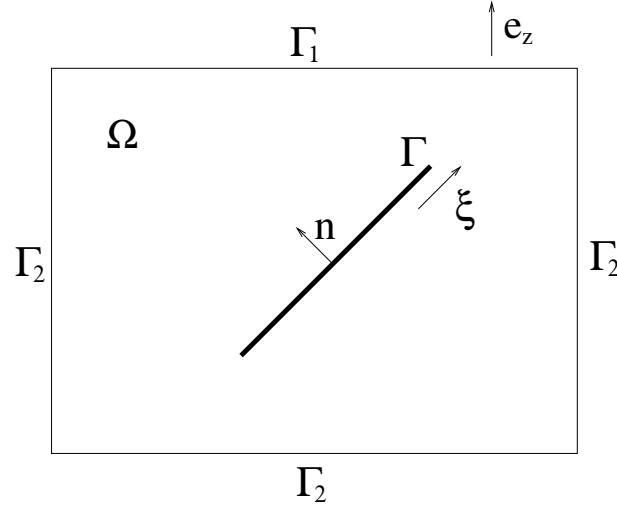
V rovnicích vystupují Laméovy koeficienty λ a μ , objemový modul stlačitelnosti $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ jako jejich lineární kombinace a dynamická viskozita η . Tensor malých deformací $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ je definován takto

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.4)$$

3 Formulace problému

Zabýváme se elastickým a viskoelastickým chováním Země v případě, že na rozhraní dvou litosférických desek vznikne seismoaktivní zlom. Ten je tvořen rozdrčenými úlomky sousedících bloků, ale vzhledem k jeho délce a hloubce je jeho tloušťka tak malá, že budeme hovořit o zlomové ploše. Dále si popíšeme oblast, na níž budeme zadané problémy řešit. Rozměry uvažované zlomové plochy nepřesahují ani při velkých zemětřeseních řádově desítky kilometrů, tudíž jako výpočetní oblast můžeme volit výřez Země o rozměrech několika set kilometrů. V těchto měřítkách mají křivočaré souřadnice jen velice nepatrný vliv na výpočet, a proto budeme toto zakřivení zanedbávat a uvažovat oblasti s kartézskými souřadnicemi ve tvaru obdélníku ve 2D a kvádru ve 3D. Pro ilustraci zakřivení Země je přiložen obrázek 1, který ukazuje realistické úhly na vyříznutém válci o poloměru 1000km.

Dále zformulujeme jednotlivé řešené problémy, přičemž u každého z nich uvedeme uvažované tvary rovnic a příslušné okrajové a počáteční podmínky.



Obr. 2: Řez 3D oblastí Ω . Hranice Γ_1 označuje povrch Země, Γ_2 jsou hranice uvnitř Země a Γ vymezuje zlom.

3.1 Elastický problém

Zabýváme se řešením rovnic

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_0 [(\nabla \cdot \mathbf{u})g_0 \mathbf{e}_z - \nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u})] = 0 \quad \text{v } \Omega \quad (3.1a)$$

$$\boldsymbol{\tau} - \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{v } \Omega \quad (3.1b)$$

pro neznámý vektor posunutí $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ a symetrický tenzor napětí $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená a s lipschitzovskou hranicí. Vektor \mathbf{e}_z značí konstantní jednotkový vektor ve směru souřadnice z , kterým jsme nahradili původně proměnný vektor \mathbf{e}_r . Všechny parametry rovnic jsou závislé pouze hloubkově tj. na souřadnici z .

Na hranici oblasti Ω , rozdělené na části Γ_1 a Γ_2 (viz. obrázek 2), zadáváme okrajové podmínky

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1 \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{na } \Gamma_2, \quad (3.2b)$$

kde \mathbf{n} je vektor vnější normály k $\partial\Omega$ a množiny Γ_1 a Γ_2 jsou neprázdné a otevřené vzhledem k $\partial\Omega$.

Následují podmínky na zlom uprostřed oblasti

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{na } \Gamma \quad (3.3a)$$

$$[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{na } \Gamma \quad (3.3b)$$

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}) - (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = \mathbf{f}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{na } \Gamma, \quad (3.3c)$$

kde $\boldsymbol{\xi}$ značí souřadnice na ploše zlomu a vektor \mathbf{n} je zde normála k vnitřní hranici Γ .

Na obrázku 2 je znázorněn řez uvažované 3D oblasti Ω . Na vrchní hranici Γ_1 , vyznačující povrch Země, vyjadřuje okrajová podmínka nulové zatížení a vzhledem k tomu, že zde není podmínka na posunutí, jedná se o volnou hranici. Na části hranice Γ_2 naopak požadujeme pouze podmínku na nulovost posunutí, což můžeme ospravedlnit dostatečnou velikostí oblasti bez zpětného vlivu na zlom.

Další podmínky jsou zadané na hranici Γ , která je uvnitř oblasti a vyznačuje umístění zlomu. Zde je kromě spojitosti normálového napětí a normálového posunutí zadána nespojitost tečné složky posunutí pomocí funkce \mathbf{f}_Γ . Ta vyjadřuje tvar a velikost zlomu a je to jediný nenulový vstup naší úlohy.

3.2 Viskoelastický problém

V tomto případě uvažujeme stejnou pohybovou rovnici, ale měníme reologii na maxwellovskou:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_0 [(\nabla \cdot \mathbf{u})g_0 \mathbf{e}_z - \nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u})] = 0 \quad \text{v } \Omega \times I \quad (3.4a)$$

$$\partial_t \boldsymbol{\tau} - \partial_t [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] + \frac{\mu}{\eta} [\boldsymbol{\tau} - K(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}] = 0 \quad \text{v } \Omega \times I, \quad (3.4b)$$

kde jsou nyní neznámé posunutí $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ a napětí $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ časově závislé, naproti tomu všechny koeficienty ρ_0 , g_0 , λ , μ , K a η jsou uvažovány časově nezávislé. Pro $T > 0$ je $I = [0, T]$ časový interval.

Dále jsou zadány počáteční podmínky

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{v } \Omega \quad (3.5a)$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad (3.5b)$$

okrajové podmínky

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1 \times I \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{na } \Gamma_2 \times I \quad (3.6b)$$

a podmínky na zlom

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{na } \Gamma \times I \quad (3.7a)$$

$$[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{na } \Gamma \times I \quad (3.7b)$$

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = \mathbf{f}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{na } \Gamma \times I. \quad (3.7c)$$

Tento problém popisuje chování Země od momentu, kdy se vytvoří skluz, do nějaké charakteristické doby zrelaxování vzniklých napětí a posunutí. Trvání relaxace je v řádu deseti tisíců let, a proto zde můžeme zanedbat samotný průběh skluzu, který při zemětřesení vznikne v několika vteřinách. Zároveň ale tento skluz neuvažujeme v počátečních podmínkách, neboť k němu dojde až v průběhu výpočtu.

3.3 Vlnový problém

Zde již nezanedbáváme setrvačný člen v pohybové rovnici a pro popis vlastností materiálu používáme Hookeův zákon. Vzhledem k časovým měřítkům (řádově vteřiny) by zde uvažování maxwellovské reologie nemělo vliv na výsledky.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho_0 \partial_{tt} \mathbf{u} + \rho_0 [(\nabla \cdot \mathbf{u}) g_0 \mathbf{e}_z - \nabla (g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u})] = 0 \quad \text{v } \Omega \times I \quad (3.8a)$$

$$\boldsymbol{\tau} - \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{v } \Omega \times I, \quad (3.8b)$$

kde neznámé jsou opět posunutí $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ a napětí $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$.

Zadání doplňují počáteční podmínky

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{v } \Omega \quad (3.9a)$$

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad (3.9b)$$

okrajové podmínky

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1 \times I \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{na } \Gamma_2 \times I \quad (3.10b)$$

a podmínky na zlom

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{na } \Gamma \times I \quad (3.11a)$$

$$[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = 0 \quad \text{na } \Gamma \times I \quad (3.11b)$$

$$[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}]_{\pm}^{\pm} = \mathbf{f}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}, t) \quad \text{na } \Gamma \times I. \quad (3.11c)$$

Koeficienty rovnic jsou uvažovány i v tomto případě časově nezávislé, nicméně funkce popisující skluz na zlomu je zde již v čase proměnná.

4 Slabá formulace problému

Odvodíme slabé formulace všech tří problémů, přičemž nejpodrobněji se budeme zabývat elastickým problémem, kde si vyjasníme jak zacházet s podmínkou uprostřed oblasti, a pro časové problémy pouze upřesníme tvary uvažovaných rovnic. Tyto formulace jsme v dalším použili nejen k důkazu existence a jednoznačnosti, ale zároveň byly aplikovány v metodě konečných prvků.

4.1 Elastický případ

Nyní přistupme ke slabé formulaci elastického problému. Nejprve uvedeme formální postup, jak dospět k slabé formulaci, a dále ukážeme zpětnou interpretaci, že jsou zahrnuty všechny rovnice a okrajové podmínky.

Vezmeme pohybovou rovnici (3.1a), vynásobíme ji testovací funkcí \mathbf{U} z prostoru

$$\tilde{V} \equiv \left\{ \mathbf{v} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^3; \mathbf{v}|_{\Gamma_2} = 0 \right\}, \quad (4.1)$$

a integrujeme přes oblast Ω

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{U} \, dx + \int_{\Omega} \rho_0 [(\nabla \cdot \mathbf{u})g_0 \mathbf{e}_z - \nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u})] \cdot \mathbf{U} \, dx = 0. \quad (4.2)$$

Upravíme první člen rovnice pomocí metody per partes a zároveň využijeme symetrie tenzoru napětí $\boldsymbol{\tau}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{U} \, dx &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i} \tau_{ij} U_j \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} \partial_{x_i} U_j \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} \, dS \\ &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{U} \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} \, dS = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} \, dS. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Původní rovnice nyní nabývá tvaru

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx + \int_{\Omega} \rho_0 [(\nabla \cdot \mathbf{u})g_0 \mathbf{e}_z - \nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u})] \cdot \mathbf{U} \, dx \\ &+ \int_{\Gamma_1} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} \, dS + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} \, dS + \int_{\Gamma_2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{U} \, dS = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde první hraniční integrál vymizí díky okrajové podmínce (3.2a), druhý pomocí (3.3b) a nulovost posledního hraničního integrálu plyne z volby prostoru pro \mathbf{U} .

Dosadíme za $\boldsymbol{\tau}$ z hookeovské reologie (3.1b)

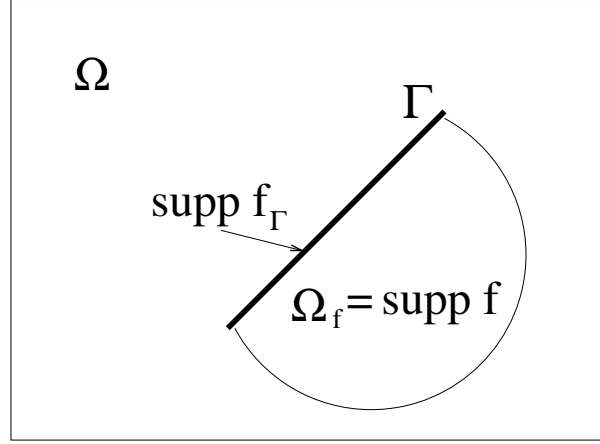
$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx + \int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{U}) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \rho_0 [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{U} \, dx = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Vzhledem k předpokládané nespojitosti řešení uprostřed oblasti rozdělíme hledanou funkci \mathbf{u} na dvě části

$$\mathbf{u} \equiv \begin{cases} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f} & \Omega_f \\ \bar{\mathbf{u}} & \Omega_f^C = \Omega \setminus \bar{\Omega}_f, \end{cases} \quad (4.6)$$

kde $\Omega_f \subset \bar{\Omega}_f \subset \Omega$ je oblast nenulové míry, umístěná na jedné straně zlomu a její konkrétní tvar zůstává na naší volbě. Funkce \mathbf{f} musí splňovat

$$T_{\Gamma} \mathbf{f} = \mathbf{f}_{\Gamma} \quad \wedge \quad T_{\partial\Omega_f \setminus \Gamma} \mathbf{f} = 0, \quad (4.7)$$

Obr. 3: Oblast Ω a umístění nosiče funkce f označovaného jako Ω_f .

nicméně konkrétní volba je opět na nás. T značí operátor stopy. Poznamenejme, že první požadavek zde zaručuje splnění podmínky (3.3c) a zároveň, pokud tuto podmínku vynásobíme normálovým vektorem \mathbf{n} , dostaneme také platnost (3.3a).

Dostáváme tedy tvar slabé formulace pro pohybovou rovnici

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx + \int_{\Omega} \lambda (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) (\nabla \cdot \mathbf{U}) \, dx \\
& + \int_{\Omega} \rho_0 [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \bar{\mathbf{u}}) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{U} \, dx \\
& = - \int_{\Omega_f} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx - \int_{\Omega_f} \lambda (\nabla \cdot \mathbf{f}) (\nabla \cdot \mathbf{U}) \, dx \\
& - \int_{\Omega_f} \rho_0 [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{f}) - (\nabla \cdot \mathbf{f}) g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{U} \, dx \quad \forall \mathbf{U} \in \tilde{V}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Zde je ještě vhodné poznamenat, že i když $\bar{\mathbf{u}}$ závisí na naší volbě funkce \mathbf{f} , tedy $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{f})$, pro výsledné posunutí již platí $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{f}_\Gamma)$. Toto tvrzení o jednoznačnosti \mathbf{u} ještě později dokážeme.

Po koeficientech rovnic požadujeme, aby patřily do následujících prostorů:

$$\mu, \lambda, \rho_0 \in L^\infty(\Omega), \quad g_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) \tag{4.9}$$

Abychom učinili zápis rovnic více přehledným, zavedeme následující označení.

Definice 4.1 Zdefinujme prostor V

$$V \equiv \left\{ \mathbf{v} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3; \mathbf{v}|_{\Gamma_2} = 0 \right\}, \tag{4.10}$$

na něm bilineární formy

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv \int_{\Omega} [2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V}) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{U})(\nabla \cdot \mathbf{V})] \, dx \quad (4.11a)$$

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv \int_{\Omega} \rho_0 [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{U}) - (\nabla \cdot \mathbf{U})g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{V} \, dx \quad (4.11b)$$

a lineární formu

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{U}) \equiv & - \int_{\Omega_f} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx - \int_{\Omega_f} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{f})(\nabla \cdot \mathbf{U}) \, dx \\ & - \int_{\Omega_f} \rho_0 [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{f}) - (\nabla \cdot \mathbf{f})g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{U} \, dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Definice 4.2 Řekneme, že funkce $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$ je slabým řešením pohybové rovnice (3.1a), pokud

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &\in V \\ \mathbf{f} &\in [W^{1,2}(\Omega_f)]^3 \text{ splňuje podmínky (4.7)} \end{aligned}$$

a je splněna rovnice

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) = F_1(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in V. \quad (4.14)$$

Nyní provedeme ověření správnosti slabé formulace (4.8) zpětnou interpretací jednotlivých členů. Do této rovnice nejprve dosadíme testovací funkce $\mathbf{U} \in [\mathcal{C}_0^\infty(\Omega_f)]^3$ a $\mathbf{U} \in [\mathcal{C}_0^\infty(\Omega_f^C)]^3$ a po převedení derivací pomocí metody per partes, postupnou volbou nosičů těchto testovacích funkcí, dostáváme platnost zadané pohybové rovnice skoro všude. Nyní budeme uvažovat testovací funkce $\mathbf{U} \in V$ a z hraničního integrálu přes Γ_1 , který vznikne při integraci per partes na oblasti Ω_f^C , vyplývá podmínka $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$ na Γ_1 . Pomocí testovacích funkcí ze stejného prostoru, postupně dosazovaných do hraničního integrálu přes zlom Γ , dále získáváme platnost podmínky $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}]_+^+ = 0$ na Γ . Spolu s vlastnostmi funkce \mathbf{f} (4.7) a volbou prostoru V pro testovací funkce \mathbf{U} je nyní zřejmé, že slabá formulace obsahuje všechny okrajové podmínky. Interpretovali jsme tedy zpětně náš původní elastický problém.

Z rovnice pro hookeovskou reologii můžeme dopočítat napětí $\boldsymbol{\tau}$, pro které bude platit

$$\boldsymbol{\tau} \in P \equiv \left\{ \mathbf{A} \in [L^2(\Omega)]^{3 \times 3}; \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \right\}. \quad (4.15)$$

Kromě standardního skalárního součinu (\cdot, \cdot) a normy $\|\cdot\|_2$ na $L^2(\Omega)$ si ještě zdefinujme dále užívané značení:

Definice 4.3 Na Hilbertových prostorech V a P definujeme skalární součiny

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_V \equiv \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} U_i V_i \, dx + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \partial_{x_j} U_i \, \partial_{x_j} V_i \, dx \quad (4.16a)$$

$$(\mathcal{T}, \mathcal{S})_P \equiv \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} T_{ij} S_{ij} \, dx \quad (4.16b)$$

s odpovídajícími normami $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{1,2,\Omega}$ a $\|\cdot\|_P = \|\cdot\|_{2,\Omega}$.

4.2 Existence a jednoznačnost řešení elastického problému

Myšlenku důkazu jsem převzal z diplomové práce L.Inoveckého [5], kde jsou ale rovnice uvažovány s rozdílnými okrajovými podmínkami a v závislosti na nich se proto změnila i předpoklady existenční věty.

Důkaz provedeme pro slabou formulaci (4.14). Pomocí Lax-Milgramova lemmatu (viz. Dodatek A) dokážeme existenci pro $\bar{\mathbf{u}}$, které bude jednoznačně určeno pro danou funkci \mathbf{f} . Následně doplníme důkaz tvrzení, že řešení \mathbf{u} již na tomto libovolném dodefinování funkce zlomu \mathbf{f} nezávisí a je tedy jednoznačné pro zadané \mathbf{f}_{Γ} .

Pro použití Lax-Milgramova lemmatu potřebujeme ukázat omezenost a elipticitu bilineárních forem a také omezenost pravé strany. Použitím základních nerovností

$$\|\nabla \cdot \mathbf{U}\|_2^2 \leq 3 \|\nabla \mathbf{U}\|_2^2, \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{U}\|_2 \quad \forall \mathbf{U} \in V \quad (4.17)$$

a přidáním Hölderovy nerovnosti dostaneme omezenost $a(\cdot, \cdot)$ a $b(\cdot, \cdot)$

$$|a(\mathbf{U}, \mathbf{V})| \leq (2 \|\mu\|_{\infty} + 3 \|\lambda\|_{\infty}) \|\mathbf{U}\|_V \|\mathbf{V}\|_V =: \|a\| \|\mathbf{U}\|_V \|\mathbf{V}\|_V \quad (4.18a)$$

$$|b(\mathbf{U}, \mathbf{V})| \leq (1 + \sqrt{3}) \|\rho_0\|_{\infty} \|g_0\|_{1,\infty} \|\mathbf{U}\|_V \|\mathbf{V}\|_2 =: \|b\| \|\mathbf{U}\|_V \|\mathbf{V}\|_2, \quad (4.18b)$$

kde jsme zadefinovali $\|a\|$ a $\|b\|$ jako lineární kombinace norem koeficientů.

Omezenost pravé strany je v tomto případě totožná s omezeností forem $a(\cdot, \cdot)$ a $b(\cdot, \cdot)$, tedy

$$F_1(\mathbf{U}) \leq (\|a\| + \|b\|) \|\mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f} \|\mathbf{U}\|_V. \quad (4.19)$$

K důkazu V -elipticity bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$ použijeme následující lemma (více lze nalézt v knize [8]).

Lemma 4.4 (Kornova nerovnost)

Nechť $\mathbf{U} \in V \equiv \left\{ \mathbf{v} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3; \mathbf{v}|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$, kde množina Γ_2 je neprázdná otevřená vzhledem k $\partial\Omega$. Potom existuje konstanta C_K (závislá na Ω a Γ_2) tak, že

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx \geq C_K \|\mathbf{U}\|_V^2. \quad (4.20)$$

Přidáme-li nyní následující předpoklady na Laméovy koeficienty

$$0 \leq \lambda(\mathbf{x}), \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(\mathbf{x}) \quad \text{s.v. v } \Omega, \quad (4.21)$$

dostáváme pro bilineární formu $a(\cdot, \cdot)$ odhad

$$a(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \int_{\Omega} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx + \int_{\Omega} \lambda |\nabla \cdot \mathbf{U}|^2 \, dx \geq 2\mu_0 \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx, \quad (4.22)$$

tedy podle lemmatu

$$a(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \geq 2\mu_0 C_K \|\mathbf{U}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{U} \in V. \quad (4.23)$$

Vycházíme-li z V -elipticity bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$ a použijeme zároveň omezenost bilineární formy $b(\cdot, \cdot)$, dostaneme V -elipticitu celé levé strany rovnice (4.14), a to za předpokladu splnění nerovnosti

$$0 < C_{ab} := 2\mu_0 C_K - (1 + \sqrt{3}) \|\rho_0\|_{\infty} \|g_0\|_{1,\infty}. \quad (4.24)$$

Nyní můžeme použít Lax-Milgramovo lemma a máme tedy existenci jediného $\bar{\mathbf{u}}$ ke zvolenému \mathbf{f} . Jednoznačnost \mathbf{u} nyní dokážeme tak, že si vezmeme dvě různé funkce zlomu $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$ a ukážeme, že pokud mají obě stejnou stopu na Γ , pak $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

Nejprve tyto funkce od sebe odečteme a jejich rozdíl označíme \mathbf{f} , čímž získáme $T_{\Gamma} \mathbf{f} = 0$ a $\mathbf{f} \in V$. Z lemmatu získáváme existenci $\bar{\mathbf{u}}_1$ a $\bar{\mathbf{u}}_2$, pro která si napíšeme slabě zformulované rovnice (4.14) a odečteme je od sebe

$$a(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2, \mathbf{U}) = F_1(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in V, \quad (4.25)$$

kde ve formě $F_1(\cdot)$ vystupuje funkce $\mathbf{f} \in V$ a můžeme ji proto přepsat na bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$ a $b(\cdot, \cdot)$:

$$a(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{U}) = 0 \quad \forall \mathbf{U} \in V. \quad (4.26)$$

Z tohoto vztahu již plyne

$$\bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{f}_2 \quad (4.27)$$

a tedy také $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Z Hookeova zákona pak máme jednoznačnost i pro $\boldsymbol{\tau}$.

Věta 4.5 (Existence a jednoznačnost pro elastický problém)

Mějme prostory V a P jako v (4.10) a (4.15). Nechť jsou splněny podmínky:

- $\mu, \lambda, \rho_0 \in L^{\infty}(\Omega)$, $g_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in [W^{1,2}(\Omega_f)]^3$
- $0 \leq \lambda(\mathbf{x}), \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(\mathbf{x}) \quad \text{s.v. v } \Omega$
- $0 < C_{ab} := 2\mu_0 C_K - (1 + \sqrt{3}) \|\rho_0\|_{\infty} \|g_0\|_{1,\infty}$

Potom má problém (4.14) řešení $\bar{\mathbf{u}} \in V$ závislé na funkci \mathbf{f} a pro zlomovou podmínku \mathbf{f}_{Γ} jednoznačně určená řešení $\boldsymbol{\tau} \in P$ a \mathbf{u} .

