

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Ondřej Šrámek

MODELOVÁNÍ DYNAMICKÉHO GEOIDU

Vedoucí diplomové práce: **Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.**
Studijní program: Fyzika-geofyzika

Katedra geofyziky MFF UK
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

Praha 2002

Chtěl bych vyjádřit poděkování všem těm, kteří přispěli k vytvoření této práce.

Mé díky patří členům katedry geofyziky v čele s Jiřím Zahradníkem za vytvoření příjemného a motivujícího pracovního prostředí. Děkuji zejména Ondřeji Čadkovi za vzorné vedení v průběhu práce na diplomovém úkolu. Děkuji Zdeňkovi Martincovi za poskytnutí výpočetního programu a četné připomínky. Děkuji Ctiradu Matyskovi za osvětlení mnohých nejasností. Děkuji Láďovi Hanykovi a Jakubovi Velímskému, kteří zajišťovali bezproblémový chod počítačové sítě.

Velký dík přísluší mé rodině za všestrannou podporu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 19. dubna 2002

Ondřej Šrámek

Obsah

1	Úvod	1
2	Dynamický geoid	5
3	Postglaciální výzdvih	9
4	Rovnice hladiny vod	13
4.1	Základní rovnice	14
4.2	Postup řešení	16
4.3	Jednoduché osově souměrné modely	18
5	Přímá úloha postglaciálního výzdvihu	25
5.1	Model ledové zátěže	25
5.2	Parametry modelů Země	31
5.3	Výsledky přímé úlohy	31
6	Inverze geoidu	55
7	Závěr	63
	Dodatek – Sférické harmonické funkce	65
	Literatura	66

Název práce: Modelování dynamického geoidu
Autor: Ondřej Šrámek
Katedra (ústav): Katedra geofyziky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.
e-mail vedoucího: oc@karel.troja.mff.cuni.cz
Abstrakt:

Pozorovaný dlouhovlnný nehydrostatický geoid je zpravidla interpretován jako výsledek dlouhodobých konvekčních procesů v zemském plášti. Příspěvky jiných dynamických procesů, např. postglaciálního výzdvihu, jsou obvykle zanedbávány. Snažíme se zjistit jaké chyby se tímto zanedbáním dopouštíme. Na základě modelu odlednění ICE-3G počítáme přímou úlohu postglaciálního výzdvihu pro nestlačitelné viskoelastické sférické modely s jednoduchým radiálním průběhem viskozity (2 vrstvy v plášti). Diskutujeme související problematiku rovnice hladiny vod (sea level equation). Vliv jednotlivých členů na výsledek úlohy ukazujeme na případech s osově souměrným ledovcem. Tradiční predikci dynamického geoidu vyvolaného hustotními anomáliemi v plášti (souvislost s anomáliemi rychlostí seismických vln) doplníme o zbytkový geoid z postglaciálního výzdvihu. Dosahujeme zlepšení predikce geoidu o 1–5 %. Charakter obrácené úlohy nedoznává vážných změn.

Klíčová slova: geoid, postglaciální výzdvih, rovnice hladiny vod

Title: Modelling of Dynamic Geoid
Author: Ondřej Šrámek
Department: Department of Geophysics
Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.
Supervisor's e-mail address: oc@karel.troja.mff.cuni.cz
Abstract:

The observed long-wavelength non-hydrostatic geoid is usually interpreted as a result of long-term convection processes in the Earth's mantle. Contributions of other dynamic processes, such as postglacial rebound, are usually neglected. We attempt to quantify the error of such approach. On the basis of ICE-3G deglaciation model we solve the forward problem of postglacial rebound for incompressible viscoelastic spherical models considering simple radially symmetric viscosity profiles (two layers in the mantle). We discuss connected problem of sea level equation. The influence of individual terms we demonstrate on simple examples with axially symmetric ice-cap. The residual geoid from postglacial rebound is included in the traditional prediction of dynamic geoid induced by density heterogeneities in the mantle (which are related to seismic wave velocity anomalies). The improvement of prediction of geoid reaches 1–5 %. Character of the inverse problem solution shows only minor changes.

Keywords: geoid, postglacial rebound, sea level equation

Kapitola 1

Úvod

Geofysika jest část zeměvědy, obírající se činností fyzikálních sil, jež vytvořily, zachovávají a přetvořují naši planetu.

— Ottův slovník naučný

Mezi cíle geofyziky jakožto vědy nepochybně patří získávat a zpřesňovat informace o stavbě zemského tělesa. K tomuto cíli používá rozličných metod. Vzájemná kombinace různých přístupů a porovnávání výsledků získaných nezávislými metodami vede k vytváření stále jasnějších představ o vnitřním uspořádání Země. Během čtvrtohor, posledních asi dvou milionů let, prošla Země několika glaciálními cykly. Doby ledové s následnými odledněními v meziledových dobách se opakovaly s periodou asi sto tisíc let. Změna mocnosti a rozložení ledového příkrovu, tedy změna povrchové zátěže, ovlivňuje tvar Země. Pod narůstajícím ledovcem se zemský povrch prohýbá, na jiných místech je vyzdvihován; během odlednění očekáváme opačný děj. Velikost a charakter deformace zemského tělesa zřejmě souvisí s jeho mechanickými vlastnostmi. Změna tvaru Země zároveň ovlivňuje některé měřitelné veličiny. Studium postglaciálního výzdvihu tedy můžeme přispět ke zpřesnění poznatků o struktuře Země.

Problém postglaciálního výzdvihu (angl. *postglacial rebound*, *postglacial uplift*) je diskutován od třicátých let minulého století. Zatížíme-li Zemi povrchovou zátěží, Země se deformuje a zároveň se mění průběh jejího gravitačního potenciálu. Za předpokladu daných reologických vlastností jsme schopni tyto změny predikovat. Přímá úloha spočívá v nalezení odezvy systému pro jednoduchý model zatížení. V počátcích byla uvažována newtonovská viskozitní reologie. Haskell se zabýval poloprostorovými modely s konstantní viskozitou (Haskell, 1935, Haskell, 1936), McConnell, 1965, úlohu zobecnil pro hloubkově závislou viskozitu. Cathles, 1975, vybudoval sférický model. V sedmdesátých letech se objevily práce uvažující maxwellovskou

viskoelastickou reologii. V maxwellovské reologii se viskózní a elastická deformace sčítají, chování takového materiálu lze znázornit elastickou pružinou a viskózním pístem umístěnými za sebou. Maxwellovská viskoelastická je považována za dobré přiblížení chování materiálu zemského pláště pro daný problém. Peltier, 1974, ukázal, že Laplaceovou transformací vztahů pro maxwellovskou Zemi dostaneme formálně stejnou soustavu rovnic jako pro elastické těleso. Tuto souvislost označujeme jako tzv. princip korespondence. Problém postglaciálního výzdvihu je tedy možné řešit stejnými metodami, jaké se používají v úloze vlastních kmitů Země s elastickou reologií. Standardní metodou je zde tzv. formalismus normálních módů (angl. *normal mode approach*). Z mnoha prací využívajících tuto metodu citujme např. Peltier a Andrews, 1976, Wu a Peltier, 1982, Yuen a Peltier, 1982, Mitrovica a Peltier, 1989, 1991, Sabadini a kol., 1982, Yuen a kol., 1982, 1986, Han a Wahr, 1995, Tromp a Mitrovica, 1999a,b. Později se objevují i jiné metody řešící problém postglaciálního výzdvihu, které nevyužívají Laplaceovy transformace rovnic přes časovou proměnnou, např. metoda konečných elementů (*finite-element method*, Wu a Johnston, 1998, Wu a kol., 1998, Kaufmann a Wu, 1998) nebo tzv. metoda čar (*method of lines*, Hanyk a kol., 1995, 1996, 1998). Tyto metody, které jsou postupně rozvíjeny, umožňují předepsat složitější průběh viskozity v zemském plášti – např. iterativní perturbační metody dovolují odchylky od radiální symetrie (Sabadini a kol., 1986, Gasperini a Sabadini, 1989, 1990, D'Agostino a kol., 1997), obecnou 3-D viskózní strukturu připouští např. Martinec, 1999b, 2000. Podrobnější přehled historického vývoje výpočtů postglaciálního výzdvihu uvádí např. Hanyk, 1999.

Obrácená úloha (obecně ji definuje např. Tarantola, 1987) spočívá v nalezení takového rozložení viskozity, které nejlépe predikuje pozorovaná data. Struktura prostoru modelů a výběr pozorovaných dat se u různých autorů liší. Jednou z predikovatelných veličin je relativní výška mořské hladiny (angl. *relative sea level, RSL*), což je výška hladiny v minulosti vztažená k současnému stavu. Její hodnoty v různých místech jsou zjištěny geologickými metodami, např. zkoumáním sedimentů v blízkosti pobřežních linií, studiem korálových útesů, apod. Další pozorovatelnou veličinou jsou gravitační anomálie, případně výšky geoidu a jejich časové změny.

Zatímco děje spojené se změnami zalednění probíhají na časových škálách řádově od 10^0 do 10^5 let, v zemském plášti probíhají další procesy, jejichž charakteristické periody jsou podstatně delší. Takové děje jsou popsány viskózní, obvykle newtonovskou reologií. Hovoříme o viskózním tečení v zemském plášti. Je vyvoláno hustotními anomáliemi a deformacemi hustotních rozhraní. V důsledku pohybu hmot dochází ke změnám gravitačního pole. Při znalosti průběhu hustoty a viskozity v plášti můžeme predikovat gravitační anomálie. První formulace obrácené úlohy, tedy zjištění parametrů pláště

z predikce gravitačních anomálií, se objevily v šedesátých letech (např. Kaula, 1963, Hide a Horai, 1968). Od té doby se objevilo mnoho prací, zabývajících se inverzí dynamického geoidu, jejich přehled uvádí např. Matas, 1995.

V předchozích odstavcích jsou uvedeny dva různé dynamické děje, jež oba způsobují gravitační anomálie a změny výšky geoidu. Hlavní část dlouhovlnného přírůstkového geoidu je obvykle připisována dlouhodobým procesům v zemském plášti. Účinky postglaciálního výzdvihu jsou považovány za řádově menší a zanedbávány. Tento předpoklad je opodstatněn u modelů s nízkou hodnotou viskozity ve spodním plášti (Mitrovica a Peltier, 1989). Čadek a Fleitout, 1999, však naznačují, že hodnota viskozity ve spodním plášti může být vyšší. Uvedený rozpor nás přivádí k následujícím úvahám: Jak velké chyby se dopouštíme, zanedbáváme-li při predikci geoidu gravitační signál z postglaciálního výzdvihu? Jak se změní model viskozity, který nejlépe vystihuje pozorované anomálie gravitačního pole, po započtení tohoto signálu?

Cílem této práce je především odpovědět na právě předložené otázky, tedy zjistit podíl signálu z postglaciálního výzdvihu v celkovém gravitačním signálu. Na základě inverze dlouhovlnného geoidu, do které začleníme i příspěvek z postglaciálního výzdvihu, se pokusíme navrhnout viskózní profil pláště Země. Výsledky porovnáme se závěry jiných přístupů. Správná formulace úlohy postglaciálního výzdvihu vyžaduje pečlivé začlenění tzv. rovnice hladiny vod (angl. *sea level equation*, *SLE*) do výpočtů postglaciálního výzdvihu, což je další z cílů této práce. Aplikace rovnice hladiny vod na jednoduché modely mohou sloužit jako referenční příklady. Díky probíhajícím (CHAMP) a připravovaným (GRACE, GOCE, viz Pnam, 1999) projektům satelitních měření gravitačního pole s vysokou přesností roste význam predikce gravitačních anomálií a jejich časových změn. Predikované hodnoty časové derivace gravitačních anomálií mohou napovědět meze použitelnosti měřených gravitačních dat.

V kapitole 2 této práce se zanoříme do problematiky dynamického geoidu, v následující kapitole se budeme zabývat formulací přímé úlohy postglaciálního výzdvihu. Kapitola 4 věnujeme podrobnému odvození rovnice hladiny vod, výsledné vztahy uijeme na jednoduchých příkladech. V další kapitole začleníme rovnici hladiny vod do predikce přírůstkového geoidu pro reálné rozložení povrchové zátěže. Inverzi geoidu bude zasvěcena šestá kapitola. Došazené výsledky budou shrnuty v sedmé, závěrečné kapitole.

Kapitola 2

Dynamický geoid

Naše země nevzkvétá.

— z novoročního projevu prezidenta Václava Havla, 1. 1. 1990

Geoid je ekvipotenciální povrch tíhového pole Země, který odpovídá střední hladině světového oceánu. Velká část geoidu odpovídá tzv. hydrostatickému geoidu. To je ekvipotenciální plocha tíhového pole sféricky symetrické rotující Země s referenčním hustotním průběhem, která je v hydrostatické rovnováze. Zbytkový geoid nazýváme nehydrostatický geoid (*non-hydrostatic geoid*). Nehydrostatická složka je v geoidu přítomna v důsledku odchylek hustoty v Zemi od radiálně symetrického referenčního průběhu a v důsledku deformací hustotních rozhraní. Když budeme níže v textu hovořit o geoidu, máme na mysli právě nehydrostatický geoid. V této kapitole se budeme věnovat formulaci přímé úlohy predikce dynamického geoidu. Uvedeme též způsob řešení v této práci a popíšeme použitý výpočetní program.

Uvažujme hustotní anomálii, tedy odchylku od referenčního modelu hustot $\delta\rho$ v plášti. Předpokládejme, že známe její průběh v závislosti na prostorových souřadnicích. Díky této anomálii se tíhový potenciál Země změní. Změnu potenciálu $\delta\phi(\vartheta, \varphi)$ v místě na zemském povrchu můžeme zjistit, např. z integrálního vztahu

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = -G \int_{V'} \frac{\delta\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (2.1)$$

v němž G značí Newtonovu gravitační konstantu. Integruje se přes čárkované souřadnice v příslušné zkoumané oblasti, v níž se anomálie vyskytuje. Tento přístup je ekvivalentní s řešením Poissonovy rovnice

$$\nabla^2\delta\phi - 4\pi G \delta\rho = 0 \quad (2.2)$$

s odpovídajícími hraničními podmínkami. Užitím Brunsovy formule (viz např. Novotný, 1998)

$$H(\vartheta, \varphi) = \frac{\delta\phi(\vartheta, \varphi)}{g_0}, \quad (2.3)$$

kde g_0 je hodnota tíhového zrychlení na povrchu Země, získáme z přírůstkového potenciálu výšku geoidu $H(\vartheta, \varphi)$ v daném místě. Znaménkové konvenci v poslední rovnici odpovídá zavedení potenciálu vztahem $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, kde \mathbf{g} je vektor tíhového zrychlení.

Ze známého průběhu hustotních anomálií tedy umíme spočítat přírůstkový geoid. Jak uvádějí Hager a Clayton, 1989, takto predikovaná mapa geoidu dobře vystihuje pozorované rozložení anomálií geoidu, nicméně hodnoty jsou opačného znaménka a amplitudy větší. V dosavadních úvahách totiž nebyla uvažována dynamická stránka celého problému. Přítomnost hustotních anomálií způsobuje změnu tíhového potenciálu oproti referenčnímu stavu. Zároveň je zdrojem viskózního tečení. Vzniklé proudění deformuje hranice zemského pláště. Deformace povrchu a rozhraní plášť-jádro (*core-mantle boundary, CMB*), lze chápat jako další hustotní anomálie, které přispívají k přírůstkovému potenciálu. Ten tedy obsahuje tři složky: vlastní příspěvek hustotní anomálie v plášti, člen spojený s deformací povrchu v důsledku toku hmot a obdobný člen související s deformací CMB. Nezbyvá tedy, než řešit problém viskózního tečení, tzv. Stokesův problém.

Rovnice píšme pro nestlačitelný materiál. Zákon zachování hmoty nám dává bezdivergentnost vektoru rychlosti \mathbf{v} ,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.4)$$

V pohybové rovnici

$$\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

jsme zanedbali setrvačnou sílu $\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$, rovnice tedy vyjadřuje rovnováhu plošných a objemových sil. Symbol $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ označuje Cauchyův tenzor napětí, ρ značí hustotu, \mathbf{g} je vektor tíhového zrychlení. Díky převládající sférické symetrii Země můžeme hustotu a tíhové zrychlení rozložit na radiálně symetrické a anomální, laterálně závislé příspěvky,

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = \rho_0(r) + \delta\rho(r, \vartheta, \varphi), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{g}(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{g}_0(r) + \delta\mathbf{g}(r, \vartheta, \varphi), \quad (2.7)$$

kde předpokládáme $|\delta\rho| \ll \rho_0$, $|\delta\mathbf{g}| \ll |\mathbf{g}_0|$. Uvažujme stav hydrostatické rovnováhy, tj.

$$-\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Po dosažení do pohybové rovnice tato přechází do tvaru

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \delta\rho\boldsymbol{g}_0 + \rho_0\delta\boldsymbol{g} = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je přírůstkový Cauchyův tenzor napětí. V posledním vztahu jsme zanedbali součin $\delta\rho\delta\boldsymbol{g}$. Druhý člen na levé straně rovnice odpovídá síle působící na anomální hmoty v referenčním gravitačním poli, nazývá se vztlakový (*buoyant term*). Třetí, tzv. selfgravitační člen (*selfgravitation term*) představuje silové působení anomálního gravitačního pole na referenční rozložení hmot. Rovnice je nutno doplnit reologickým vztahem pro přírůstkový tenzor napětí. Budeme uvažovat newtonovskou viskózní reologii

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \eta[\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T], \quad (2.10)$$

kde p je přírůstkový tlak a η dynamická viskozita.

Jak již bylo uvedeno, přírůstkový potenciál obsahuje jednak příspěvek od hustotní anomálie uvnitř pláště, jednak od hustotních anomálií spojených s deformací hranic. Pro zvlnění hranic, tzv. dynamické topografie (*dynamic topography*) zavedme symbol $t_i(\vartheta, \varphi)$, kde index $i = s$ v případě povrchu nebo $i = c$ na rozhraní pláště a jádra. Hustotní anomálie s nimi spojené můžeme popsat plošnou hustotou $\sigma_i(\vartheta, \varphi) = \Delta\rho_i t_i(\vartheta, \varphi)$, kde $\Delta\rho_i$ je hustotní skok na příslušném rozhraní (hustota pod rozhraním minus hustota nad ním). Dynamické topografie zjistíme z rovnováhy sil na hranicích. Na povrchu musí platit rovnost

$$t_s(\vartheta, \varphi) g_s \Delta\rho_s = -\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau}(r, \vartheta, \varphi) \cdot \boldsymbol{e}_r|_{r=r_s}, \quad (2.11)$$

kde g_s je velikost tíhového zrychlení na povrchu a \boldsymbol{e}_r je jednotkový vektor v radiálním směru. Levá strana rovnice vyjadřuje tlak vyvolaný nedostatkem, resp. přebytkem hmot na povrchu, který vyrovnává napětí způsobené viskózním tečením v plášti (pravá strana). Na CMB je nutné vzít v úvahu vliv variací tlaku v kapalném zemském jádře,

$$-\rho_c \phi_c(r, \vartheta, \varphi)|_{r=r_c} + t_c(\vartheta, \varphi) g_c \Delta\rho_c = \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau}(r, \vartheta, \varphi) \cdot \boldsymbol{e}_r|_{r=r_c}, \quad (2.12)$$

kde ρ_c je průměrná hustota v jádře u CMB, $\phi_c(r, \vartheta, \varphi)$ označuje přírůstkový potenciál v jádře vyvolaný hustotními anomáliemi v plášti a g_c je velikost tíhového zrychlení na CMB.

Správná formulace problému vyžaduje zadat hraniční podmínky. Na rozhraní pláště a jádra předepisujeme nulovou radiální rychlost a volný prokluz (*free slip*),

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_r = 0, \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{e}_r - (\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{e}_r) \boldsymbol{e}_r = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

Na povrchu se nabízejí dvě možnosti. Můžeme použít tytéž hraniční podmínky jako na CMB, druhou možností je předepsat na povrchu rychlosti rovnající se pozorovaným rychlostem horizontálních pohybů litosférických desek \mathbf{v}_D ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_D. \quad (2.15)$$

Detailněji je úloha dynamického geoidu rozebrána např. v pracích Matas, 1995, Čadek a Fleitout, 1999.

V předchozích úvahách jsme předpokládali znalost prostorového rozložení hustotních anomálií v zemském plášti. V případě jednoduchého tvaru stavové rovnice lze odvodit jejich lineární závislost na anomáliích rychlostí střížných seismických vln v_S ,

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = k \frac{\delta v_S}{v_S}, \quad (2.16)$$

kde $k = \left(\frac{\delta \ln \rho}{\delta \ln v_S} \right)_p$ je mineralogický parametr. Jeho hodnotu a průběh s hloubkou však neznáme, odhady pro zemský plášť jsou řádu 0.1.

K výpočtům dynamického geoidu v této práci budeme užívat program Ondřeje Čadka. Viskózní model Země je sféricky symetrický, tedy $\eta = \eta(r)$. Anomálie seismických rychlostí jsou převzaty z tomografického modelu Woodhouse a Trampert, 1995. Diskretizace v radiálním směru je provedena pomocí konečných diferencí, v laterálním směru rozvojem do řady sférických harmonických funkcí. V hloubce 670 km se nachází částečně propustné rozhraní. Průnik hmot skrz toto rozhraní závisí na velikosti koeficientu zvrstvení λ , jehož hodnota leží mezi 0 a 1. Při $\lambda = 0$ je tečení celoplášťové, při $\lambda = 1$ dochází k úplnému zvrstvení. Na povrchu jsou předepsány deskové rychlosti, které jsou převzaty z modelu DeMets a kol., 1990. Používaný program podrobně diskutují Čadek a Fleitout, 1999.

Kapitola 3

Postglaciální výzdvih

Ledová doba (glaciální) jest část staršího diluvia, která se vyznačuje všeobecným snížením průměrné teploty na zemi. Z příčin, jichž dopátrati se lze není, klesla v ten čas teplota na zemi tak značně, že ledovce, jinak na vysoké hory odkázané, sestoupily do nížin, ano i kraje celé pokryly se vnitrozemským ledem.

— Ottův slovník naučný

V předchozí kapitole jsme se věnovali dlouhodobým dějům probíhajícím v zemském plášti, vlastnosti materiálu byly popsány viskózním reologickým vztahem. V této kapitole se budeme zabývat dynamickými procesy, jež jsou spojeny s časově proměnným zatěžováním zemského povrchu. Tyto děje probíhají na časových škálách řádově do 10^5 let, což je typická perioda pozorovaná u ledových dob. Nejprve předložíme systém rovnic pro řešení problému postglaciálního výzdvihu, poté pohovoříme o metodě řešení použité v této práci.

Předpokládejme, že známe časový vývoj zatěžování zemského povrchu od okamžiku t_0 do současnosti. Definujme zátěž na povrchu Země $L(\vartheta, \varphi, t)$ jako plošnou hustotu hmot zatěžujících zemský povrch (v jednotkách $kg \cdot m^{-2}$). Jak uvidíme v kapitole 4, zátěží nebude jen ledový krov, ale i část vod oceánů. Plošná zátěž je funkcí laterálních souřadnic a vyvíjí se s časem. Naším cílem je zjistit časový průběh deformace Země pod touto zátěží a změny gravitačního potenciálu v důsledku deformace.