4.3 Viskoelastický problém

Věnujme se nyní slabé formulaci viskoelastického problému zadaného rovnicemi (3.4) s počátečními a okrajovými podmínkami (3.5), (3.6) a podmínkami na zlom (3.7). Pohybovou rovnici zde uvažujeme ve stejném tvaru jako v elastickém případě, využijeme proto této analogie a zaměříme se především na slabou formulaci rovnice popisující maxwellovskou reologii

$$\partial_t \boldsymbol{\tau} - \partial_t [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] + \frac{\mu}{\eta} [\boldsymbol{\tau} - K(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] = 0. \quad (4.28)$$

Zdefinujeme si pomocný symetrický tenzor $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, t)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (4.29)$$

který odpovídá neelastické části napětí. Pokud dosadíme za $\boldsymbol{\tau}$ z této definiční rovnosti do (4.28), dostáváme

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} + \frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma} + 2 \frac{\mu^2}{\eta} \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] = 0. \quad (4.30)$$

Rovnici vynásobíme testovací funkcí $\boldsymbol{\mathcal{S}} \in P$ a integrujeme přes oblast Ω

$$\int_{\Omega} \left[\partial_t \boldsymbol{\sigma} + \frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma} + 2 \frac{\mu^2}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right] : \boldsymbol{\mathcal{S}} \, dx - \int_{\Omega} \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\eta} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \operatorname{Tr} \boldsymbol{\mathcal{S}} \, dx = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mathcal{S}} \in P, \quad (4.31)$$

dále rozdělíme funkci $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\partial_t \boldsymbol{\sigma} + \frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma} + 2 \frac{\mu^2}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) \right] : \boldsymbol{\mathcal{S}} \, dx - \int_{\Omega} \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\eta} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \operatorname{Tr} \boldsymbol{\mathcal{S}} \, dx \\ &= - \int_{\Omega_f} 2 \frac{\mu^2}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) : \boldsymbol{\mathcal{S}} \, dx + \int_{\Omega_f} \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\eta} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \operatorname{Tr} \boldsymbol{\mathcal{S}} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\mathcal{S}} \in P. \end{aligned} \quad (4.32)$$

V případě pohybové rovnice (3.1a) je slabá formulace vůči elastickému problému pozměněna pouze dosazením rozdílné rovnice pro tenzor napětí (4.29)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx + \int_{\Omega} \lambda(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})(\nabla \cdot \mathbf{U}) \, dx + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \rho_0 [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \bar{\mathbf{u}}) - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{U} \, dx \\ &= \int_{\Omega_f} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx + \int_{\Omega_f} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{f})(\nabla \cdot \mathbf{U}) \, dx \\ &+ \int_{\Omega_f} \rho_0 [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{f}) - (\nabla \cdot \mathbf{f})g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{U} \, dx \quad \forall \mathbf{U} \in V. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Řešení $\bar{\mathbf{u}}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ v tomto časovém problému uvažujeme jako zobrazení

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}} &: [0, T] \rightarrow V, \\ \boldsymbol{\sigma} &: [0, T] \rightarrow P.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Prostory testovacích funkcí jsou totožné jako v elastickém problému, stejně jako prostory pro koeficienty a funkci zlomu:

$$\mu, \lambda, \rho_0 \in L^\infty(\Omega), \quad g_0 \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad \mathbf{f} \in [W^{1,2}(\Omega_f)]^3\tag{4.35}$$

Dále přidáme omezení na viskozitu

$$0 < \eta_0 \leq \eta(\mathbf{x}) \quad \text{s.v. v } \Omega\tag{4.36}$$

tak, aby platilo $\mu/\eta, \mu^2/\eta \in L^\infty(\Omega)$.

Pro přehledný zápis zavedeme další značení:

Definice 4.6 *Definujme bilineární formu*

$$c : V \times P \rightarrow \mathbb{R}, \quad c(\mathbf{U}, \mathbf{S}) \equiv \int_{\Omega} 2 \frac{\mu^2}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) : \mathbf{S} \, dx - \int_{\Omega} \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\eta} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \operatorname{Tr} \mathbf{S} \, dx\tag{4.37}$$

a odpovídající lineární formu

$$F_2(\mathbf{S}) \equiv - \int_{\Omega_f} 2 \frac{\mu^2}{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) : \mathbf{S} \, dx + \int_{\Omega_f} \frac{2}{3} \frac{\mu^2}{\eta} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \operatorname{Tr} \mathbf{S} \, dx.\tag{4.38}$$

Nyní zformulujeme úlohu:

Definice 4.7 *Řekneme, že funkce $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$ a $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ jsou slabým řešením viskoelastického problému (3.4), pokud*

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}} &\in W^{1,2}((0, T); V) \\ \boldsymbol{\sigma} &\in L^2((0, T); P) \quad \text{s} \quad \partial_t \boldsymbol{\sigma} \in L^2((0, T); P) \\ \mathbf{f} &\in [W^{1,2}(\Omega_f)]^3\end{aligned}$$

a pro $\bar{\mathbf{u}}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou splněny rovnice

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) + (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}))_P = F_1(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in V\tag{4.39a}$$

$$(\partial_t \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S}) + \left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} \right)_P + c(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{S}) = F_2(\mathbf{S}) \quad \forall \mathbf{S} \in P\tag{4.39b}$$

pro s.v. $t \in (0, T)$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{v } \Omega.\tag{4.40}$$

Poznamenejme, že podmínku pro $\boldsymbol{\sigma}$ získáváme z její definiční rovnice (4.29).

4.4 Existence a jednoznačnost řešení viskoelastického problému

Tento důkaz je z velké části převzat z diplomové práce L.Inoveckého [5] a poupraven pro naše okrajové podmínky.

Ve formulaci úlohy (4.39) je první rovnice nezávislá na čase, a proto ji můžeme vhodnou argumentací odhadnout zvlášť a v dalších krocích důkazu ji již neuvažovat.

Důkaz existence a jednoznačnosti pro druhou evoluční rovnici provedeme pomocí Galerkinovy metody. Řešení σ nejprve aproximujeme na konečně dimenzionálním podprostoru prostoru P použitím Galerkinovských aproximací. Dále dokážeme omezenost posloupnosti řešení v jistém Bochnerově prostoru a ukážeme, že slabá limita této posloupnosti je řešení $\bar{\mathbf{u}}$. Nakonec dokážeme jednoznačnost pro řešení \mathbf{u} a σ , která plyne z podobných argumentů jako v elastickém případě.

Krok 1: Redukce počtu proměnných

Užitím výsledku získaného pro elastický problém ukážeme, že všechny proměnné kromě σ mohou být eliminovány ze systému tj. mohou být explicitně vyjádřeny pomocí σ .

Upravíme pohybovou rovnici (4.39a)

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) = F_1(\mathbf{U}) - (\sigma, \varepsilon(\mathbf{U}))_P \quad \forall \mathbf{U} \in V \quad (4.41)$$

a uvážíme, že celá pravá strana je omezená lineární forma na prostoru V . $F_1(\cdot)$ je totiž omezená a i druhý člen můžeme odhadnout jako

$$|(\sigma, \varepsilon(\mathbf{U}))_P| \leq \|\sigma\|_P \|\mathbf{U}\|_V \quad \forall \mathbf{U} \in V, \quad (4.42)$$

díky volbě $\sigma \in P$.

Bilineární forma $a(\cdot, \cdot) + b(\cdot, \cdot)$ je omezená a eliptická, jak již bylo ukázáno dříve, tudíž díky Lax-Milgramovu lemmatu existuje řešení $\bar{\mathbf{u}}$ rovnice (4.41). Toto řešení je omezeno pravou stranou rovnice

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_V \leq \frac{1}{\sqrt{C_{ab}}} \left[(\|a\| + \|b\|) \|\mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f} + \|\sigma\|_P \right], \quad (4.43)$$

kde C_{ab} je konstanta elipticity bilineární formy $a(\cdot, \cdot) + b(\cdot, \cdot)$.

Pro pevné \mathbf{f} tedy existuje spojitě lineární zobrazení \mathcal{L}_f takové, že

$$\mathcal{L}_f : P \rightarrow V, \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathcal{L}_f \sigma \quad (4.44)$$

a $\bar{\mathbf{u}}, \sigma$ splňují rovnici (4.41).

Dále se tedy budeme zabývat pouze rovnicí (4.39b) pro σ , která má po dosazení z (4.44) tvar

$$(\partial_t \sigma, \mathcal{S})_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \sigma, \mathcal{S} \right)_P + c(\mathcal{L}_f \sigma, \mathcal{S}) = F_2(\mathcal{S}) \quad \forall \mathcal{S} \in P, \quad (4.45)$$

s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, 0) = 0. \quad (4.46)$$

Krok 2: Galerkinovy aproximace

Prostor $P \subset [L^2(\Omega)]^{3 \times 3}$ je separabilní, můžeme v něm proto vybrat bázi:

$$\{\mathcal{S}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P \quad (4.47)$$

a tuto bázi konstruovat jako ortonormální v P .

Galerkinovy aproximace jsou řešením projekce evolučního problému (4.45), (4.46) na konečně dimenzionální prostor $P_m \equiv \text{span}\{\mathcal{S}_k\}_{k=1}^m$, tedy hledáme je ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma}_m(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_m^k(t) \mathcal{S}_k, \quad (4.48)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}_m : [0, T] \rightarrow P$ a $\alpha_m^k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$. Dosadíme-li tuto aproximaci do rovnice (4.45) s počáteční podmínkou (4.46), získáme formulaci

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\sigma}_m, \mathcal{S} \right)_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}_m, \mathcal{S} \right)_P + c(\mathcal{L}_f \boldsymbol{\sigma}_m, \mathcal{S}) = F_2(\mathcal{S}) \quad \forall \mathcal{S} \in P_m \quad (4.49a)$$

$$\left(\boldsymbol{\sigma}_m(0), \mathcal{S} \right)_P = 0 \quad \forall \mathcal{S} \in P_m. \quad (4.49b)$$

Nyní ukážeme, že pro konečně dimenzionální problém existuje jednoznačné řešení. Dosadíme za $\boldsymbol{\sigma}_m$ z definice (4.48), jako testovací funkce položíme bázové funkce \mathcal{S}_j a uvědomíme-li si ortonormalitu vybrané báze, můžeme předcházející problém přepsat ve tvaru

$$\frac{d\alpha_m^j}{dt} + \sum_{k=1}^m \alpha_m^k \left(\frac{\mu}{\eta} \mathcal{S}_k, \mathcal{S}_j \right)_P + \sum_{k=1}^m \alpha_m^k c(\mathcal{L}_f \mathcal{S}_k, \mathcal{S}_j) = F_2(\mathcal{S}_j) \quad j = 1, \dots, m \quad (4.50a)$$

$$\alpha_m^j(0) = 0 \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.50b)$$

Zavedeme-li označení

$$C_{jk} = \left(\frac{\mu}{\eta} \mathcal{S}_k, \mathcal{S}_j \right)_P, \quad D_{jk} = c(\mathcal{L}_f \mathcal{S}_k, \mathcal{S}_j), \quad G_j = F_2(\mathcal{S}_j), \quad (4.51)$$

můžeme přepsat lineární systém ODR (4.50a) v maticovém tvaru

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}_m}{dt} + \mathbb{C}\boldsymbol{\alpha}_m + \mathbb{D}\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{G}. \quad (4.52)$$

Matice \mathbb{C} , \mathbb{D} a vektor \mathbf{G} jsou konstantní v čase, z čehož pomocí standardní teorie ODR okamžitě obdržíme globální existenci jednoznačně určené \mathcal{C}^1 funkce $\boldsymbol{\alpha}_m(t) = (\alpha_m^1(t), \dots, \alpha_m^m(t))$, splňující (4.50). Zároveň získáváme existenci jednoznačného řešení $\boldsymbol{\sigma}_m$ problému (4.49).

Krok 3: Energetické odhady

Nyní položíme $\boldsymbol{\sigma}_m$ jako testovací funkci v rovnici (4.49a) a dostáváme

$$(\partial_t \boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\sigma}_m)_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\sigma}_m \right)_P + c(\mathcal{L}_f \boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\sigma}_m) = F_2(\boldsymbol{\sigma}_m). \quad (4.53)$$

Použijeme-li Hölderovu nerovnost a nerovnosti

$$\|\text{Tr } \boldsymbol{S}\|_2^2 \leq 3 \|\boldsymbol{S}\|_2^2 \quad \forall \boldsymbol{S} \in P, \quad \|\nabla \cdot \boldsymbol{U}\|_2^2 \leq 3 \|\nabla \boldsymbol{U}\|_2^2 \quad \forall \boldsymbol{U} \in V, \quad (4.54)$$

můžeme ukázat, že bilineární forma $c(\cdot, \cdot)$ je omezená

$$c(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}) \leq 4 \left\| \frac{\mu^2}{\eta} \right\|_{\infty} \|\boldsymbol{U}\|_V \|\boldsymbol{S}\|_P, \quad (4.55)$$

speciálně

$$\begin{aligned} c(\mathcal{L}_f \boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\sigma}_m) &\leq \frac{4}{\sqrt{C_{ab}}} \left\| \frac{\mu^2}{\eta} \right\|_{\infty} \left[(\|a\| + \|b\|) \|\boldsymbol{f}\|_{1,2,\Omega_f} + \|\boldsymbol{\sigma}_m\|_P \right] \|\boldsymbol{\sigma}_m\|_P \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{C_{ab}}} \left\| \frac{\mu^2}{\eta} \right\|_{\infty} \left[3 \|\boldsymbol{\sigma}_m\|_P^2 + (\|a\| + \|b\|)^2 \|\boldsymbol{f}\|_{1,2,\Omega_f}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Požadujeme-li

$$\frac{\mu(\boldsymbol{x})}{\eta(\boldsymbol{x})} \geq 0 \quad \text{s.v. v } \Omega, \quad (4.57)$$

můžeme odhadnout

$$\left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\sigma}_m \right)_P \geq 0. \quad (4.58)$$

A navíc použijeme-li

$$(\partial_t \boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\sigma}_m)_P = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_m\|_P^2 \right), \quad (4.59)$$

odhad (4.56), (4.55) pro pravou stranu a rovnici (4.53) dostaneme

$$\frac{d}{dt} \|\boldsymbol{\sigma}_m\|_P^2 \leq 4 \left\| \frac{\mu^2}{\eta} \right\|_{\infty} \left[\left(1 + \frac{3}{\sqrt{C_{ab}}} \right) \|\boldsymbol{\sigma}_m\|_P^2 + \left(1 + \frac{(\|a\| + \|b\|)^2}{\sqrt{C_{ab}}} \right) \|\boldsymbol{f}\|_{1,2,\Omega_f}^2 \right]. \quad (4.60)$$

Na tuto nerovnost budeme aplikovat Gronwallovo lemma, které lze nalézt v Dodatku A. Tím získáme

$$\|\boldsymbol{\sigma}_m(t)\|_P^2 \leq e^{At} Bt \|\boldsymbol{f}\|_{1,2,\Omega_f}^2 \quad \forall t \in (0, T), \quad (4.61)$$

kde konstanty A a B jsou definovány následovně

$$A = 4 \left\| \frac{\mu^2}{\eta} \right\|_{\infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{C_{ab}}} \right), \quad B = 4 \left\| \frac{\mu^2}{\eta} \right\|_{\infty} \left(1 + \frac{(\|a\| + \|b\|)^2}{\sqrt{C_{ab}}} \right). \quad (4.62)$$

Pokud na pravé straně nerovnosti (4.61) položíme T za t , hodnota pravé strany se tím nezmenší

$$\|\sigma_m(t)\|_P^2 \leq e^{AT} BT \|\mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f}^2 \quad \forall t \in (0, T). \quad (4.63)$$

Integrováním tohoto vzorce přes čas zjišťujeme, že Galerkinovy aproximace σ_m máme omezené v následujícím prostoru

$$\sigma_m \in L^\infty((0, T); P) \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.64)$$

Ještě potřebujeme zjistit, v jakém prostoru leží $\partial_t \sigma_m$. Na to stačí rovnici (4.49) testovat funkcí $\partial_t \sigma_m$

$$\|\partial_t \sigma_m\|_P^2 + \left(\frac{\mu}{\eta} \sigma_m, \partial_t \sigma_m \right)_P + c(\mathcal{L}_f \sigma_m, \partial_t \sigma_m) = F_2(\partial_t \sigma_m), \quad (4.65)$$

z které za pomoci nerovnosti (4.55) a první části odhadu (4.56) získáme

$$\|\partial_t \sigma_m\|_P \leq \left(\left\| \frac{\mu}{\eta} \right\|_\infty + \frac{4}{\sqrt{C_{ab}}} \left\| \frac{\mu^2}{\eta} \right\|_\infty \right) \|\sigma_m\|_{P+4} \left\| \frac{\mu^2}{\eta} \right\|_\infty \left(1 + \frac{\|a\| + \|b\|}{\sqrt{C_{ab}}} \right) \|\mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f}. \quad (4.66)$$

Použijeme-li odhad (4.63) a zintegrujeme-li tuto nerovnost přes interval $[0, T]$, obdržíme

$$\int_0^T \|\partial_t \sigma_m\|_P dt \leq C \|\mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f}, \quad (4.67)$$

kde C nezávisí na m .

Odvodili jsme tedy, že aproximace $\partial_t \sigma_m$ jsou omezeny v prostoru $L^\infty((0, T); P)$ pro $\forall m \in \mathbb{N}$.

Krok 4: Slabá limita

Slabé řešení našeho problému nyní získáme, pokud budeme uvažovat $m \rightarrow \infty$. Díky energetickým odhadům máme zaručenu omezenost $\{\sigma_m\}_{m=1}^\infty$ v Bochnerově prostoru $W^{1,\infty}((0, T); P)$, existuje proto taková podposloupnost σ_{m_i} a funkce σ , že platí

$$\sigma_{m_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \sigma \quad * \text{-slabě ve } W^{1,\infty}((0, T); P). \quad (4.68)$$

Nyní vezmeme pevné N a funkci $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1([0, T]; P)$ tvaru

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^N \beta_k(t) \mathbf{S}_k, \quad (4.69)$$

kde β_k jsou hladké funkce. Tuto funkci dosadíme za testovací funkci \mathbf{S} v rovnici (4.49a), kde uvažujeme $m \geq N$ a potom integrujeme přes interval $[0, T]$

$$\int_0^T \left[(\partial_t \sigma_m, \mathbf{v})_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \sigma_m, \mathbf{v} \right)_P + c(\mathcal{L}_f \sigma_m, \mathbf{v}) \right] dt = \int_0^T F_2(\mathbf{v}) dt. \quad (4.70)$$

Zvolíme $m = m_l$ a limitně přejdeme s m_l do nekonečna

$$\int_0^T \left[(\partial_t \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu})_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu} \right)_P + c(\mathcal{L}_f \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu}) \right] dt = \int_0^T F_2(\boldsymbol{\nu}) dt. \quad (4.71)$$

Tato rovnost platí pro všechny funkce $\boldsymbol{\nu} \in L^2((0, T); P)$, neboť v tomto prostoru jsou funkce tvaru (4.69) husté. Dostáváme tedy

$$(\partial_t \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{S})_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{S} \right)_P + c(\mathcal{L}_f \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{S}) = F(\boldsymbol{S}) \quad \forall \boldsymbol{S} \in P, \text{ pro s.v. } t \in (0, T), \quad (4.72)$$

čímž jsme našli slabé řešení $\boldsymbol{\sigma} \in W^{1,\infty}((0, T); P)$ rovnice (4.45), z toho také $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}([0, T]; P)$ a navíc

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\boldsymbol{\sigma}(t)\|_P \leq C \|\boldsymbol{f}\|_{1,2,\Omega_f}. \quad (4.73)$$

Z této nerovnosti získáváme zároveň jednoznačnost řešení pro $\boldsymbol{\sigma}$ a $\bar{\boldsymbol{u}}$ pro pevné \boldsymbol{f} .

Ověříme ještě splnění počáteční podmínky (4.46). Nejprve si vybereme testovací funkci $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{C}^1([0, T]; P)$ s $\boldsymbol{\nu}(T) = 0$ a pak použijeme integraci per partes v rovnici (4.71)

$$\int_0^T \left[-(\boldsymbol{\sigma}, \partial_t \boldsymbol{\nu})_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu} \right)_P + c(\mathcal{L}_f \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu}) \right] dt = \int_0^T F_2(\boldsymbol{\nu}) dt + (\boldsymbol{\sigma}(0), \boldsymbol{\nu}(0))_P. \quad (4.74)$$

Podobně z rovnice (4.70) plyne

$$\int_0^T \left[-(\boldsymbol{\sigma}_m, \partial_t \boldsymbol{\nu})_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\nu} \right)_P + c(\mathcal{L}_f \boldsymbol{\sigma}_m, \boldsymbol{\nu}) \right] dt = \int_0^T F_2(\boldsymbol{\nu}) dt + (\boldsymbol{\sigma}_m(0), \boldsymbol{\nu}(0))_P. \quad (4.75)$$

Zvolíme-li $m = m_l$ a použijeme-li limitní přechod (4.68), dostaneme

$$\int_0^T \left[-(\boldsymbol{\sigma}, \partial_t \boldsymbol{\nu})_P + \left(\frac{\mu}{\eta} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu} \right)_P + c(\mathcal{L}_f \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\nu}) \right] dt = \int_0^T F_2(\boldsymbol{\nu}) dt, \quad (4.76)$$

neboť platí počáteční podmínka pro aproximaci (4.50b).

Porovnáním (4.74) a (4.76), a protože $\boldsymbol{\nu}(0)$ jsme mohli volit libovolně, získáváme splnění počáteční podmínky $\boldsymbol{\sigma}(0) = 0$.

Krok 5: Jednoznačnost pro σ , u a τ

Budeme postupovat podobně jako v důkazu jednoznačnosti u elastického problému. Vezmeme si dvě různé funkce zlomu $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$ a ukážeme, že pokud mají obě stejnou stopu na Γ pak pro řešení platí $\sigma_1 = \sigma_2$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ i $\tau_1 = \tau_2$.

Nejprve tyto funkce od sebe odečteme a jejich rozdíl označíme \mathbf{f} , čímž získáme $T_\Gamma \mathbf{f} = 0$ a $\mathbf{f} \in V$. Z Galerkinovy metody dostáváme existenci σ_1 , σ_2 , $\bar{\mathbf{u}}_1$ a $\bar{\mathbf{u}}_2$, pro která si napíšeme slabě zformulované rovnice (4.39) a odečteme je od sebe

$$a(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2, \mathbf{U}) + (\sigma_1 - \sigma_2, \varepsilon(\mathbf{U}))_P = F_1(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in V \quad (4.77a)$$

$$(\partial_t(\sigma_1 - \sigma_2), \mathbf{S}) + \left(\frac{\mu}{\eta} \sigma_1 - \sigma_2, \mathbf{S} \right)_P + c(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2, \mathbf{S}) = F_2(\mathbf{S}) \quad \forall \mathbf{S} \in P \quad (4.77b)$$

pro s.v. $t \in (0, T)$.