Při popisu kontinua lze postupovat dvěma různými způsoby. Pozorované veličiny můžeme vztahovat k souřadnému systému, který je spojen se zvoleným referenčním tělesem. Takový systém se nemění s časem. Tento popis nazýváme lagrangeovský, v anglické literatuře se hovoří o *Lagrangian* nebo *material coordinates*. Veličiny však můžeme popisovat také v souřadném systému, který se vyvíjí spolu s deformujícím se tělesem – tzv. eulerovský popis (*Eulerian* nebo *spatial coordinates*). Mezi oběma popisy předpokládáme

vzájemně jednoznačné zobrazení. Tradiční přístup v úloze postglaciálního výzdvihu je formulace rovnic v lagrangeovském popisu. Referenčním tělesem v případě Země je koule o poloměru a . Zabývejme se formulací rovnic pro selfgravitující nerotující viskoelastickou nestlačitelnou kouli. Referenční stav hydrostatické rovnováhy je popsán rovnicí

$$-\nabla p_0 - \rho_0 \nabla \phi_0 = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

kde p_0 je hydrostatický tlak, ρ_0 referenční model viskozit a ϕ_0 gravitační potenciál. Tuto rovnici je nutné doplnit Poissonovou rovnicí svazující gravitační potenciál s rozložením hustoty

$$\nabla^2 \phi_0 - 4\pi G \rho_0 = 0, \quad (3.2)$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Po zatížení Země se počáteční stav naruší, můžeme psát vztahy pro přírůstkové veličiny. Pohybová a Poissonova rovnice nám dávají následující vztahy

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho_0 \nabla \phi_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \nabla \phi_0 - \nabla (\rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_0) = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$\nabla^2 \phi_1 + 4\pi G \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0, \quad (3.4)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je přírůstkový Cauchyův tenzor napětí, ϕ_1 přírůstkový gravitační potenciál, \mathbf{u} vektor posunutí. V pohybové rovnici 3.3 jsme stejně jako v případě Stokesova problému zanedbali setrvačný člen. Rovnice byly formulovány v lagrangeovském popisu, díky předpětí lagrangeovský a eulerovský popis nesplývají. V poslední rovnici tedy překvapuje použití Cauchyova tenzoru napětí namísto Piolova-Kirchhoffova tenzoru. V rámci lineární teorie malých deformací lze odvodit vztah mezi oběma tenzory (viz Martinec, 1999a). Použití Cauchyova tenzoru je výhodnější z důvodu snadné formulace reologického vztahu. Maxwellovskou viskoelasticitu lze popsat reologickým vztahem

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}}^E - \frac{\mu}{\eta} (\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}), \quad (3.5)$$

kde tečka značí časovou derivaci, μ je Laméův koeficient, η označuje dynamickou viskozitu, \mathbf{I} je identický tenzor druhého řádu. Poměr η/μ se označuje jako tzv. relaxační čas *relaxation time*. Elastická část tenzoru napětí $\boldsymbol{\tau}^E$ je tvaru

$$\boldsymbol{\tau}^E = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}), \quad (3.6)$$

kde λ je druhý z Laméových koeficientů. Nestlačitelnost materiálu je vyjádřena rovnicí

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.7)$$

Uvedené vztahy je potřeba doplnit podmínkami na vnitřních rozhraních a hraničními podmínkami. Na vnitřních rozhraních musí platit následující podmínky:

$$[\mathbf{u}]_{-}^{+} = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}]_{-}^{+} = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

$$[\phi_1]_{-}^{+} = 0, \quad (3.10)$$

$$[(\nabla\phi_1 + 4\pi G \rho_0 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0, \quad (3.11)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály k rozhraní, symbol $[\cdot]_{-}^{+}$ značí skok veličiny přes rozhraní. V případě rozhraní kapaliny a pevné fáze (tzv. *liquid boundary*), což v našem případě odpovídá rozhraní pláště a jádra, je potřeba podmínky 3.8 a 3.9 nahradit podmínkami

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_{-}^{+} = 0, \quad (3.12)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}]_{-}^{+} = 0, \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

V hraničních podmínkách na povrchu vystupuje plošná zátěž L a velikost počátečního tíhové zrychlení $g_0 = d\phi_0(r)/dr|_{r=a}$ na povrchu referenčního tělesa,

$$\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_r = -g_0 L, \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_r - (\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r = \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

$$[\phi_1]_{-}^{+} = 0, \quad (3.17)$$

$$[(\nabla\phi_1 + 4\pi G \rho_0 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_r]_{-}^{+} = -4\pi G L, \quad (3.18)$$

kde \mathbf{e}_r označuje jednotkový vektor v radiálním směru. Pro odvození uvedených rovnic viz např. Martinec, 1984. Dostáváme tedy soustavu parciálních diferenciálních rovnic 3.3–3.4, kde tenzor napětí je dán reologickým vztahem 3.5–3.6 a vektor posunutí omezen 3.7. Na vnitřních rozhraních musí být splněny vztahy 3.8–3.14, hraniční podmínku dávají 3.15–3.18. Veličiny závisí na prostorových souřadnicích, plošná zátěž a reologický vztah vnášejí do problému závislost na čase.

Problém postglaciálního výzdvihu je formálně podobný úloze dynamického geoidu. Např. první tři členy na levé straně rovnice 3.3 odpovídají levé straně rovnice 2.9, pokud výraz $-\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u})$ chápeme jako přírůstek hustoty (což je oprávněno ze srovnání rovnic 2.2 a 3.4). Poslední člen na levé straně rovnice 3.3 se objeví v důsledku lagrangeovského popisu postglaciálního výzdvihu. Stejně tak hraniční podmínka na povrchu 3.15 je analogií podmínky rovnováhy 2.11 v úloze dynamického geoidu.

Jak bylo zmíněno v úvodní kapitole, řešení rovnic postglaciálního výzdvihu lze získat různými metodami. Výpočty v této práci budeme provádět s využitím programu **TEFE3**, jehož autorem je Zdeňek Martinec. Program řeší uvedenou soustavu rovnic pro sféricky symetrický model Země, tedy $\eta = \eta(r)$, $\mu = \mu(r)$, $\rho_0 = \rho_0(r)$. Pro daný čas je problém zformulován slabě (viz např. Křížek a Neittaanmäki, 1990), diskretizován v radiálním směru po částech lineárními konečnými elementy, v laterálním směru rozvojem do sférických harmonických funkcí (viz dodatek). Tato metoda nevyužívá Laplaceovy transformace, řeší problém přímo v časové oblasti. Časová derivace v reologickém vztahu je aproximována explicitním Eulerovým schématem. Formulaci úlohy lze najít v článku Martinec, 2000. Program jsme upravili k použití obecné zátěžové funkce z původní osově souměrné. Do kódu byla včleněna tzv. rovnice hladiny vod (viz kapitola 4), která zajišťuje zachování celkové hmoty vody na Zemi. Vstupními daty programu jsou parametry modelu Země a sférické harmonické koeficienty zátěže L_{jm} . Výstupem jsou koeficienty vertikálního posunutí $u_{r_{jm}}$ a přírůstkového gravitačního potenciálu $\phi_{1_{jm}}$. Koeficienty přírůstkového geoidu získáme z koeficientů potenciálových dosazením do Brunsovy formule 2.3.

Kapitola 4

Rovnice hladiny vod

My Bonnie lies over the ocean

My Bonnie lies over the sea

...

— anglická lidová

Jedním ze vstupních parametrů při řešení rovnic postglaciálního výzdvihu je model zatížení povrchu Země jako funkce času, jak bylo uvedeno v kapitole 3. První myšlenka, jež se nabízí, je ztotožnit zátěžovou funkci s časovým vývojem ledových hmot. V takovém případě se však v průběhu zalednění mění celková hmota vody na Zemi. Při narůstání ledovce je led dodáván „zvenku“, zatímco během odlednění „mizí“ pryč. Chceme-li během glaciálního cyklu udržet celkovou hmotnost vody na Zemi konstatní, je potřeba postupovat pečlivěji. Změnu mocnosti ledu musíme kompenzovat změnou výšky hladiny moří a oceánů.

V prvním přiblížení můžeme měnit výšku hladiny stejnoměrně, hovoříme o tzv. ekvivalentní, někdy také eustatické změně hladiny (*equivalent* nebo *eustatic sea level change, ESL*). Ekvivalentní změna hladiny byla předpokládána v mnoha pracích, pro přehled viz Andrews, 1974. Tento předpoklad se však ukazuje jako málo přesný. Změna rozložení ledu a vody znamená také změnu gravitačního potenciálu. Zároveň se však Země deformuje, což dále přispívá k přírůstkovému potenciálu – hovoří se o tzv. *glacio-hydro-isostatic adjustment*. Tento přírůstkový potenciál je prostorově závislý. Mořská hladina sleduje ekvipotenciální plochu, navíc tvar zemského povrchu, tedy i mořského dna se mění s časem. Vidíme tedy, že změna výšky hladiny se na různých místech může lišit. Skutečně, Farrell a Clark, 1976, upozorňují na značné rozdíly ve změnách výšky hladiny v závislosti na poloze. Předpokládají neměnnou plochu oceánů. Obecně však může docházet i k zalití nízko položených částí pevniny, případně k odvodnění mělkých šelfů. Plocha oceánů se tedy může

s časem měnit, jak uvádí Johnston, 1993. Uvedené argumenty ukazují potřebu obezřetné formulace rovnice hladiny vod. Věnujme se jejímu odvození v následující podkapitole. V dalším oddíle vysvětlíme způsob, jakým rovnici hladiny vod začleníme do výpočtů postgalciálního výzdvihu. Dále porovnáme rozdíly výsledků se zahrnutou SLE a bez ní v případě osově souměrných modelů ledovce.

4.1 Základní rovnice

Chceme-li se zabývat výškou hladiny vod (*sea level*), je nutné tento pojem dobře definovat. Jeho zavedení u vodních ploch je zřejmé: jde o svislou vzdálenost mezi vodní hladinou a dnem, tedy o hloubku, jak ji běžně chápeme. (Zde uvažujeme pouze moře spojená se světovým oceánem, nezapočítáváme izolované vodní plochy umístěné v různých nadmořských výškách.) Výšku hladiny S lze však zavést i na pevnině jako rozdíl výšky ekvipotenciální plochy odpovídající hladině vod H_0 a topografie povrchu T v daném místě a časovém okamžiku.

$$S(\vartheta, \varphi, t) = H_0(\vartheta, \varphi, t) - T(\vartheta, \varphi, t) \quad (4.1)$$

Takto definovaná výška hladiny platí i pro moře a oceány a souhlasí s uvedenou definicí výšky hladiny jako hloubky. Nabývá zde kladných hodnot, zatímco na kontinentech je takto definovaná výška hladiny záporná. Předpokládejme, že v okamžiku $t = t_0$ jsme začali Zemi zatěžovat povrchovou zátěží L . Povrch Země se deformuje, mění se průběh gravitačního potenciálu, tedy i tvar ekvipotenciálních ploch. Dochází tedy ke změnám výšky hladiny. Pišme obecně

$$\Delta S(\vartheta, \varphi, t) = \mathcal{F}[L(\vartheta', \varphi', t')], \quad (4.2)$$

kde \mathcal{F} značí funkcionál svazující změnu výšky hladiny $\Delta S(\vartheta, \varphi, t) = S(\vartheta, \varphi, t) - S(\vartheta, \varphi, t_0)$ s povrchovou zátěží L . Změna hladiny je ovlivněna odezvou na zátěž ve všech bodech povrchu, tedy $\vartheta' \in \langle 0, \pi \rangle$, $\varphi' \in \langle 0, 2\pi \rangle$. V případě viskoelastické reologie systém uchovává v paměti minulé stavy, proto $t' \in \langle t_0, t \rangle$.

Zátěž L na zemském povrchu můžeme rozdělit na zátěž ledovou L^I a zátěž vodních hmot L^W , $L = L^I + L^W$. Ledové zatížení je rovno součinu mocnosti ledové vrstvy I a hustoty ledu ρ_I (platí, pokud v počátečním okamžiku t_0 není na Zemi žádný led, předpokládáme s časem neměnný stav tzv. isostatické rovnováhy). Zátěž vod pak je součin hustoty vody ρ_W a rozdílu hloubky oceánů W oproti počátečnímu stavu.

$$L(\vartheta, \varphi, t) = \rho_I I(\vartheta, \varphi, t) + \rho_W \Delta W(\vartheta, \varphi, t), \quad (4.3)$$

kde $\Delta W(\vartheta, \varphi, t) = W(\vartheta, \varphi, t) - W(\vartheta, \varphi, t_0)$. Požadujeme, aby celková hmotnost vody na Zemi byla konstantní, tedy chceme, aby celková zátěž, rozdělená mezi ledové a vodní příspěvky, byla neměnná. Tuto podmínku lze vyjádřit integrálem

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} L(\vartheta, \varphi, t) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = konst. \quad (4.4)$$

Za předpokladu isostatické rovnováhy ve výchozím stavu stojí na pravé straně poslední rovnice 0. Podle naší definice odpovídá hloubce oceánů výška hladiny omezená na vodní plochy. Jak bylo poznamenáno v úvodu této kapitoly, celková plocha vodstva se obecně může měnit. Zavedme tzv. oceánovou funkci (*ocean function*) $\mathcal{O}(\vartheta, \varphi, t)$, jež je rovna 1 na mořích a oceánech, což odpovídá kladné hodnotě $S(\vartheta, \varphi, t)$ a 0 na pevnině, kde je $S(\vartheta, \varphi, t)$ záporná. Závislost oceánové funkce na čase připouští možnost změny plochy oceánů v průběhu zalednění. Pro změnu hloubky oceánů pak můžeme psát

$$\Delta W(\vartheta, \varphi, t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial S(\vartheta, \varphi, t')}{\partial t'} \mathcal{O}(\vartheta, \varphi, t') \, dt' \quad (4.5)$$

V poslední rovnici vystupuje časová derivace výšky hladiny. Z rovnice 4.1 je vidět, že časová změna výšky hladiny souvisí se změnou výšky geoidu a se změnou topografie. Časová změna topografie je rovna rychlosti vertikálního posunutí u_r na povrchu Země. Změna geoidu odpovídá přírůstkovému geoidu z postglaciálního výzdvihu, jenž je svázán s přírůstkovým potenciálem ϕ_1 vztahem 2.3. Dosazením pouze těchto dvou členů do posledního vztahu získáme nový tvar oceánů, který však nemusí zachovávat hmotnost vody – uvažili jsme pouze změny způsobené odezvou Země na ledovou zátěž, avšak nárůst ledu jsme nekompenzovali na oceánech. Abychom získali skutečnou výšku hladiny, zavedme do rovnice člen S_{ESL} , který nezávisí na prostorových souřadnicích. Odpovídá posunu na ekvipotenciální hladinu, která zajistí zachování vody, je určen rovnicí 4.4. Celkově tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta W(\vartheta, \varphi, t) &= \\ &= \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{g_0} \frac{\partial \phi_1(\vartheta, \varphi, t')}{\partial t'} - \frac{\partial u_r(\vartheta, \varphi, t')}{\partial t'} + \frac{\partial S_{ESL}(t')}{\partial t'} \right] \mathcal{O}(\vartheta, \varphi, t') \, dt'. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Přírůstkový potenciál ϕ_1 obsahuje člen příslušející přerozdělení plošné zátěže a příspěvek odpovídající deformaci a změně rozložení hmot v Zemi. Je tedy možné v poslední rovnici dosadit $\phi_1(\vartheta, \varphi, t) = \phi_L(\vartheta, \varphi, t) + \phi_{DEF}(\vartheta, \varphi, t)$, jak činí např. Lambeck a kol., 1998. Zde budeme nadále užívat tvar 4.6.

Za předpokladu svislých pobřežních stěn a dostatečné hloubky ve všech místech oceánu odpadá závislost oceánové funkce na čase. Dostatečnou hloubkou je myšlena taková, aby námi zavedená výška hladiny zachovávala znaménko v průběhu celého glaciálního cyklu, tj. aby ekvipotenciální plocha odpovídající hladině vod ve všech místech výchozího oceánu ležela během časové evoluce vždy výše než dno, na kontinentech naopak níže než časově proměnná topografie. Pro časově nezávislou oceánovou funkci se rovnice zjednoduší na tvar

$$\Delta W(\vartheta, \varphi, t) = \left[\frac{1}{g_0} \phi_1(\vartheta, \varphi, t) - u_r(\vartheta, \varphi, t) + \Delta S_{ESL}(t) \right] \mathcal{O}(\vartheta, \varphi) \quad (4.7)$$

díky nulovým hodnotám posunutí a přírůstkového potenciálu v počátku zatěžování, $\phi_1(\vartheta, \varphi, t_0) = 0$, $u_r(\vartheta, \varphi, t_0) = 0$. Člen $\Delta S_{ESL}(t)$ představuje ekvivalentní změnu výšky hladiny. V takovém případě nepotřebujeme znát v průběhu časového vývoje absolutní výšku hladiny, zajímají nás jen změny topografie a geoidu oproti počátečnímu stavu.

V obecném případě, kdy se plocha oceánu s časem mění, je nutná znalost výšky hladiny v počátečním okamžiku. Hodnota oceánové funkce totiž souvisí s jejím znaménkem. V oblastech, kde je výška hladiny srovnatelná s velikostí vertikálního posunutí a změny geoidu (šelfová moře, pevninské oblasti s malou nadmořskou výškou), může docházet k posunům pobřežní linie.

4.2 Postup řešení

Abychom mohli rovnici hladiny vod začlenit do výpočtů postglaciálního výzdvihu pomocí programu TEFEE3, je potřeba integrál v rovnici 4.6 diskretizovat v čase a rozvinout změnu hloubky ΔW do konečné řady sférických harmonických funkcí.

Věnujme se nejprve diskretizaci v čase. V k -tém časovém kroku při řešení postglaciálního výzdvihu získáme přírůstkový potenciál ϕ_1 a vertikální posunutí u_r v čase t_k . Hloubku oceánů v čase t_{k+1} budeme aproximovat řadou

$$\Delta W^{k+1}(\vartheta, \varphi) = \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{g_0} \Delta \phi_1^i(\vartheta, \varphi) - \Delta u_r^i(\vartheta, \varphi) + \Delta S_{ESL}^i \right] \mathcal{O}^i(\vartheta, \varphi) + \Delta S_{ESL}^{k+1} \mathcal{O}^k(\vartheta, \varphi) \quad (4.8)$$

kde $\Delta \phi_1^i = \phi_1(t_i) - \phi_1(t_{i-1})$, podobně Δu_r^i a ΔS_{ESL}^i , čas t_0 odpovídá indexu $i = 0$. Tvar oceánské dna a ekvipotenciální plochy pro výpočet vodní

zátěže budeme tedy brát z předchozího kroku. Ekvivalentní změnu hladiny ΔS_{ESL} v každém kroku vyčíslíme tak, aby celková zátěž zůstávala neměnná (vztah 4.4). Proto je přítomen člen s ΔS_{ESL}^{k+1} .

Koeficient stupně j a řádu m sférického harmonického rozvoje ΔW , je dán vztahem D7 v dodatku. Pro vyčíslení hodnoty $\Delta W^{k+1}(\vartheta, \varphi)$, jež vystupuje v integrandu, je potřeba spočítat součin oceánové funkce se změnou výšky geoidu a vertikálního posunutí v k -tém časovém kroku v prostorové oblasti. V programu však získáváme sférické koeficienty posledních dvou veličin, oceánovou funkci naopak zjišťujeme v prostorové oblasti ze znaménka ΔS_{ESL} . Nabízejí se dvě možnosti. Součin můžeme počítat ve spektru pronásobením dvou konečných řad s využitím tzv. Clebschova-Gordanova rozkladu (viz dodatek, vztah D9). Druhou možností je přejít do prostorové oblasti, po vyčíslení součinu se navrátit do spektra. V této práci volíme druhou možnost. Sférické harmonické koeficienty jsou počítány ze vztahu D7 numerickou integrací na ekvidistantní síti v prostoru (ekvidistantnost je myšlena v úhlových souřadnicích, přes zeměpisnou šířku a délku; síť tedy hustne směrem od rovníku k pólům). Pro přehlednost uvedeme posloupnost kroků pro vyčíslení koeficientů zátěžové funkce L v $k+1$ časovém kroku výpočtu. Označíme $\{Q\}$ vyjádření veličiny Q ve spektru, tedy soubor komplexních koeficientů Q_{jm} , $j = 0, \dots, J$, $m = 0, \dots, j$, kde J je maximální stupeň rozvoje. Symbol $[Q]$ bude označovat vyjádření těžce veličiny na diskretní síti v prostoru, tedy sadu reálných čísel $Q_{ln} \equiv Q(\vartheta_l, \varphi_n)$, $l = 1, \dots, N$, $n = 1, \dots, 2N$, kde N je zvolené přirozené číslo (hustota sítě).

1. zjištění neekvivalentního (neekvivalentního) přírůstku hladiny
 $\{\Delta S_{\phi u}\}^k \equiv \{\frac{1}{g_0} \Delta \phi_1 - \Delta u_r\}^k$
2. přechod do prostorové oblasti
 $\{\Delta S_{\phi u}\}^k \longrightarrow [\Delta S_{\phi u}]^k$
3. aktualizace výšky hladiny
 $[\Delta S]^k = [\Delta S]^{k-1} + [\Delta S_{\phi u}]^k + \Delta S_{ESL}^k$
4. vyčíslení oceánové funkce
 $[\mathcal{O}]^k$
5. vyčíslení součinu neekvivalentní změny hladiny s oceánovou funkcí
 $[\Delta S_{\phi u} \mathcal{O}]^k = [\Delta S_{\phi u}]^k [\mathcal{O}]^k$
6. přechod do spektrální oblasti
 $[\Delta S_{\phi u} \mathcal{O}]^k \longrightarrow \{\Delta S_{\phi u} \mathcal{O}\}^k$
7. výpočet koeficientů mocnosti ledu
 $\{I\}^{k+1}$

8. výpočet zátěžové funkce (zatím nezachovává hmotu vody)

$$\{L\}^{k+1} = \rho_I \{I\}^{k+1} + \rho_W \{\Delta W\}^k + \rho_W \{\Delta S_{\phi u} \mathcal{O}\}^k$$

9. spočtení odpovídajícího ekvivalentního příspěvku ΔS_{ESL}^{k+1}

$$\{L\}^{k+1} = \{L\}^{k+1} + \rho_W \Delta S_{ESL}^{k+1} \{\mathcal{O}\}^k$$

10. aktualizace změny hloubky

$$\{\Delta W\}^{k+1} = \{\Delta W\}^k + \{\Delta S_{\phi u} \mathcal{O}\}^k + \Delta S_{ESL}^{k+1} \{\mathcal{O}\}^k$$

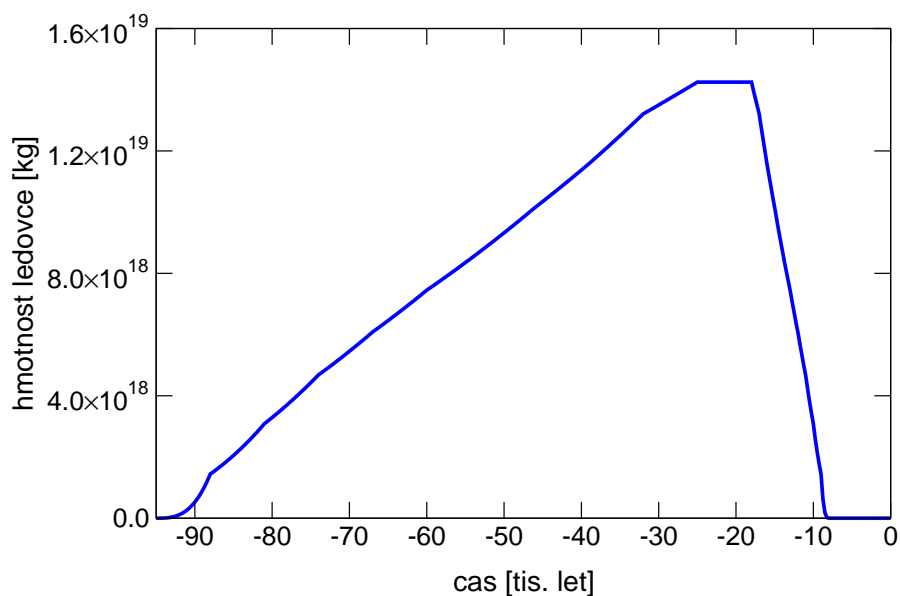
4.3 Jednoduché osově souměrné modely

Dříve než se začneme zabývat výpočty postglaciálního výzdvihu s reálným modelem ledové zátěže a topografie povrchu, studujme vliv začlenění rovnice hladiny vod na jednodušších případech. Zemi zatížíme jedním ledovcem, který je osově souměrný, parabolického tvaru. Výška ledu h v čase t v místě o zeměpisné šířce ϑ je dána vztahem

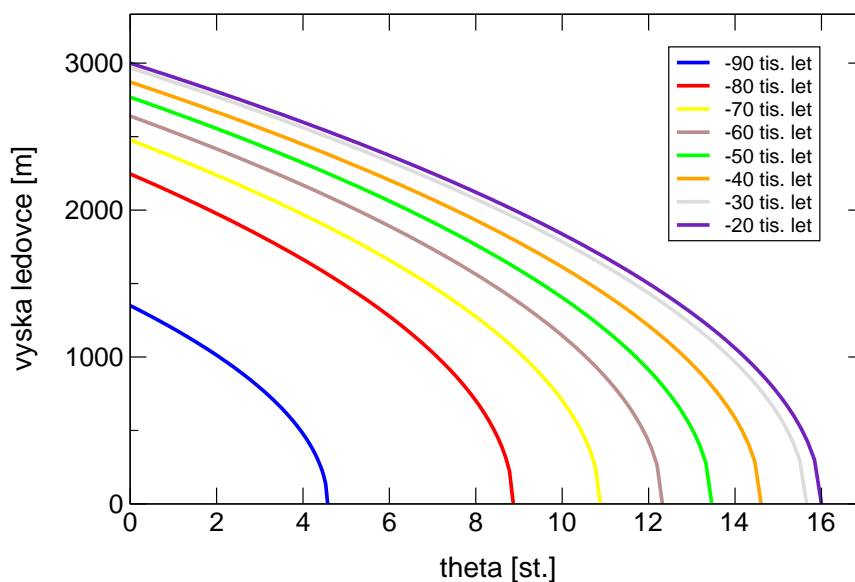
$$\begin{aligned} h(\vartheta, t) &= h_0(t) \sqrt{1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_0(t)}}, \quad \text{pokud } \vartheta \leq \vartheta_0, \\ h(\vartheta, t) &= 0 \quad \text{jinde.} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Parametr h_0 označuje výšku ledu ve středu ledovce a ϑ_0 poloměr základny ledovce v úhlové míře. Tyto parametry jsou zadány v několika časových okamžicích t^i pomocí faktorů R_h^i a R_ϑ^i , které udávají poměr centrální výšky, resp. poloměru k maximálním hodnotám h_0^{max} , ϑ_0^{max} v průběhu zalednění. Hodnoty faktorů jsou uvedeny v tabulce 4.1. Časové údaje jsou vztaženy k současnosti. Mezi těmito časovými body jsou hodnoty parametrů lineárně interpolovány. Časový vývoj ledové zátěže je znázorněn na obrázcích 4.1 a 4.2. Zatěžování Země začíná v čase $t_0 = -95$ tis.let. V maximu zalednění, které nastává v intervalu -25 až -18 tis. let, je výška ledovce v centru $h_0^{max} = 3000$ m a poloměr $\vartheta_0^{max} = 16^\circ$. Tyto hodnoty přibližně odpovídají rozměrům ledového příkrovu, který během posledního glaciálního cyklu pokrýval oblast severní Ameriky se středem v místě dnešního Hudsonova zálivu (tzv. *Laurentide ice sheet*). V poslední fázi zatěžování v intervalu -8 až 0 tis. let je ledová zátěž nulová.