V lineárních formách $F_1(\cdot)$ a $F_2(\cdot)$ vystupují funkce $\mathbf{f} \in V$ a můžeme je proto přepsat na bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ a $c(\cdot, \cdot)$

$$a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{U}) + b(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{U}) + (\sigma_1 - \sigma_2, \varepsilon(\mathbf{U}))_P = 0 \quad \forall \mathbf{U} \in V \quad (4.78a)$$

$$(\partial_t(\sigma_1 - \sigma_2), \mathbf{S}) + \left(\frac{\mu}{\eta} \sigma_1 - \sigma_2, \mathbf{S} \right)_P + c(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{S}) = 0 \quad \forall \mathbf{S} \in P \quad (4.78b)$$

pro s.v. $t \in (0, T)$.

Použijeme-li odhad (4.43), získáváme z rovnice (4.78a) omezení

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \leq C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_P \quad \text{pro s.v. } t \in (0, T). \quad (4.79)$$

Dosadíme-li do rovnice (4.78b) testovací funkci $\mathbf{S} := \sigma_1 - \sigma_2$, získáváme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_P^2 \right) + \left(\frac{\mu}{\eta} (\sigma_1 - \sigma_2), (\sigma_1 - \sigma_2) \right)_P + c(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \sigma_1 - \sigma_2) = 0. \quad (4.80)$$

Z nerovností (4.55), (4.57) a (4.79) obdržíme odhad

$$\frac{d}{dt} (\|\sigma_1 - \sigma_2\|_P^2) \leq C \|\sigma_1 - \sigma_2\|_P^2 \quad \text{pro s.v. } t \in (0, T), \quad (4.81)$$

na který dále použijeme Gronwallovo lemma v diferenciálním tvaru (viz. Dodatek A), a vzhledem k nulovým počátečním podmínkám pro σ_1 a σ_2 dostáváme

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|_P^2 \leq 0 \quad \text{tedy} \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad (4.82)$$

Z rovnice (4.78a) zároveň obdržíme $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ a z Hookeova zákona je zřejmá jednoznačnost i pro τ .

Krok 6: Prostory pro ostatní neznámé

Nakonec se zastavme nad otázkou, v jakých prostorech leží zbývající neznámé. Z nerovnosti (4.43) pro $\bar{\mathbf{u}}$ máme přímo $\bar{\mathbf{u}} \in L^2((0, T); V)$, ve skutečnosti ale můžeme ukázat, že tato neznámá je spojitá v čase. Napišme si rovnici (4.39a) pro dvě posunutí v různých časech t_1 a t_2 , a po uvážení, že zlomová funkce je v čase konstantní, dostáváme

$$a(\bar{\mathbf{u}}(t_1) - \bar{\mathbf{u}}(t_2), \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}(t_1) - \bar{\mathbf{u}}(t_2), \mathbf{U}) + (\boldsymbol{\sigma}(t_1) - \boldsymbol{\sigma}(t_2), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}))_P = 0, \quad (4.83)$$

což platí pro $\forall \mathbf{U} \in V$. Použijeme-li znovu odhad (4.43), získáváme následující omezení

$$\|\bar{\mathbf{u}}(t_1) - \bar{\mathbf{u}}(t_2)\|_V \leq C \|\boldsymbol{\sigma}(t_1) - \boldsymbol{\sigma}(t_2)\|_P, \quad (4.84)$$

kde konstanta C nezávisí na čase. Uvážíme-li nyní že $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}([0, T]; P)$, a že pro napětí $\boldsymbol{\tau}$ máme explicitní rovnici, můžeme okamžitě psát

$$\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}([0, T]; V), \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{C}([0, T]; P). \quad (4.85)$$

Stejně jako v případě (4.73) můžeme i zde dostat odhady na velikosti norem.

Konstruktivně jsme dokázali následující větu:

Věta 4.8 (Existence a jednoznačnost viskoelastického problému)

Předpokládejme, že platí stejné podmínky jako v elastickém problému a navíc nechť

$$\exists \eta_0 : \quad 0 < \eta_0 \leq \eta(\mathbf{x}) \quad \text{s.v. v } \Omega.$$

Potom má problém (4.39) řešení $\bar{\mathbf{u}}$ závislé na funkci \mathbf{f} a pro zlomovou podmínku \mathbf{f}_Γ jednoznačně určená řešení \mathbf{u} , $\boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\sigma}$. Navíc platí

$$\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}([0, T]; V), \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{C}([0, T]; P), \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}([0, T]; P).$$

4.5 Vlnový problém

Vzhledem k podobnosti s elastickým problémem zde nebudeme uvádět odvození slabé formulace. Převezmeme slabou formulaci (4.14) a pouze doplníme člen s druhou časovou derivací.

Zde ve vlnovém problému budeme speciálně uvažovat mírně upravené bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$ a $b(\cdot, \cdot)$, konkrétně vydělené hustotou $\rho_0 > 0$:

Definice 4.9 *Pro tuto kapitolu zdefinujme modifikované bilineární formy*

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv \int_{\Omega} 2 \frac{\mu}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V}) \, dx + \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\rho_0} (\nabla \cdot \mathbf{U})(\nabla \cdot \mathbf{V}) \, dx \quad (4.86a)$$

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv \int_{\Omega} [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{U}) - (\nabla \cdot \mathbf{U})g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{V} \, dx \quad (4.86b)$$

a novou lineární formu

$$F_3(\mathbf{U}) \equiv - \int_{\Omega_f} 2 \frac{\mu}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) \, dx - \int_{\Omega_f} \frac{\lambda}{\rho_0} (\nabla \cdot \mathbf{f})(\nabla \cdot \mathbf{U}) \, dx \\ - \int_{\Omega_f} [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{f}) - (\nabla \cdot \mathbf{f})g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \mathbf{U} \, dx - \int_{\Omega_f} \partial_{tt} \mathbf{f} \cdot \mathbf{U} \, dx. \quad (4.87)$$

Zformulujeme úlohu:

Definice 4.10 Řekneme, že funkce $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f}$ je slabým řešením vlnového problému (3.8), pokud

$$\bar{\mathbf{u}} \in L^2((0, T); V) \quad s \quad \partial_t \bar{\mathbf{u}} \in L^2\left((0, T); [L^2(\Omega)]^3\right), \quad \partial_{tt} \bar{\mathbf{u}} \in L^2((0, T); V^*) \\ \mathbf{f} \in L^2\left((0, T); [W^{1,2}(\Omega_f)]^3\right) \quad s \quad \partial_{tt} \mathbf{f} \in L^2\left((0, T); [L^2(\Omega_f)]^3\right),$$

a pro $\bar{\mathbf{u}}$ je splněna rovnice

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) + \langle \partial_{tt} \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{U} \rangle_{V^*, V} = F_3(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in V \text{ pro s.v. } t \in (0, T) \quad (4.88)$$

s počátečními podmínkami

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad v \, \Omega \quad (4.89a)$$

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = -\partial_t \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad v \, \Omega. \quad (4.89b)$$

Pro výpočet napětí $\boldsymbol{\tau}$ použijeme Hookeův zákon. Požadavky na zlomovou funkci \mathbf{f} budeme specifikovat během důkazu existence a jednoznačnosti. Poznamenejme ještě, že dále budeme značení duality mezi prostory V^* a V zjednodušovat na $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4.6 Existence a jednoznačnost řešení vlnového problému

Důkaz provedeme opět Galerkinovou metodou, přičemž budeme postupovat podle důkazu podobné hyperbolické rovnice, který je uveden v knize L.C.Evans [6].

Neznámou $\bar{\mathbf{u}}$ nejprve aproximujeme na konečně dimenzionálním podprostoru prostoru V použitím Galerkinovských aproximací. Dokážeme omezenost posloupnosti řešení v jistém Bochnerově prostoru a ukážeme, že slabá limita této posloupnosti je hledané $\bar{\mathbf{u}}$. Pro tuto část řešení dále dokážeme jednoznačnost při pevném \mathbf{f} , přičemž důkaz jednoznačnosti pro řešení \mathbf{u} (při libovolném \mathbf{f}) je analogický jako v elastickém případě.

Krok 1: Galerkinovy aproximace

Prostor $V \subset [W^{1,2}(\Omega)]^3$ je separabilní a můžeme v něm proto vybrat bázi

$$\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V \quad (4.90)$$

a tuto bázi konstruovat jako ortonormální ve V .

Galerkinovy aproximace jsou řešením projekce hyperbolického problému (4.88), (4.89) na konečně dimenzionální prostor $V_m \equiv \text{span}\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^m$, hledáme je tedy ve tvaru

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_m^k(t) \mathbf{w}_k, \quad (4.91)$$

kde $\mathbf{u}_m : [0, T] \rightarrow V$ a $\alpha_m^k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$. Dosadíme-li tuto aproximaci do rovnice (4.88) s počátečními podmínkami (4.89), získáme formulaci

$$(\partial_{tt} \mathbf{u}_m, \mathbf{U}) + a(\mathbf{u}_m, \mathbf{U}) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{U}) = F_3(\mathbf{U}) \quad (4.92a)$$

$$(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{U}) = 0 \quad (4.92b)$$

$$(\partial_t \mathbf{u}_m(0), \mathbf{U}) = 0, \quad (4.92c)$$

pro $\forall \mathbf{U} \in V_m$.

Pro konečně dimenzionální problém nyní ukážeme existenci jednoznačného řešení pro pevné \mathbf{f} . Dosadíme za \mathbf{u}_m z definice (4.91), jako testovací funkce položíme bázové funkce \mathbf{w}_j a uvědomíme-li si ortonormalitu vybrané báze, můžeme předcházející problém přepsat ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \alpha_m^j}{dt^2} + \sum_{k=1}^m \alpha_m^k a(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j) + \sum_{k=1}^N \alpha_m^k b(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j) &= F_3(\mathbf{w}_j) \\ \alpha_m^j(0) &= 0 \\ \partial_t \alpha_m^j(0) &= 0 \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, N. \quad (4.93)$$

Zavedeme-li označení

$$A_{jk} = a(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j), \quad B_{jk} = b(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j), \quad G_j = F_3(\mathbf{w}_j), \quad (4.94)$$

můžeme přepsat lineární systém ODR z (4.93) v maticovém tvaru

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\alpha}_m}{dt^2} + \mathbb{A} \boldsymbol{\alpha}_m + \mathbb{B} \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{G}. \quad (4.95)$$

Podle standardní teorie obyčejných diferenciálních rovnic dostáváme existenci jednoznačné \mathcal{C}^2 funkce $\boldsymbol{\alpha}_m(t) = (\alpha_m^1(t), \dots, \alpha_m^m(t))$ splňující (4.93) lokálně. A z linearitity plyne globální existence pro s.v. $0 \leq t \leq T$, čímž dostáváme existenci jednoznačného řešení \mathbf{u}_m problému (4.92).

Krok 2: Energetické odhady

Pokud položíme $\partial_t \mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^N \frac{d\alpha_k}{dt} \mathbf{w}_k$, jako testovací funkci v rovnici (4.92a), dostaneme

$$(\partial_{tt} \mathbf{u}_m, \partial_t \mathbf{u}_m) + a(\mathbf{u}_m, \partial_t \mathbf{u}_m) + b(\mathbf{u}_m, \partial_t \mathbf{u}_m) = F_3(\partial_t \mathbf{u}_m) \quad \text{pro s.v. } t \in (0, T). \quad (4.96)$$

Podobně jako ve viskoelastickém případě použijeme

$$(\partial_{tt} \mathbf{u}_m, \partial_t \mathbf{u}_m) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2^2 \right) \quad (4.97)$$

a zároveň díky symetrii bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$ máme

$$a(\mathbf{u}_m, \partial_t \mathbf{u}_m) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} a(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) \right). \quad (4.98)$$

Dále potřebujeme omezenost modifikované bilineární formy $b(\cdot, \cdot)$, kterou dostaneme podobně jako v (4.18b)

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{u}_m, \partial_t \mathbf{u}_m)| &\leq (1 + \sqrt{3}) \|g_0\|_{1,\infty} \|\mathbf{u}_m\|_V \|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2 \\ &\leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \|g_0\|_{1,\infty} (\|\mathbf{u}_m\|_V^2 + \|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2^2). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Nyní budeme upravovat pravou stranu rovnice (4.96), tj. lineární formu $F_3(\cdot)$. Omezíme nejprve třetí a čtvrtý člen z (4.87)

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega_f} [\nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{f}) - (\nabla \cdot \mathbf{f}) g_0 \mathbf{e}_z] \cdot \partial_t \mathbf{u}_m \, dx + \int_{\Omega_f} \partial_{tt} \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u}_m \, dx \right| \\ &\leq (1 + \sqrt{3}) \|g_0\|_{1,\infty} \|\mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f} \|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2 + \|\partial_{tt} \mathbf{f}\|_2 \|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2 \\ &\leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \|g_0\|_{1,\infty} \|\mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_{tt} \mathbf{f}\|_{2,\Omega_f}^2 + \frac{(1 + \sqrt{3}) \|g_0\|_{1,\infty} + 1}{2} \|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.100)$$

a dále se věnujme úpravě prvních dvou členů. Provedeme integraci per partes

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_f} 2 \frac{\mu}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\partial_t \mathbf{u}_m) \, dx - \int_{\Omega_f} \frac{\lambda}{\rho_0} (\nabla \cdot \mathbf{f}) (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{u}_m) \, dx \\ &= \int_{\Omega_f} \nabla \cdot \left[2 \frac{\mu}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) + \frac{\lambda}{\rho_0} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} \right] \partial_t \mathbf{u}_m \, dx \\ & - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{n} \left[2 \frac{\mu}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) + \frac{\lambda}{\rho_0} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} \right] \partial_t \mathbf{u}_m \, dS \end{aligned} \quad (4.101)$$

a integrál přes oblast Ω_f omezíme pomocí norem

$$\begin{aligned} & \left(\left\| \frac{\lambda}{\rho_0} \right\|_{\infty} + 2 \left\| \frac{\mu}{\rho_0} \right\|_{\infty} \right) \|\nabla^2 \mathbf{f}\|_{2,\Omega_f} \|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2 \\ & + \left(\left\| \frac{\lambda}{\rho_0} \right\|_{1,\infty} + 2 \left\| \frac{\mu}{\rho_0} \right\|_{1,\infty} \right) \|\nabla \mathbf{f}\|_{2,\Omega_f} \|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2, \end{aligned} \quad (4.102)$$

hraniční integrál pak upravíme na tvar

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{n} \left[2 \frac{\mu}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) + \frac{\lambda}{\rho_0} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} \right] \mathbf{u}_m \, dS \right\} \\ & + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{n} \left[2 \frac{\mu}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\partial_t \mathbf{f}) + \frac{\lambda}{\rho_0} (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{f}) \mathbf{I} \right] \mathbf{u}_m \, dS. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Na druhý z hraničních integrálů použijeme větu o stopách, čímž obdržíme odhad pomocí norem

$$\left(\left\| \frac{\lambda}{\rho_0} \right\|_{\infty} + 2 \left\| \frac{\mu}{\rho_0} \right\|_{\infty} \right) \|\nabla(\partial_t \mathbf{f})\|_{1,2,\Omega_f} \|\mathbf{u}_m\|_V. \quad (4.104)$$

Kombinací předchozích vzorců (4.96) - (4.104) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2^2 + a(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) & \leq C (\|\partial_t \mathbf{u}_m\|_2^2 + a(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) \\ & + \|\mathbf{f}\|_{2,2,\Omega_f}^2 + \|\partial_t \mathbf{f}\|_{2,2,\Omega_f}^2 + \|\partial_{tt} \mathbf{f}\|_{2,\Omega_f}^2 \\ & - \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{n} \left[2 \frac{\mu}{\rho_0} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{f}) + \frac{\lambda}{\rho_0} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} \right] \mathbf{u}_m \, dS \right\}, \end{aligned} \quad (4.105)$$

kde jsme zároveň použili V -elipticitu formy $a(\cdot, \cdot)$ plynoucí z Kornovy nerovnosti (4.23). Tuto nerovnost zintegrujeme přes časový interval $[0, t]$ a uvážíme nulovost počátečních podmínek

$$\begin{aligned} \|\partial_t \mathbf{u}_m(t)\|_2^2 + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) & \leq K_1 \int_0^t (\|\partial_t \mathbf{u}_m(s)\|_2^2 + a(\mathbf{u}_m(s), \mathbf{u}_m(s)) \\ & + \|\mathbf{f}(s)\|_{2,2,\Omega_f}^2 + \|\partial_t \mathbf{f}(s)\|_{2,2,\Omega_f}^2 + \|\partial_{tt} \mathbf{f}(s)\|_{2,\Omega_f}^2) \, ds + K_2 \|\nabla \mathbf{f}(t)\|_{1,2,\Omega_f} \|\mathbf{u}_m(t)\|_V, \end{aligned} \quad (4.106)$$

kde jsme znovu použili větu o stopách. Jako v důkazu u viskoelastického problému zvětšíme pravou stranu tím, že členy obsahující funkci \mathbf{f} integrujeme přes celý interval $[0, T]$ a zároveň uijeme Youngovu nerovnost na poslední člen tak, abychom mohli

normu $\|\mathbf{u}_m(t)\|_V$ zahrnout do formy $a(\cdot, \cdot)$ na levé straně

$$\|\partial_t \mathbf{u}_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) \leq C_1 \int_0^t (\|\partial_t \mathbf{u}_m(s)\|_2^2 + a(\mathbf{u}_m(s), \mathbf{u}_m(s))) \, ds + \quad (4.107)$$

$$C_2 \left(\|\mathbf{f}\|_{L^\infty((0,T);[W^{2,2}(\Omega_f)]^3)}^2 + \|\partial_t \mathbf{f}\|_{L^2((0,T);[W^{2,2}(\Omega_f)]^3)}^2 + \|\partial_{tt} \mathbf{f}\|_{L^2((0,T);[L^2(\Omega_f)]^3)}^2 \right).$$

Máme zde nerovnost tvaru

$$y(t) \leq C_1 \int_0^t y(s) \, ds + C_2 \quad \forall t \in (0, T), \quad (4.108)$$

můžeme tedy aplikovat Gronwallovo lemma v integrálním tvaru (viz. Dodatek A) a dostaneme nerovnost

$$y(t) \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t}) \quad \text{pro s.v. } t \in [0, T]. \quad (4.109)$$

Na pravé straně nerovnosti (4.109) položíme standardně T místo t a dostáváme

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \mathbf{u}_m(t)\|_2^2 + a(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)) \quad (4.110) \\ & \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{L^\infty((0,T);[W^{2,2}(\Omega_f)]^3)}^2 + \|\partial_t \mathbf{f}\|_{L^2((0,T);[W^{2,2}(\Omega_f)]^3)}^2 + \|\partial_{tt} \mathbf{f}\|_{L^2((0,T);[L^2(\Omega_f)]^3)}^2 \right) \end{aligned}$$

pro s.v. $t \in [0, T]$. Z tohoto odhadu a z elipticity formy $a(\cdot, \cdot)$ získáme $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} (\|\mathbf{u}_m(t)\|_V^2 + \|\partial_t \mathbf{u}_m(t)\|_2^2) \leq \quad (4.111) \\ & C \left(\|\mathbf{f}\|_{L^\infty((0,T);[W^{2,2}(\Omega_f)]^3)}^2 + \|\partial_t \mathbf{f}\|_{L^2((0,T);[W^{2,2}(\Omega_f)]^3)}^2 + \|\partial_{tt} \mathbf{f}\|_{L^2((0,T);[L^2(\Omega_f)]^3)}^2 \right). \end{aligned}$$

Nyní bychom rádi věděli, v jakém prostoru leží $\partial_{tt} \mathbf{u}_m$. Vezmeme proto libovolnou funkci $\mathbf{v} \in V$, jenž splňuje $\|\mathbf{v}\|_V \leq 1$ a rozložíme ji na dvě části $\mathbf{v} = \mathbf{v}^o + \mathbf{v}^\perp$, kde $\mathbf{v}^o \in V_m$ a $(\mathbf{v}^\perp, \mathbf{w}_k)_V = 0$, $k = 1, \dots, m$. Z ortonormality funkcí $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^\infty$ dostáváme $\|\mathbf{v}^o\| \leq \|\mathbf{v}\| \leq 1$. Potom z tvaru \mathbf{u}_m (4.91) a z rovnice (4.92a) dostaneme

$$\langle \partial_{tt} \mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle = (\partial_{tt} \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = (\partial_{tt} \mathbf{u}_m, \mathbf{v}^o) = F_3(\mathbf{v}^o) - a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}^o) - b(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}^o). \quad (4.112)$$

Tudíž z omezenosti formy $b(\cdot, \cdot)$ (4.99) a analogické omezenosti jako (4.18a) pro modifikované $a(\cdot, \cdot)$, dostáváme

$$|\langle \partial_{tt} \mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle| \leq (\|a\| + \|b\|) \left(\|\mathbf{u}_m\|_V + \|\mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f} \right) + \|\partial_{tt} \mathbf{f}\|_{1,2,\Omega_f}. \quad (4.113)$$

Nyní použijeme definici normy v duálním prostoru

$$\|\partial_{tt}\mathbf{u}_m\|_{V^*} = \sup_{\mathbf{v} \in V, \|\mathbf{v}\| \leq 1} |\langle \partial_{tt}\mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle| \quad (4.114)$$

a vidíme, že pokud umocníme rovnici (4.113), zintegrujeme ji přes interval $[0, T]$ a použijeme odhad (4.111), získáváme

$$\int_0^T \|\partial_{tt}\mathbf{u}_m\|_{V^*}^2 dt \leq \quad (4.115)$$

$$C \left(\|\mathbf{f}\|_{L^\infty((0,T);[W^{2,2}(\Omega_f)]^3)}^2 + \|\partial_t \mathbf{f}\|_{L^2((0,T);[W^{2,2}(\Omega_f)]^3)}^2 + \|\partial_{tt} \mathbf{f}\|_{L^2((0,T);[L^2(\Omega_f)]^3)}^2 \right),$$

kde C nezávisí na m .

Odvodili jsme tedy, že aproximace $\partial_{tt}\mathbf{u}_m$ jsou omezeny v prostoru $L^2((0, T); V^*)$ pro $\forall m \in \mathbb{N}$.