Výpočty s osově souměrným ledem provedeme pro dva různé modely Země. Modely sestávají ze čtyř vrstev: z jádra o poloměru 3480 km, spodního pláště, svrchního pláště a litosféry. Poloměr Země je 6371 km, rozhraní mezi svrchním a spodním pláštěm se nachází v hloubce 670 km, mocnost litosféry je 100 km. V každé z vrstev jsou hodnoty hustoty ρ_0 , dynamické viskozity η a torzního modulu μ konstantní. Hustotní profil, velikost torzního modulu



Obrázek 4.1: Hmotnost osově souměrného parabolického ledovce v závislosti na čase. V maximu zalednění je poloměr základny ledovce 16° a jeho výška v centru 3000 m.



Obrázek 4.2: Výška osově souměrného parabolického ledovce v závislosti na zeměpisné šířce zakreslená pro několik časových okamžiků během narůstání ledovce, křivka pro $t = -20$ tis. let odpovídá glaciálnímu maximu.

i	čas v tis. let	R_g^i	R_h^i
1	-95	0.000	0.000
2	-88	0.400	0.630
3	-81	0.540	0.740
4	-74	0.640	0.800
5	-67	0.710	0.845
6	-60	0.770	0.880
7	-53	0.820	0.910
8	-46	0.870	0.940
9	-39	0.920	0.960
10	-32	0.970	0.985
11	-25	1.000	1.000
12	-18	1.000	1.000
13	-17	0.970	0.985
14	-16	0.920	0.960
15	-15	0.870	0.940
16	-14	0.820	0.910
17	-13	0.770	0.880
18	-12	0.710	0.845
19	-11	0.640	0.800
20	-10	0.540	0.740
21	-9	0.400	0.630
22	-8	0.000	0.000
23	0	0.000	0.000

Tabulka 4.1: Poměry poloměru ledovce a výšky ledovce k hodnotám v maximu zalednění.

v jednotlivých vrstvách a hodnota viskozity jádra a litosféry jsou pro všechny diskutované případy stejné. Modely se liší v hodnotách viskozity v plášti. Hodnoty parametrů jsou uvedeny v tabulce 4.2. Hustota vody i hustota ledu jsou konstantní, $\rho_W = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_I = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Abychom mohli sledovat vliv začlenění rovnice hladiny vod, pro každý z modelů byla úloha počítána s různým stupněm začlenění této rovnice. Výpočet byl nejprve proveden bez SLE pouze s ledovou zátěží. V průběhu výpočtu tedy nebyla zachována celková hmotnost vody na Zemi. V dalším kroku byl přírůstek, resp. úbytek ledu kompenzován pouze ekvivalentní změnou hladiny (ESL). Radiálně symetrický oceán pokrýval oblast mezi 16° a 117° zeměpisné šířku. V tomto uspořádání zaujímal přibližně 7/10 povrchu

vrstva	ρ_0 [kg · m ⁻³]	μ [Pa]	η [Pa · s]	
	mod. A, B	mod. A, B	model A	model B
litosféra	4500	$1.45 \cdot 10^{11}$	10^{30}	10^{30}
svrchní plášť	4500	$1.45 \cdot 10^{11}$	10^{21}	10^{20}
spodní plášť	4500	$1.45 \cdot 10^{11}$	10^{21}	$3 \cdot 10^{22}$
jádro	11000	$1.45 \cdot 10^9$	10^{19}	10^{19}

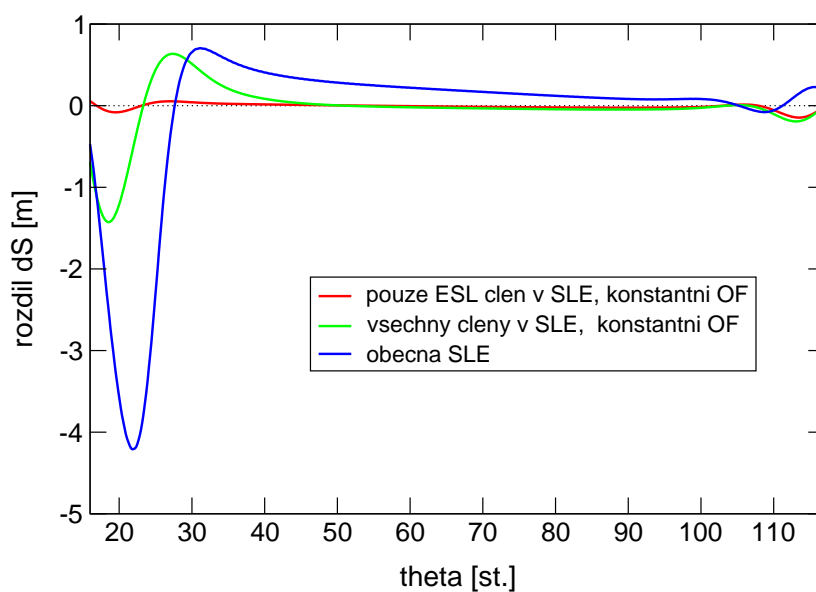
Tabulka 4.2: Přehled parametrů modelů Země pro výpočty s osově souměrným ledovcem.

Země. Jeho povrch zůstával neměnný. Maximální ekvivalentní změna hladiny ΔS_{ESL} dosahovala přibližně 12 m. Poté byl do rovnice hladiny vod přidán i člen související se změnou geoidu a s deformací povrchu Země. Plocha oceánu však byla stále udržována konstantní. Posledním krokem bylo začlenění rovnice hladiny vod v obecné formě, připouštějící změnu plochy oceánu. Zvolená počáteční výška hladiny měla jednoduchý průběh v závislosti na zeměpisné šířce: v intervalu 0°–66.5° lineárně narůstala o 2 m na 1°, v intervalu 66.5°–180° se stejným sklonem klesala. Oceán byl tedy tvaru písmene V, počáteční pobřežní linie se nacházely v zeměpisné šířce $\vartheta = 16^\circ$ a $\vartheta = 117^\circ$. Všechny výpočty byly provedeny do maximálního stupně $j_{max} = 512$ sférického harmonického rozvoje, časový krok činil 10^9 s (přibližně 32 let).

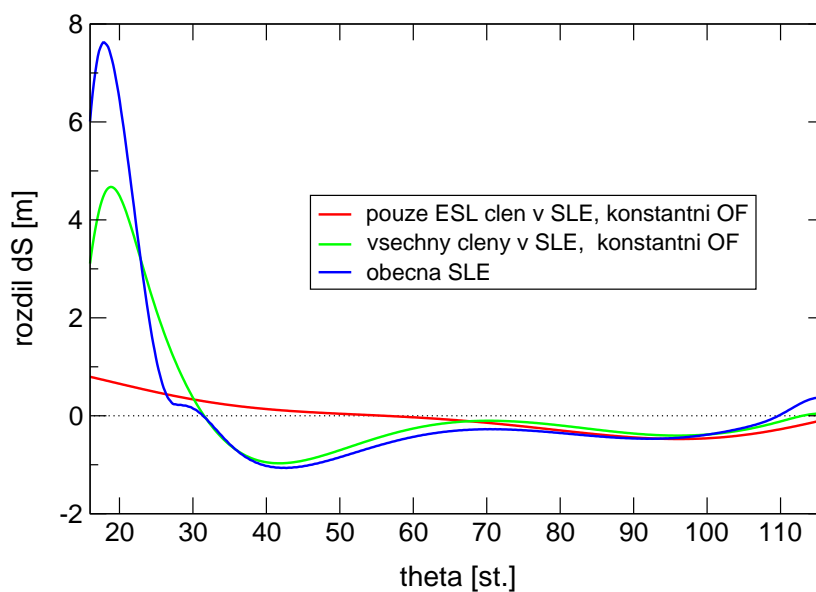
Pro všechny případy jsme zjistili změnu výšky hladiny na konci glaciálního cyklu $\Delta S(t = 0)$. U případů se začleněnou rovnicí hladiny vod jsme zkoumali rozdíl této veličiny oproti výsledné změně bez zahrnutí SLE. Výsledné křivky pro oba viskózní modely jsou zakresleny na obrázcích 4.3 pro model A a 4.4 pro model B. V případě kompenzace změn ledové zátěže pouze ekvivalentní změnou hladiny nedoznal výsledný průběh ΔS velkých změn vzhledem k případu bez rovnice hladiny vod. U modelu A se změny pohybují v řádu centimetrů, u modelu B nepřesahují 1 m. Zahrnutí členů souvisejících se změnami geoidu a vertikálního posunutí výsledný průběh ΔS změní. K největším změnám dochází v oblastech, které se nacházejí v blízkosti ledovce – až 1.5 m u modelu A, téměř 5 m u modelu B. V případě obecné SLE se rozdíly dále zvětšovaly. Předpokládáme, že v případě globálního modelu ledové zátěže o vyšší celkové hmotnosti se vliv SLE na výsledek úlohy bude dále prohlubovat.

V případě obecné rovnice hladiny vod dochází ke změnám plochy oceánů a k putování pobřežních linií. Obrázek 4.5 ukazuje časový vývoj polohy pobřeží, které se na počátku nacházelo v místě $\vartheta = 16^\circ$ pro model A. Tvar oceánského dna pro stejný model v několika časových okamžicích je znázorněn na obrázku 4.6. Výsledky poukazují na potřebu obecné formulace rovnice

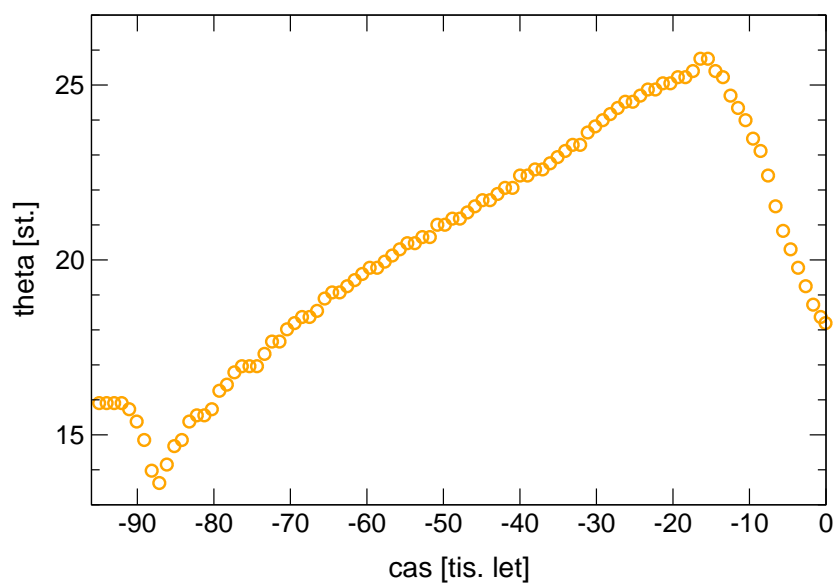
hladiny vod v oblastech mělkých vod a nízko položených souší.



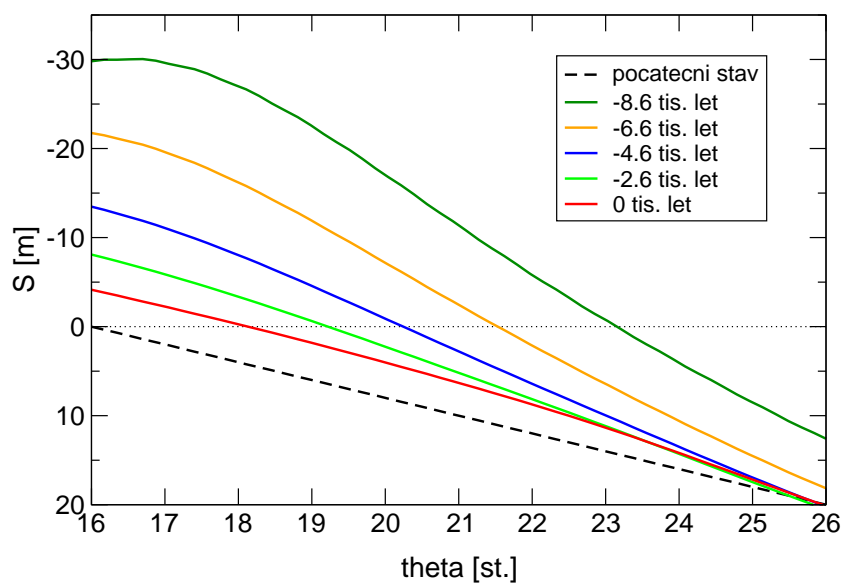
Obrázek 4.3: Rozdíl výsledné změny výšky hladiny $\Delta S(0)$ v případech se zahrnutím SLE oproti výslednému stavu bez SLE pro model A.



Obrázek 4.4: Rozdíl výsledné změny výšky hladiny $\Delta S(0)$ v případech se zahrnutím SLE oproti výslednému stavu bez SLE pro model B.



Obrázek 4.5: Poloha pobřežní linie v závislosti na čase při výpočtu s úplnou SLE pro model A.



Obrázek 4.6: Tvar oceánského dna pro několik časových okamžiků při výpočtu s úplnou SLE pro model A.

Kapitola 5

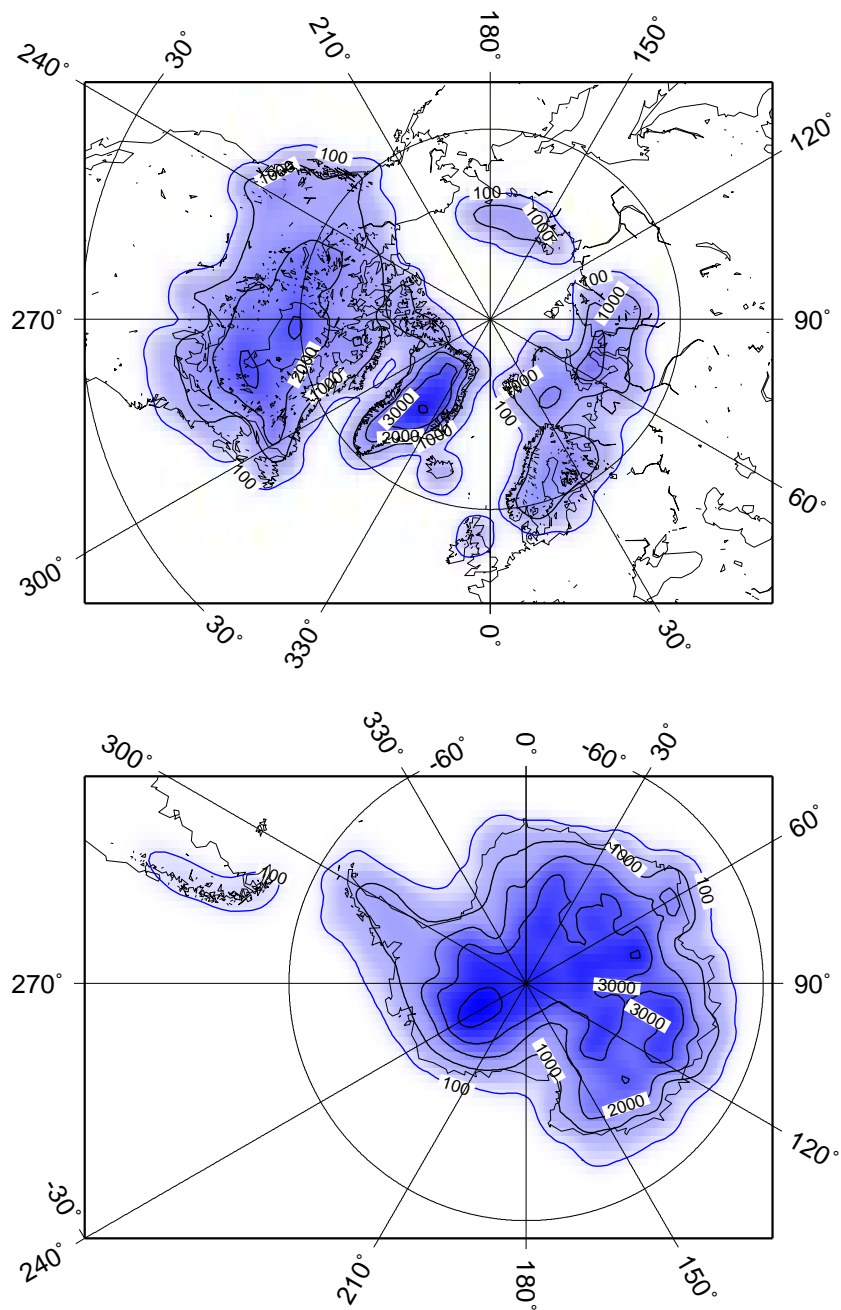
Přímá úloha postglaciálního výzdvihu

V této kapitole se zabýváme přímým modelováním postglaciálního výzdvihu. Nejprve popíšeme model ledové zátěže a modely Země, poté představíme výsledky výpočtů, ve kterých je zahrnuta rovnice hladiny vod v obecné formě.

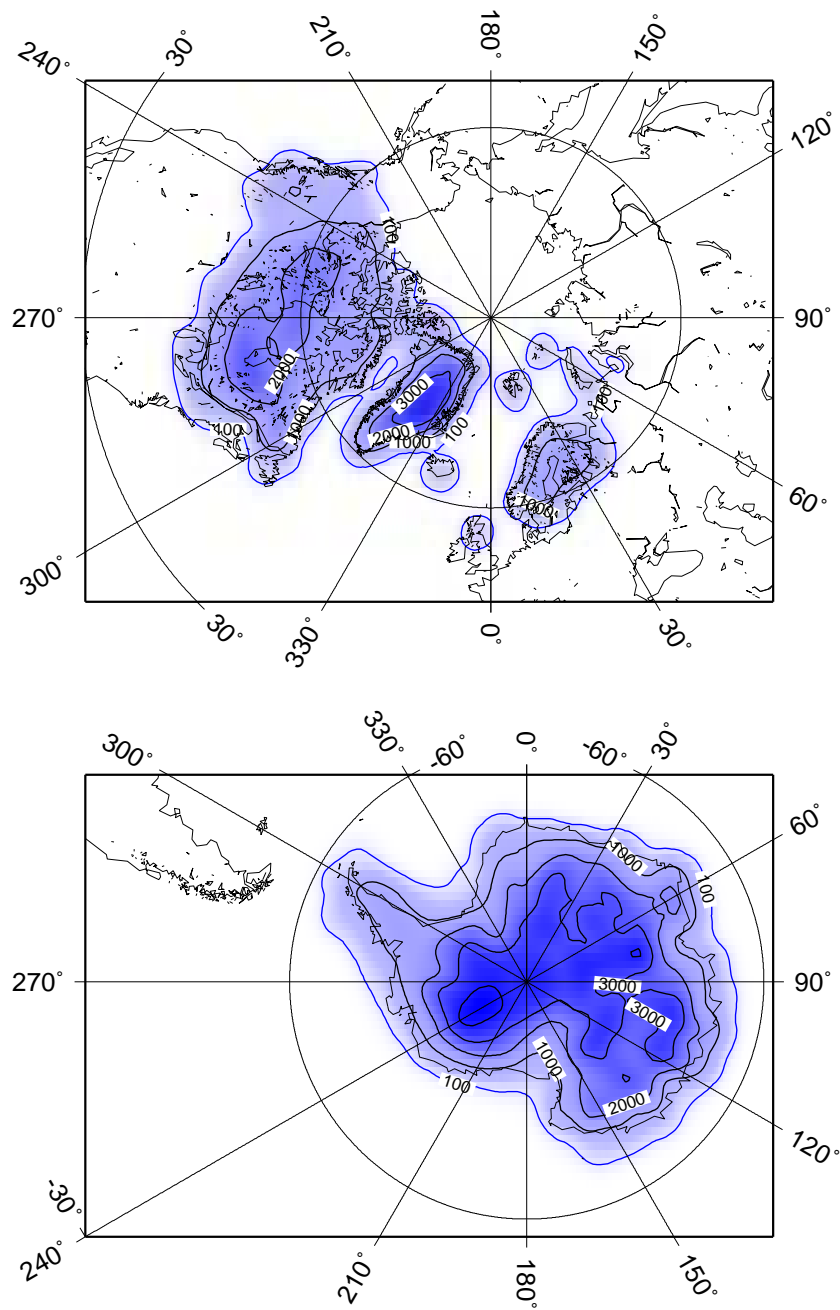
5.1 Model ledové zátěže

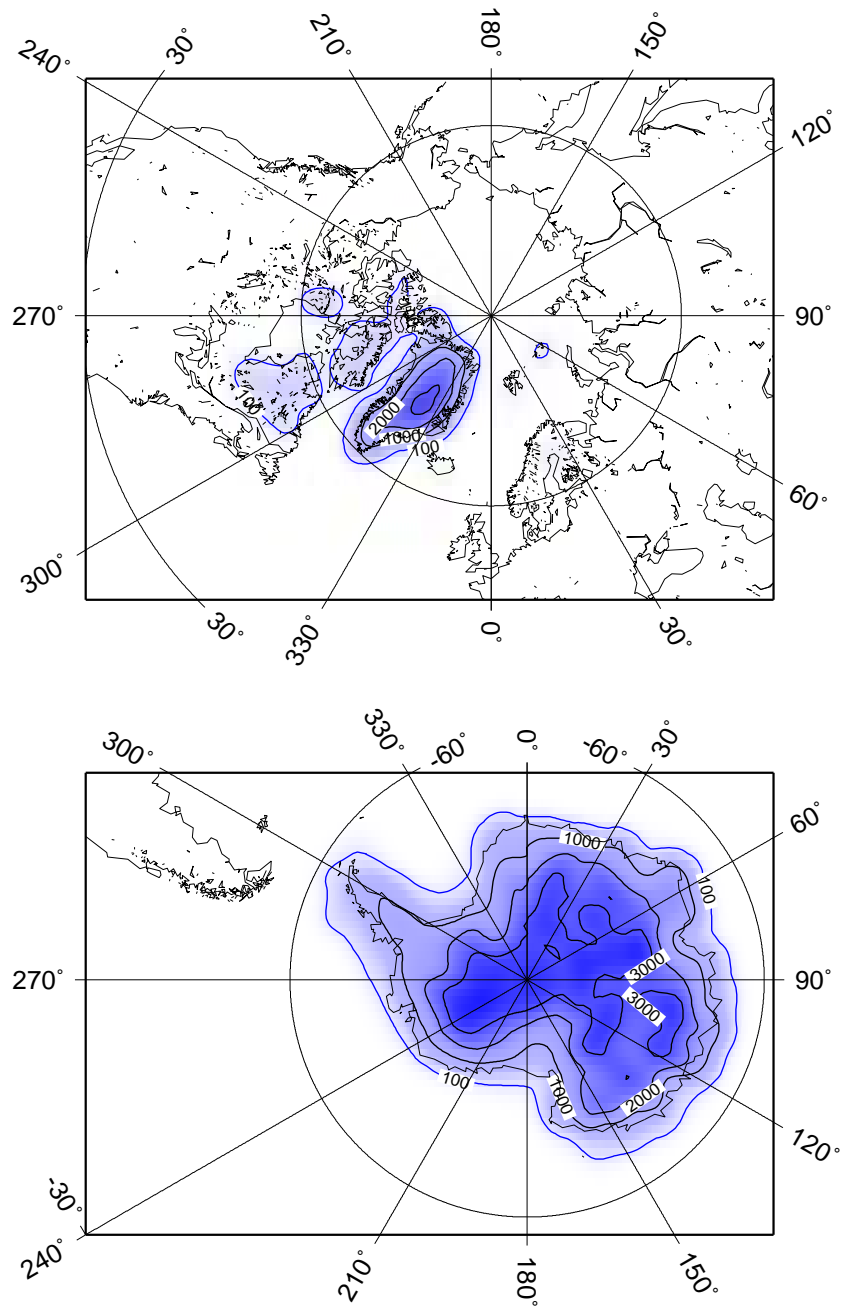
Při výpočtech postglaciálního výzdvihu potřebujeme znát časový vývoj ledové zátěže. V této práci vycházíme z globálního modelu ICE-3G, který vyvinuli Tushingham a Peltier, 1991. Model popisuje vývoj ledového příkrovu v časovém rozmezí od posledního glaciálního maxima, které nastalo před 18 tisíci lety na ^{14}C uhlíkové škále (odpovídá -21.4 tis. let), do současnosti. Časové údaje jsou vztaženy k roku 1950 – údaj -21.4 tis. let tedy znamená 21.4 tis. let před rokem 1950. Výška ledu je popsána v 19 časových bodech. V prostoru je model diskretizován pomocí kruhových disků (celkový počet je 1365) různých výšek a poloměrů základny. Model ledu ICE-3G jsme obdrželi přepočítaný na síti s rozlišením $1^\circ \times 1^\circ$ od pracovníků GFZ Potsdam prostřednictvím Z. Martince. Výšky ledu pro několik časových okamžiků jsou zakresleny na obrázcích 5.1–5.4.

Uvedený model popisuje vývoj ledové zátěže v průběhu odlednění. Výpočet však chceme provést během celého jednoho glaciálního cyklu. Musíme tedy model doplnit dále do minulosti průběhem narůstání ledovce. Zemi začneme zatěžovat v čase $t_0 = -95$ tis. let z počátečního stavu, který odpovídá současnému zalednění. Celková hmotnost ledu lineárně narůstá až do okamžiku -30 tis. let. V intervalu -30 až -21.4 tis. let je ledová zátěž neměnná. Vývoj tvaru ledovce během narůstání ledu kopíruje stav během odlednění –

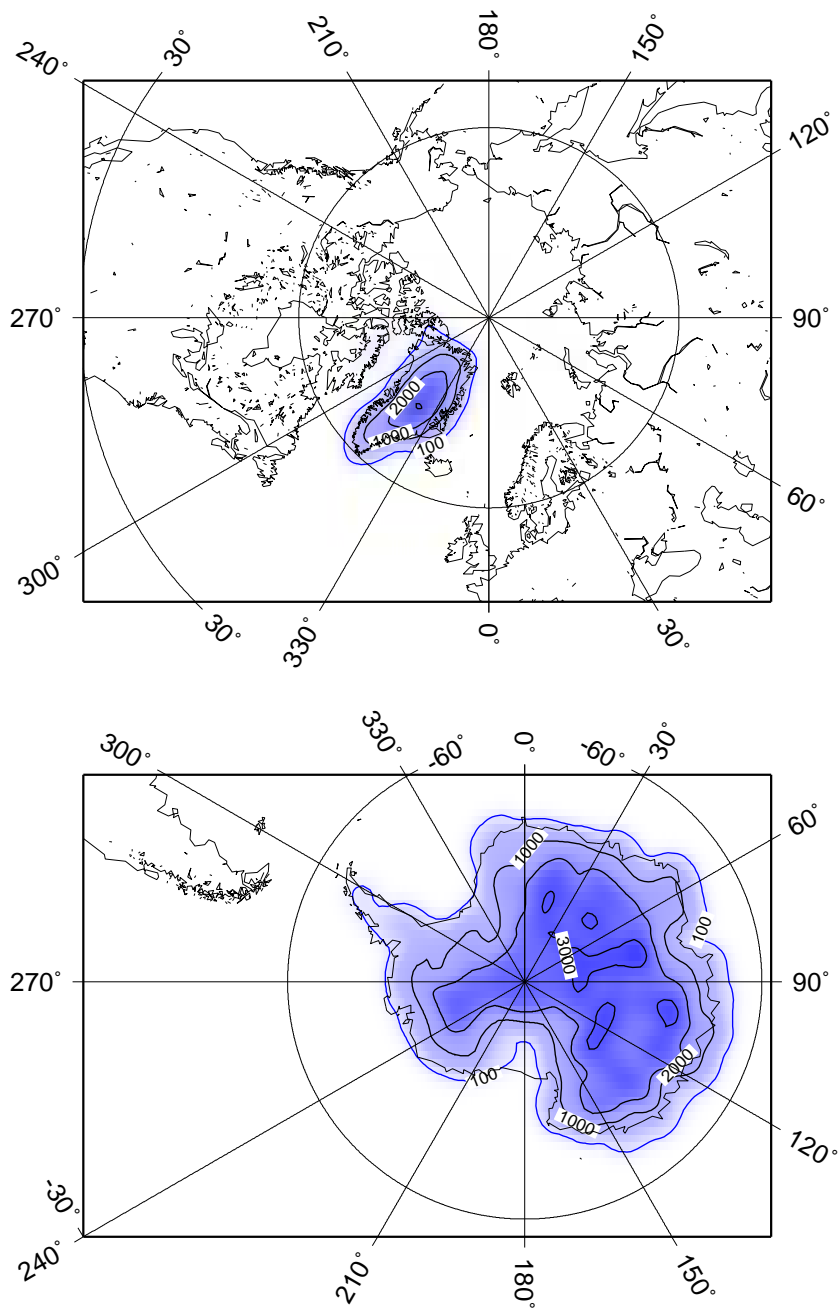


Obrázek 5.1: Výška ledu v metrech na severní a jižní polokouli podle modelu ICE-3G. Isolinie modré barvy odpovídá mocnosti 100 m, ostatní isočáry zakresleny po 1000 m. Situace v čase -21.4 tis. let.

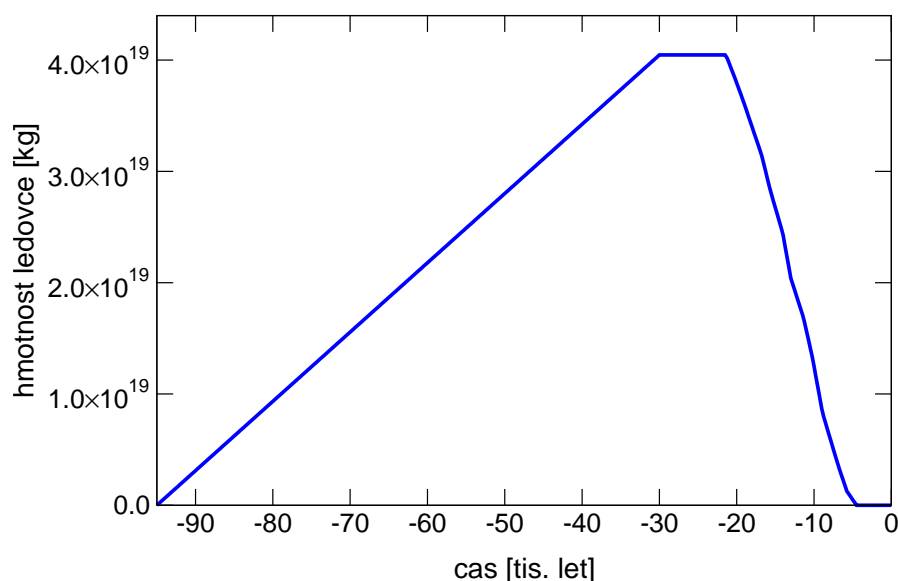
Obrázek 5.2: Jako obr. 5.1, ale stav v čase -15.7 tis. let.



Obrázek 5.3: Jako obr. 5.1, ale stav v čase -8.9 tis. let.



Obrázek 5.4: Jako obr. 5.1, ale současný stav.



Obrázek 5.5: Celková hmotnost ledové zátěže v závislosti na čase.

ke každému známému časovému okamžiku během odlednění jsme našli odpovídající časový bod během nárůstu ledu, kdy se celkové hmotnosti ledových zátěží rovnají. Takto nalezenému časovému okamžiku jsme přiřadili příslušný tvar ledové vrstvy z modelu ICE-3G. Mezi známými časovými body jsou lineárně interpolovány sférické harmonické koeficienty ledové zátěže. Hustota ledu je konstantní, $\rho_I = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Časový vývoj celkové hmoty ledové zátěže je znázorněn na obrázku 5.5.

Model ICE-3G byl získán na základě predikce vývoje relativních výšek hladiny (RSL). Do úlohy byla začleněna RSL data z lokalit, které byly v minulosti pokryty ledem. Průběh RSL však nezávisí pouze na modelu zalednění, je ovlivněn také reologickou strukturou Země. Tato nebyla volným parametrem úlohy. Při odvození modelu zatížení byla předpokládána jednoduchá radiálně symetrická struktura – elastická litosféra tloušťky 120 km, svrchní plášť s viskozitou $10^{21} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, viskozita spodního pláště 2–4× vyšší. Tento průběh viskozit je založen na výsledcích předchozích prací jednoho z autorů modelu (Peltier, 1976, 1985).

Z předchozích slov vyvstává námitka k použití diskutovaného modelu zalednění v této práci. Chceme totiž, jak bylo uvedeno v úvodní kapitole, řešit úlohu postglaciálního výzdvihu pro různé viskózní modely pláště, výsledky poté využít v obrácené úloze při predikci geoidu. Tedy chceme použít model ICE-3G pro výpočty s modely Země, které mu neodpovídají. Z tohoto po-

hledu by správný přístup spočíval v řešení spojené obrácené úlohy, kde by mezi parametry modelu byl model ledovce i viskózní struktura Země. Tím by se však celý problém značně zkomplikoval. V této práci se chceme soustředit na rozdíly chování různých modelů Země pod stejnou ledovou zátěží. Globální model ICE-3G považujeme za dostatečně přesný, zejména s přihlédnutím k jiným nepřesnostem, jichž se dopouštíme (otázka hustot ledu a vody, konečný sférický rozvoj).

Obecná formulace rovnice hladiny vod vyžaduje znalost výšky hladiny v počátku zatěžování. Tvar topografie zemského povrchu je však znám pouze v současnosti. Počáteční stav popíšeme současnými hodnotami výšky hladiny. Pro jednotlivé modely viskózní struktury Země můžeme sledovat výsledné změny výšky hladiny na konci glaciálního cyklu, případně navrhnout opatrnější postup v otázce počáteční výšky hladiny. Současné hodnoty topografie používaná v této práci jsou reprezentovány souborem dat na síti s rozlišením $2^\circ \times 2^\circ$. Data jsou převzata z modelu 3SMAC (Nataf and Ricard, 1996). Hustota vody je konstantní, $\rho_W = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

5.2 Parametry modelů Země

Přímá úloha postglaciálního výzdvihu byla počítána pro různé modely viskózní struktury uvnitř Země. Všechny modely obsahují jádro o poloměru 3480 km, jehož dynamická viskozita činí $10^{19} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Následují spodní a svrchní plášť, rozhraní mezi nimi se nachází v hloubce 670 km. Svrchní vrstvu tvoří tuhá litosféra s viskozitou $10^{30} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ o mocnosti 100 km. Poloměr Země je 6371 km. Hodnota viskozity ve svrchním plášti η_{UM} se u modelů pohybuje v rozmezí 10^{19} až $10^{21} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, ve spodním plášti se viskozita η_{LM} nalézá v intervalu 10^{21} až $10^{23} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Pracujeme s deseti hodnotami η_{UM} a stejným počtem η_{LM} . Máme tedy celkem 100 viskózních modelů Země. Hustotní model $\rho_0(r)$ a průběh torzního modulu $\mu(r)$ jsou převzaty z modelu PREM (Dziewonski a Anderson, 1981). Převzetím průběhu hustoty a torzního modulu z modelu PREM jsme se dopustili nekonzistence vzhledem k formulaci rovnic postglaciálního výzdvihu pro nestlačitelné médium. K tomuto kroku nás vedla snaha o realistický popis parametrů Země.

5.3 Výsledky přímé úlohy

K výpočtům postglaciálního výzdvihu byl použit upravený program TEFÉ3 (autorem je Zdeněk Martinec, 2000) se zahrnutou rovnicí hladiny vod v obecné podobě. Výpočty byly spouštěny na strojích geof10–geof80 umístěných na

Katedře geofyziky MFF UK v Praze v budově Troja, 12. patro. Časový krok 10^8 s (přibližně 3.2 let) byl stejný pro všechny modely. Sférický harmonický rozvoj byl ukončen na stupni $j_{max} = 8$. Predikované výšky geoidu, rychlosti vertikálního posunutí a časové změny geoidu v současnosti (v čase $t = 0$) jsou na obrázcích 5.6–5.11 zakresleny souborně pro všechny modely. Každá veličina je vyobrazena dvakrát s různou volbou barevné škály: pro vzájemné porovnávání modelů je vhodná shodná škála pro všechny modely, zatímco na obrázcích, kde se škála u jednotlivých modelů liší, je možno lépe pozorovat výsledné obrazce. Největší a nejmenší hodnoty veličin spolu s viskozitami η_{UM} a η_{LM} jednotlivých modelů uvádí tabulka 5.1.

Výsledné obrazce geoidu (obr. 5.6 a 5.7) jsou charakterizovány dvěma výraznými minimy. Významnější z minim je lokalizováno v místě Hudsonova zálivu v oblasti dnešní Kanady. Druhé, méně výrazné minimum se nachází poblíž jižního pólu. Výskyt minim zjevně souhlasí s polohou oblastí, které podstoupily největší zatěžování v průběhu glaciálního cyklu. V ostatních oblastech jsou extrémy nevýrazné. Amplitudy geoidu rostou se zvyšující se hodnotou svrchního i spodního pláště. Zároveň dochází, zejména s rostoucí η_{UM} , ke zužování, zostřování geoidových níží. Nejvýraznějšího minima s hodnotou -32 m je dosaženo u modelu 88 (viz tabulku 5.1).

Rozložení rychlosti vertikálního posunutí (obr. 5.8 a 5.9) vytváří podobný obrazec, jaký jsme získali u geoidu. Největší hodnoty odpovídají relaxaci nejvíce zatěžovaných oblastí. Nejvyšší rychlosti vertikálního pohybu bylo dosaženo u modelu 66 (viz tabulku 5.1) v místě Hudsonova zálivu – hodnota činí 8.4 mm/rok. Pozorované rychlosti vertikálního posunutí zjištěné analýzou dat VLBI (*very long baseline interferometry*) v severní Americe (Spada, 2001, Ma a Ryan, 1998) dosahují nejvyšších hodnot ~ 12 mm/rok. Uvažované modely tedy vystihnou nejvýše 2/3 dat pozorovaných na území dnešní Kanady. Srovnatelné rychlosti vertikálních pohybů jsou pozorovány ve Skandinávii v severním cípu Botnického zálivu v místě dřívějšího výskytu tzv. fenoskandinávského ledovce (Milne a kol., 2001). Efekt tohoto ledovce, který byl rozlohou menší než tzv. laurentidský ledovec v severní Americe, se při maximálním stupni $j_{max} = 8$ harmonického rozvoje neprojevil. Největší dosažené hodnoty výzdvihu v severní Evropě se u počítaných modelů pohybují okolo 1.5 mm/rok.

Za účelem zjištění korelace mezi výškami residuálních geoidů z postglaciálního výzdvihu $H^{reb}(\eta_{UM}, \eta_{LM})$ a pozorovanými daty H^{obs} byl spočítán korelační koeficient c ze vztahu

$$c(\eta_{UM}, \eta_{LM}) = \frac{(H^{reb}, H^{obs})}{\|H^{reb}\| \|H^{obs}\|}, \quad (5.1)$$

kde (\cdot, \cdot) a $\|\cdot\|$ označují skalární součin, resp. normu v prostoru $L_2(K)$ (viz

dodatek), tedy

$$c(\eta_{UM}, \eta_{LM}) = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} H^{reb} H^{obs} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{\left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |H^{reb}|^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |H^{obs}|^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.2)$$

Rozvojem do konečné řady sférických harmonických funkcí (vztah D6 v dodatku) dostaneme díky jejich ortonormalitě (vztah D3) vyjádření

$$c(\eta_{UM}, \eta_{LM}) = \frac{\sum_j \sum_m H_{jm}^{reb} H_{jm}^{*obs}}{\sum_j \sum_m |H_{jm}^{reb}|^2 \sum_j \sum_m |H_{jm}^{obs}|^2}, \quad (5.3)$$

kde * značí komplexní sdružení. Řada je ukončena na stupni $j_{max} = 8$, tzn. sumace probíhá přes $j = 0, \dots, 8$, $m = -j, \dots, j$. V důsledku konečného rozvoje tedy vyjádření 5.1 a 5.3 nejsou ekvivalentní, přesto jsme si dovolili použít stejné označení. Spektrální vztah umožňuje počítat také korelace c_j na jednotlivých stupních sférického rozvoje. Průběh korelačního koeficientu v závislosti na parametrech modelů znázorňují obrázky 5.12a,b. Z obrázku je vidět, že největší korelace s pozorovanými daty je dosaženo na stupni $j = 2$ ($c_2 \geq 0.83$). Hodnota se zároveň příliš nemění v závislosti na viskózní struktuře. Stupeň $j = 2$ nejvíce ovlivňuje výslednou korelaci. Na vyšších stupních nabývá korelace záporných hodnot pro modely s nízkou hodnotou viskozity ve svrchním plášti ($\eta_{UM} \lesssim 3 \cdot 10^{19} \text{ Pa} \cdot \text{s}$). V této oblasti korelační koeficient není citlivý na změny viskozity ve spodním plášti, což je vidět z převážně horizontálního směru isolinií. Nejvyšší korelace ($c = 0.70$) bylo dosaženo u modelu s parametry $\eta_{UM} = 10^{19} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\eta_{LM} = 5 \cdot 10^{22} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Vysoká korelace dosahují modely, které jsou charakterizovány nízkou hodnotou viskozity ve spodním plášti a nárůstem viskozity alespoň o 2 řády ve spodním plášti.

Vztah pro poměr výkonu signálu H^{reb} vůči pozorovanému signálu H^{obs}

$$R = \frac{\|H^{reb}\|^2}{\|H^{obs}\|^2} \quad (5.4)$$

přejde ve spektrální oblasti do tvaru

$$R = \frac{\sum_j \sum_m |H_{jm}^{reb}|^2}{\sum_j \sum_m |H_{jm}^{obs}|^2}. \quad (5.5)$$

Obrázky 5.13a,b ukazují průběh spektrálního poměru R_j na jednotlivých stupních rozvoje v závislosti na hodnotách viskozity. Výkon signálu z postglaciálního výzdvihu roste se zvyšujícími se hodnotami viskozit v plášti. To není překvapující výsledek – modely s vyšší viskozitou pomaleji reagují na změny zátěže, déle si „podrží v paměti“ minulé deformace; toto chování souvisí delším relaxačním časem. Nejvyšších hodnot (téměř 10 %) bylo dosaženo na stupních $j = 7$ a $j = 8$. Toto chování souvisí s odlišným charakterem spektra ledové zátěže ve srovnání s pozorovaným geoidem. Spektrální výkon ledové zátěže neklesá s rostoucím stupněm tak rychle, jako je tomu u pozorovaného geoidu. Celkový poměr na stupních 2–8 dosahuje nejvyšší hodnoty 1.8 %. Toto číslo odráží menší amplitudy residuálního geoidu z postglaciálního výzdvihu ve srovnání s pozorovaným geoidem. Vyšší hodnoty spektrálního poměru R odpovídají modelům s nižší hodnotou korelace ($c < 0.6$).

č. mod.	η_{UM} [Pa·s]	η_{LM} [Pa·s]	H_{min}^{reb} [m]	H_{max}^{reb} [m]	$u_{r_{min}}$ [m]	$u_{r_{max}}$ [m]	$ \dot{H}_{max}^{reb} $ [mm/r]	$ \dot{u}_{r_{max}} $ [mm/r]
1	$1 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{21}$	-0.40	0.29	-14.82	4.07	0.12	1.06
2	$2 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{21}$	-1.03	0.51	-21.23	4.85	0.19	1.43
3	$4 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{21}$	-1.87	0.56	-28.14	4.48	0.27	1.79
4	$7 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{21}$	-2.52	0.51	-32.84	6.26	0.31	2.01
5	$1 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{21}$	-2.83	0.48	-34.69	7.38	0.32	2.07
6	$2 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{21}$	-3.08	0.54	-34.74	8.59	0.32	2.02
7	$3 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{21}$	-3.01	0.55	-32.69	8.54	0.31	1.97
8	$5 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{21}$	-2.72	0.53	-28.66	7.85	0.33	2.03
9	$7 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{21}$	-2.48	0.49	-25.61	7.18	0.36	2.21
10	$1 \cdot 10^{21}$	$1 \cdot 10^{21}$	-2.38	0.46	-22.66	6.58	0.41	2.52
11	$1 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{21}$	-0.55	0.39	-13.25	4.07	0.24	1.27
12	$2 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{21}$	-1.48	0.81	-19.51	5.48	0.37	1.86
13	$4 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{21}$	-2.64	0.96	-26.83	5.15	0.52	2.70
14	$7 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{21}$	-3.59	0.93	-32.50	5.71	0.63	3.43
15	$1 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{21}$	-4.11	0.87	-35.54	6.66	0.68	3.79
16	$2 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{21}$	-4.75	0.77	-38.62	8.66	0.73	4.12
17	$3 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{21}$	-4.88	0.76	-38.22	9.33	0.76	4.22
18	$5 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{21}$	-4.90	0.78	-35.82	9.50	0.81	4.42
19	$7 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{21}$	-4.91	0.79	-33.71	9.28	0.85	4.68
20	$1 \cdot 10^{21}$	$2 \cdot 10^{21}$	-4.98	0.81	-33.12	9.00	0.92	5.02
21	$1 \cdot 10^{19}$	$4 \cdot 10^{21}$	-0.94	0.65	-12.72	4.44	0.37	1.44
22	$2 \cdot 10^{19}$	$4 \cdot 10^{21}$	-2.47	1.40	-19.78	6.84	0.57	2.33
23	$4 \cdot 10^{19}$	$4 \cdot 10^{21}$	-4.36	1.75	-29.03	7.26	0.81	3.74
24	$7 \cdot 10^{19}$	$4 \cdot 10^{21}$	-6.01	1.75	-37.81	7.16	1.00	5.00
25	$1 \cdot 10^{20}$	$4 \cdot 10^{21}$	-7.02	1.68	-43.83	8.23	1.08	5.58
26	$2 \cdot 10^{20}$	$4 \cdot 10^{21}$	-8.71	1.50	-54.39	10.95	1.17	6.06
27	$3 \cdot 10^{20}$	$4 \cdot 10^{21}$	-9.43	1.53	-58.42	13.44	1.20	6.13
28	$5 \cdot 10^{20}$	$4 \cdot 10^{21}$	-9.95	1.63	-60.56	15.62	1.26	6.29
29	$7 \cdot 10^{20}$	$4 \cdot 10^{21}$	-10.14	1.74	-60.78	16.47	1.31	6.50
30	$1 \cdot 10^{21}$	$4 \cdot 10^{21}$	-10.34	1.83	-60.93	17.05	1.37	6.77
31	$1 \cdot 10^{19}$	$7 \cdot 10^{21}$	-1.28	0.85	-12.71	4.85	0.48	1.62
32	$2 \cdot 10^{19}$	$7 \cdot 10^{21}$	-3.44	1.90	-20.89	8.19	0.74	2.76
33	$4 \cdot 10^{19}$	$7 \cdot 10^{21}$	-6.09	2.44	-32.80	9.13	1.03	4.54
34	$7 \cdot 10^{19}$	$7 \cdot 10^{21}$	-8.46	2.45	-45.35	9.19	1.24	6.02
35	$1 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{21}$	-10.19	2.35	-54.91	10.62	1.32	6.64
36	$2 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{21}$	-13.40	2.08	-74.24	15.20	1.39	6.92
37	$3 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{21}$	-14.87	2.41	-83.43	19.84	1.40	7.11
38	$5 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{21}$	-16.18	2.90	-90.80	24.29	1.43	7.23
39	$7 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{21}$	-16.77	3.13	-93.51	26.24	1.46	7.30
40	$1 \cdot 10^{21}$	$7 \cdot 10^{21}$	-17.32	3.31	-95.62	27.53	1.50	7.48

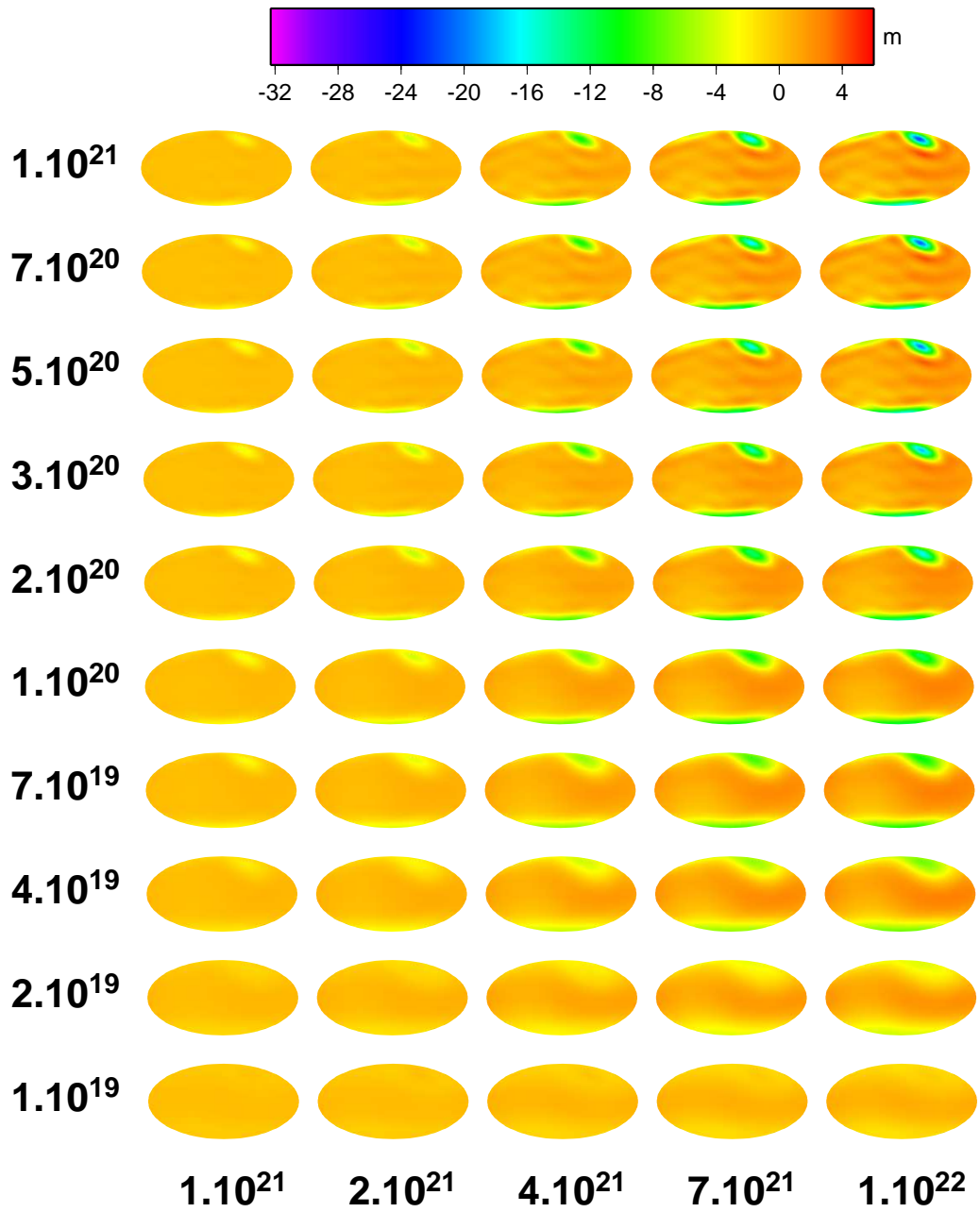
... pokračování na následující straně ...