Krok 3: Slabá limita

Podle energetických odhadů (4.111) a (4.115) máme zaručenu omezenost $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$ v Bochnerově prostoru $L^2((0, T); V)$, $\{\partial_t \mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$ v $L^2((0, T); [L^2(\Omega)]^3)$ a $\{\partial_{tt}\mathbf{u}_m\}_{m=1}^\infty$ v $L^2((0, T); V^*)$. Existuje proto taková podposloupnost \mathbf{u}_{m_l} a funkce $\bar{\mathbf{u}} \in L^2((0, T); V)$ s $\partial_t \bar{\mathbf{u}} \in L^2((0, T); [L^2(\Omega)]^3)$ a $\partial_{tt} \bar{\mathbf{u}} \in L^2((0, T); V^*)$, že platí

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m_l} &\rightharpoonup \bar{\mathbf{u}} && \text{v } L^2((0, T); V) \\ \partial_t \mathbf{u}_{m_l} &\rightharpoonup \partial_t \bar{\mathbf{u}} && \text{v } L^2((0, T); [L^2(\Omega)]^3) \\ \partial_{tt} \mathbf{u}_{m_l} &\rightharpoonup \partial_{tt} \bar{\mathbf{u}} && \text{v } L^2((0, T); V^*). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Nyní vezmeme pevné N a funkci $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^1([0, T]; V)$ tvaru

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^N \beta^k(t) \mathbf{w}_k, \quad (4.117)$$

kde β^k jsou hladké funkce. Tuto funkci dosadíme za testovací funkci \mathbf{U} v rovnici (4.92a), kde uvažujeme $m \geq N$ a potom integrujeme přes interval $[0, T]$

$$\int_0^T [\langle \partial_{tt}\mathbf{u}_m, \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{v})] dt = \int_0^T F_3(\mathbf{v}) dt. \quad (4.118)$$

Zvolíme $m = m_l$ a k limitnímu přechodu použijeme (4.116)

$$\int_0^T [\langle \partial_{tt}\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle + a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})] dt = \int_0^T F_3(\mathbf{v}) dt. \quad (4.119)$$

Tato rovnost platí pro všechny funkce $\mathbf{v} \in L^2((0, T); V)$, neboť v tomto prostoru jsou funkce tvaru (4.117) husté. Tedy dostáváme

$$\langle \partial_{tt} \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle + a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = F_3(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \text{ a pro s.v. } t \in [0, T]. \quad (4.120)$$

Našli jsme tedy slabé řešení $\bar{\mathbf{u}} \in L^2((0, T); V)$ rovnice (4.88). Navíc platí $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}([0, T]; [L^2(\Omega)]^3)$ a $\partial_t \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}([0, T]; V^*)$.

Ověříme ještě splnění počátečních podmínek (4.89). Nejprve si vybereme testovací funkci $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^2([0, T]; V)$ s $\mathbf{v}(T) = \partial_t \mathbf{v}(T) = 0$, a potom použijeme dvakrát per partes v rovnici (4.119):

$$\int_0^T [(\partial_{tt} \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}) + a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})] dt = \int_0^T F_3(\mathbf{v}) dt - (\bar{\mathbf{u}}(0), \partial_t \mathbf{v}(0)) + \langle \partial_t \bar{\mathbf{u}}(0), \mathbf{v}(0) \rangle. \quad (4.121)$$

Podobně z rovnice (4.118) plyne

$$\int_0^T [(\partial_{tt} \mathbf{v}, \mathbf{u}_m) + a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_m, \mathbf{v})] dt = \int_0^T F_3(\mathbf{v}) dt - (\mathbf{u}_m(0), \partial_t \mathbf{v}(0)) + (\partial_t \mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}(0)). \quad (4.122)$$

Zvolíme-li $m = m_l$ a použijeme limitní přechod (4.116), dostaneme

$$\int_0^T [(\partial_{tt} \mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}) + a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})] dt = \int_0^T F_3(\mathbf{v}) dt, \quad (4.123)$$

neboť platí počáteční podmínky pro aproximaci (4.92b) a (4.92c).

Porovnáním (4.121) a (4.123), a protože $\mathbf{v}(0)$ a $\partial_t \mathbf{v}(0)$ jsme si mohli zvolit libovolně, získáváme splnění počátečních podmínek $\bar{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$ a $\partial_t \bar{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$.

Krok 4: Jednoznačnost řešení pro $\bar{\mathbf{u}}$ při konkrétní volbě funkce \mathbf{f}

Poznamenejme, že následující důkaz jednoznačnosti by se velice zjednodušil, pokud bychom věděli, že $\partial_t \bar{\mathbf{u}}(t)$ je dostatečně hladké a mohli ho díky tomu položit za testovací funkci. Bohužel to ale nevíme, a musíme proto použít následující argumenty.

Stačí ukázat, že pokud vezmeme nulové počáteční a okrajové podmínky, pak jediným řešením je $\bar{\mathbf{u}} \equiv 0$, dále tedy uvažujeme $\mathbf{f} \equiv 0$.

Pro pevné $s \in [0, T]$ si zdefinujeme

$$\mathbf{v}(t) := \begin{cases} \int_t^s \bar{\mathbf{u}}(\tilde{t}) d\tilde{t} & 0 \leq t \leq s \\ \mathbf{0} & s \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4.124)$$

Potom $\mathbf{v}(t) \in V$ pro $\forall t \in [0, T]$, a proto

$$\int_0^s [(\partial_{tt} \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})] dt = 0. \quad (4.125)$$

Protože máme $\partial_t \bar{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{v}(s) = \mathbf{0}$, můžeme z předchozí rovnice pomocí integrace per partes získat

$$\int_0^s [- (\partial_t \bar{\mathbf{u}}, \partial_t \mathbf{v}) + a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})] dt = 0. \quad (4.126)$$

Použijeme-li, že pro $0 \leq t \leq s$ platí $\partial_t \mathbf{v} = -\bar{\mathbf{u}}$, dostáváme

$$\int_0^s [\langle \partial_t \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}} \rangle - a(\partial_t \mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\partial_t \mathbf{v}, \mathbf{v})] dt = 0. \quad (4.127)$$

Tedy

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{u}}\|_2^2 - \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right) dt = - \int_0^s b(\mathbf{v}, \partial_t \mathbf{v}) dt, \quad (4.128)$$

což navíc, díky $\bar{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$, můžeme přepsat na tvar

$$\frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{u}}(s)\|_2^2 + \frac{1}{2} a(\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(0)) + b(\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(0)) = \int_0^s b(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{u}}) dt, \quad (4.129)$$

a následně

$$\|\bar{\mathbf{u}}(s)\|_2^2 + \|\mathbf{v}(0)\|_V^2 \leq C \left(\int_0^s \|\mathbf{v}\|_V^2 + \|\bar{\mathbf{u}}\|_2^2 dt + \|\mathbf{v}(0)\|_2^2 \right). \quad (4.130)$$

Zadefinujme si ještě funkci

$$\mathbf{w}(t) := \int_0^t \bar{\mathbf{u}}(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad \text{pro } t \in [0, T], \quad (4.131)$$

a její pomocí přepíšme nerovnost (4.130)

$$\|\bar{\mathbf{u}}(s)\|_2^2 + \|\mathbf{w}(s)\|_V^2 \leq C \left(\int_0^s \|\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(s)\|_V^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(t)\|_2^2 dt + \|\mathbf{w}(s)\|_2^2 \right). \quad (4.132)$$

Použijeme-li nerovnosti $\|\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(s)\|_V^2 \leq 2\|\mathbf{w}(t)\|_V^2 + 2\|\mathbf{w}(s)\|_V^2$ a $\|\mathbf{w}(s)\|_2^2 \leq \int_0^s \|\bar{\mathbf{u}}(t)\|_2^2$, můžeme tuto nerovnost přepsat jako

$$\|\bar{\mathbf{u}}(s)\|_2^2 + (1 - sC_1) \|\mathbf{w}(s)\|_V^2 \leq C_1 \int_0^s \|\mathbf{w}\|_V^2 + \|\bar{\mathbf{u}}\|_2^2 dt. \quad (4.133)$$

Vybereme-li T_1 tak malé, aby platilo $1 - T_1 C_1 \geq \frac{1}{2}$, máme pro $0 \leq s \leq T_1$

$$\|\bar{\mathbf{u}}(s)\|_2^2 + \|\mathbf{w}(s)\|_V^2 \leq C_2 \int_0^s \|\bar{\mathbf{u}}\|_2^2 + \|\mathbf{w}\|_V^2 dt. \quad (4.134)$$

Z integrálního tvaru Gronwallova lemmatu nyní plyne $\bar{\mathbf{u}} \equiv 0$ na $[0, T_1]$. Stejný argument ale můžeme aplikovat i na intervaly $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$, ... a tím dostat $\bar{\mathbf{u}} \equiv 0$ na $[0, T]$.

Krok 5: Jednoznačnost pro řešení \mathbf{u} a $\boldsymbol{\tau}$

Vezmeme si dvě různé funkce zlomu $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$ a ukážeme, že pokud mají obě stejnou stopu na Γ , pak $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

Nejprve tyto funkce od sebe odečteme a jejich rozdíl označíme \mathbf{f} , čímž získáme $T_\Gamma \mathbf{f} = 0$. Galerkinova metoda nám dává existenci $\bar{\mathbf{u}}_1$ a $\bar{\mathbf{u}}_2$, pro která si napíšeme slabě zformulované rovnice (4.88) a odečteme je od sebe

$$a(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2, \mathbf{U}) + \langle \partial_{tt}(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2), \mathbf{U} \rangle = F_3(\mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{U} \in V \quad (4.135)$$

pro s.v. $t \in (0, T)$,

kde ve formě $F_3(\cdot)$ vystupuje funkce \mathbf{f} v příslušných prostorech na celém Ω a můžeme ji proto přepsat na bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ a duál $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$a(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{U}) + b(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{U}) \quad (4.136)$$

$$+ \langle \partial_{tt}(\bar{\mathbf{u}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2), \mathbf{U} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{U} \in V \text{ pro s.v. } t \in (0, T).$$

Z tohoto vztahu již plyne

$$\bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{f}_2,$$

to znamená $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Z Hookeova zákona dostáváme jednoznačnost i pro $\boldsymbol{\tau}$.

V několika krocích jsme tedy dokázali následující větu:

Věta 4.11 (Existence a jednoznačnost vlnového problému) *Mějme prostory V a P jako v (4.10) a (4.15) a necht' jsou splněny podmínky:*

- $\mu, \lambda, \rho_0^{-1}, g_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$
- $0 \leq \lambda(\mathbf{x}), \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(\mathbf{x}), \quad 0 < \rho_0(\mathbf{x}) \quad \text{s.v. v } \Omega$
- $0 < C_{ab} := 2\mu_0 C_K - (1 + \sqrt{3}) \|\rho_0\|_\infty \|g_0\|_{1,\infty}$
- $\mathbf{f} \in L^\infty\left((0, T); [W^{2,2}(\Omega_f)]^3\right), \quad \partial_t \mathbf{f} \in L^2\left((0, T); [W^{2,2}(\Omega_f)]^3\right),$
 $\partial_{tt} \mathbf{f} \in L^2\left((0, T); [L^2(\Omega_f)]^3\right)$

Potom má problém (4.88) řešení $\bar{\mathbf{u}}$ závislé na funkci \mathbf{f} a pro zlomovou podmínku \mathbf{f}_Γ jednoznačně určená řešení \mathbf{u} a $\boldsymbol{\tau}$. Navíc platí

$$\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}\left([0, T]; [L^2(\Omega)]^3\right), \quad \partial_t \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{C}\left([0, T]; V^*\right), \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{C}\left([0, T]; P\right).$$

5 Spektrální rozklad 3D problému

V předchozích kapitolách jsme se příliš nezabývali tím, zda zadané problémy uvažujeme ve 2D nebo 3D, neboť všechny formulace i důkazy platí pro obě dimenze.

Diskuze o případných odlišnostech má smysl až ve chvíli, kdy přicházíme k numerické realizaci. V dalších kapitolách se ještě ve větší míře zmíníme o použité metodě výpočtu, nyní je pro nás podstatné pouze to, že pro výpočet používáme program, řešící úlohy na 2D oblasti. Vzhledem k této skutečnosti a zároveň také mírně s ohledem na akademické účely této diplomové práce, jsme 3D úlohu převedli do 2D pomocí Fourierovy transformace. Tato možnost se zde naskytla díky tomu, že v rovnicích vystupující koeficienty jsou závislé pouze hloubkově a samotný zlom uprostřed oblasti lze vhodně umístit a nasměrovat.

5.1 Fourierova transformace

Pomocí Fourierovy transformace potřebujeme změnit rovnice tak, aby se zde vyskytovaly parciální derivace pouze podle dvou proměnných. Nejprve zjistíme přes kterou složku můžeme provádět Fourierovu transformaci. Zvolíme-li z jako souřadnici označující hloubku a x jako jakoukoli z horizontálních složek, ve které má funkce zlomu nespojitost, pak ani jedna z uvedených složek není pro tento záměr vhodná. V prvním případě je to proto, že by se nám nepodařilo zbavit rovnice parciální derivace podle této složky. A v případě souřadnice x to není vhodné z důvodu numerické neztvrditelnosti Fourierova obrazu zmíněné nespojitosti. Zbývá tedy směr podél zlomu, ve kterém funkce \mathbf{f} nemá skok, ten nazveme souřadnicí y a provedeme zde Fourierovu transformaci

$$\hat{\mathbf{v}}(x, k_y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(x, y, z) e^{-ik_y y} dy. \quad (5.1)$$

Tímto způsobem se zadané problémy převedou na hledání Fourierových obrazů původních funkcí na 2D oblastech. Pokud tyto obrazy najdeme, stačí nakonec použít zpětnou Fourierovu transformaci

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{v}}(x, k_y, z) e^{ik_y y} dk_y \quad (5.2)$$

a dostat hledaná řešení na 3D oblasti.

5.2 Elastický problém

Na rovnice použijeme Fourierovu transformaci a následně je slabě zformulujeme.

Do pohybové rovnice dosadíme hookeovskou reologii

$$\nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] + \rho_0 [(\nabla \cdot \mathbf{u})g_0 \mathbf{e}_z - \nabla(g_0 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u})] = 0 \quad \text{v } \Omega. \quad (5.3)$$

Nyní rovnice rozepíšeme do složkového zápisu, použijeme vztahu $\partial_y \mathbf{v} = ik_y \mathbf{v}$ a

ztransformujeme je, čímž se jednotlivé funkce převedou na jejich Fourierovy obrazy

$$\begin{aligned} & \partial_x [\lambda (\partial_x \hat{u}_x + ik_y \hat{u}_y + \partial_z \hat{u}_z) + \mu \partial_x \hat{u}_x] + \mu (ik_y \partial_x \hat{u}_y - k_y^2 \hat{u}_x) \\ & + \partial_z [\mu (\partial_x \hat{u}_z + \partial_z \hat{u}_x)] - \rho_0 g_0 \partial_x \hat{u}_z = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} & \lambda (ik_y \partial_x \hat{u}_x - k_y^2 \hat{u}_y + ik_y \partial_z \hat{u}_z) - 2\mu k_y^2 \hat{u}_y + \partial_x [\mu (ik_y \hat{u}_x + \partial_x \hat{u}_y)] \\ & + \partial_z [\mu (ik_y \hat{u}_z + \partial_z \hat{u}_y)] - \rho_0 g_0 ik_y \hat{u}_z = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} & \partial_z [\lambda (\partial_x \hat{u}_x + ik_y \hat{u}_y + \partial_z \hat{u}_z) + \mu \partial_z \hat{u}_z] + \partial_x [\mu (\partial_z \hat{u}_x + \partial_x \hat{u}_z)] \\ & + \mu (ik_y \partial_z \hat{u}_y - k_y^2 \hat{u}_z) + \rho_0 g_0 (\partial_x \hat{u}_x + ik_y \hat{u}_y) - \rho_0 \partial_z g_0 \hat{u}_z = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Máme rovnice, které chceme slabě zformulovat, stačí je tedy vynásobit testovací funkcí, zintegrovat přes x a z a nakonec použít integraci per partes

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{2D}} \left\{ [\lambda (\partial_x \hat{u}_x + ik_y \hat{u}_y + \partial_z \hat{u}_z) + \mu \partial_x \hat{u}_x] \partial_x \hat{U}_x + \mu (\partial_x \hat{u}_z + \partial_z \hat{u}_x) \partial_z \hat{U}_x \right\} dx \\ & + \int_{\Omega_{2D}} [\mu (ik_y \partial_x \hat{u}_y - k_y^2 \hat{u}_x) - \rho_0 g_0 \partial_x \hat{u}_z] \hat{U}_x dx = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{2D}} \left\{ \mu (ik_y \hat{u}_x + \partial_x \hat{u}_y) \partial_x \hat{U}_y + \mu (ik_y \hat{u}_z + \partial_z \hat{u}_y) \partial_z \hat{U}_y \right\} dx \\ & + \int_{\Omega_{2D}} [\lambda (ik_y \partial_x \hat{u}_x - k_y^2 \hat{u}_y + ik_y \partial_z \hat{u}_z) - 2\mu k_y^2 \hat{u}_y - \rho_0 g_0 ik_y \hat{u}_z] \hat{U}_y dx = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{2D}} \left\{ \mu (\partial_z \hat{u}_x + \partial_x \hat{u}_z) \partial_x \hat{U}_z + [\lambda (\partial_x \hat{u}_x + ik_y \hat{u}_y + \partial_z \hat{u}_z) + \mu \partial_z \hat{u}_z] \partial_z \hat{U}_z \right\} dx \\ & + \int_{\Omega_{2D}} [\mu (ik_y \partial_z \hat{u}_y - k_y^2 \hat{u}_z) + \rho_0 g_0 (\partial_x \hat{u}_x + ik_y \hat{u}_y) - \rho_0 \partial_z g_0 \hat{u}_z] \hat{U}_z dx = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

kde označením \hat{U}_i nechceme říci, že za testovací funkci musíme vzít Fourierův obraz nějaké funkce, ale pouze, že tato funkce již nezávisí na proměnné y stejně jako \hat{u}_i .

Vzhledem k tomu, že nyní je náš problém 2D (k_y je pouze parametrem), probíhá integrace a tedy také metoda per partes pouze přes složky x a z . Hraniční integrály jsou proto všechny nulové díky stejným argumentům, jaké jsme použili v obecném odvození slabé formulace, které platilo pro 2D i 3D úlohy. To, že se zde jedná o Fourierovy obrazy ve složce y , toto tvrzení nijak neovlivňuje.

Jako v předchozích odvozeních bychom nakonec ještě rozdělili obraz posunutí $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{f}}$.

5.3 Časově závislé problémy

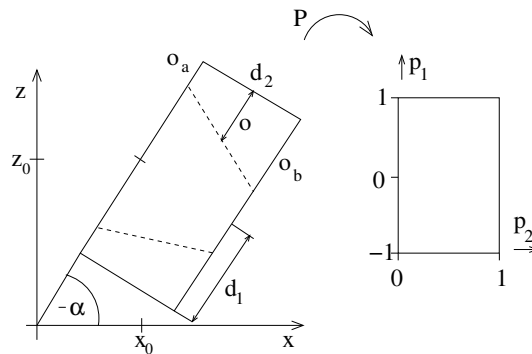
Ve viskoelastickém i vlnovém případě lze Fourierovu transformaci provést také, přičemž se postupuje analogicky jako v elastickém případě a kromě výskytu více členů se odvození zásadně nemění.

6 Funkce popisující skluz na zlomu

Pro účely numerické realizace prakticky vytvoříme funkci f , která bude popisovat nejen posunutí na samotném zlomu Γ , ale zároveň bude spojitě dodefinována na oblast Ω_f tak, aby splňovala požadavky slabé formulace.

6.1 2D případ

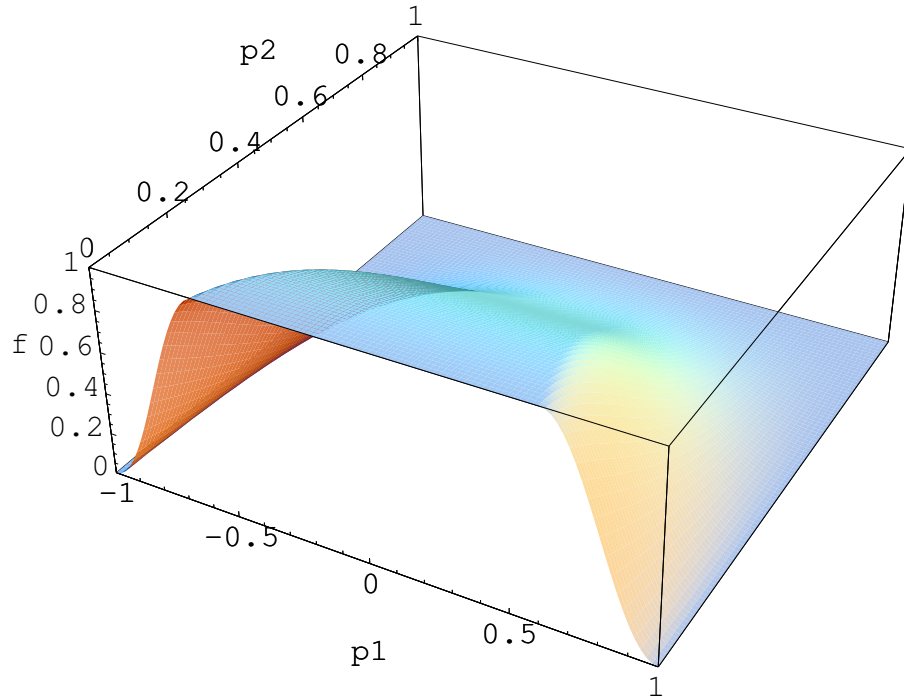
Nejprve si sestojíme zobrazení, které převede oblast Ω_f na nějaký konkrétní nosič později definované funkce. Takové zobrazení bude zahrnovat natočení o daný úhel, změnu rozměrů a také posun do počátku souřadnic. V těchto nových souřadnicích vytvoříme funkci s hodnotami posunutí a nakonec ji složíme se zmíněným zobrazením oblasti.



Obr. 4: Zobrazení $P : (x, z) \rightarrow (p_1, p_2)$

Parametry vytvářené funkce jsou (viz. obrázek 4):

- x_0 ... umístění středu zlomu f_Γ na oblasti Ω v x -ové souřadnici
- z_0 ... hloubka středu zlomu f_Γ počítaná od povrchu Země
- d_1 ... polovina délky zlomu f_Γ
- d_2 ... šířka oblasti Ω_f , na které je dodefinována funkce f
- o_a ... rozměr okraje zlomu f_Γ , kde se funkce mění hladce z 0 na 1
- o_b ... okraj zlomu f na druhé straně oblasti Ω_f než v případě o_a

Obr. 5: Graf funkce f na oblasti se souřadnicemi p_1 a p_2 .

- M ... amplituda skluzu
- α ... úhel naklonění zlomu vůči x -ové souřadnici

Zdefinujeme si zobrazení $P : (x, z) \rightarrow (p_1, p_2)$, které vyjadřuje posun, natočení o úhel α a změnu velikosti oblasti

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{d_1} [+ \cos \alpha (x - x_0) - \sin \alpha (z - z_0)] \\ p_2 &= \frac{1}{d_2} [- \sin \alpha (x - x_0) - \cos \alpha (z - z_0)] \end{aligned} \quad (6.1)$$

a je taktéž zakresleno na obrázku 4. Pro zadané parametry o_a a o_b si dále definujeme pomocnou funkci o

$$o = o_a + p_2(o_b - o_a), \quad (6.2)$$

vyjadřující velikost okraje oblasti, kde bude zlom zhlazován funkcí \cos^2 .

Nyní přistupme k zdefinování skalární funkce zlomu, kterou můžeme vidět

na obrázku 5

$$f(x, z) \equiv \begin{cases} 0 & (|p_1| > 1) \\ & \vee (p_2 \notin (0, 1)) \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}p_2\right) & (|p_1| < 1 - \frac{o}{d_1}) \\ & \wedge (0 < p_2 < 1) \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}p_2\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{(|p_1| - 1)d_1 + o}{o}\right) & (|p_1| > 1 - \frac{o}{d_1}) \\ & \wedge (|p_1| < 1) \\ & \wedge (0 < p_2 < 1). \end{cases} \quad (6.3)$$

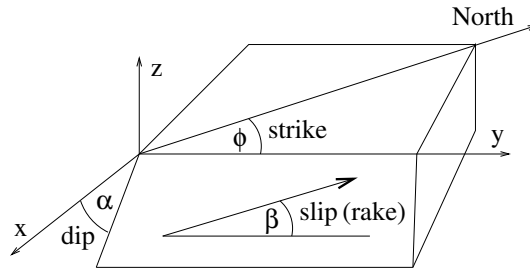
Doposud jsme uvažovali f jako skalární normovanou funkci, nakonec je tedy nutno ji ještě vynásobit maximálním posunutím M na zlomové ploše Γ a tečným vektorem zlomu $\mathbf{t} = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$ a konečně dostáváme ve 2D výpočtech typicky užívanou vektorovou funkci zlomu

$$\mathbf{f} = M f \mathbf{t}. \quad (6.4)$$

6.2 3D případ

K 2D parametrům přibývají ještě značení:

- y_0 ... umístění středu zlomu \mathbf{f}_Γ na oblasti Ω v y -ové souřadnici
- d_3 ... polovina délky zlomu \mathbf{f}_Γ v y -ové souřadnici
- o_{3a} ... y -ový rozměr okraje zlomu \mathbf{f}_Γ , kde se funkce mění hladce z 0 na 1
- o_{3b} ... okraj uvažovaný analogicky jako v příadě o_b
- β ... úhel naklonění směru lámání vůči y -ové souřadnici



Obr. 6: V geofyzice užívané úhly (názvy se většinou nepřekládají).

Tento případ už zahrnuje reálné zlomy, abychom je správně popsali, zavádíme úhly (viz. obrázek 6) jednoznačně určující naklonění zlomu a směr skluzu včetně

označení, které se běžně užívá v geofyzikálních publikacích (podrobnější popis těchto úhlů lze najít např. v knize J.Zahradníka [9]).

Použijeme stejnou skalární funkci v proměnných (x, z) jako ve 2D případě, tu nyní označíme jako f_{2D} , a v třetím rozměru y si ji dodefinujeme podobným způsobem jako 2D funkci ve složce p_1

$$f(x, y, z) \equiv \begin{cases} 0 & |y - y_0| > d_3 \\ f_{2D}(x, z) & |y - y_0| < d_3 - o_3 \\ f_{2D}(x, z) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{|y - y_0| - d_3 + o_3}{o_3} \right) & d_3 - o_3 < |y - y_0| < d_3, \end{cases} \quad (6.5)$$

kde $o_3 = o_{3a} + p_2(o_{3b} - o_{3a})$ je funkce definovaná analogicky jako funkce o ve 2D. Tuto 3D funkci je nyní potřeba fourierovsky transformovat

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x, k_y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-ik_y y} dy = \frac{f_{2D}(x, z)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{y_0 - d_3 + o_3}^{y_0 + d_3 - o_3} e^{-ik_y y} dy \right. \\ &+ \int_{y_0 + d_3 - o_3}^{y_0 + d_3} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{y - y_0 - d_3 + o_3}{o_3} \right) e^{-ik_y y} dy \\ &\left. + \int_{y_0 - d_3}^{y_0 - d_3 + o_3} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{-y + y_0 - d_3 + o_3}{o_3} \right) e^{-ik_y y} dy \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Po technických úpravách bychom dostali

$$\widehat{f}(x, k_y, z) = \frac{f_{2D}(x, z) \sqrt{2\pi}^{\frac{3}{2}}}{(\pi^2 - k_y^2 o_3^2) k_y} \sin \left[\frac{k_y (2d_3 - o_3)}{2} \right] \cos \left(\frac{k_y o_3}{2} \right) [\cos(k_y y_0) - i \sin(k_y y_0)]. \quad (6.7)$$

Zbývá dopočítat limity v bodech $k_y = 0$ a $k_y = \pm \frac{\pi}{o_3}$, což můžeme provést například L'Hospitalovým pravidlem

$$\begin{aligned} \lim_{k_y \rightarrow 0} \widehat{f}(x, k_y, z) &= \frac{f_{2D}(x, z)}{\sqrt{2\pi}} (2d_3 - o_3) \\ \lim_{k_y \rightarrow \pm \frac{\pi}{o_3}} \widehat{f}(x, k_y, z) &= -\frac{f_{2D}(x, z)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(\pi \frac{d_3}{o_3}) o_3}{2} \left[\cos \left(\pi \frac{y_0}{o_3} \right) \mp i \sin \left(\pi \frac{y_0}{o_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Tuto skalární funkci opět vynásobíme maximálním posunutím M na zlomové ploše Γ a dále vektorem $\mathbf{t} = (\cos \alpha \sin \beta, \cos \beta, -\sin \alpha \sin \beta)$, který vyjadřuje směr posunutí na zlomu

$$\widehat{\mathbf{f}} = M \widehat{f} \mathbf{t}. \quad (6.9)$$

6.3 Funkce pro vlnový problém

V tomto problému uvažujeme funkci časově závislou, a to tím způsobem, abychom vyjádřili postupné praskání z místa vzniku trhliny do místa, kde již pevnost Země zamezí dalšímu šíření trhliny. Zdefinujeme si nejprve skalární funkci

$$g(t, p_1, p_2) \equiv \begin{cases} 0 & t < \frac{\xi}{v_S} \\ \frac{1}{t_r} \left(t - \frac{\xi}{v_S} \right) & t > \frac{\xi}{v_S} \wedge t < \frac{\xi}{v_S} + t_r f \\ f & t > \frac{\xi}{v_S} + t_r f, \end{cases} \quad (6.10)$$

kde $\xi = d_1(p_1 + 1)$ je proměnná podél šíření trhliny, t_r vyjadřuje náběhový čas maximální hodnoty trhliny a v_S je 90% rychlosti šíření s-vln (uvažujeme hodnotu 3,6 km/s). Uvedená skalární funkce f je buď pro 2D případ definovaná v (6.3), nebo pro 3D v (6.5), přičemž v 3D případě bychom měli navíc u funkce g napsat závislost na složce y a následně ji transformovat na $\hat{g}(t, p_1, p_2, k_y)$. Časový průběh 2D funkce g si lze prohlédnout ve formě filmu na přiloženém CD.

Jako obvykle funkci na závěr vynásobíme amplitudou M a vektorem \mathbf{t} , vyjadřujícím směr posunutí na zlomu

$$\mathbf{g} = M g \mathbf{t}. \quad (6.11)$$

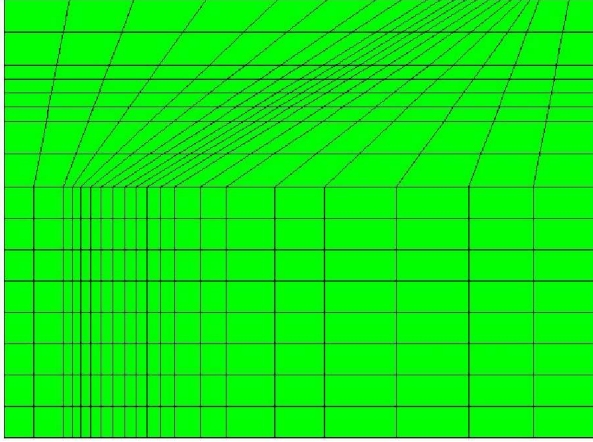
7 Numerické metody

Pro prostorovou diskretizaci jsme ve 2D modelech zvolili metodu konečných prvků. V případě 3D jsme na dvoudimenzionální oblasti se souřadnicemi x a z opět využili metodu konečných elementů a v souřadnici y jsme provedli spektrální rozklad pomocí Fourierovy transformace.

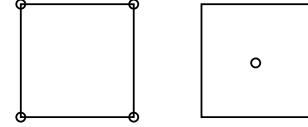
7.1 Metoda konečných prvků

Výpočetní síť byla vždy adaptována na konkrétní umístění a natočení zlomu, což ukazuje obrázek 7. S ohledem na lokální chování Země se prvky zvětšovaly se vzdáleností od zlomu a zároveň v závislosti na úhlu α bylo kromě standardních obdelníkových použito i lichoběžníkových elementů.

Je-li oblast Ω pokryta množinou prvků \mathcal{T}_h a označíme-li si B_1 a B_2 jako množiny bodů ležících na hranicích Γ_1 a Γ_2 , můžeme následně definovat prostory konečných



Obr. 7: Sít adaptovaná na zlom

Obr. 8: Používané elementy pro u_i a τ_i

prvků jako

$$\begin{aligned} V_h &\equiv \left\{ \mathbf{v} \in [\mathcal{C}(\Omega)]^2; v_i|_K \in Q_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h, i = x, z; \mathbf{v}(N) = 0 \forall N \in B_2 \right\} \\ P_h &\equiv \left\{ \mathbf{p} \in [L^2(\Omega)]^3; p_i|_K = \text{konst.} \forall K \in \mathcal{T}_h, i = xx, xz, zz \right\}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

tedy pro posunutí jsou použity spojité bilineární prvky a pro napětí $\boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ nespojitě, po částech konstantní prvky.

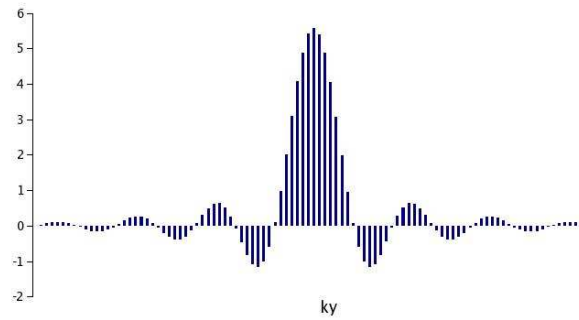
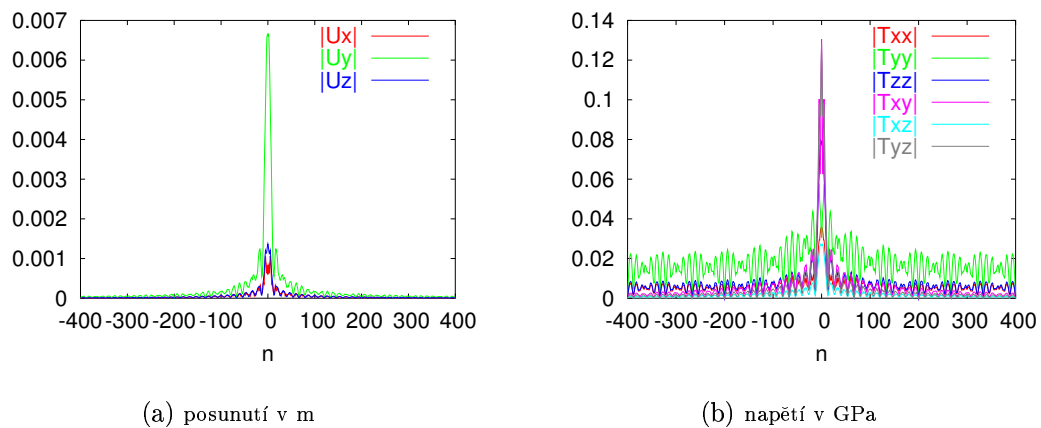
Dimenzi vektoru \mathbf{v} a tenzoru \mathbf{p} jsme uvedli pouze pro 2D případ. Ve třech dimenzích pak nejenže vzroste počet souřadnic, ale také díky použití Fourierovy transformace, každá funkce přejde na její komplexní obraz, a tím se zdvojnásobí počet neznámých. Diskutované dimenze jsou potom 6 a 12.

Obrázek 8 ukazuje stupně volnosti jednotlivých elementů. Poznamejme, že při použití prvků s vyššími stupni volnosti se výsledky nikterak neměnily, a tedy s ohledem na snížení náročnosti výpočtů, jsme zvolili tyto základní aproximace.

7.2 Diskretizace Fourierovy transformace

O transformaci samotné jsme se již zmínili v kapitole o spektrálním rozkladu, nyní si už jen vyjasněme její praktické použití. Po aplikaci Fourierovy transformace (5.1) provádíme výpočet pomocí 2D konečných prvků pro zvolený počet N_F Fourierových koeficientů k_y a potom použijeme zpětnou Fourierovu transformaci (5.2), kde integrál nahrazujeme konečnou sumou

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\frac{N_F}{2}}^{\frac{N_F}{2}} \hat{\mathbf{v}}(x, nk_{step}, z) e^{ink_{step}y} k_{step}, \quad (7.2)$$

Obr. 9: Diskrétní Fourierův obraz funkce zlomu f .Obr. 10: Typický průběh absolutních hodnot Fourierových obrazů, kde pro každé n jsme vzali příslušnou maximální hodnotu z 2D oblasti (x, z) .

kde k_{step} značí zvolený krok k_y .

Na obrázku 9 vidíme příklad Fourierova obrazu funkce zlomu f , který jsme do spektrální oblasti převedli analyticky, ale následně jej uvažujeme jen pro diskrétní hodnoty Fourierova koeficientu k_y , což vyjadřujeme jednotlivými sloupci. Každý takový sloupec tedy vyjadřuje provedení jednoho výpočtu metodou konečných prvků.

Uveďme ještě možné chyby plynoucí ze špatné spektrální diskretizace. Zvolení příliš velkých kroků k_{step} vede k prvnímu druhu chyby, a tou je opakující se obraz ve složce y . Tato periodicitu zde vzniká v důsledku toho, že místo Fourierovy transformace ve skutečnosti po diskretizaci používáme Fourierovy řady. Chyba druhého druhu se týká oscilací hodnot a vzniká z důvodu malého rozsahu k_y . Tato chyba je obsažena ve všech výsledcích, nicméně pro posunutí ji lze snížit pod mez viditelnosti, naproti tomu na obrázcích výsledného rozložení napětí se nám ji většinou nepodařilo dostatečně zmenšit. Důvod, proč se tento problém objevuje právě u napětí a nikoli u posunutí, je ten, že napětí má strmější vzrůst hodnot v y -ovém směru a blíží se tedy více delta funkci, která má za Fourierův obraz konstantu. Pro ilustraci právě

řečeného ještě uveďme obrázky 10, ukazující typický průběh absolutních hodnot Fourierových obrazů posunutí a napětí, které jsme vytvořili tím způsobem, že jsme pro každé n vzali příslušnou maximální hodnotu z 2D oblasti (x, z) .

7.3 Časová diskretizace

Ve viskoelastickém a vlnovém problému máme rovnice s časovými derivacemi, a je proto nutné, kromě použití uvedených numerických schémat v prostoru, diskretizovat také časovou proměnnou. Ve viskoelastickém případě se jedná o člen $\partial_t \boldsymbol{\sigma}$ a v případě vlnovém vznikne potřeba diskretizovat kvůli $\partial_{tt} \mathbf{u}$. Na první derivaci použijeme standardní schéma Crank-Nicolsonové, tedy pokud uvažujeme rovnici tvaru

$$\partial_t A(x, t) + B(x, t) = 0, \quad (7.3)$$

pak po její diskretizaci dostáváme

$$\frac{A(x, t_{i+1}) - A(x, t_i)}{\Delta t} + \frac{B(x, t_{i+1}) + B(x, t_i)}{2} = 0. \quad (7.4)$$

Konkrétně pro rovnici maxwellovské reologie máme

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}^{i+1} - \boldsymbol{\sigma}^i}{\Delta t} + \frac{\mu}{2\eta}(\boldsymbol{\sigma}^{i+1} + \boldsymbol{\sigma}^i) + \frac{\mu^2}{\eta} \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{u}^i) - \frac{1}{3} \nabla \cdot (\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{u}^i) \mathbf{I} \right] = 0. \quad (7.5)$$

Pro rovnici s druhou časovou derivací použijeme implicitní schéma, tedy názorně pro rovnici tvaru

$$\partial_{tt} A(x, t) + B(x, t) = 0 \quad (7.6)$$

získáváme diskretizaci

$$\frac{A(x, t_{i+1}) - 2A(x, t_i) + A(x, t_{i-1}))}{(\Delta t)^2} + \frac{B(x, t_{i+1}) + B(x, t_{i-1}))}{2} = 0. \quad (7.7)$$

Pro naší vlnovou hyperbolickou rovnici potom obdržíme

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{u}^{i+1} - 2\mathbf{u}^i + \mathbf{u}^{i-1}}{(\Delta t)^2} - \frac{1}{2\rho_0} \nabla \cdot [\lambda \nabla \cdot (\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{u}^{i-1}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{u}^{i-1})] \\ & - \frac{1}{2} \{ [\nabla \cdot (\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{u}^{i-1})] g_0 \mathbf{e}_z - \nabla [g_0 \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{u}^{i+1} + \mathbf{u}^{i-1})] \} = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Stabilita obou schémat nezáleží na délce zvoleného kroku, tedy jsou tzv. nepodmínečně stabilní.

Poznamenejme ještě, že v obou případech jsou tyto rovnice slabě zformulovány, tedy jsou násobeny testovacími funkcemi a integrovány přes Ω . U viskoelastického případu se na tvaru rovnice nic nemění, ale v hyperbolické rovnici se u druhého členu převede divergence na testovací funkci. Tyto úpravy jsou diskutovány v předchozích kapitolách, a proto je s ohledem na výklad časové diskretizace v těchto místech neprovádíme.

7.4 Praktická implementace

Numerické simulace byly prováděny pomocí upraveného kódu, původně určeného pro řešení Navier-Stokesových rovnic, který naprogramoval Dr. Jaroslav Hron. Úpravy se týkaly mnoha částí programu, pro 2D případ to byla především změna rovnic, zavedení funkce zlomu a tvorba adaptace výpočetní sítě. Vzhledem k nelinearitě v Navier-Stokesových rovnicích jsme zároveň optimalizovali efektivitu výpočtu pro náš lineární případ. V 3D případě to pak byly rozsáhlé úpravy spojené s Fourierovou transformací, především přidání zpětné transformace a vytváření 3D sítí. K programu ještě dodejme, že již obsahoval časovou diskretizaci, kterou jsme využili v případě viskoelastickém a mírně upravili v případě vlnovém. Pro řešení maticových rovnic používá lineární řešič metodu GMRES s předpodmíněním ILU, kterou přebírá z knihovny *splib*.

Výstupem programu jsou soubory obsahující informace o výpočetní síti a dosažených výsledcích. Ty jsme potom zpracovávali do formy grafů pomocí *GMV* utilit [12]. V časových problémech jsme také vytvářeli filmy ukazující vývoj veličin, a to za pomoci utility *gmvmpeg* [13]. Pro 3D problémy jsme vytvořili program na zpětnou transformaci, který po výpočtu 2D souborů převedl hodnoty na 3D síť a výsledky opět uložil ve tvaru vhodném pro zpracování v *GMV* utilitách.

8 Geofyzikální modely

V rámci této kapitoly se budeme věnovat numerickým výsledkům, které byly ve většině případů motivovány jinde uvedenými modely. Budeme proto moci provést porovnání našich výsledků s jinými pracemi a otestovat tak správnost námi užívané metody. Prováděli jsme i další výpočty, které nám potvrzovaly správnost našich výsledků, zde jsme ale všechny neuvedli, neboť jsme chtěli uveřejnit především ty nejzajímavější.

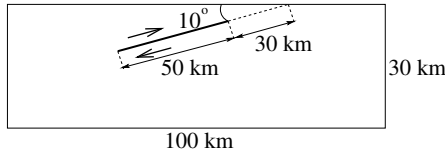
8.1 Testovací úloha ve 2D

Tento příklad je převzat z knihy R. Teisseyra [14] a sloužil nám k testování metody ve 2D. Základní geometrie oblasti je na obrázku 11. Jsou zde uvažovány konstantní hodnoty Laméových koeficientů a v porovnávaných výsledcích nejsou uvažovány členy vytvářející předpětí Země, nicméně na závěr tohoto příkladu budeme diskutovat, jak by se výsledky změnily, pokud bychom toto předpětí započítali. Pro tento model jsme speciálně upravili funkci zlomu \mathbf{f} , a to tak, že jsme ji ve složce p_1 zadefinovali podle uvedené knihy a v souřadnici p_2 rozšířili funkcí \cos^2 . Funkce f je potom

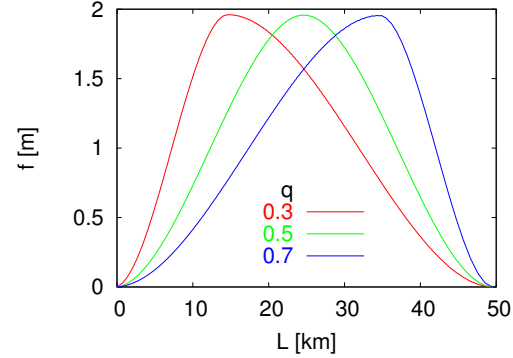
popsána vztahem

$$f(p_1, p_2, q) \equiv \cos^2\left(\frac{\pi}{2}p_2\right) \times \begin{cases} \frac{3q - 1 + p_1}{2q^3}(1 - p_1)^2 & (1 - p_1) \leq 2q \\ \frac{-p_1^3 + 3p_1 + 2 - 3q(p_1 + 1)^2}{2(1 - q)^3} & (1 - p_1) > 2q, \end{cases} \quad (8.1)$$

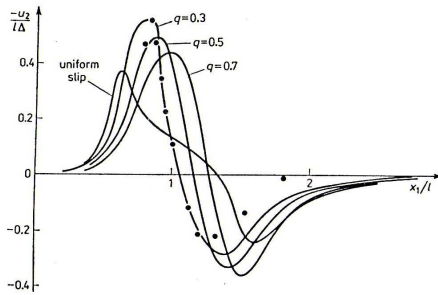
pro $p_1 \in [-1, 1]$, $p_2 \in [0, 1]$ a $q \in (0, 1)$. Grafy skluzu na zlomu pro tři koeficienty $q = 0.3, 0.5$ a 0.7 jsou uvedeny na obrázku 12.



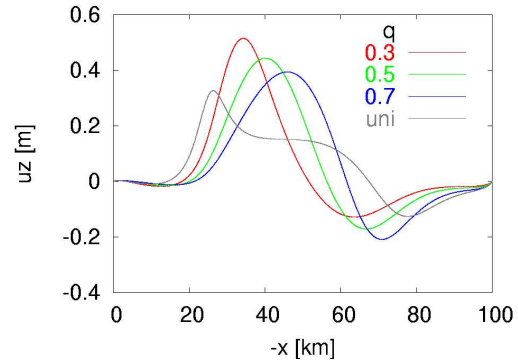
Obr. 11: Geometrie modelu se základními rozměry.



Obr. 12: Zadávané funkce zlomu f pro tři různé hodnoty parametru q . Na x -ové ose je vynesena vzdálenosti L od horního konce zlomu.