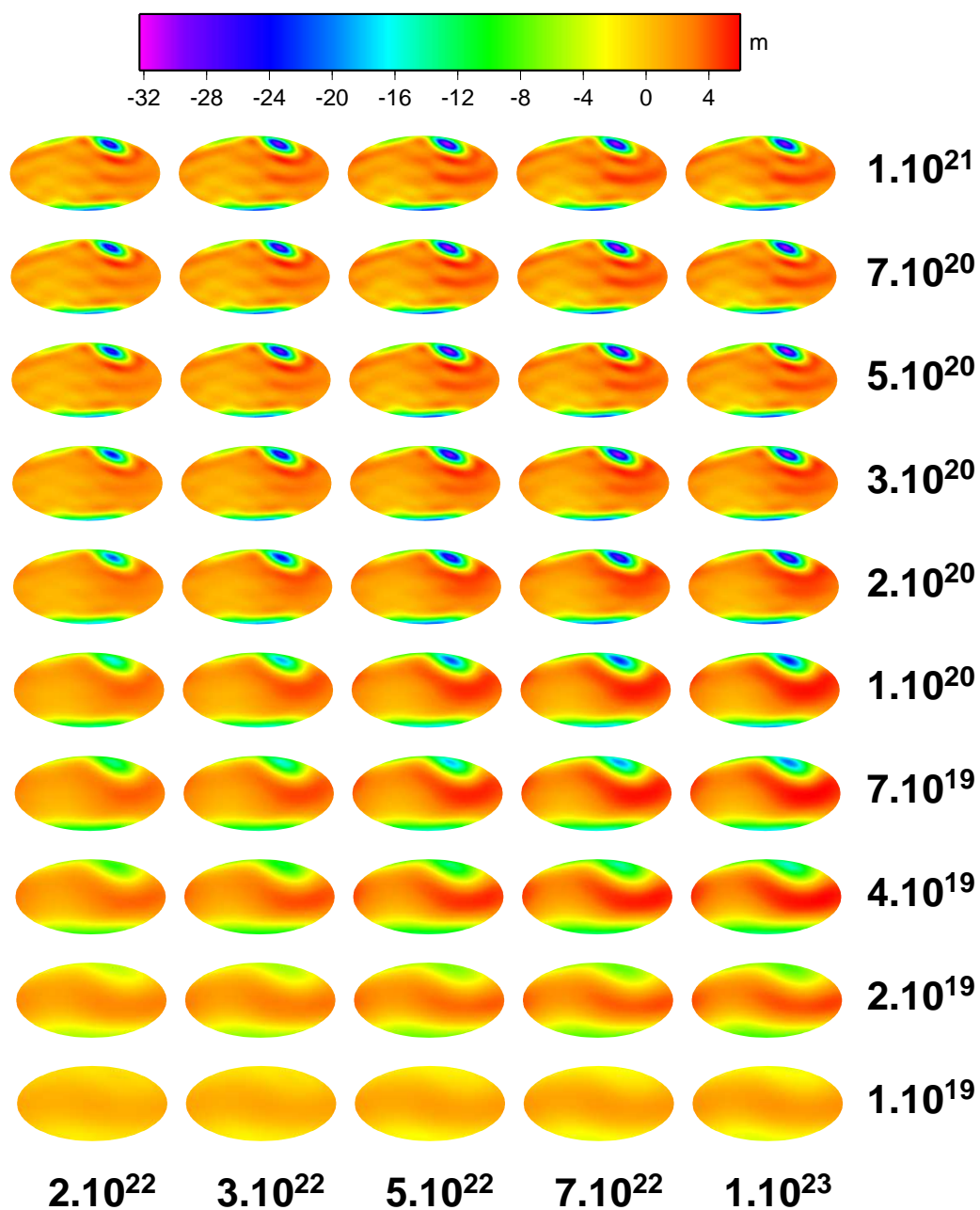
č. mod.	η_{UM} [Pa·s]	η_{LM} [Pa·s]	H_{min}^{reb} [m]	H_{max}^{reb} [m]	$u_{r_{min}}$ [m]	$u_{r_{max}}$ [m]	$ \dot{H}_{max}^{reb} $ [mm/r]	$ \dot{u}_{r_{max}} $ [mm/r]
41	$1 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{22}$	-1.48	0.95	-12.67	5.07	0.56	1.77
42	$2 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{22}$	-4.09	2.18	-22.04	8.96	0.84	3.05
43	$4 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{22}$	-7.23	2.84	-35.42	10.23	1.15	4.97
44	$7 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{22}$	-10.17	2.87	-50.61	10.49	1.35	6.49
45	$1 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{22}$	-12.34	2.76	-62.49	12.36	1.42	7.06
46	$2 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{22}$	-16.45	2.66	-87.49	18.46	1.45	7.54
47	$3 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{22}$	-18.40	3.17	-99.93	24.46	1.44	7.76
48	$5 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{22}$	-20.18	3.79	-110.30	30.16	1.44	7.66
49	$7 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{22}$	-20.98	4.06	-114.22	32.59	1.46	7.59
50	$1 \cdot 10^{21}$	$1 \cdot 10^{22}$	-21.70	4.26	-117.09	34.04	1.48	7.63
51	$1 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{22}$	-1.95	1.16	-13.17	5.44	0.70	2.07
52	$2 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{22}$	-5.44	2.76	-24.76	10.34	1.01	3.51
53	$4 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{22}$	-9.40	3.68	-40.84	12.23	1.30	5.51
54	$7 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{22}$	-13.62	3.77	-60.75	13.04	1.47	6.97
55	$1 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{22}$	-16.53	3.67	-76.58	15.88	1.50	7.40
56	$2 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{22}$	-22.00	3.80	-110.53	24.40	1.60	8.34
57	$3 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{22}$	-24.59	4.45	-127.48	32.19	1.57	8.20
58	$5 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{22}$	-26.77	5.12	-140.87	39.28	1.50	7.54
59	$7 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{22}$	-27.63	5.36	-144.99	41.60	1.46	7.11
60	$1 \cdot 10^{21}$	$2 \cdot 10^{22}$	-28.28	5.44	-146.90	42.38	1.44	6.82
61	$1 \cdot 10^{19}$	$3 \cdot 10^{22}$	-2.33	1.35	-13.70	5.73	0.77	2.21
62	$2 \cdot 10^{19}$	$3 \cdot 10^{22}$	-6.31	3.19	-26.38	11.18	1.07	3.70
63	$4 \cdot 10^{19}$	$3 \cdot 10^{22}$	-10.93	4.28	-44.30	13.44	1.34	5.67
64	$7 \cdot 10^{19}$	$3 \cdot 10^{22}$	-15.77	4.40	-66.51	14.56	1.48	7.07
65	$1 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{22}$	-18.99	4.29	-84.07	17.77	1.57	7.45
66	$2 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{22}$	-24.89	4.35	-121.44	27.21	1.63	8.43
67	$3 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{22}$	-27.56	4.95	-139.57	35.27	1.56	8.06
68	$5 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{22}$	-29.60	5.53	-152.70	42.47	1.43	7.09
69	$7 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{22}$	-30.23	5.65	-155.55	44.26	1.36	6.47
70	$1 \cdot 10^{21}$	$3 \cdot 10^{22}$	-30.56	5.60	-155.44	44.15	1.32	6.02
71	$1 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{22}$	-2.90	1.64	-14.46	6.16	0.82	2.35
72	$2 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{22}$	-7.41	3.80	-28.34	12.27	1.11	3.83
73	$4 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{22}$	-12.96	5.08	-48.61	14.95	1.34	5.75
74	$7 \cdot 10^{19}$	$5 \cdot 10^{22}$	-18.30	5.20	-73.02	16.25	1.48	7.06
75	$1 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{22}$	-21.73	5.03	-92.05	19.63	1.57	7.57
76	$2 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{22}$	-27.75	4.83	-131.71	29.53	1.56	8.26
77	$3 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{22}$	-30.24	5.29	-149.99	37.71	1.44	7.65
78	$5 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{22}$	-31.76	5.70	-161.23	44.58	1.26	6.36
79	$7 \cdot 10^{20}$	$5 \cdot 10^{22}$	-31.91	5.63	-161.61	45.57	1.16	5.58
80	$1 \cdot 10^{21}$	$5 \cdot 10^{22}$	-31.67	5.39	-158.19	44.21	1.09	4.99

... pokračování na následující straně ...

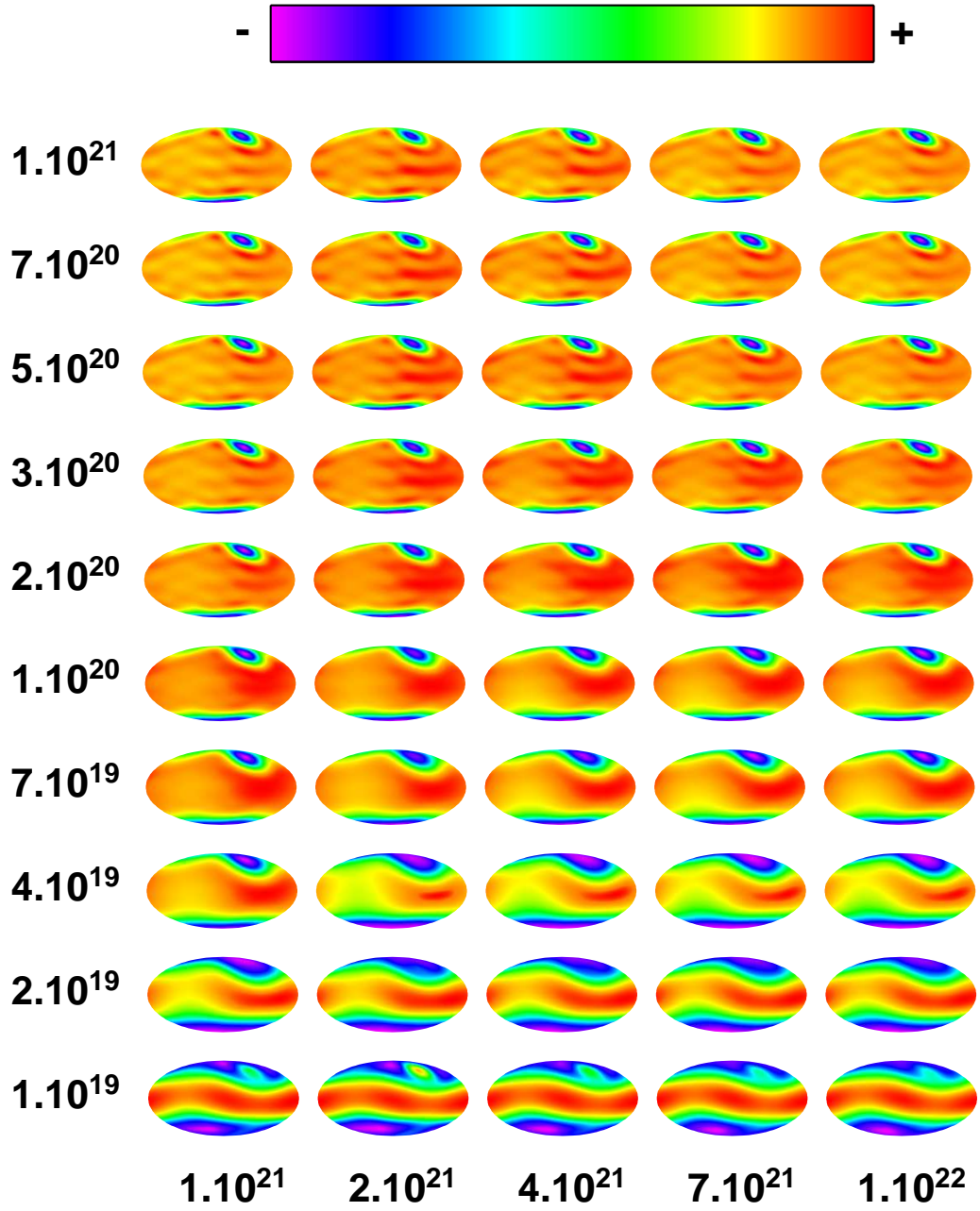
č. mod.	η_{UM} [Pa·s]	η_{LM} [Pa·s]	H_{min}^{reb} [m]	H_{max}^{reb} [m]	u_{rmin} [m]	u_{rmax} [m]	$ \dot{H}_{max}^{reb} $ [mm/r]	$ \dot{u}_{rmax} $ [mm/r]
81	$1 \cdot 10^{19}$	$7 \cdot 10^{22}$	-3.28	1.85	-14.96	6.45	0.84	2.40
82	$2 \cdot 10^{19}$	$7 \cdot 10^{22}$	-8.08	4.18	-29.49	12.94	1.12	3.87
83	$4 \cdot 10^{19}$	$7 \cdot 10^{22}$	-14.12	5.56	-51.09	15.85	1.32	5.75
84	$7 \cdot 10^{19}$	$7 \cdot 10^{22}$	-19.63	5.65	-76.47	17.13	1.46	7.01
85	$1 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{22}$	-23.10	5.42	-96.04	20.51	1.53	7.54
86	$2 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{22}$	-28.95	4.99	-136.18	30.49	1.47	8.07
87	$3 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{22}$	-31.20	5.39	-154.00	38.73	1.33	7.33
88	$5 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{22}$	-32.27	5.69	-163.49	45.29	1.13	5.90
89	$7 \cdot 10^{20}$	$7 \cdot 10^{22}$	-32.05	5.53	-162.08	45.81	1.02	5.04
90	$1 \cdot 10^{21}$	$7 \cdot 10^{22}$	-31.40	5.16	-156.44	43.69	0.94	4.39
91	$1 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{23}$	-3.64	2.05	-15.43	6.74	0.86	2.44
92	$2 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{23}$	-8.67	4.52	-30.51	13.55	1.11	3.89
93	$4 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{23}$	-15.08	5.97	-53.21	16.63	1.29	5.73
94	$7 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{23}$	-20.65	5.99	-79.22	17.84	1.42	6.94
95	$1 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{23}$	-24.05	5.69	-99.05	21.20	1.47	7.47
96	$2 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{23}$	-29.59	5.08	-139.07	31.24	1.38	7.86
97	$3 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{23}$	-31.54	5.46	-156.13	39.56	1.23	7.02
98	$5 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{23}$	-32.10	5.67	-163.70	45.81	1.00	5.48
99	$7 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{23}$	-31.49	5.43	-160.49	45.94	0.88	4.57
100	$1 \cdot 10^{21}$	$1 \cdot 10^{23}$	-30.42	5.00	-152.70	43.15	0.79	3.88

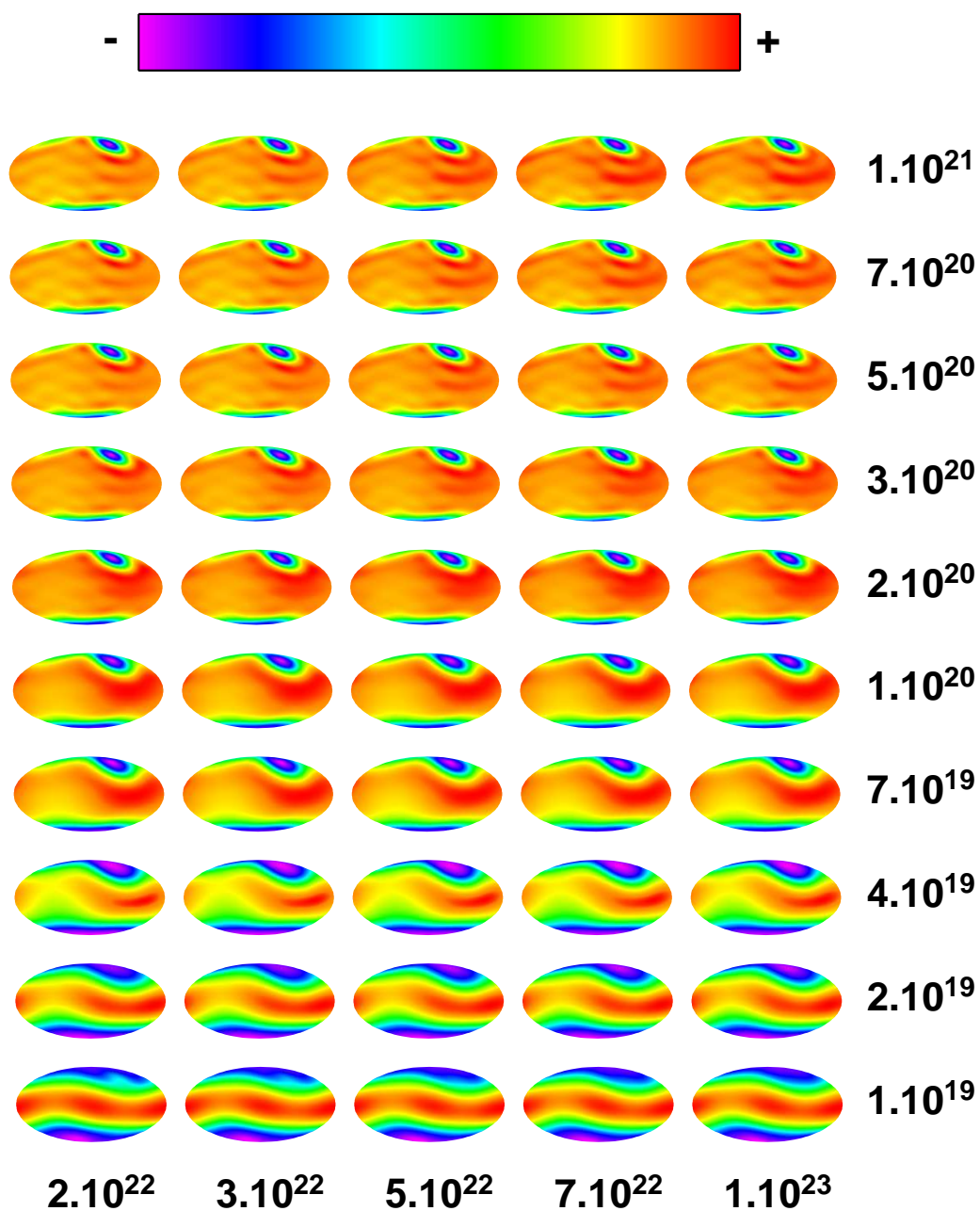
Tabulka 5.1: Minimální a maximální hodnoty výšky geoidu H_{min}^{reb} a H_{max}^{reb} , vertikálního posunutí u_{rmin} a u_{rmax} a největší absolutní hodnoty časové změny geoidu a rychlosti vertikálního posunutí \dot{H}_{max}^{reb} a \dot{u}_{rmax} v čase $t = 0$ pro modely 1–100.



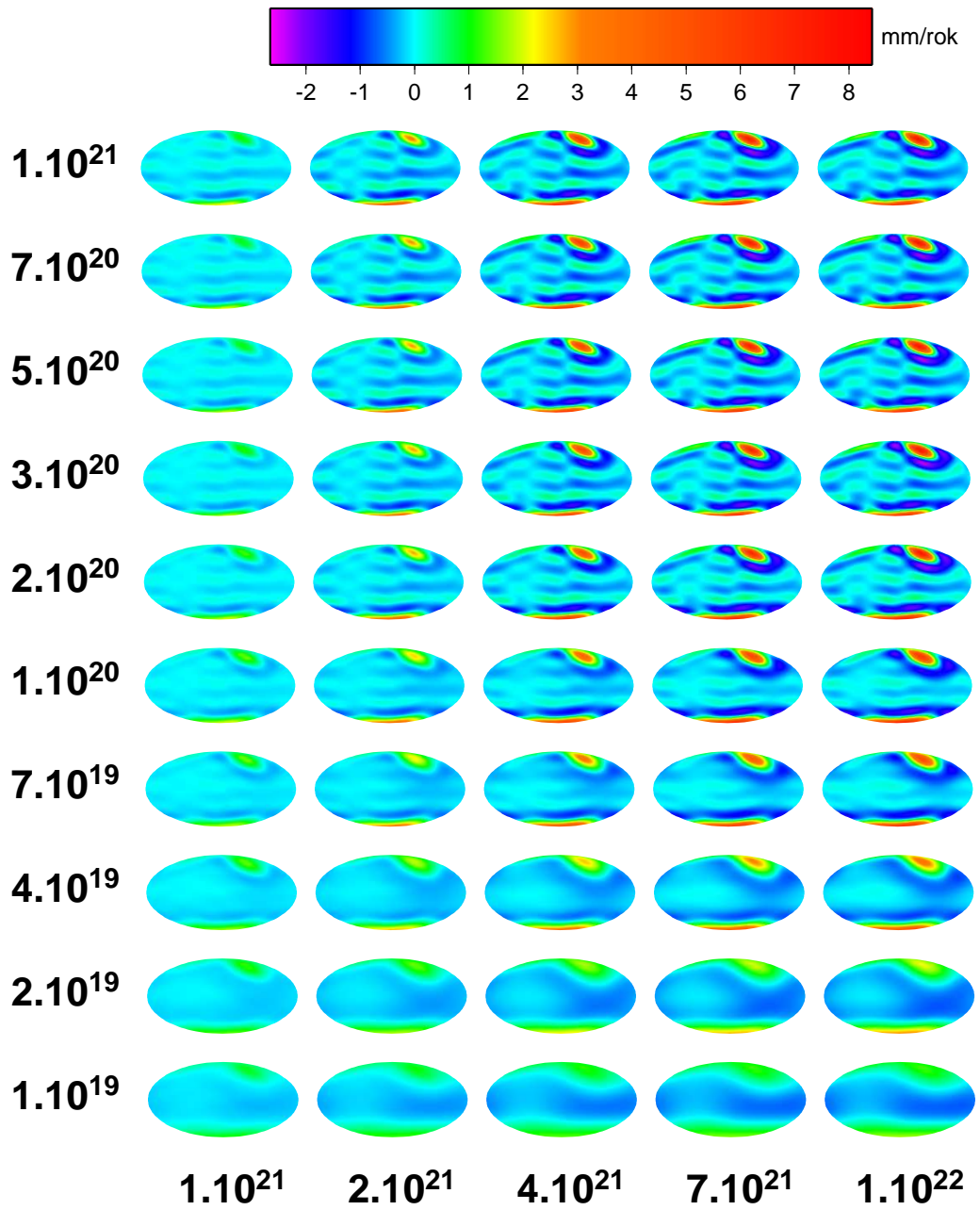


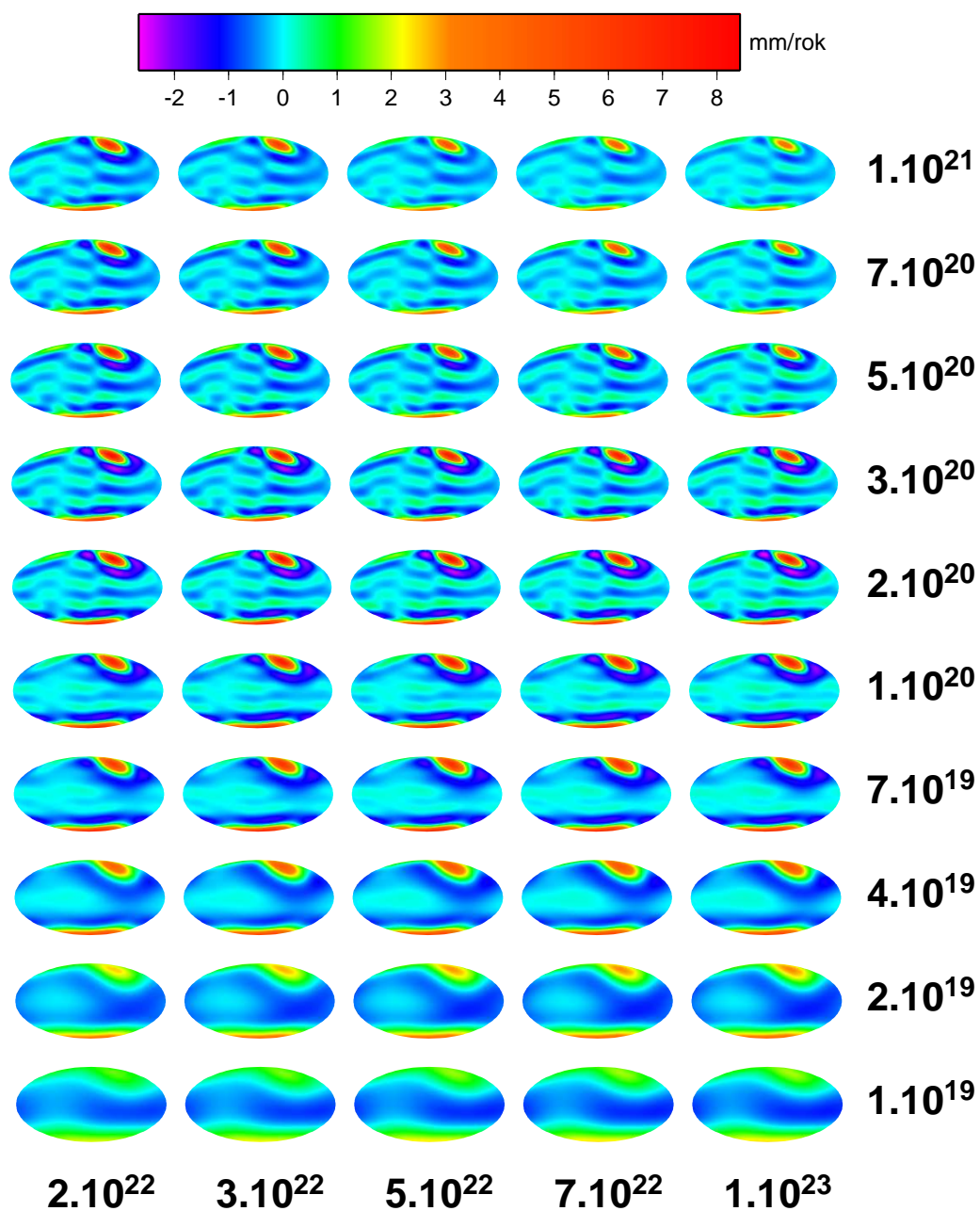
Obrázek 5.6: (i na protější straně) Výšky geoidů v čase $t = 0$ pro modely 1–100. V horizontálním směru se u modelů mění hodnota η_{LM} , ve vertikálním η_{UM} . Číselné hodnoty viskozit jsou udány v jednotkách $\text{Pa} \cdot \text{s}$. Barevná škála je shodná pro všechny modely.