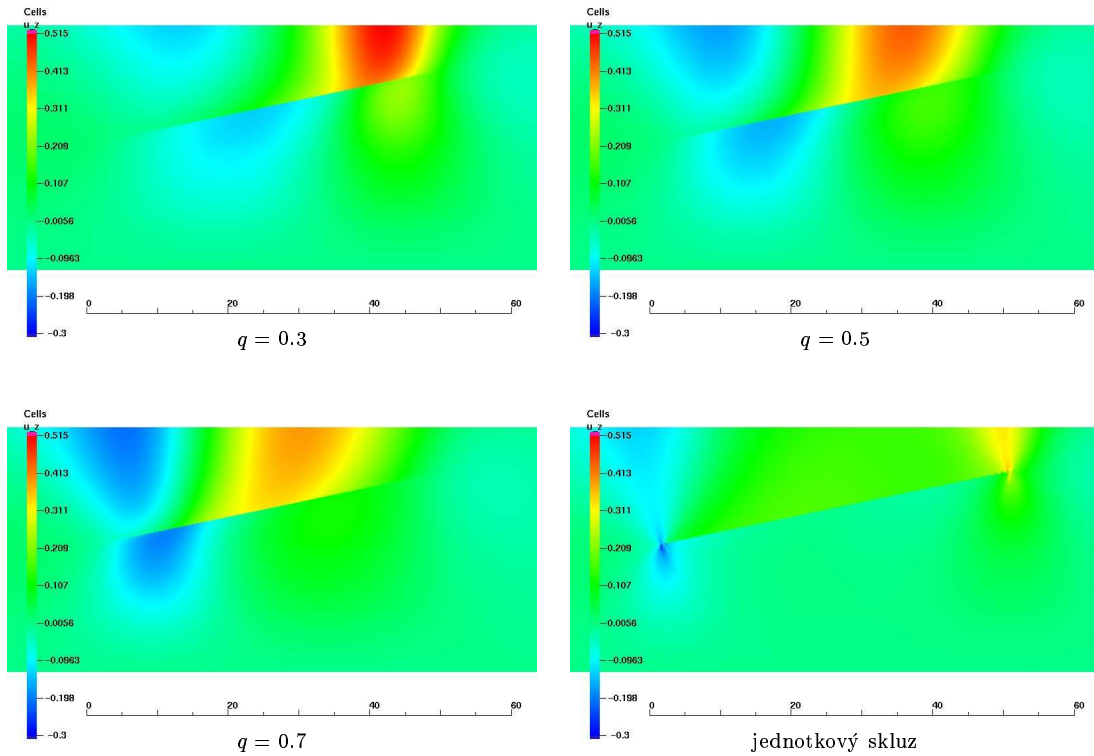
(a) Podle knihy R. Teisseyra



(b) Námí vypočtené hodnoty

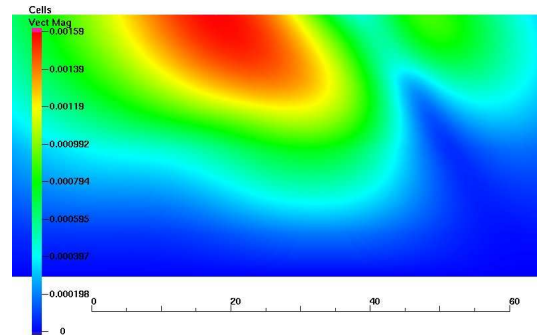
Obr. 13: Povrchové vertikální posunutí u_z pro tři různé hodnoty parametru q a pro jednotkový skluz. Na x -ové ose je vynesena vzdálenost od průniku směrnice zlomu s povrchem Země.

Námí dosažené výsledky jsou ve velice dobré shodě s výsledky uvedenými v knize [14], což můžeme porovnat na grafech povrchových vertikálních posunutí na obrázku 13. Obrázek 14 pak ukazuje grafy rozložení vertikálních posunutí na oblasti Ω . Doplňme ještě, že výpočet probíhal na síti s 55250 prvky a 209010 stupni volnosti.



Obr. 14: Vertikální posunutí u_z [m] na oblasti Ω pro tři různé hodnoty parametru q a pro jednotkový skluz. Rozměrové měřítko je v km.

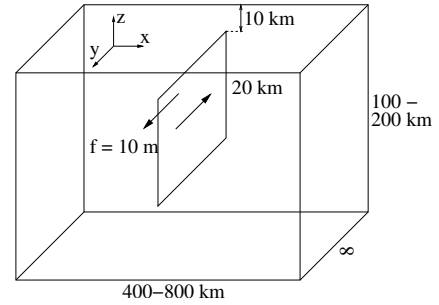
Na závěr tohoto příkladu se zmíníme o vlivu předpětí Země, které v matematické části komplikovalo důkazy a bylo kvůli němu třeba použít Kornovu nerovnost. Z této nerovnosti jsme dostávali podmínky na velikosti materiálových parametrů Země s ohledem na Kornovu konstantu, pro kterou ale bohužel nemáme explicitní odhady. Je proto důležité zjištění, že započtení předpětí nemá téměř žádný vliv na výsledky. Demonstruje to obrázek 15, na němž vidíme normu rozdílu posunutí při uvažování předpětí a posunutí bez předpětí. Porovnáme-li hodnotu maximálního posunutí na zlomu ($2m$) s největším rozdílem na tomto grafu ($1.58mm$), vidíme, že rozdíly způsobené předpětím jsou o tři řády menší, než velikost celkového posunutí.



Obr. 15: Norma rozdílu výsledných posunutí [m] při započteném předpětí Země a bez předpětí. Je zde zobrazena stejná část oblasti Ω jako na obrázku 14. Uvažovali jsme zlom s parametrem $q = 0.3$.

8.2 2D/3D test

V tomto modelu uvažujeme opět nekonečně dlouhý zlom v y -ové složce, který ale tentokrát směřuje do třetího rozměru. Počítáme zde proto již se třemi složkami posunutí a 6 složkami napětí, nicméně není třeba zde používat Fourierovu transformaci a provádět výpočet pro více koeficientů k_y . Laméovy koeficienty jsou konstantní a není započteno předpětí Země. Rozměry oblasti je možno vyčíst z obrázku 16.



Obr. 16: Geometrie modelu se základními rozměry.

V tomto modelu jsme použili 2D funkci zlomu (6.4), kde ale uvažujeme 3D vektor \mathbf{t} . Parametry zlomu jsou tedy: $x_0 = 0$, $z_0 = 20\text{ km}$, $d_1 = 10\text{ km}$, $d_2 = 10\text{ km}$, $o_a = 0$, $o_b = 10\text{ km}$, $M = 10\text{ m}$, $\alpha = 90^\circ$ a $\beta = 0$.

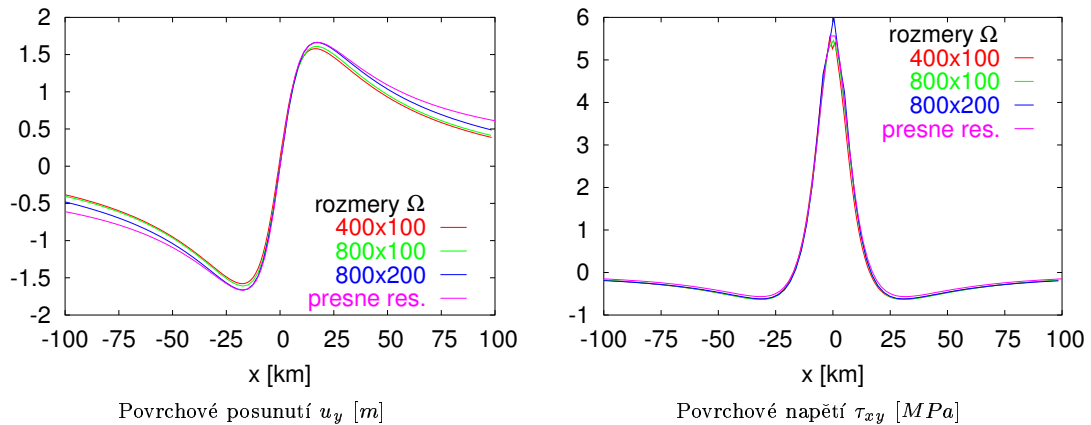
Model je opět z knihy R. Teisseyra [14], kde jsou uvedena analytická řešení

$$u_y(x) = \frac{10}{\pi} \left(\arctan \frac{30}{x} - \arctan \frac{10}{x} \right) \quad (8.2a)$$

$$\tau_{xy}(x) = -\frac{10}{\pi} \left(\frac{30}{x^2 + 30^2} - \frac{10}{x^2 + 10^2} \right) \quad (8.2b)$$

a můžeme je proto porovnat v grafech 17. Výpočet jsme provedli pro tři různé rozměry oblasti Ω , a i když výsledky nemůžeme plně ztotožnit s přesnými řešeními (8.2), lze říci, že při zvětšování výpočetní oblasti se hodnoty zpřesňovaly.

Výpočetní síť zde obsahovala 3800 prvků s 69234 stupni volnosti.



Obr. 17: Veličiny jsou zobrazeny pro tři různé rozměry výpočetní oblasti Ω a navíc je vždy uvedeno přesné řešení spočtené ze vztahů (8.2). Na x -ové ose je vynesena vzdálenost od zlomu.

8.3 Zemětřesení Kanto 1923

Model jsme převzali z knihy R. Teisseyra [14], kde je s jeho pomocí popisováno zemětřesení Kanto z roku 1923. Konečně se tedy dostáváme k realistickému modelu, kde již uvažujeme zlom plně 3D. Zároveň započítáváme předpětí a pro koeficienty rovnic používáme PREM (Preliminary Reference Earth Model), ten popisuje hloubkovou závislost hustoty a rychlosti šíření s-vln a p-vln označované jako v_s a v_p . Z těchto hodnot lze dopočítat Laméovy koeficienty pomocí vztahů

$$v_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad v_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (8.3)$$

Pro gravitační zrychlení a jeho gradient dostaneme hloubkovou závislost ze vzorce

$$g(z) = \frac{4\pi G}{z^2} \int_0^z \rho(\xi) \xi^2 d\xi. \quad (8.4)$$

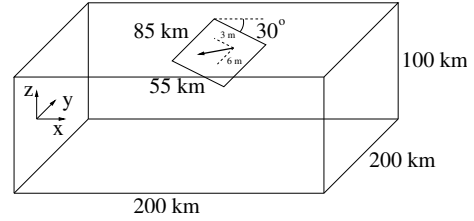
Parametry zlomu \mathbf{f} : $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 13.75\text{km}$, $d_1 = 27.5\text{km}$, $d_2 = 10\text{km}$, $d_3 = 42.5\text{km}$, $o_a = 0$, $o_b = 10\text{km}$, $o_{3a} = 2\text{km}$, $o_{3b} = 10\text{km}$, $M = 6.71\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$ a $\beta = 153.44^\circ$.

Vzhledem k tomu, že se jednalo o 3D problém s 18 neznámými, bylo v metodě konečných elementů použito pouze 2400 prvků s 35118 stupni volnosti. Výsledná 3D síť pak měla 470400 prvků.

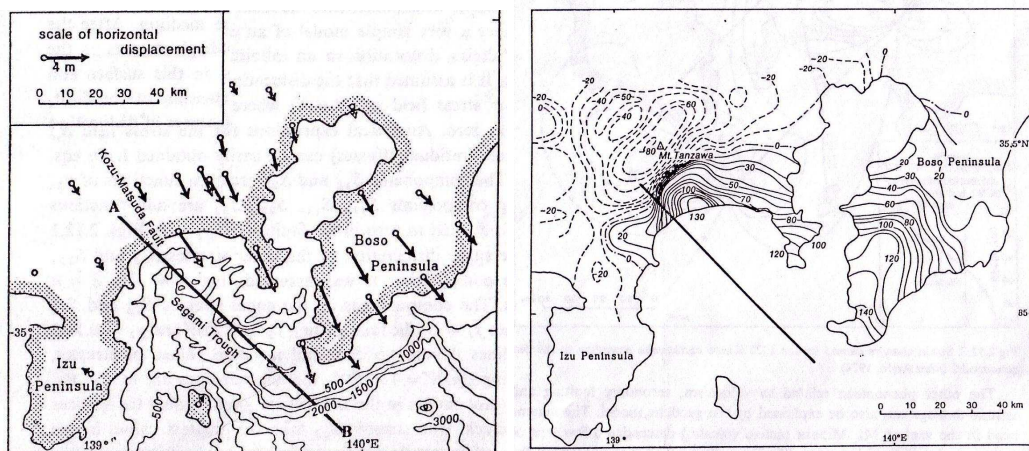
Vůči modelu uvažovanému v knize [14], jsme zde mírně změnili tvar skluzu volbou nenulového parametru o_{3a} , abychom se vyvarovali chyby druhého druhu diskretizace Fourierovy transformace (viz. kapitola o diskretizaci). Parametry $k_{step} = 0.0157$, $n = 200$ pak byly voleny s ohledem na průběh funkce $\hat{\mathbf{f}}$.

Na příložených obrázcích 19 a 20 jsme demonstrovali uspokojivou podobnost našich výsledků v porovnání s hodnotami vypočtenými v uvedené knize a navíc také s hodnotami naměřenými přímo na japonských ostrovech (ty byly uvedeny ve stejné knize). Zároveň je ale třeba uvést, že v knize [14] jsou uvažovány k výpočtu jiné hodnoty koeficientů než udané námi používaným PREM, a nemá proto smysl se pokoušet o naprosto přesné porovnání výsledků.

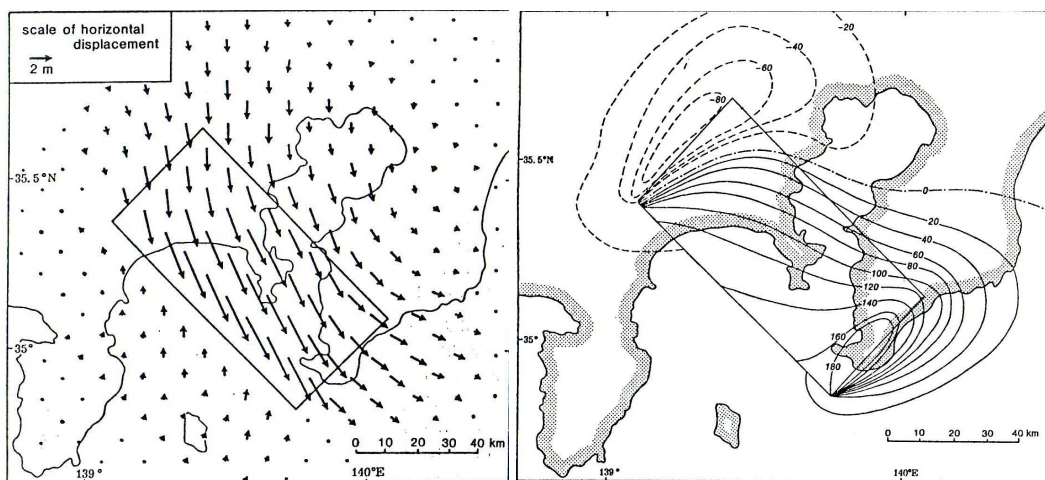
Poznamenejme ještě, že na tomto příkladu určitě stojí za povšimnutí, že složitá fyzikální realita byla popsána modelem s pouhým rovinným (téměř konstantním) skluzem, a přitom bylo dosaženo dobré shody s naměřenými výsledky.



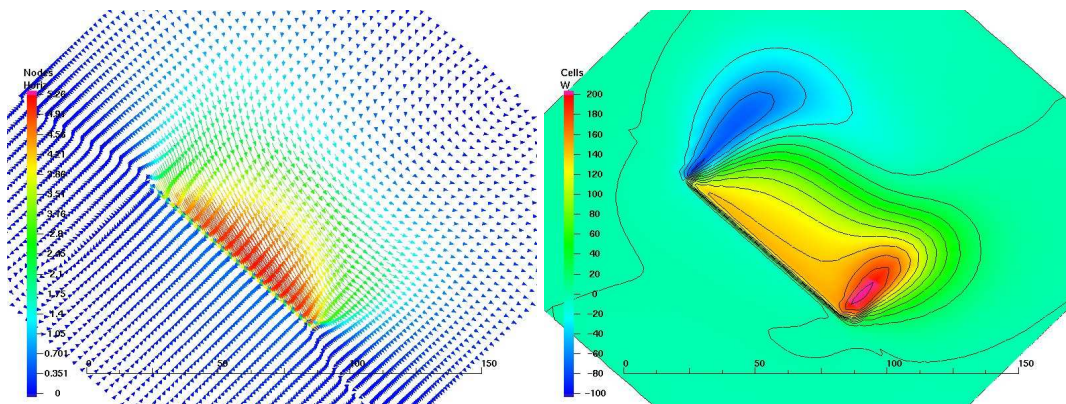
Obr. 18: Geometrie modelu se základními rozměry.



Naměřené hodnoty

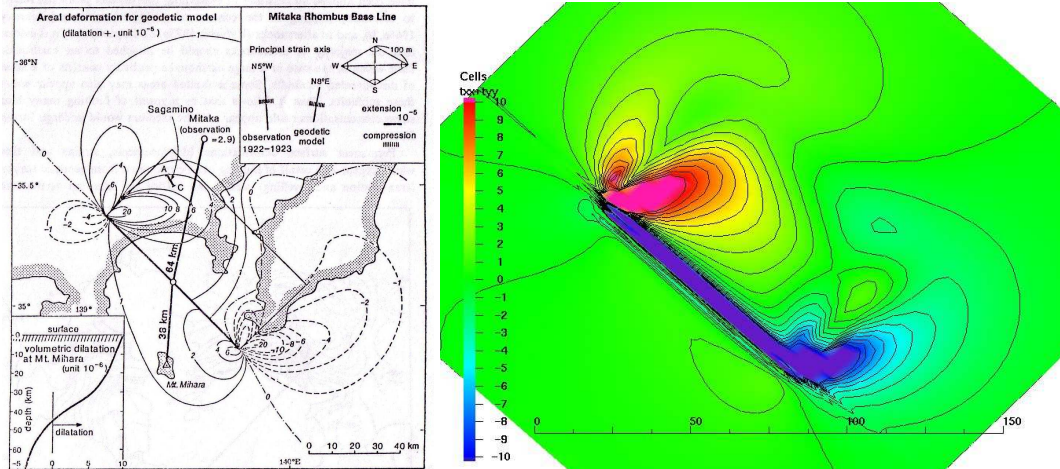


Vypočtené hodnoty podle knihy R. Teisseyra



Výsledky dosažené naším modelem

Obr. 19: Povrchové horizontální a vertikální posunutí. Vlevo vyznačují šipky délku a směr horizontálního posunutí v m, vpravo u vertikálních posunutí jsou hodnoty v cm.



Obr. 20: Povrchové deformační napětí $\tau_{xx} + \tau_{yy}$ v MPa. Vlevo je převzatý graf z knihy [14] a vpravo námi vypočtený výsledek.

8.4 Elastický model ve 3D

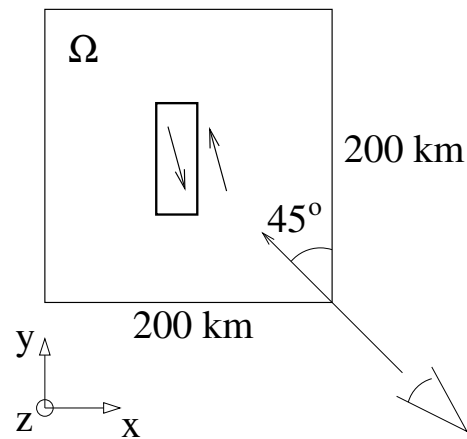
Parametry tohoto příkladu jsou smyšlené, výsledky neporovnáváme s jinými články, pouze zde chceme prezentovat možnosti, jenž nám poskytuje používaný program. Započítáváme předpětí a pro koeficienty rovnic používáme PREM.

Parametry zlomu jsou \mathbf{f} : $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 50\text{km}$, $d_1 = 20\text{km}$, $d_2 = 10\text{km}$, $d_3 = 10\text{km}$, $o_a = 10\text{km}$, $o_b = 20\text{km}$, $o_{3a} = 10\text{km}$, $o_{3b} = 20\text{km}$, $M = 1.0\text{m}$, $\alpha = -60^\circ$ a $\beta = 150^\circ$.

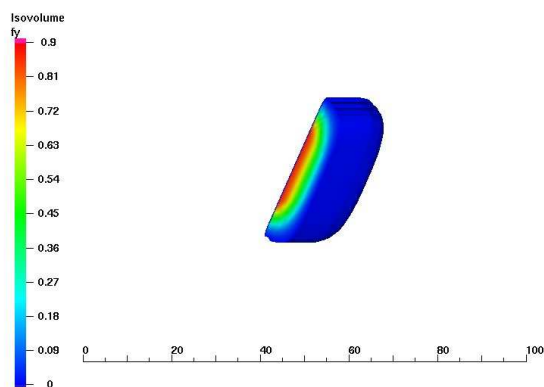
Parametry diskretizace Fourierovy transformace jsme zde volili $k_{step} = 0.005$, $n = 600$.

Výpočetní 2D síť zde obsahuje 3480 prvků s 63354 stupni volnosti. Výsledná 3D síť pak obsahuje 821280 prvků.

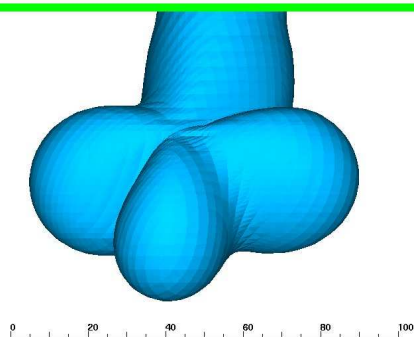
Na obrázku 21 můžeme vidět výpočetní oblast Ω s jejími rozměry, a zároveň je zde znázorněn pohled, ze kterého jsou následně prezentována všechna výsledná elastická posunutí na obrázku 22 a přírůstková napětí na obrázku 23. Zařadili jsem sem zároveň i obrázek, jak vypadala jedna složka zadávané funkce zlomu.



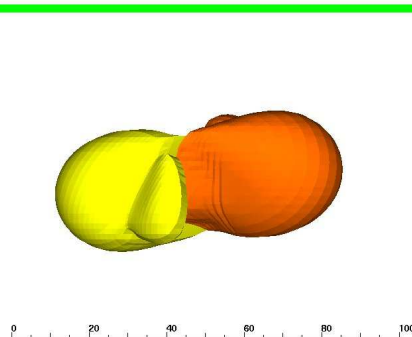
Obr. 21: Pohled na oblast zezhora. Mimo jiné je zde vyznačen pohled používaný dále při znázorňování výsledků. Hloubka výpočetní oblasti je taktéž 200km.



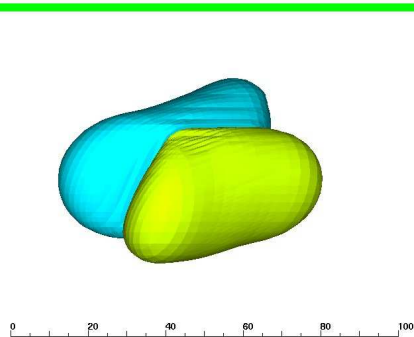
Funkce zlomu f_y je zobrazena jen v místech, kde je nenulová.
Navíc je zde vidět z celé oblasti Ω jen část $y > 0$.



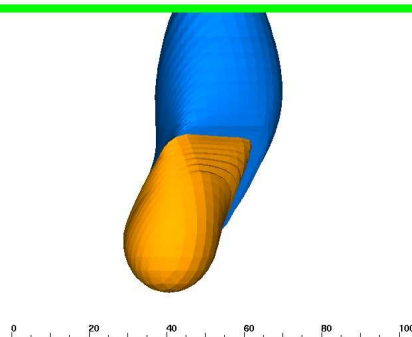
Celkového posunutí $|\mathbf{u}| = 5\text{cm}$.



Žlutá plocha znázorňuje $u_x = -5\text{cm}$, červená $u_x = 5\text{cm}$.

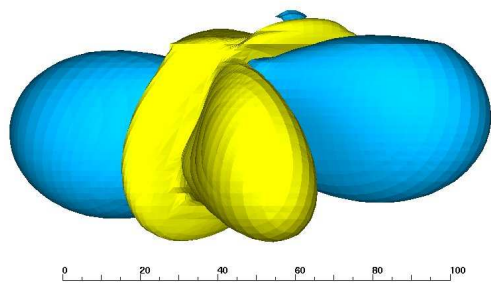


Modrá plocha znázorňuje $u_y = -5\text{cm}$,
zelená $u_y = 5\text{cm}$.

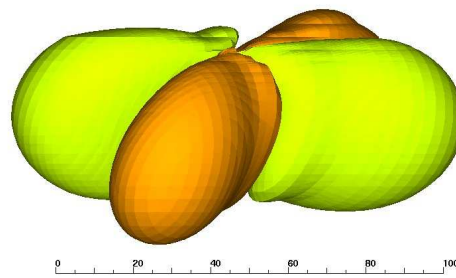


Modrá plocha znázorňuje $u_z = -5\text{cm}$,
oranžová $u_z = 5\text{cm}$.

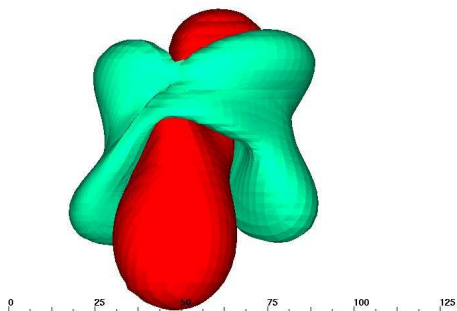
Obr. 22: Isoplochy výsledných posunutí z pohledu vyznačeném na obrázku 21. Zelený pruh označuje povrch Země.
Rozměrová měřítka jsou v km .



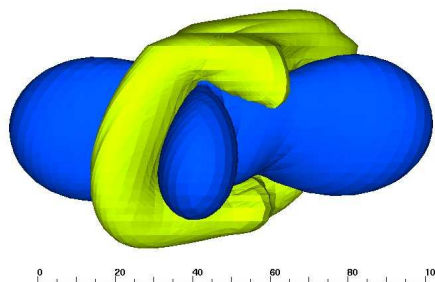
Modrá plocha znázorňuje $\tau_{xx} = -10^5 Pa$,
žlutá $\tau_{xx} = 10^5 Pa$.



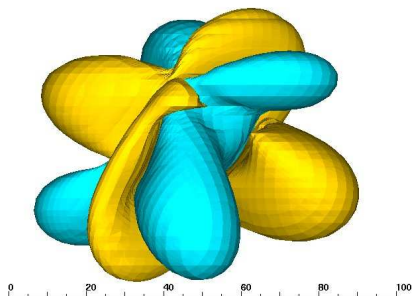
Zelená plocha znázorňuje $\tau_{yy} = -10^5 Pa$,
oranžová $\tau_{yy} = 10^5 Pa$.



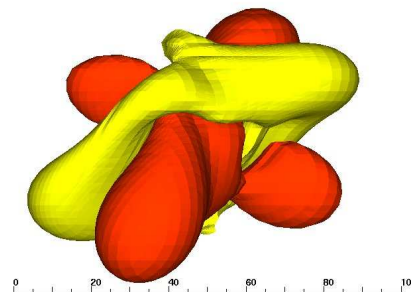
Zelená plocha znázorňuje $\tau_{zz} = -10^5 Pa$,
červená $\tau_{zz} = 10^5 Pa$.



Modrá plocha znázorňuje $\tau_{xy} = -10^5 Pa$,
zelená $\tau_{xy} = 10^5 Pa$.



Modrá plocha znázorňuje $\tau_{xz} = -10^5 Pa$,
oranžová $\tau_{xz} = 10^5 Pa$.



Žlutá plocha znázorňuje $\tau_{yz} = -10^5 Pa$,
červená $\tau_{yz} = 10^5 Pa$.

Obr. 23: Isoplochy výsledných napětí z pohledu vyznačeného na obrázku 21. Zelený pruh označuje povrch Země. Rozměrová měřítka jsou v *km*.

8.5 Viskoelastický 2D test

Dostáváme se k úloze zahrnující maxwellovskou reologii, a budeme se tedy věnovat časové relaxaci posunutí a napětí. Zadání je opět převzato z knihy R. Teisseyra [14]. V tomto modelu na Zemi nahlížíme odlišně než v předchozím, což činíme z důvodu potřeby oddělit dvě vrstvy, které se svým chováním výrazně liší. Na povrchu Země se nacházejí pevné desky, které jsou položeny na viskózním materiálu, proto rozdělíme oblast Ω na litosféru, kde budeme provádět výpočet pomocí Hookeova zákona, a na astenosféru, kde budeme uvažovat maxwellovskou reologii. Při pohledu na rovnice popisující zmíněné reologie si lze povšimnout, že pokud v maxwellovském případě vezmeme viskozitu $\eta \rightarrow \infty$, pak se nám rovnice zredukuje na hookeovskou reologii. Můžeme proto říci, že přechod mezi litosférickou a astenosférickou vrstvou způsobí pouze skok v koeficientu rovnic.

Výpočty jsme provedli pro tři různé zlomy:

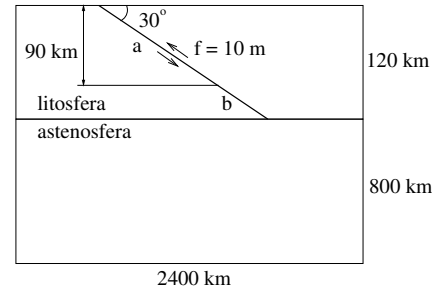
- (a) vedoucí z povrchu Země do hloubky 90 km ,
- (b) navazující zlom umístěný od hloubky 90 km až k astenosféře,
- (c) procházející napříč celou litosférou, tj. (a)+(b).

Umístění zlomů spolu s rozměry oblasti je možno nalézt na obrázku 24.

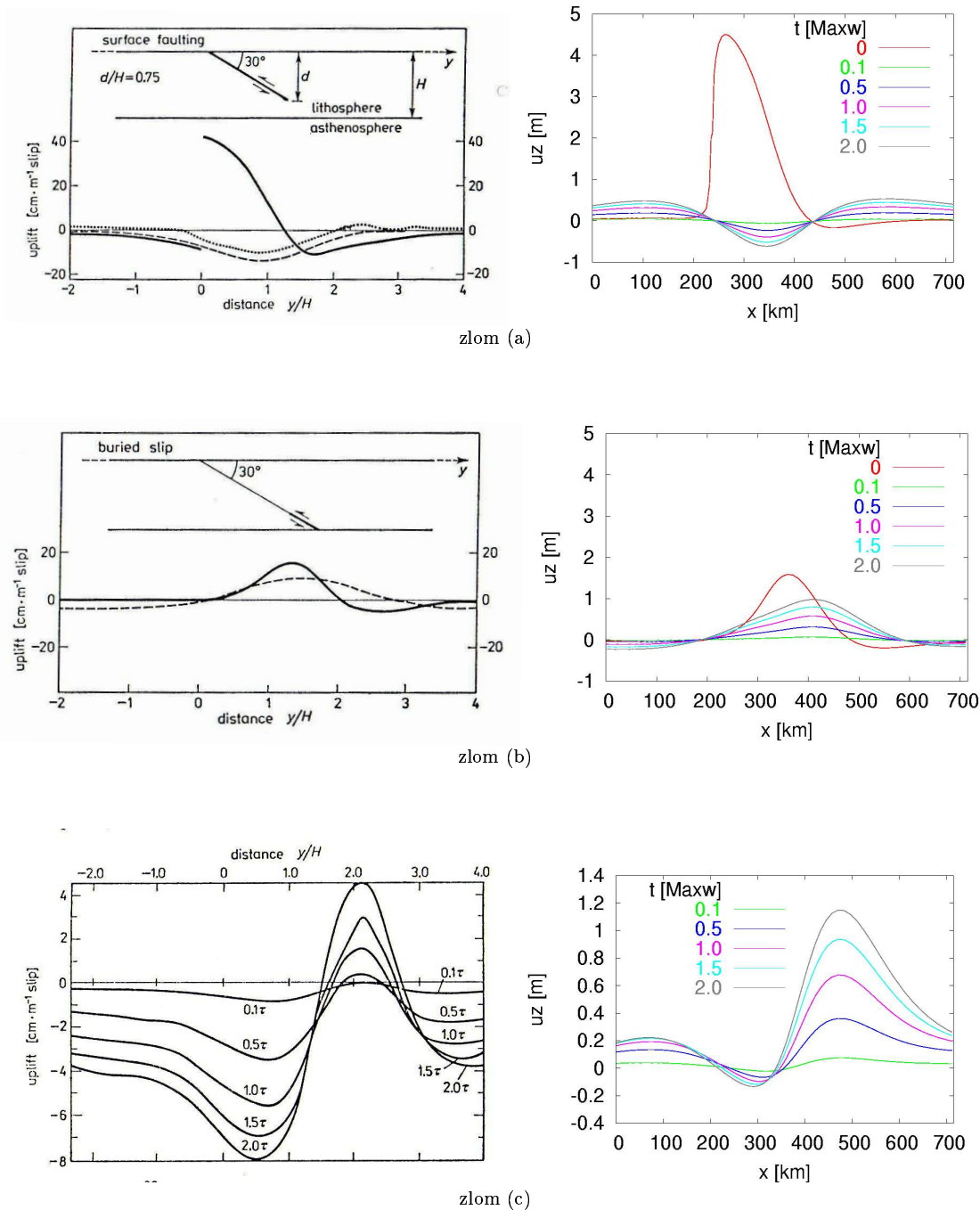
Pro astenosféru jsme volili viskozitu $\eta = 10^{22} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, ze které je dále určen Maxwellův čas $\tau = 2\eta/\mu = 23.8 \text{ kyr}$, tedy charakteristický čas relaxace.

Výpočetní síť zde obsahovala 7950 prvků s 40158 stupni volnosti.

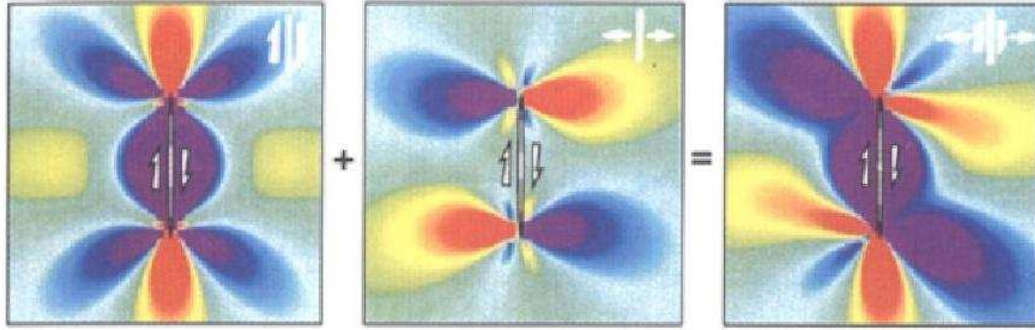
U tohoto časového modelu se musíme blíže zmínit o porovnání našich výsledků s převzatými grafy. Vyskytují se zde totiž velké neshody v případech zlomu (a) a (c). Důvod, proč u zlomu (b) náš výsledek souhlasí, je, že tento zlom nedosahuje na povrch Země. Problémy spojené se zlomy, které se dotýkají povrchu Země, jsou zapříčiněny tím, že naším modelem nelze vytvořit posunutí, které by na hranici Γ_1 mělo nespojitost, toto je možné pouze uvnitř oblasti. Je to z důvodu okrajové podmínky $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}$, která je obsažena přímo ve slabě zformulovaných rovnicích a svazuje tak hodnoty v hraničních bodech. Chyba je obsažena již v elastickém posunutí v čase $t = 0$, kde nalevo od zlomu hodnoty povrchového vertikálního posunutí nesouhlasí, což se pak, po odečtení výrazně větších hodnot elastického posunutí, samozřejmě promítá do viskoelastických relaxací. Poznamenejme, že podobné nepřesnosti ve výsledcích se objevují již v modelu zemětřesení Kanto, avšak vzhledem k tomu, že v nečasovém problému nás zajímají jen elastická posunutí, není tento vliv tak zřetelný.



Obr. 24: Geometrie modelu se základními rozměry, a, b značí dvě uvažovaná místa zlomu.



Obr. 25: Povrchové vertikální posunutí. Nalevo jsou grafy z knihy [14], napravo naše výsledky. Na převzatých grafech v případě (a) a (b) jsou nepřerušovanými čarami označena elastická posunutí v čase $t = 0$ a přerušovanými čarami posunutí v čase $t = 2\tau$, od kterých je, jako ve všech ostatních grafech pro $t \neq 0$, odečteno elastické posunutí. U zlomu (c) jsou uvedena pouze viskoelastická posunutí. Pro naše grafy platí $H = 120\text{km}$ a $|f| = 10m$.



Obr. 26: Zleva je postupně uvedeno smykové napětí $\Delta\tau = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$, normálové napětí $\Delta\sigma = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ a jejich součet tzn. Coulombovo napětí ΔCFF . Tyto výsledky jsou převzaty z článku [17].

8.6 Coulombovo napětí

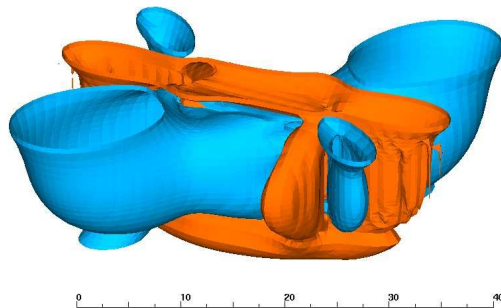
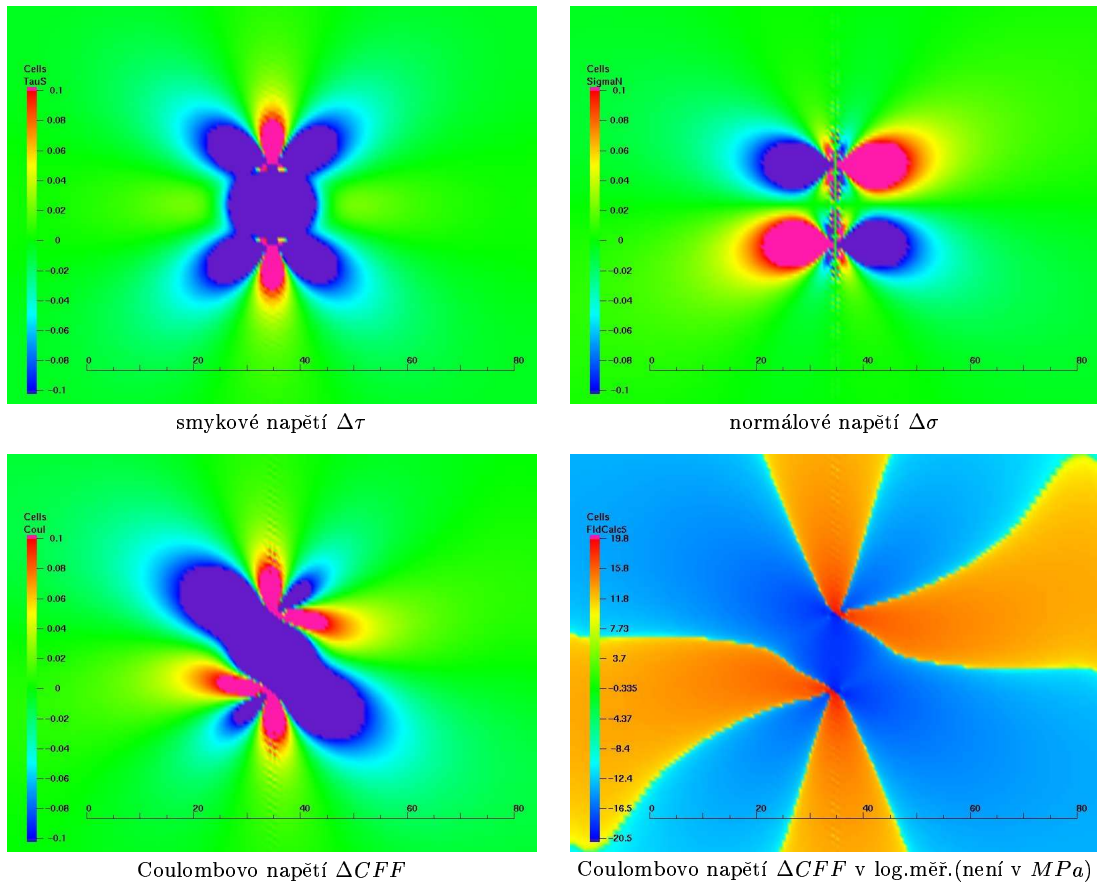
Jak jsme již řekli v úvodní kapitole, zlomy se nejčastěji vyskytují na rozhraní dvou litosférických desek. Pokud na nějakém místě dojde k porušení zlomu a vznikne zemětřesení, pak se v jeho okolí změní rozložení napětí. To může zároveň ovlivnit ostatní neaktivní zlomy a po čase tak může dojít k dalším posunům a zemětřesením. Jestliže spočítáme přírůstek napětí, který vznikne při prvním zemětřesení, je možné zároveň získat změnu tzv. Coulombova napětí, které určuje na jakých místech a pro jak nakloněné zlomy je větší nebezpečí skluzu. Coulombovo napětí se tedy vyhodnocuje z rozložení napětí v oblasti, přičemž je spočítáno pro konkrétně nakloněný a směřující neaktivní zlom. Uveďme nyní vzorec pro výpočet přírůstku Coulombova napětí

$$\Delta CFF = \Delta\tau + \mu' \Delta\sigma, \quad (8.5)$$

kde $\Delta\tau = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ je změna smykového napětí, $\Delta\sigma = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ je změna normálového napětí, vektory \mathbf{n} a \mathbf{t} jsou normála a tečna k neaktivnímu zlomu a μ' je koeficient tření obvykle volený 0.6. Na obrázku 26, převzatém z článku [17], můžeme vidět, jak tato napětí vypadají v případě, že normálu \mathbf{n} a tečnu \mathbf{t} neaktivního zlomu uvažujeme ve stejných směrech jako u zlomu, který tato napětí vyprodukoval. Stejný problém jsme řešili pomocí našeho programu a námi dosažené výsledky si lze prohlédnout na obrázku 27, kde jsme navíc pro představu, jak vypadá rozložení coulombova napětí v 3D, přiložili graf znázorňující jeho isoplochy.

Konkrétní parametry zlomu \mathbf{f} jsou: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 7.5\text{km}$, $d_1 = 5\text{km}$, $d_2 = 5\text{km}$, $d_3 = 8\text{km}$, $o_a = 0$, $o_b = 5\text{km}$, $o_{3a} = 0.1\text{km}$, $o_{3b} = 8\text{km}$, $M = 0.6m$, $\alpha = 90^\circ$ a $\beta = 180^\circ$.

Parametry Fourierovy diskretizace jsme s ohledem na ostré náběžné hrany funkce \mathbf{f} zvolili $k_{step} = 0.0158$, $n = 1600$, ale i s tak velkým počtem Fourierových koeficientů je na obrázcích napětí dobře viditelná chyba druhého druhu (viz. kapitola o diskretizaci).



Isoplochy Coulombova napětí, modrá znázorňuje $\Delta CFF = -0.1MPa$, červená $\Delta CFF = 0.1MPa$.

Obr. 27: Námi dosažené výsledky s hodnotami v MPa . Rozměrová měřítka jsou v km .

Výpočetní 2D síť obsahuje 1820 prvků s 33342 stupni volnosti. Výsledná 3D síť pak obsahuje 1019200 prvků.

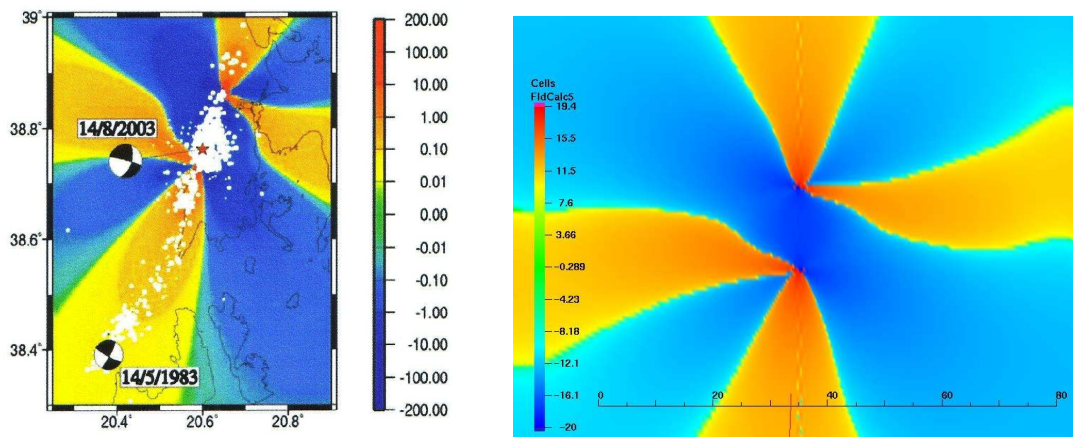
8.7 Lefkada a Cephalonia

Praktický příklad na počítání Coulombova napětí se vyskytl při zemětřesení ze 14.srpna 2003 na ostrově Lefkada v Řecku. Údaje o umístění a naklonění zlomové plochy jsme převzali z článku V.G.Karakostase a spol.[15]. Pro koeficienty rovnic jsme použili PREM.

Parametry zlomu \mathbf{f} jsou: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 7.5\text{km}$, $d_1 = 5.196\text{km}$, $d_2 = 5\text{km}$, $d_3 = 8\text{km}$, $o_a = 0$, $o_b = 5\text{km}$, $o_{3a} = 0.1\text{km}$, $o_{3b} = 8\text{km}$, $M = 0.6\text{m}$, $\alpha = 60^\circ$ a $\beta = -175^\circ$.

Parametry diskretizace Fourierovy transformace jsou $k_{step} = 0.0632$, $n = 800$.

Kompletní orientace Lefkady je $(18^\circ, 60^\circ, -175^\circ)$, kde úhly značí postupně (strike, dip, slip), a blíže je o těchto číslech jednoznačně popisujících natočení skluzu pojednáno v kapitole o zlomové funkci (také viz. obrázek 6). Coulombovo napětí počítáme na orientaci zlomu Cephalonia $(28^\circ, 82^\circ, 172^\circ)$, jehož střed je umístěn v souřadnicích $x_1 = -1.31$, $y_1 = -37.47$. Výsledek získaný tímto modelem lze porovnat s převzatým grafem na obrázku 28.