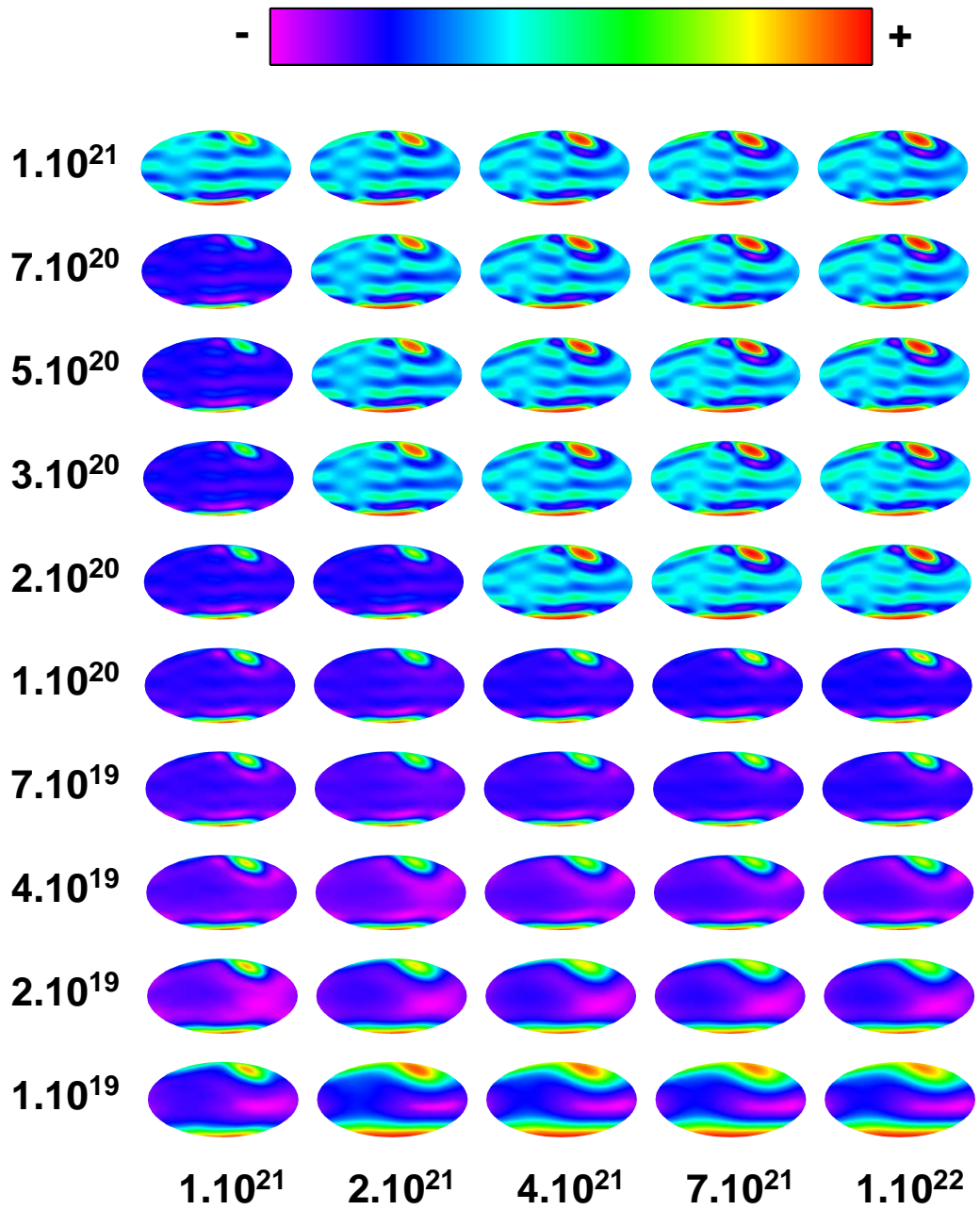


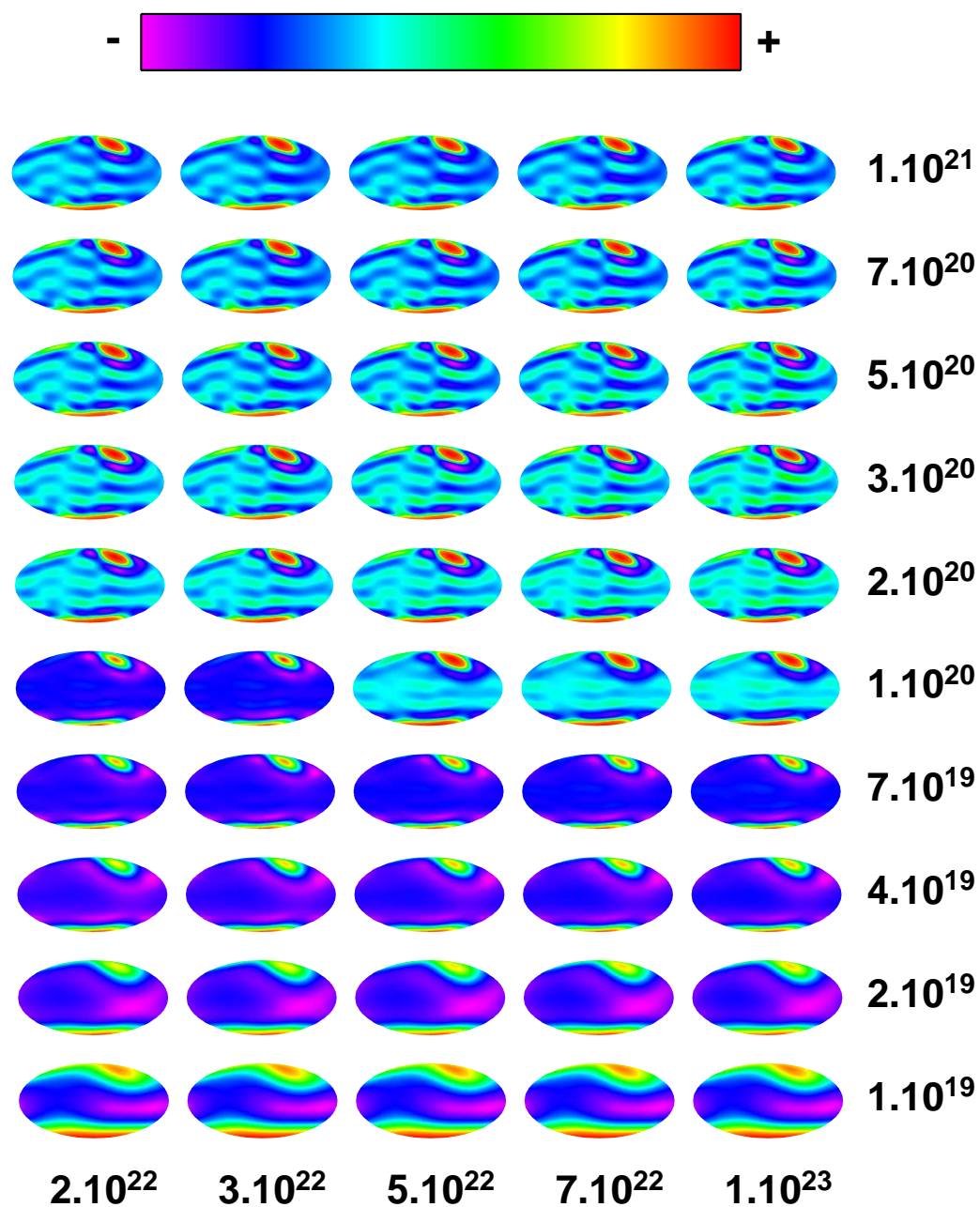
Obrázek 5.7: (i na protější straně) Výšky geoidů v čase $t = 0$ pro modely 1–100. Barevná škála vytvořena pro každý model zvlášť.



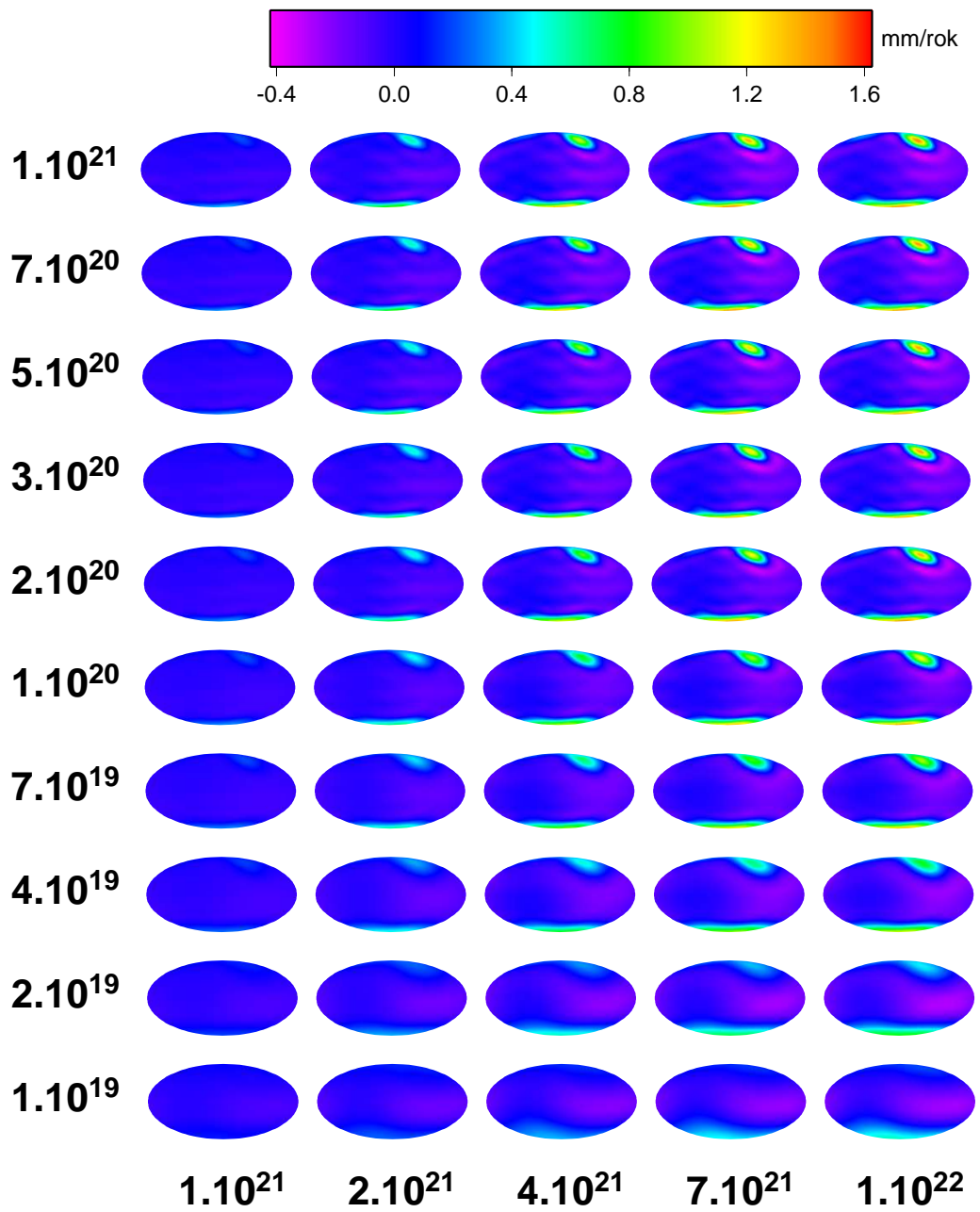


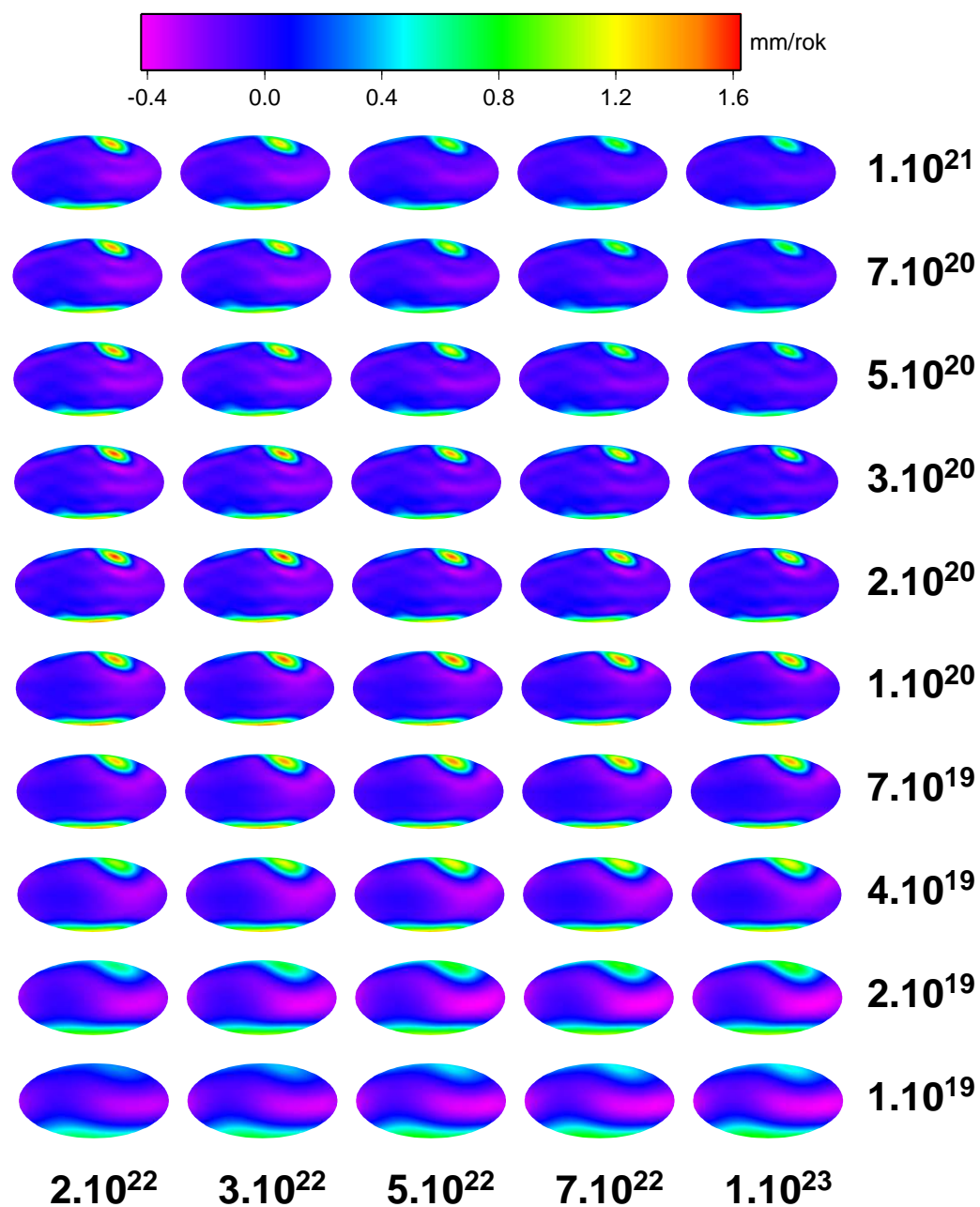
Obrázek 5.8: (i na protější straně) Rychlost vertikálního posunutí v čase $t = 0$ pro modely 1–100. Barevná škála je shodná pro všechny modely.



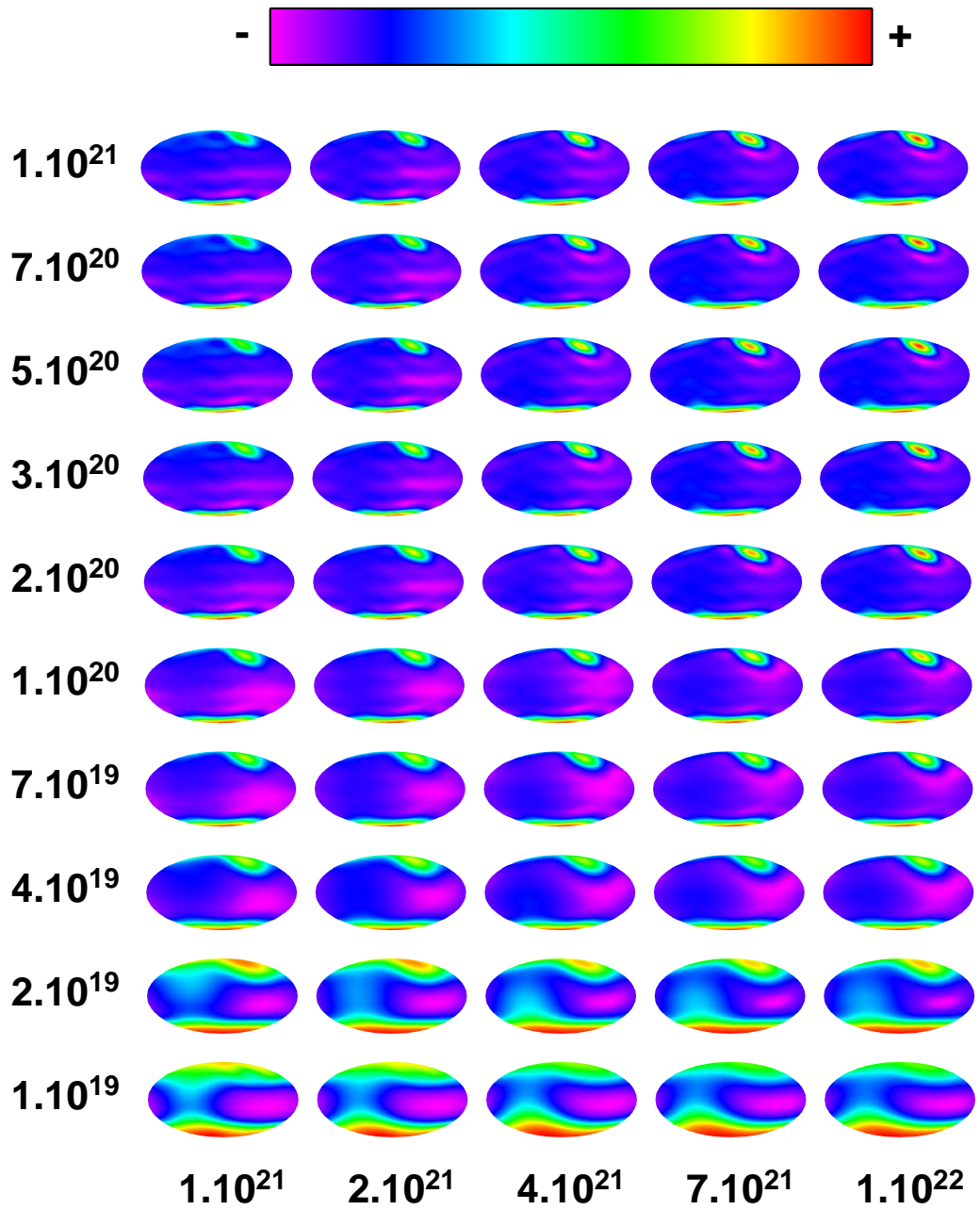


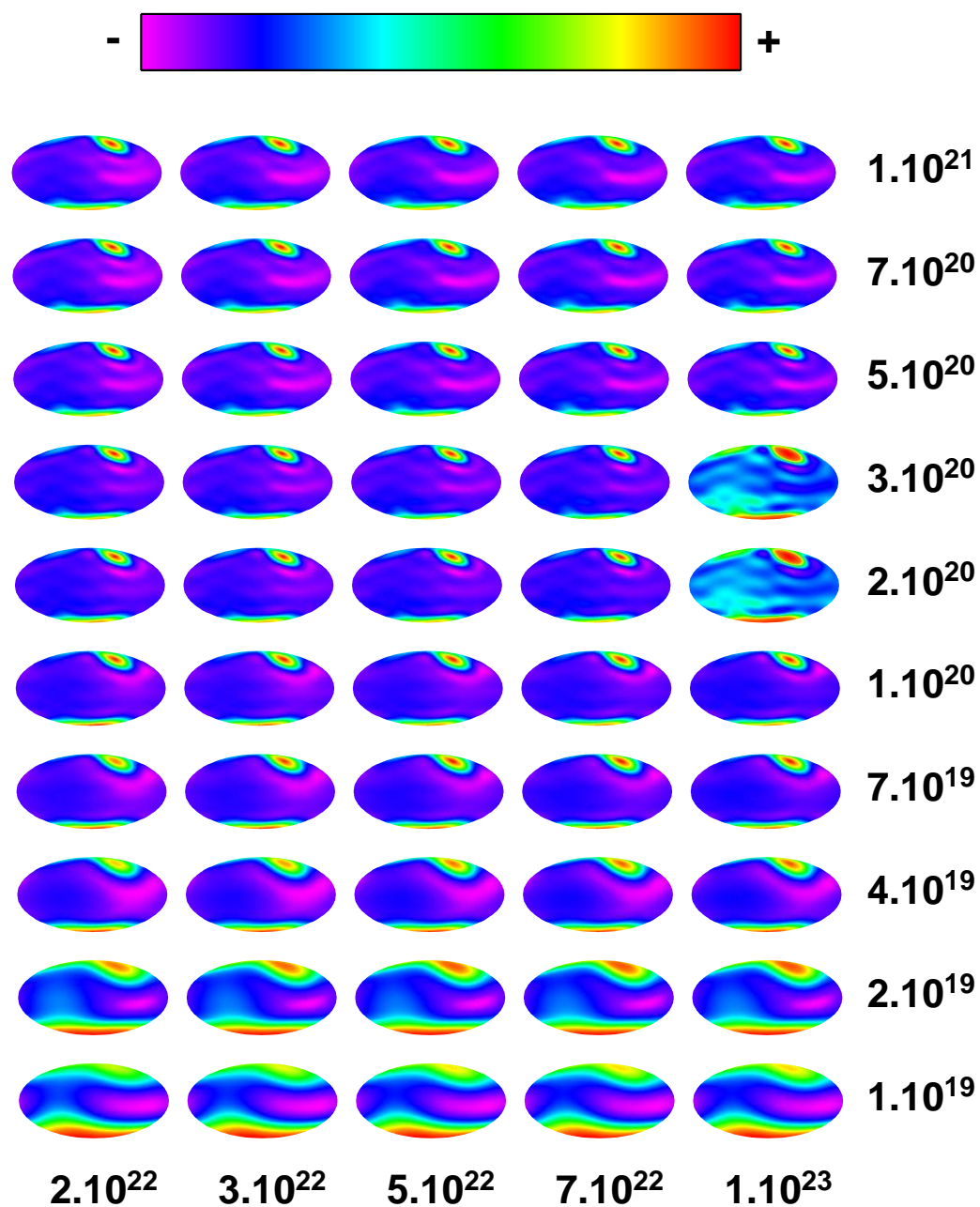
Obrázek 5.9: (i na protější straně) Rychlost vertikálního posunutí v čase $t = 0$ pro modely 1–100. Barevná škála vytvořena pro každý model zvlášť.



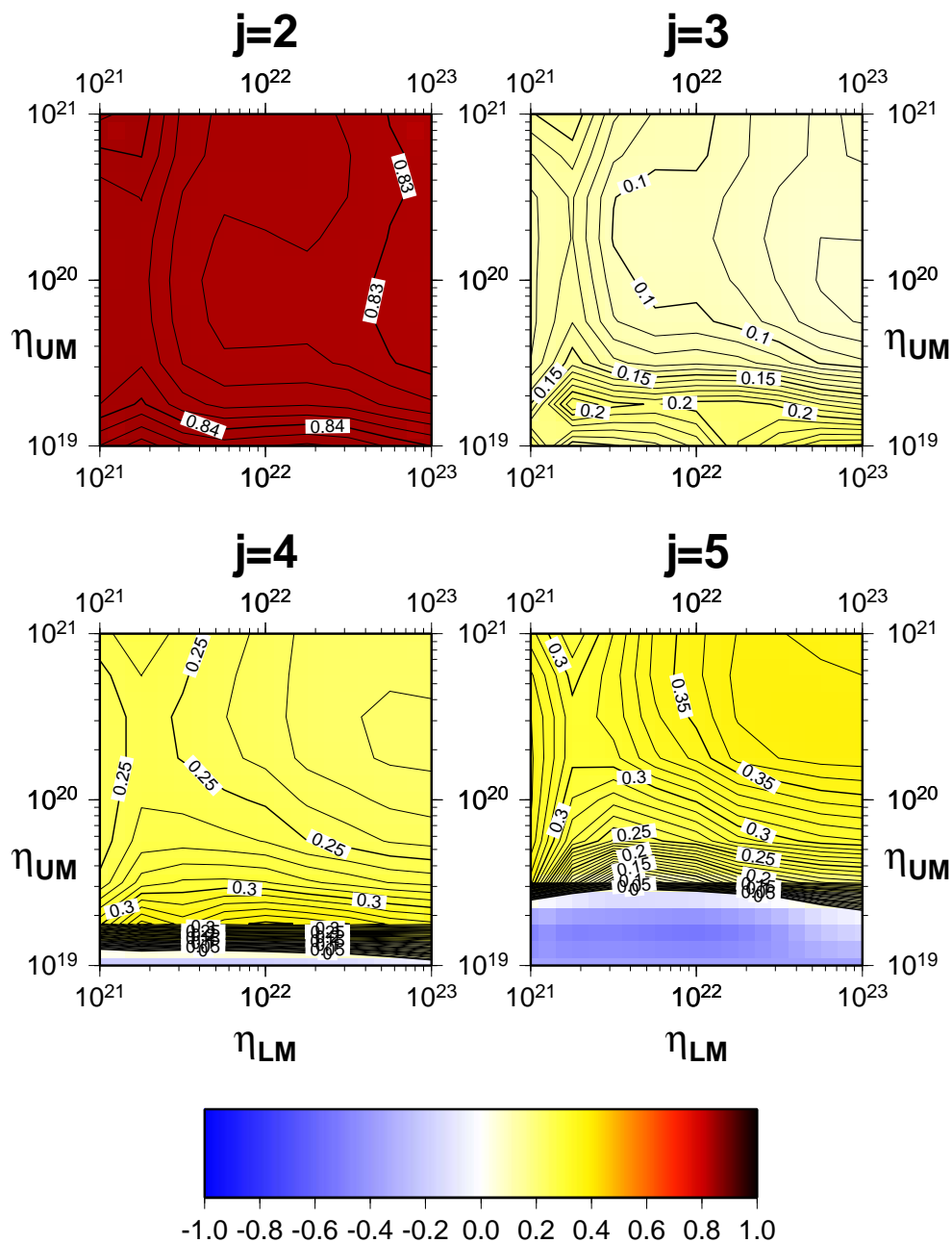


Obrázek 5.10: (i na protější straně) Časová změna geoidu v čase $t = 0$ pro modely 1–100. Barevná škála je shodná pro všechny modely.