Výsledek převzatý z článku [15], je umístěný a natočený podle zemských souřadnic, hodnoty jsou v 10^5Pa .

Námi vypočtený graf bez natočení do správných zemských souřadnic. Rozměrové měřítko je v km . Na spodním okraji obrázku je červeně vyznačeno místo Cephalonia zlomu.

Obr. 28: Přírůstkové Coulombovo napětí ΔCFF v hloubce středu zlomu (7.5 km) v log.měř.

Z dalších měření však vyplynulo, že zde byly zemětřesná ohniska přinejmenším dvě, o čemž pojednává článek J.Zahradníka a spol.[16], ze kterého jsou převzaty následující nové údaje. Orientace Lefkady $(17^\circ, 88^\circ, -177^\circ)$, rozměry zlomové plochy $18\text{km} \times 9\text{km}$, $|\mathbf{f}| = 0.6\text{m}$. Orientace Cephalonie $(24^\circ, 74^\circ, 164^\circ)$, rozměry zlomové plochy $15\text{km} \times 7.5\text{km}$, $|\mathbf{f}| = 0.9\text{m}$. Přičemž my jsme se pokusili namodelovat tento případ pouze s myšlenkou jistého přiblížení a chceme zde zároveň upozornit na nedostatek naší metody, který lze vyřešit použitím metody 3D konečných elementů. Počítáme totiž se dvěma zlomy, u kterých můžeme sice volit libovolně téměř všechny

jejich parametry, ale vzhledem k použití Fourierovy transformace je vůči sobě nelze naklánět v y -ovém směru. V tomto případě tedy zanedbáváme úhel 7° a uvažujeme tyto zlomy položené v jedné rovině se vzdáleností jejich středů $37,5\text{ km}$.

Parametry zlomu f_1 jsou: $x_0 = 0$, $y_0 = 18.75$, $z_0 = 7.5\text{ km}$, $d_1 = 4.5\text{ km}$, $d_2 = 5\text{ km}$, $d_3 = 9\text{ km}$, $o_a = 0$, $o_b = 4.5\text{ km}$, $o_{3a} = 0.1\text{ km}$, $o_{3b} = 9\text{ km}$, $M = 0.6\text{ m}$, $\alpha = 88^\circ$ a $\beta = -177^\circ$.

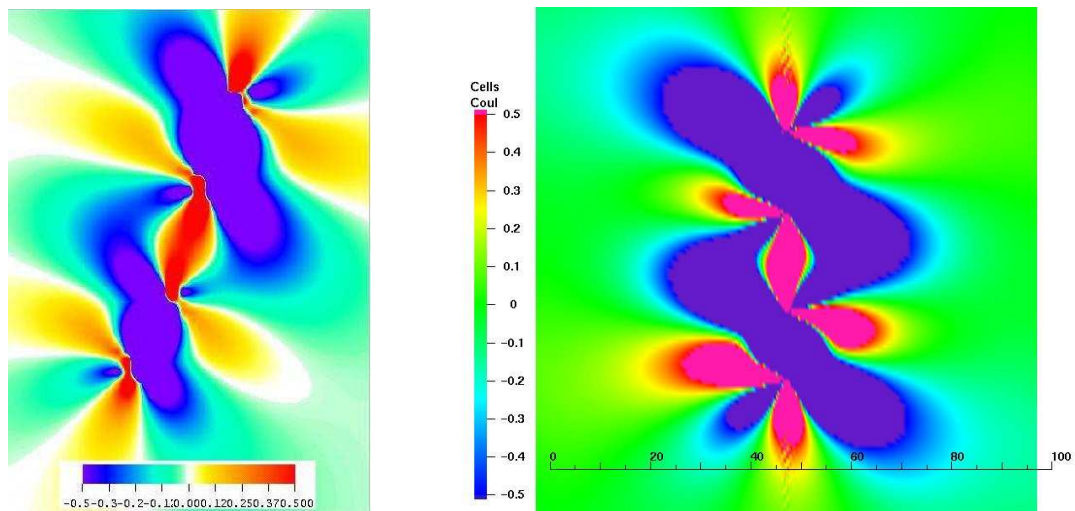
Parametry zlomu f_2 jsou: $x_0 = 0$, $y_0 = -18.75$, $z_0 = 7.5\text{ km}$, $d_1 = 3.75\text{ km}$, $d_2 = 5\text{ km}$, $d_3 = 7.5\text{ km}$, $o_a = 0$, $o_b = 3.75\text{ km}$, $o_{3a} = 0.1\text{ km}$, $o_{3b} = 7.5\text{ km}$, $M = 0.9\text{ m}$, $\alpha = 74^\circ$ a $\beta = 164^\circ$.

Parametry pro diskretizaci Fourierovy transformace jsou $k_{step} = 0.0316$, $n = 800$.

Coulombovo napětí počítáme na orientaci plochy, jejíž úhly jsou průměrnými hodnotami úhlů z orientací obou aktivních ploch, tedy $(20.5^\circ, 81^\circ, 173.5^\circ)$.

Ve výsledném grafu na obrázku 29 je mezi zlomy místo s největším přírůstkem Coulombova napětí, zde tedy může být potenciálně větší nebezpečí vzniku dalšího skluzu. Musíme ale upozornit, že neznáme rozložení napětí před vznikem zemětřesení Lefkada a Cephalonia, a proto nevíme, zda se například vzniklá napětí neruší s těmi, která zde byla původně.

Rozměry oblastí byly v obou případech voleny jako $120\text{ km} \times 120\text{ km} \times 30\text{ km}$. Výpočetní 2D síť obsahovala u obou výpočtů 1820 prvků s 33342 stupni volnosti. Výsledná 3D síť pak obsahovala 1019200 prvků.



Výsledek, jenž prezentoval Suleyman Nalbant (osobní sdělení), zlomy jsou natočené podle zemských souřadnic.

Námi vypočtený graf bez natočení zlomů do správných zemských souřadnic. Rozměrové měřítko je v km .

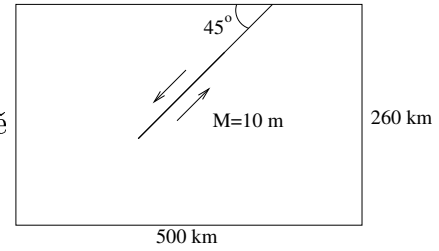
Obr. 29: Přírůstkové Coulombovo napětí ΔCFF v hloubce středu zlomů (7.5 km). Hodnoty jsou v 10^5 Pa .

8.8 Vlnový 2D model

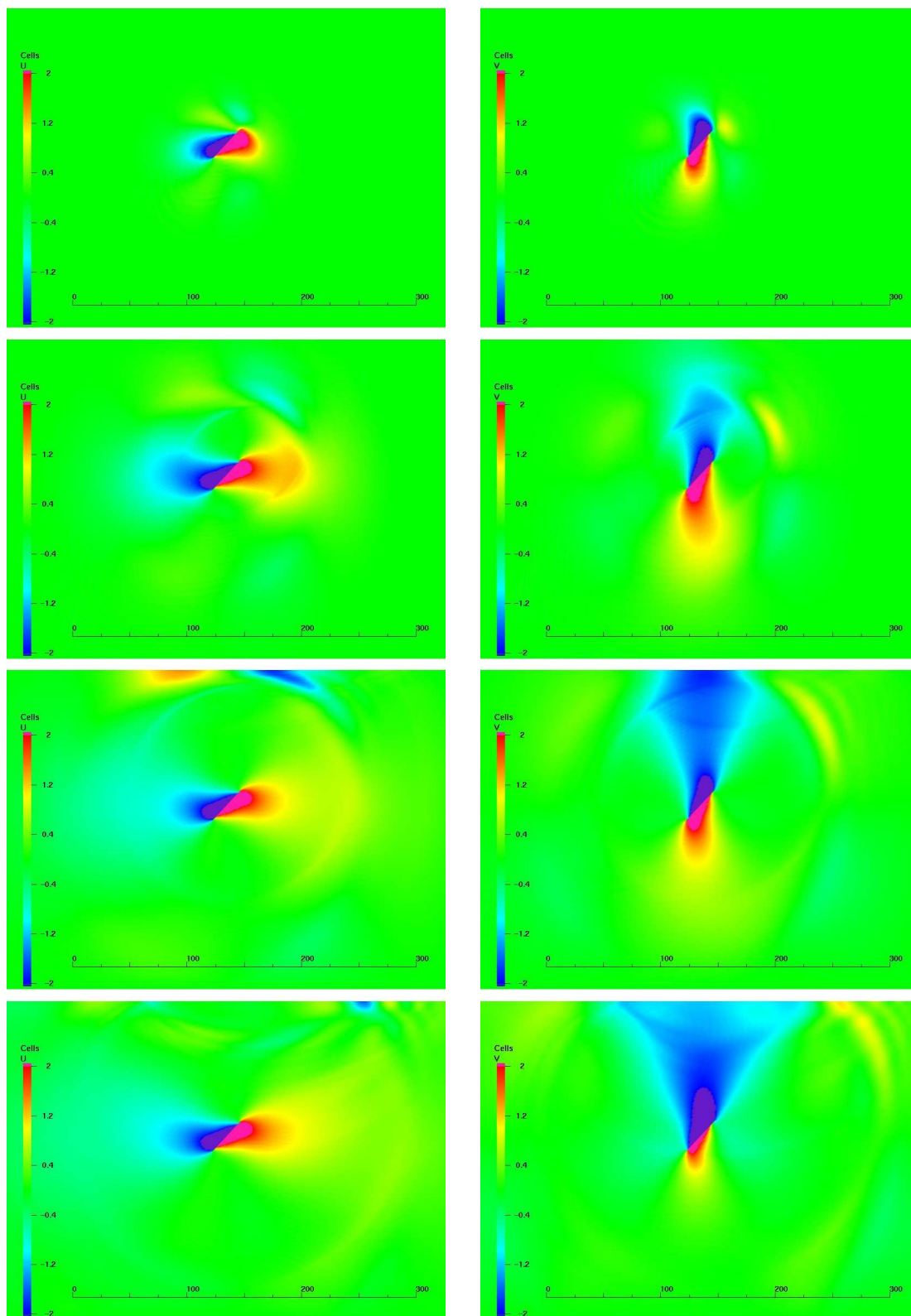
Pokud v pohybové rovnici nezanedbáváme setrvačný člen, pak se jedná o hyperbolickou rovnici, která popisuje šíření vln. Proto je třeba uvažovat řádově kratší časová měřítka než v případě viskoelastickém. Konkrétně zde provádíme výpočet v 50 vteřinovém intervalu a s ohledem na to je také potřeba uvážit časový průběh skluzu na zlomu. Proto jsme si již v předchozím zadefinovali časově závislou funkci (6.10) a zde ji použijeme k popisu šíření trhliny od spodního konce zlomu směrem k povrchu Země. Pro koeficienty rovnic jsme použili reálné fyzikální hodnoty podle PREM.

Parametry zlomové funkce \mathbf{g} jsou: $x_0 = 0$, $z_0 = 110\text{km}$, $d_1 = 20\text{km}$, $d_2 = 5\text{km}$, $o_a = 10\text{km}$, $o_b = 20\text{km}$, $M = 10\text{m}$, $\alpha = -45^\circ$, $t_r = 2\text{s}$.

Na následujících stránkách jsou zobrazena výsledná posunutí a jedna složka napětí τ_{xx} pro časy 10, 20, 30 a 40 vteřin. Výpočetní síť obsahuje 33500 prvků s 134670 stupni volnosti, velikost jednoho prvku tak dosahuje $\approx 4\text{km}^2$. Zda lze mluvit o dostatečné aproximaci jednotlivých vln by bylo třeba dále diskutovat, neboť na výsledném napětí (viz. obrázek 32) jsou vidět nespojitosti mezi jednotlivými prvky, které by bylo sice možné odstranit dalším zjemněním sítě, ale v našem případě to kapacita používaného počítače již příliš nedovolovala (konkrétně tento výpočet obsahoval 8 GB dat). Pro časovu diskretizaci jsme zvolili krok $\Delta t = 0.1\text{s}$, což je opět volba vhodná k diskuzi, neboť tento krok například již explicitně ovlivňuje, jak implementujeme do výpočtu funkci zlomu. Výsledky je možné si prohlédnout též ve formě filmů na přiloženém CD, kde je navíc uvažován stejný zlom, položený ale v hloubce 30km .



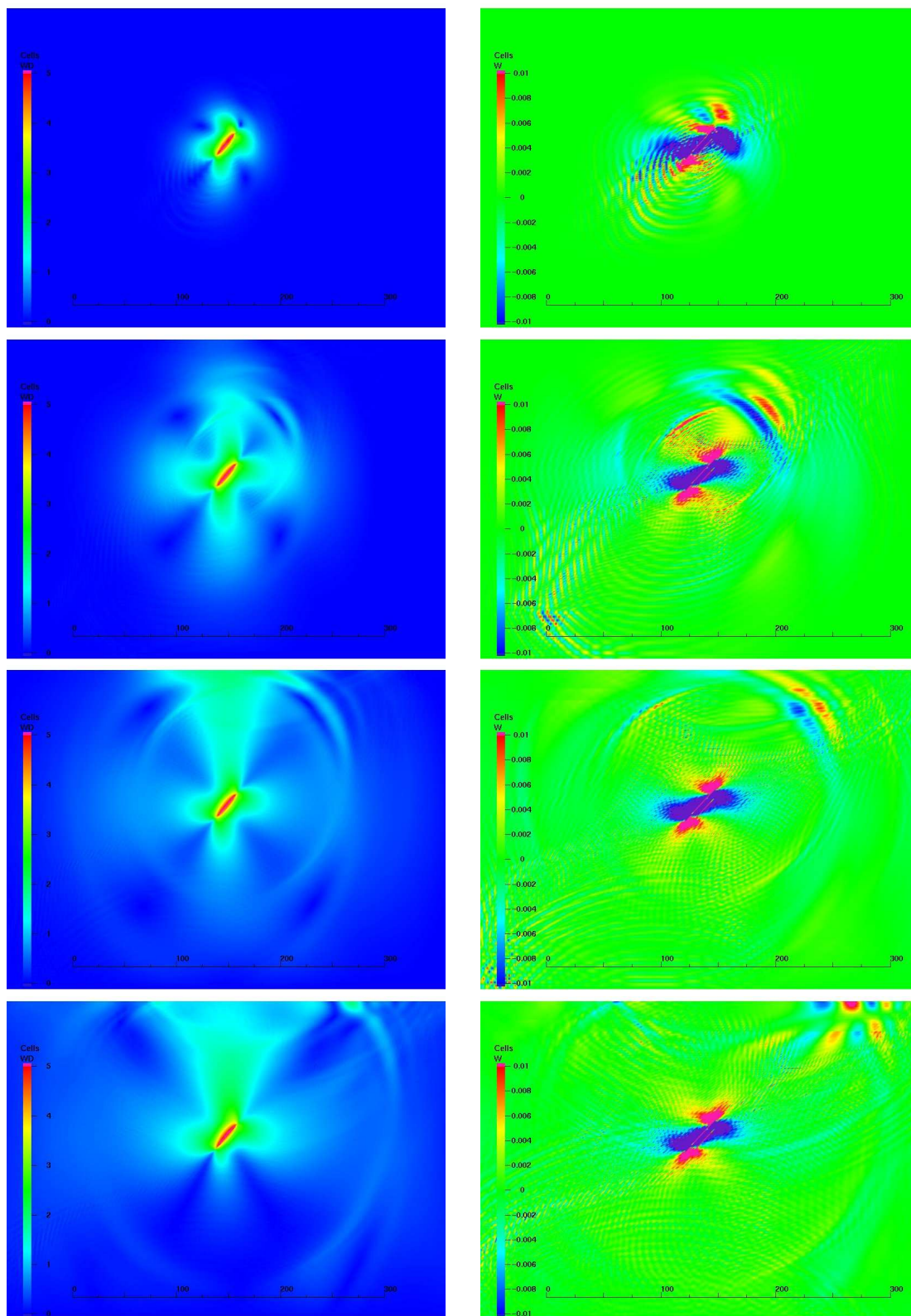
Obr. 30: Geometrie modelu se základními rozměry.



Horizontální posunutí v m

Vertikální posunutí v m

Obr. 31: Veličiny v čase 10, 20, 30 a 40 vteřin. Rozměrová měřítka jsou v km .



Celkové posunutí v m

Napětí τ_{xx} v GPa

Obr. 32: Veličiny v čase 10, 20, 30 a 40 vteřin. Rozměrová měřítka jsou v km .

9 Závěr

V práci jsou postupně uvedeny všechny podstatné kroky k vytvoření modelu popisujícímu fyzikální realitu našeho problému. Zvolili jsme tvar rovnic, které dostatečně vystihovaly chování Země při skluzu mezi litosférickými deskami, ať již šlo o elastický, viskoelastický nebo vlnový problém. I přes jisté komplikace se nám tyto úlohy podařilo vhodně slabě zformulovat spolu se zlomem takovým způsobem, abychom pro tyto formulace mohli dále vybudovat existenční teorii a numerickou realizaci. Po modifikaci důkazů existence a jednoznačnosti řešení pro elastický a viskoelastický problém jsme doplnili i důkaz pro hyperbolickou soustavu rovnic zahrnující náš vlnový geofyzikální problém. Zde jsme vyslovili přesné požadavky na funkci zlomu, jež musí být z hlediska existence řešení splněny.

V druhé části této práce jsme přešli k numerické realizaci. Zde jsme vhodně použili metodu konečných prvků pro dva rozměry, přitom ale pro třetí složku použitý spektrální rozklad se při praktických výpočtech jevil jako problematický z hlediska časové náročnosti. V tomto případě využitý postup zjednodušení 3D problému na 2D, i když velice elegantní, se tedy prakticky příliš neosvědčil, a pro další výpočty se zdá výhodnější například přímé použití metody konečných 3D elementů. Je však třeba říci, že námi používaný přístup byl pro tyto úlohy plně funkční, a dostali jsme s jeho pomocí mnoho výsledků, které jsou ve velice dobré shodě s hodnotami uvedenými ve standardních geofyzikálních textech. V práci jsme prezentovali mnoho grafů, které ukazují nejen tuto shodu, ale zároveň se obracejí i k výpočtům dnes aktuálním, jako jsou výsledky potvrzující rozložení Coulombova napětí v okolí řeckých ostrovů. K časovým problémům jsme vytvořili filmy, které jsou obsahem příloženého CD, a i zde lze najít z geofyzikálního pohledu zajímavé výsledky. U vlnového problému si je ale třeba uvědomit, že si nemůžeme nárokovat přesnost vypočtených hodnot, neboť jsme se tímto případem nezabývali v jeho plné komplexnosti. Mnohé z otevřených otázek kolem tohoto problému by se tedy mohly týkat dalšího studia modelování geofyzikálních jevů.

A Pomocná lemmata

Lemma A.1 (Lax-Milgram)

Nechť X je reálný Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)_X$ a normou $\|\cdot\|_X = (\cdot, \cdot)_X^{\frac{1}{2}}$. Nechť je dále $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bilineární forma taková, že

- B je X – omezená $(\exists m > 0 \quad B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq m \|\mathbf{u}\|_X^2)$
- B je X – eliptická $(\exists M > 0 \quad |B(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{u}\|_X \|\mathbf{v}\|_X)$

Pak pro $\forall F \in X^* \exists! \mathbf{u} \in X$ tak, že platí

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle F, \mathbf{v} \rangle_{X^*, X} \quad \forall \mathbf{v} \in X \quad (\text{A.1})$$

a navíc

$$\|\mathbf{u}\|_X \leq \frac{1}{m} \|F\|_{X^*}. \quad (\text{A.2})$$

Důkaz viz. Nečas [7]

Lemma A.2 (Gronwall - diferenciální tvar)

Nechť $y(t)$ je nezáporná, absolutně spojitá funkce na intervalu $[0, T]$ taková, že pro s.v. t platí

$$\dot{y}(t) \leq \alpha(t) y(t) + \beta(t), \quad (\text{A.3})$$

kde $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ jsou nezáporné integrovatelné na $[0, T]$. Potom

$$y(t) \leq e^{\int_0^t \alpha(s) ds} \left[y(0) + \int_0^t \beta(s) ds \right] \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{A.4})$$

Důkaz viz. Evans [6]

Lemma A.3 (Gronwall - integrální tvar)

Nechť $y(t)$ je nezáporná integrovatelná funkce na intervalu $[0, T]$ taková, že splňuje pro s.v. t integrální nerovnici

$$y(t) \leq C_1 \int_0^t y(s) ds + C_2 \quad (\text{A.5})$$

pro libovolné konstanty $C_1, C_2 \geq 0$. Potom

$$y(t) \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t}) \quad \text{pro s.v. } t \in [0, T]. \quad (\text{A.6})$$

Důkaz viz. Evans [6]

Literatura

- [1] Dahlen F.A., Tromp J.: *Theoretical Global Seismology*, Princeton University, New Jersey, 1998.
- [2] Martinec Z.: Free oscillations of the Earth, *Travaux Géophysiques*, č.591, 1984.
- [3] Martinec Z.: Spectral–finite element approach to three-dimensional viscoelastic relaxation in a spherical Earth, *Geophys. J. Int.*, č.142, str.117–141, 2000.
- [4] Dziewonski A.M., Anderson D.L.: Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth Planet. Inter.*, č.25, str.297–356, 1981.
- [5] Inovecký L.: *Postglacial Relaxation of the Earth's Models in Cylindrically Symmetric Geometry*, Master Thesis, Prague, 2003.
- [6] Evans L.C.: *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Society, Providence, 1998.
- [7] Nečas J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Massou et Cie, 1967.
- [8] Nečas J., Hlaváček I.: *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [9] Zahradník J.: *Fyzika zemětřesení*, MFF UK, Praha, 1989.
- [10] Lorenzo-Martín F., Wang R., Roth F.: The Effect of Input Parameters on Visco-Elastic Models of Crustal Deformation, *Física de la Tierra*, č.14, str.33-54, 2002.
- [11] Ma X.Q., Kusznir N.J.: Coseismic and Postseismic Subsurface Displacements and Strains for a Vertical Strike-slip Fault in a Three-layer Elastic Medium, *PAGEOPH*, č.142, str.687-709, 1994.
- [12] GMV, <http://www-xdiv.lanl.gov/XCM/gmv/GMVHome.html>
- [13] *gmvmpeg*, <http://www.featflow.de> (Software/Download the tools)
- [14] Teisseyre R.: *Continuum Theories in Solid Earth Physics*, PWN & Elsevier, Warszawa, 1986.
- [15] Karakostas V.G., Papadimitriou E.E., Papazachos C.B.: Properties of the 2003 Lefkada, Ionian Islands, Greece, earthquake seismic sequence and seismicity triggering, odesláno do *Geophysical Research Letters* .

-
- [16] Zahradník J., Serpetsidaki A., Sokos E., Tselentis G.A.: A double-event interpretation of the 2003 Lefkada earthquake, odesláno do *Bull. Seism. Soc. America*.
- [17] King G.C.P., Cocco M.: Fault interaction by elastic stress changes: New clues from earthquake sequences *ADV GEOPHYS*, č.44, str.1-38, 2001.