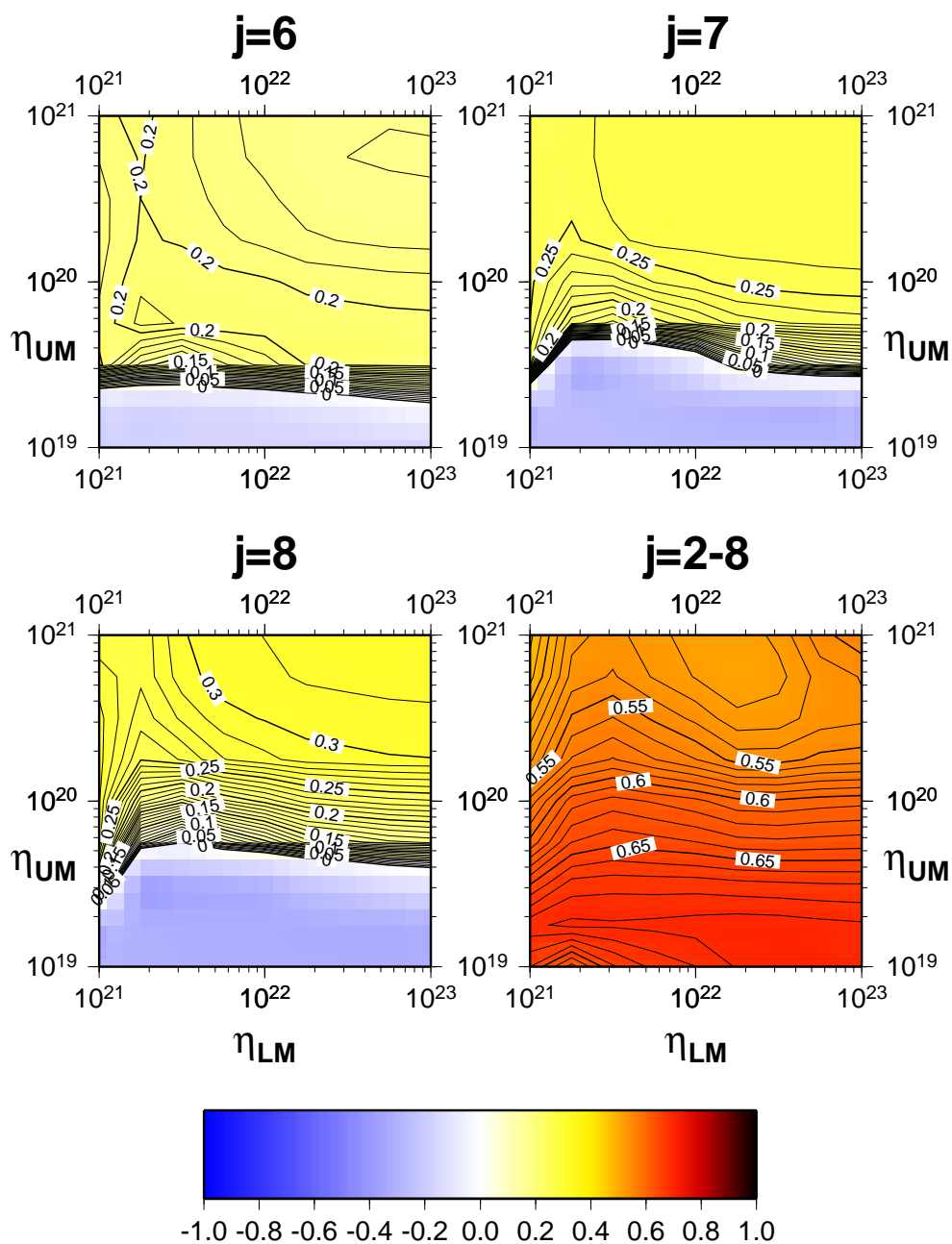




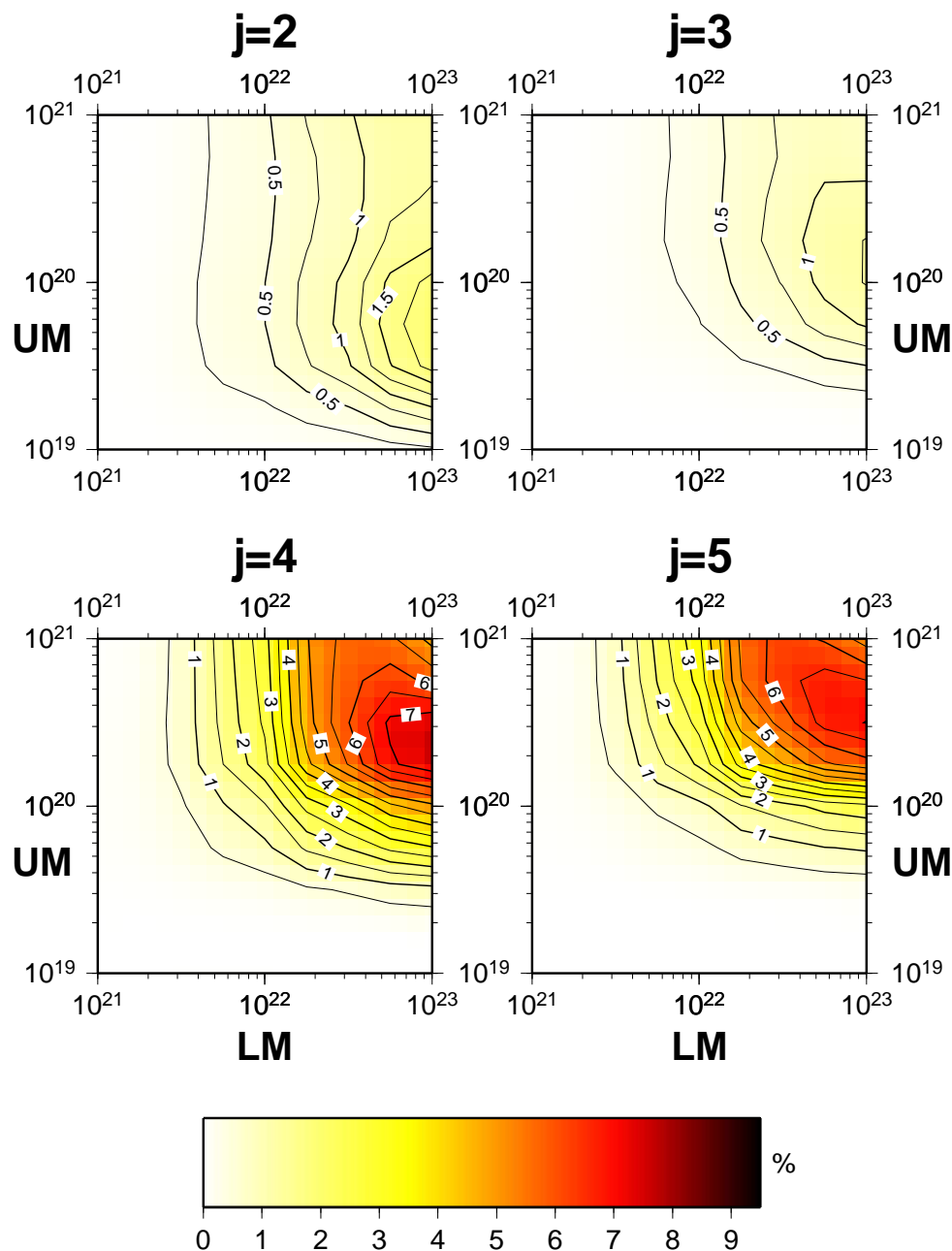
Obrázek 5.11: (i na protější straně) Časová změna geoidu v čase $t = 0$ pro modely 1–100. Barevná škála vytvořena pro každý model zvlášť.



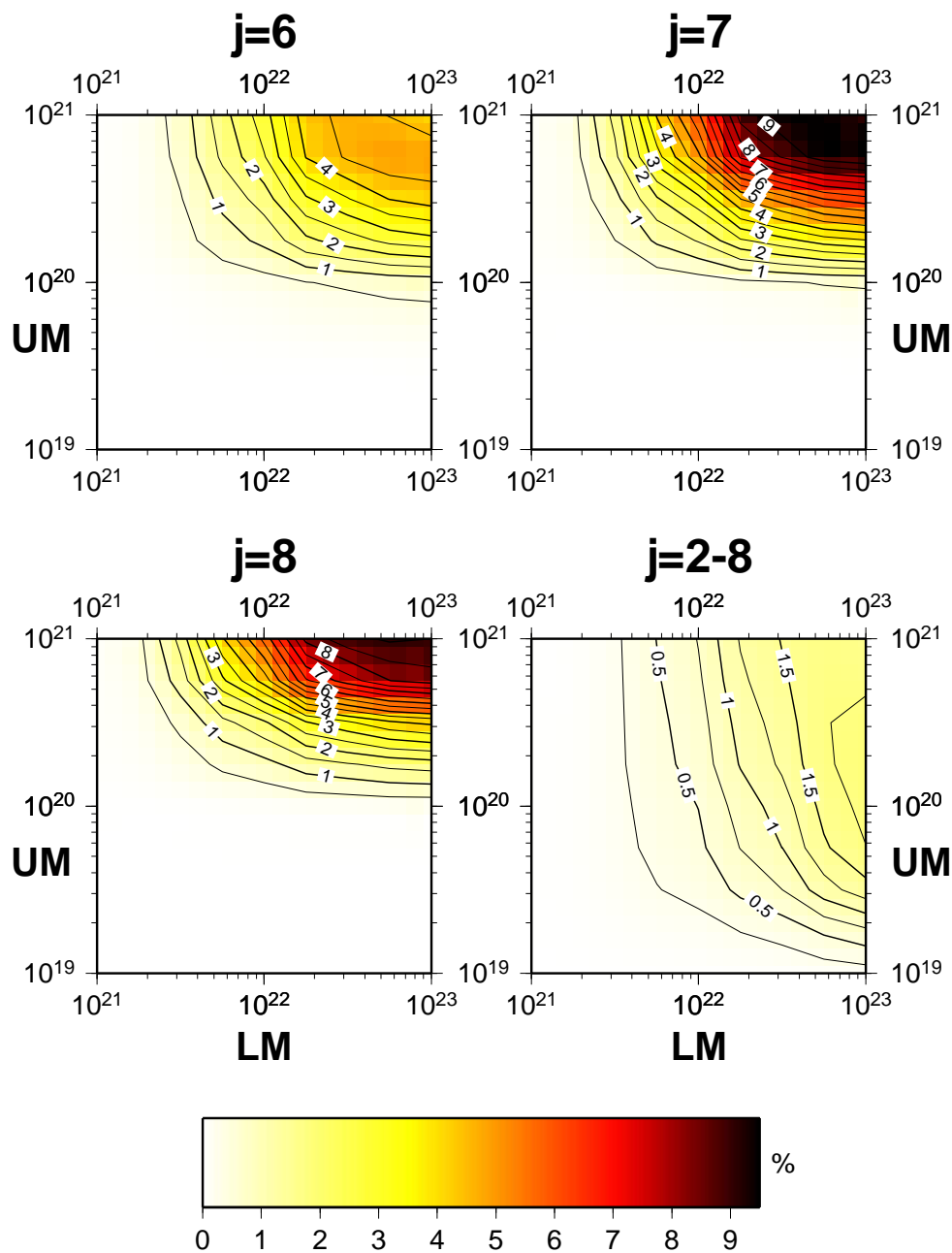
Obrázek 5.12a: Korelace c_j mezi residuálním geoidem z postglaciálního výzdvihu a pozorovaným geoidem na jednotlivých stupních v závislosti na viskózní struktuře (1. část).



Obrázek 5.12b: Korelace c_j mezi residuálním geoidem z postglaciálního výzdvihu a pozorovaným geoidem na jednotlivých stupních v závislosti na viskózní struktuře (2. část).



Obrázek 5.13a: Poměr spektrálních výkonů residuálního geoidu z postglaciálního výzdvihu a pozorovaného geoidu $R_j \times 100\%$ na jednotlivých stupních v závislosti na viskózní struktuře (1. část).



Obrázek 5.13b: Poměr spektrálních výkonů residuálního geoidu z postglaciálního výzdvihu a pozorovaného geoidu $R_j \times 100\%$ na jednotlivých stupních v závislosti na viskózní struktuře (2. část).

Kapitola 6

Inverze geoidu se zahrnutím příspěvku z postglaciálního výzdvihu

Výsledky získané v předchozí kapitole nyní uplatníme v obrácené úloze predikce geoidu. Dynamický geoid doplníme o příspěvek zbytkového geoidu z postglaciálního výzdvihu. Výsledky porovnáme s výsledky tradiční inverze, kde vystupuje pouze dynamický geoid.

Výpočty dynamického geoidu odpovídají formulaci uvedené v práci Čadek a Fleitout, 1999. Modelovými parametry jsou viskozita ve svrchním plášti (rozmezí hloubek 100–670 km) η_{UM} , viskozita spodního pláště (rozmezí hloubek 670–2891 km) η_{LM} , škálovací faktory modelů anomálií seismických rychlostí ve svrchním a spodním plášti k_{UM} a k_{LM} a koeficient zvrstvení λ . Povrchová vrstva (hloubky 0-100 km) představuje tuhou litosféru s vysokou hodnotou viskozity (ve výpočtech $\eta_{it} = 10^{30}$ Pa·s).

Modelové parametry $\mathbf{m} = (\eta_{UM}, \eta_{LM}, k_{UM}, k_{LM}, \lambda)$, které nejlépe vystihují pozorovaný geoid hledáme na základě minimalizace tzv. funkce neshody (*misfit function*) $\Sigma(\mathbf{m})$ zavedené vztahem

$$\Sigma(\mathbf{m}) = \|H^{pred}(\mathbf{m}) - H^{obs}\|_{L_2}^2, \quad (6.1)$$

kde $H^{pred}(\mathbf{m})$ je výška geoidu predikovaná při hodnotách \mathbf{m} modelových parametrů. Vyjádřením příslušné normy a aplikací sférických harmonických funkcí dostaneme pro funkci neshody vztah

$$\Sigma(\mathbf{m}) = \sum_{j=2}^{j_{max}} \sum_{m=j}^j \left| H_{jm}^{pred} - H_{jm}^{obs} \right|^2 \quad (6.2)$$

Hodnoty modelových parametrů uvažujeme v rozmezí

$$\begin{aligned} 1 \cdot 10^{19} &\leq \eta_{UM} \leq 1 \cdot 10^{21} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \\ 1 \cdot 10^{21} &\leq \eta_{LM} \leq 1 \cdot 10^{23} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \\ 0 &\leq k_{UM} \leq 1, \\ 0 &\leq k_{LM} \leq 1, \\ 0 &\leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

Minimum funkce neshody je nalezeno metodou systematického prohledávání modelového prostoru. Tato metoda umožňuje zobrazit hodnoty Σ na dvou-rozměrných řezech modelovým prostorem.

Shodu mezi predikovaným a pozorovaným geoidem budeme vyjadřovat pomocí veličiny udávající procento vystižených dat P (v anglické literatuře se tato veličina označuje jako *variance reduction*)

$$P = \frac{\Sigma_0 - \Sigma}{\Sigma_0} \times 100\%, \quad (6.3)$$

kde $\Sigma_0 = \sum_j \sum_m |H_{jm}^{obs}|^2$ je kvadrát normy pozorovaného signálu.

Predikovaný geoid obsahuje příspěvek dynamický a příspěvek z postglaciálního výzdvihu. Nejvyšší shody ($P = 80\%$) bylo dosaženo u modelu s následujícími parametry:

$$\begin{aligned} \eta_{UM} &= 2 \cdot 10^{19} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \\ \eta_{LM} &= 1 \cdot 10^{23} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \\ k_{UM} &= 0.19, \\ k_{LM} &= 0.27, \\ \lambda &= 0.72 \end{aligned}$$

Tento model je charakterizován vysokým nárůstem viskozity ve spodním plášti (téměř čtyři řády oproti svrchnímu plášti). Tok hmot přes rozhraní pláště a jádra je redukován na 28% ve srovnání s celoplášťovým tečením. Predikce alespoň 75% pozorovaného geoidu dosahují modely s viskozitou spodního pláště v rozmezí $1 \cdot 10^{19}$ – $7 \cdot 10^{19}$ Pa·s a s nárůstem viskozity ve spodním plášti od necelých tří řádů výše.

Zároveň s výše popsanou obrácenou úlohou byla řešena úloha, kde do predikovaných dat nebyl zahrnut reboundový příspěvek. U nejlépe vystihujícího modelu s parametry

$$\begin{aligned} \eta_{UM} &= 1 \cdot 10^{19} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \\ \eta_{LM} &= 5 \cdot 10^{22} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \\ k_{UM} &= 0.17, \\ k_{LM} &= 0.25, \\ \lambda &= 0.73 \end{aligned}$$

byla dosažená shoda s pozorovanými daty o 2 % nižší, než v předchozím případě. Obrázky 6.1 a 6.2 ukazují procento vystižených P dat pro nejlepší modely v závislosti na hodnotách viskozit η_{UM} a η_{LM} , tedy veličinu

$$P_{max}(\eta_{UM}, \eta_{LM}) = \max_{k_{UM}, k_{LM}, \lambda} P(\eta_{UM}, \eta_{LM}, k_{UM}, k_{LM}, \lambda)$$

pro obě formulace obrácené úlohy.

Výsledek obrácené úlohy podporuje modely, které předpokládají řádový nárůst viskozity ve spodním plášti. Rozdíl téměř čtyř řádů, odpovídající nejlepším modelům, je však dosti vysoký. Výsledek je patrně ovlivněn velmi jednoduchou volbou modelového prostoru (v plášti dvě vrstvy s konstantní viskozitou). Složitější volba, např. přidání třetí vrstvy do horních partií svrchního pláště představující astenosféru, by patrně vyústila ve snížení poměru η_{LM}/η_{UM} (Čadek a Fleitout, 1999, jejichž model astenosféru obsahuje, uvádějí pro nejlépe vystihující modely $P \sim 75\%$ na stupních 2–12, $\lambda \sim \frac{2}{3}$, jasně definovanou astenosféru a nárůst viskozity o dva řády ve spodním plášti). Z důvodu časové náročnosti výpočtů postglaciálního výzdvihu jsme ke složitějším viskózním modelům nepřistoupili.

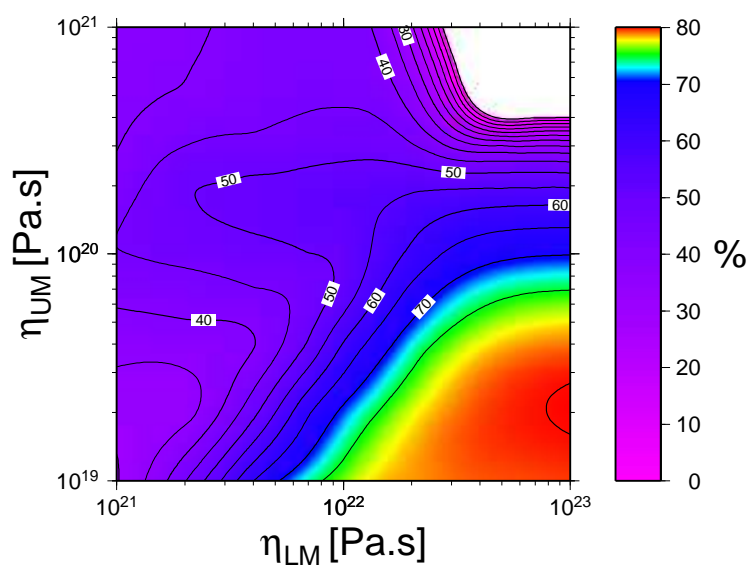
Z obrázků 6.1 a 6.2 je také patrné, že příspěvek geoidu z postglaciálního výzdvihu výrazně neovlivnil kvalitu výsledku obrácené úlohy. Došlo pouze ke zlepšení predikce geoidu. Na obrázku 6.3 je zobrazena veličina

$$\Delta P(\eta_{UM}, \eta_{LM}) = P_{max}^{dyn+reb}(\eta_{UM}, \eta_{LM}) - P_{max}^{dyn}(\eta_{UM}, \eta_{LM})$$

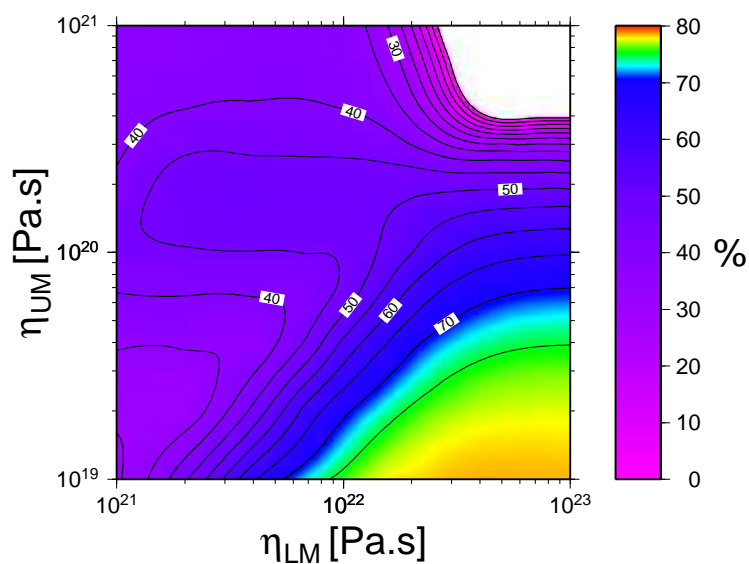
udávající zlepšení predikce geoidu zahrnutím reboundového příspěvku v procentech (jedná se tedy o „rozdíl obrázků 6.1 a 6.2“). Obrazec vykazuje dvě maxima (6.7 % pro model s parametry $\eta_{UM} = 8 \cdot 10^{20} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\eta_{LM} = 2 \cdot 10^{22} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, resp. 6.2 % pro model s $\eta_{UM} = 1 \cdot 10^{20} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\eta_{LM} = 2 \cdot 10^{22} \text{ Pa} \cdot \text{s}$). Tyto modely však zaostávají v ukazateli vystižení pozorovaného geoidu ($P = 37\%$, resp. $P = 61\%$). U modelů, jež vystihnou alespoň 75 % pozorovaných dat se zlepšení predikce pohybuje v rozmezí 1–5 %.

Výsledek obrácené úlohy je nejvíce ovlivněn chováním na nízkých stupních sférického harmonického rozvoje, zejména na stupni $j = 2$. Toto chování je důsledkem klesajícího spektrálního výkonu s rostoucím stupněm rozvoje – u pozorovaného geoidu se stupeň 2 podílí na celkovém výkonu 68 procenty, stupeň 3 přispívá 21 procenty, s rostoucím stupněm toto číslo dále klesá. Obrázek 6.4 uvádí procento vystižených P_j dat na jednotlivých stupních. Maximální dosažené hodnoty P_j jsou 96 % na stupni 2, 78 % na stupni 3, 68.3 % pro stupeň 4, na vyšších stupních hodnota P_j nepřesahuje 43 %. Vyrovnanějšího vlivu různých stupňů na výsledek obrácené úlohy se dosáhne použitím tzv. *free-air gravity* (nadále budeme používat označení gravitace)

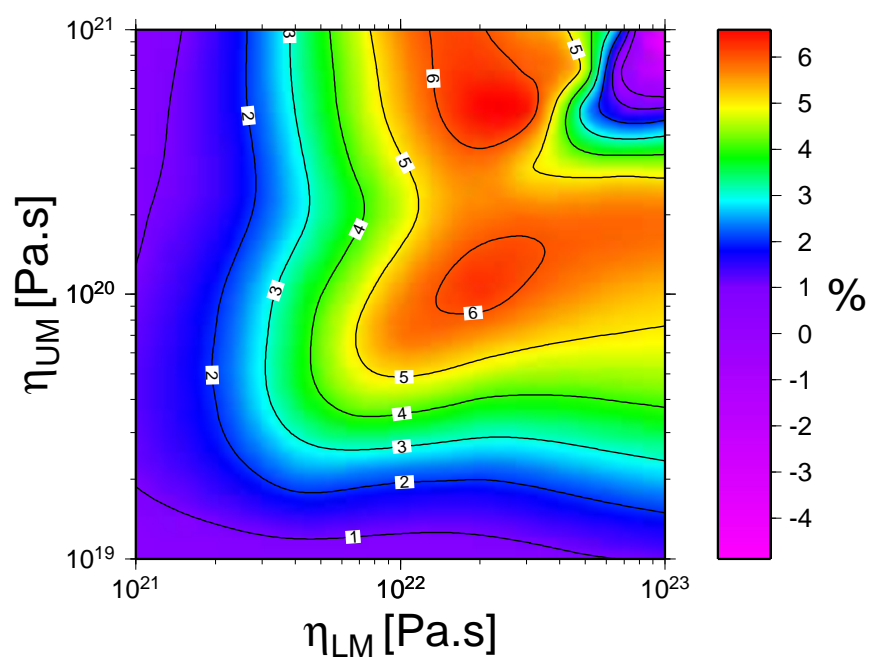
jako veličiny, jejíž funkci neshody minimalizujeme. V případě gravitace vystupují ve vztahu pro chybovou funkci 6.2 koeficienty geoidu H_{jm} s vahou $j - 1$. Procento vystižených dat je u gravitace nižší než u geoidu, jak je vidět z obrázků 6.5 (včetně příspěvku z postglaciálního výzdvihu) a 6.6 (tradiční formulace). U nejlepšího modelu bylo se zahrnutím reboundového příspěvku predikováno 44 % gravitačních dat, zlepšení ve srovnání s tradiční inverzí činí 2 %. Výsledek obrácené úlohy nedoznal vážných změn z hlediska výsledných průběhů viskozity.



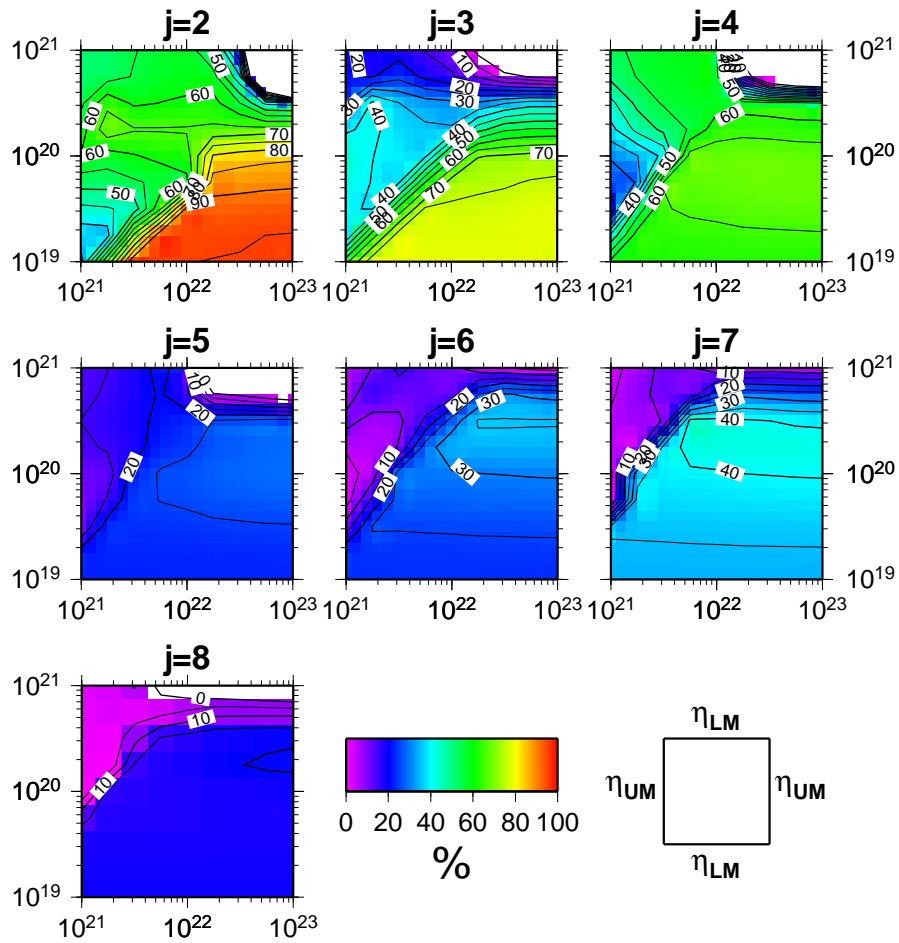
Obrázek 6.1: Procento vystižení geoidu P pro nejlepší modely v závislosti na hodnotách viskozit η_{UM} , η_{LM} . Úloha se zahrnutým příspěvkem z postglaciálního výzdvihu.



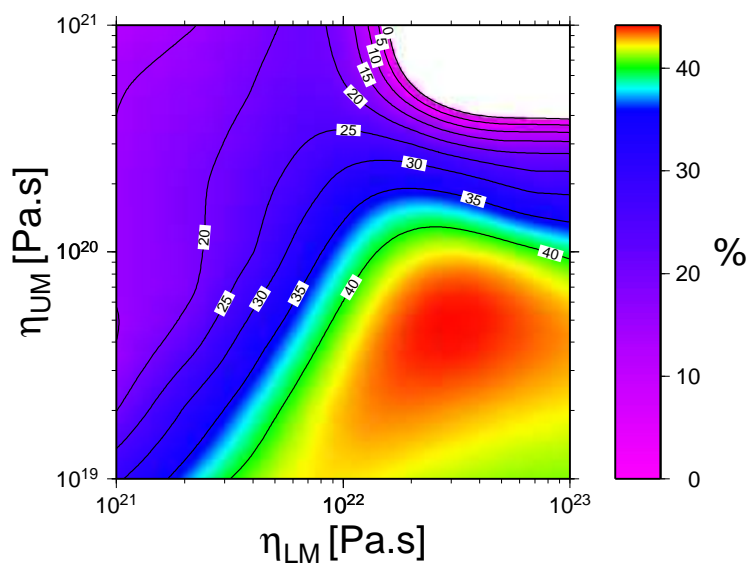
Obrázek 6.2: Procento vystižení geoidu P pro nejlepší modely v závislosti na hodnotách viskozit η_{UM} , η_{LM} . Pouze dynamický geoid.



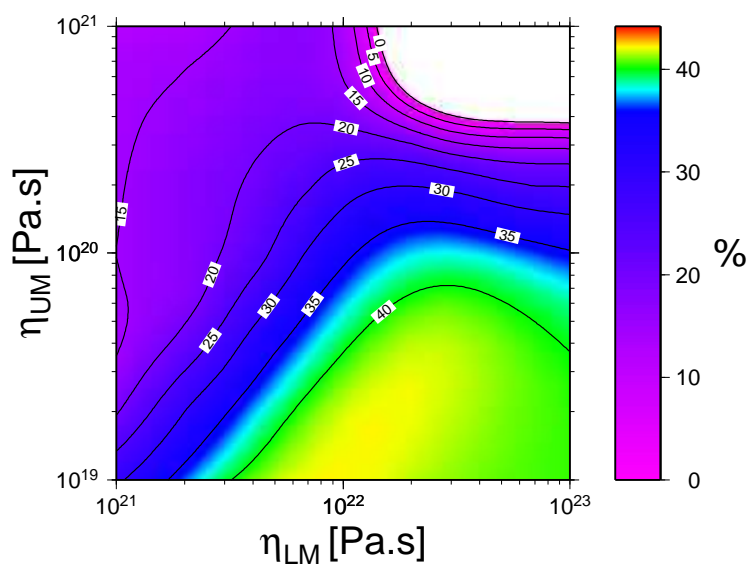
Obrázek 6.3: Zlepšení predikce geoidu zahrnutím příspěvků z postglaciálního výzdvihu v závislosti na hodnotách viskozit η_{UM} a η_{LM} .



Obrázek 6.4: Procento vystižení geoidu P pro nejlepší modely v závislosti na hodnotách viskozit η_{UM} , η_{LM} . Úloha se zahrnutým příspěvkem z postglaciálního výzdvihu.



Obrázek 6.5: Procento vystižení gravitace P pro nejlepší modely v závislosti na hodnotách viskozit η_{UM} , η_{LM} . Úloha se zahrnutým příspěvkem z postglaciálního výzdvihu.



Obrázek 6.6: Procento vystižení gravitace P pro nejlepší modely v závislosti na hodnotách viskozit η_{UM} , η_{LM} . Příspěvek z postglaciálního výzdvihu není zahrnut.

Kapitola 7

Závěr

Budoucnost patří aluminii.

— Jára Cimrman

Tato práce se zabývá modelováním dlouhodobého nehydrostatického geoidu. Výběr tématu byl motivován výsledky prací zabývajících se predikcí geoidu na základě modelů anomálií rychlostí seismických vln. Tuto úlohu jsme popsali v kapitole 2. Takto predikovaný geoid vykazuje nedostatky v oblastech, ve kterých se v minulosti vyskytoval ledovec – pozorované níže jsou hlubší než u predikovaného geoidu. Je tedy nasnadě myšlenka „vylepšit“ predikci geoidu příspěvkem z postglaciálního výzdvihu. Úloha reboundu byla popsána v kapitole 3.

V úloze postglaciálního výzdvihu vystupuje jako vstupní datum povrchová zátěž. Jak bylo diskutováno v kapitole 4, povrchová zátěž se neomezí jen na ledovec, ale souvisí i se změnami výšky hladiny světového oceánu. Bylo tedy nutné zformulovat rovnici hladiny vod a začlenit ji do výpočetního programu pro postglaciální výzdvih. V oddíle 4.3 je diskutován vliv SLE na jednoduchých modelech s osově souměrným ledovcem. Testovací příklady ukazují nutnost formulace rovnice hladiny vod v obecném tvaru, tedy i s příspěvkem spojeným se změnou geoidu a vertikálním posunutím. Rovnice hladiny vod redukována pouze na ekvivalentní příspěvek dává odlišné výsledky zejména v oblastech v blízkosti ledové zátěže. V pobřežních partiích je výsledek ovlivněn případným pohybem pobřežní linie.

Přímá úloha postglaciálního výzdvihu (kapitola 5) byla počítána pro radiálně symetrické modely Země na základě modelu odlednění ICE-3G (Tushingham a Peltier, 1991) se zahrnutím rovnice hladiny vod v obecném tvaru. Průběh hustoty a torzního modulu byl převzat z modelu PREM (Dziewonski a Anderson, 1981). Jednoduchý model průběhu viskozity sestával ze čtyř vrstev (litosféra, svrchní a spodní plášť, jádro) s konstantními hodnotami visko-

zity. Výsledné rozložení výšek geoidu v současnosti se vyznačuje dvěma výraznými minimy v oblastech, které podstoupily největší zatěžování (Antarktida, severní Amerika). Amplitudy rostou se zvyšujícími se hodnotami viskozity v plášti. Největší dosažená amplituda 32 m odpovídá asi čtvrtině amplitudy pozorovaného geoidu. Srovnání nabízí také poměr výkonů signálu – výkon reboundového geoidu dosáhl nejvýše 1.5 % výkonu pozorovaného geoidu. Korelace s pozorovaným geoidem se v závislosti na hodnotách viskozity svrchního a spodního pláště pohybuje v rozmezí 0.5–0.7. Predikované rychlosti vertikálního posunutí se pohybují v řádu 1 mm/rok. Nejvyšší zjištěná hodnota 8.4 mm/rok v oblasti Hudsonova zálivu odpovídá asi 2/3 pozorovaných dat. Nedokonalá předikce rychlosti výzdvihu ve skandinávském regionu (maximálně $\sim 1/10$ pozorovaných rychlostí) je důsledkem ukončení sférického harmonického rozvoje na stupni $j = 8$.

Residuální geoid z postglaciálního výzdvihu byl zahrnut do obrácené úlohy predikce geoidu (kapitola 6). Výpočty dynamického geoidu vycházejí z práce Čadek a Fleitout, 1999. Zahrnutím reboundového příspěvku se predikce geoidu zlepšila, v závislosti na viskózním modelu až o 6 %. Výsledek obrácené úlohy nedoznal oproti tradiční inverzi výrazných změn z hlediska parametrů modelů, které dobře vystihují pozorovaná data. Preferované modely se vyznačují nízkou hodnotou viskozity ve svrchním plášti ($\eta_{UM} < 10^{20}$ Pa·s), nárůstem viskozity alespoň o tři řády ve spodním plášti a vrstevnatým charakterem konvekce v plášti (koeficient zvrstvení $\lambda \sim 0.7$). U dobře vystihujících modelů se gravitační signál z postglaciálního výzdvihu podílí na celkovém geoidu 1–5 procenty (2.5 % pro nejlepší model).

Dostí vysoký preferovaný nárůst viskozity ve spodním plášti je patrně důsledkem jednoduché volby modelu viskózního průběhu. Složitější volba by zřejmě vyústila v realističtější výsledek obrácené úlohy. Zároveň by mohlo dojít ke kvalitativním změnám ve srovnání s tradiční formulací úlohy. Dodejme, že snaha o prozkoumání širokého spektra viskózních modelů je omezena časovou náročností výpočtů postglaciálního výzdvihu.

Diskutabilní zůstává otázka průběhu ledového zatížení. Model ICE-3G popisuje vývoj ledovce jen během odlednění (posledních 21 tis. let). Globální modely průběhu narůstání ledovce nejsou k dispozici. Doplnění ledové historie pro celý glaciální cyklus lze provést různě. Zde jsme zvolili jeden způsob a problém dále nerozváděli. Případné pokračování této práce by se mohlo zabývat vlivem změny tvaru nárůstové křivky na výsledek úlohy.

Dodatek

Při řešení soustav diferenciálních rovnic numerickými metodami je nutné problém diskretizovat. Častou metodou je rozvoj do řady vhodně zvolených bázevých funkcí. V případě sférické Země se pro diskretizaci v laterálních prostorových souřadnicích používá rozvoj do řady sférických harmonických funkcí. V tomto dodatku zavedeme skalární sférické harmonické funkce a uvedeme vztahy, na které se odvoláváme v předchozím textu. Problematika sférických harmonických funkcí zde není zdaleka vyčerpána. Pro ucelený výklad odkazujeme na příslušnou matematickou literaturu, např. Варшалович и колл., 1975.

Skalární sférická harmonická funkce Y_{jm} stupně j a řádu m , kde $j \geq 0$ a $|m| \leq j$, je komplexní funkce úhlových souřadnic ϑ a φ zavedená vztahem

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} P_{jm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad \text{pro } m \geq 0,$$

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{j-m}^*(\vartheta, \varphi) \quad \text{pro } m < 0, \quad (\text{D1})$$

kde $*$ značí komplexní sdružení. Symbol P_{jm} označuje tzv. přidruženou Legendrovu funkci, reálnou funkci jedné reálné proměnné, kterou zavádíme vztahem

$$P_{jm}(x) = \frac{1}{2^j j!} (1-x^2)^{\frac{j}{2}} \frac{d^{j+m}}{dx^{j+m}} (x^2-1)^j. \quad (\text{D2})$$

Takto zavedené skalární sférické harmonické funkce Y_{jm} tvoří úplnou ortonormální bázi prostoru $L_2(K)$, tj. prostoru komplexních funkcí integrovatelných s druhou mocninou na jednotkové kulové ploše K v prostoru E_3 (třírozměrný euklidovský prostor). Je tedy např. splněna podmínka ortonormality

$$(Y_{j_1 m_1}, Y_{j_2 m_2}) = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (\text{D3})$$

kde (\cdot, \cdot) označuje skalární součin a δ_{ik} je Kroneckerovo delta. Skalární sou-

čin v prostoru $L_2(K)$ je dán vztahem

$$(f, g) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) g^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \quad (\text{D4})$$

norma je zavedena vztahem

$$\|f\| = \sqrt{(f, g)}. \quad (\text{D5})$$

Pro funkci $f(\vartheta, \varphi)$ z prostoru $L_2(K)$ platí

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j f_{jm} Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (\text{D6})$$

kde koeficienty f_{jm} získáme ze vztahu

$$f_{jm} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) Y_{jm}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (\text{D7})$$

Řada D6 konverguje k funkci f v průměru; je-li navíc funkce f na K spojitá včetně parciálních derivací prvního a druhého řádu, konverguje řada absolutně a stejnoměrně (viz např. Rektorys a kol., 2000). Je-li funkce $f(\vartheta, \varphi) \in L_2(K)$ reálná, koeficienty splňují symetrii

$$f_{jm} = (-1)^m f_{j-m}^* \quad (\text{D8})$$

Součin dvou skalárních sférických harmonických funkcí lze vyjádřit tzv. Clebschovou-Gordanovou řadou

$$Y_{j_1 m_1}(\vartheta, \varphi) Y_{j_2 m_2}(\vartheta, \varphi) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j C_{j_1 0 j_2 0}^{j 0} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} Y_{j m}(\vartheta, \varphi), \quad (\text{D9})$$

kde symboly $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$ označují tzv. Clebschovy-Gordanovy koeficienty (viz např. Варшалович и колл., 1975).

Literatura

Andrews J. T., 1974. *Glacial Isostasy*, Hutchinson and Ross, Inc., Dowden, Stroudsburg, Pa.

Cathles L. M., 1975. *The Viscosity of the Earth's Mantle*, Princeton University Press, New Jersey.

Čadek O., Fleitout L., 1999. A global geoid model with imposed plate velocities and partial layering, *J. Geophys. Res.*, 104, 29055–29075.

D'Agostino G., Spada G., Sabadini R., 1997. Postglacial rebound and lateral viscosity variations: a semi-analytical approach based on a spherical model with Maxwell rheology, *Geophys. J. Int.*, 129, F9–F13.

DeMets C., Gordon R. G., Argus D. F., Stein S., 1990. Current plate motions, *Geophys. J. Int.*, 101, 425–478.

Dziewonski A. M., Anderson D. L., 1981. Preliminary Reference Earth Model (PREM), *Phys. Earth. Planet. Int.*, 25, 297–356.

Farrell W. E., Clark J. A., 1976. On postglacial sea level, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 46, 647–667.

Gasparini P., Sabadini R., 1989. Lateral heterogeneities in mantle viscosity and post-glacial rebound, *Geophys. J. Int.*, 98, 413–428.

Gasparini P., Sabadini R., 1990. Finite element modeling of lateral viscosity heterogeneities and post-glacial rebound, *Tectonophysics*, 179, 141–149.

Hager B. H., Clayton R. W., 1989. Constraints on the Structure of Mantle Convection using Seismic Observations, Flow Models, and the Geoid, in: *Mantle Convection*, ed. W. R. Peltier, Gordon and Breach Science Publishers, New York.

- Han D., Wahr J., 1995. The viscoelastic relaxation of a realistically stratified earth, and a further analyses of postglacial rebound, *Geophys. J. Int.*, 120, 287–311.
- Hanyk L., 1999. *Viscoelastic Responce of the Earth: Initial-Value Approach*, PhD Thesis, Charles University, Prague.
- Hanyk L., Matyska C., Yuen D. A., 1995. Initial-value approach for viscoelastic responses of the Earth's mantle, in: *Dynamics of the Ice Age Earth: A Modern Perspective*, ed. P. Wu, Trans Tech Publ., Zürich, Switzerland.
- Hanyk L., J., Yuen D. A., Matyska C., 1995. Time-domain approach for the transient responses in stratified viscoelastic Earth models, *Geophys. Res. Lett.*, 22, 1258–1288.
- Hanyk L., Yuen D. A., Matyska C., 1996. Initial-value and modal approaches for transient viscoelastic responses with complex viscosity profiles, *Geophys. J. Int.*, 127, 348–362.
- Haskell N. A., 1935. The motion of a viscous fluid under a surface load 1, *Physics*, 6(8), 265.
- Haskell N. A., 1936. The motion of a viscous fluid under a surface load 2, *Physics*, 7(2), 56.
- Hide R., Horai K. I., 1968. On the topography of the core-mantle boundary, *Phys. Earth Planet. Int.*, 1, 305–308.
- Johnston P., 1993. The effect of spatially non-uniform water loads on prediction of sea-level change, *Geophys. J. Int.*, 114, 615–634.
- Kaufmann G., Wu P., 1998. Upper mantle lateral viscosity variations and postglacial rebound: Applications to the Barents Sea, in: *Dynamics of the Ice Age Earth: A Modern Perspective*, ed. P. Wu, Trans Tech Publ., Zürich, Switzerland.
- Kaula W. M., 1963. Elastic models of the mantle corresponding to variations in external gravity field, *J. Geophys. Res.*, 68, 4967–4978.
- Křížek M., Neittaanmäki, 1990. *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications*, Longman, Harlow.
- Lambeck K., Smither K., Johnston P., 1998. Sea-level change, glacial rebound and mantle viscosity for northern Europe, *Geophys. J. Int.*, 134, 102–144.

Ma C., Ryan J. W., 1998. NASA Space Geodesy Program – GSFC data analysis – 1998, VLBI geodetic results 1979–1998, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md.

Martinec Z., 1984. Free oscillations of the earth, *Travaux géophysiques*, 591.

Martinec Z., 1999a. *Continuum Mechanics for Geophysicists and Geodesists. Part I. Basic Theory*. Lecture notes, Department of Geophysics, Charles University, Prague.

Martinec Z., 1999b. Spectral, initial value approach for viscoelastic relaxation of a spherical earth with a three-dimensional viscosity–I. Theory, *Geophys. J. Int.*, 137, 469–488.

Martinec Z., 2000. Spectral–finite element approach to three-dimensional viscoelastic relaxation in a spherical earth, *Geophys. J. Int.*, 142, 117–141.

Matas J., 1995. *Mantle viscosity and density structure – Comparison of various inverse problem formulations*, diploma thesis, Charles University, Prague.

McConnell R. K. Jr, 1965. Isostatic adjustment in a layered earth, *J. Geophys. Res.*, 70, 5171.

Milne G. A., Davis J. L., Mitrovica J. X., Scherneck H.-G., Johansson J. M., Vermeer M., Koivula H., 2001. Space-geodetic constraints on glacial isostatic adjustment in Fennoscandia, *Science*, 291.

Mitrovica J. X., Peltier W. R., 1989. Pleistocene deglaciation and the global gravity field, *J. Geophys. Res.*, 94, 13657–13671.

Mitrovica J. X., Peltier W. R., 1991. A complete formalism for the inversion of post-glacial rebound data: resolving power analyses, *Geophys. J. Int.*, 104, 267–288.

Nakada M., Lambeck K., 1987. Glacial rebounds and relative sea-level variations: a new appraisal, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 90, 171–224.

Nataf H.-C., Ricard Y., 1996. 3SMAC: An a priori tomographic model of the upper mantle based on geophysical modeling, *Phys. Earth Planet. Int.*, 95, 101–122.

Novotný O., 1998. *Motions, Gravity Field And the Figure Of the Earth*, Lecture notes for post-graduate students, Salvador, Bahia.

- Ottův slovník naučný. Desátý díl. Vydavatel a nakladatel J. Otto v Praze, 1896.
- Ottův slovník naučný. Patnáctý díl. Vydavatel a nakladatel J. Otto v Praze, 1896.
- Peltier W. R., 1974. The impulsive response of a Maxwell Earth, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 12, 649.
- Peltier W. R., 1976. Glacio-isostatic adjustment-II. The inverse problem, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 46, 669–706.
- Peltier W. R., 1985. New constraints on transient lower mantle rheology and internal mantle buoyancy from glacial rebound data, *Nature*, 318, 614–617.
- Peltier W. R., Andrews J. T., 1976. Glacio-isostatic adjustment-I. The forward problem, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 46, 605–646.
- Pnam V., 1999. Gravity field determination with GOCE and GRACE, *Satellite dynamics, orbit analyses and combination of space techniques advances in space research*, 23, 771–776.
- Rektorys K. a kol., 2000. *Přehled užité matematiky I*, sedmé vydání, nakl. Prometheus, Praha.
- Sabadini R., Yuen D. A., Boschi E., 1982. Polar wandering and the forced responses of a rotating, multilayered, viscoelastic planet, *J. Geophys. Res.*, 87, 2885–2903.
- Sabadini R., Yuen D. A., Portney M., 1986. The effects of upper-mantle lateral heterogeneities on postglacial rebound, *Geophys. Res. Lett.*, 13, 337–340.
- Spada G., 2001. Mantle viscosity from Monte Carlo inversion of very long baseline interferometry data, *J. Geophys. Res.*, 106, 16375–16385.
- Tarantola A., 1987. *Inverse Problem Theory*, Elsevier Science B. V., Amsterdam.
- Tromp J., Mitrovica J. X., 1999a. Surface loading of a viscoelastic earth-I. General theory, *Geophys. J. Int.*, 137, 847–855.
- Tromp J., Mitrovica J. X., 1999b. Surface loading of a viscoelastic earth-II. Spherical models, *Geophys. J. Int.*, 137, 856–872.

Tushingham A. M., Peltier W. R., 1991. Ice-3G: A new global model of late Pleistocene deglaciation based upon geophysical predictions of post-glacial reallive sea level change, *J. Geophys. Res.*, 96, 4497–4523.

Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К., 1975. *Квантовая теория углового момента*, Ленинградское отделение издательства «Наука», Ленинград.

Woodhouse J. H., Trampert J., 1995. Global upper mantle structure inferred from surface wave and body wave data, *Eos Trans. AGU*, 76(46), Fall Meet. Suppl., F422.

Wu P., Johnston P., 1998. Validity of using flat-earth finite element models in the study of postglacial rebound, in: *Dynamics of the Ice Age Earth: A Modern Perspective*, ed. P. Wu, Trans Tech Publ., Zürich, Switzerland.

Wu P., Ni Z., Kaufmann G., 1998. Postglacial rebound with lateral heterogeneities: from 2D to 3D modeling, in: *Dynamics of the Ice Age Earth: A Modern Perspective*, ed. P. Wu, Trans Tech Publ., Zürich, Switzerland.

Wu P., Peltier W. R., 1982. Viscous gravitational relaxation, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 70, 435–485.

Yuen D. A., Peltier W. R., 1982. Normal modes of the viscoelastic earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 69, 495–526.

Yuen D. A., Sabadini R., Boschi E., 1982. Viscosity of the lower mantle as inferred from rotational data, *J. Geophys. Res.*, 87, 10745–10762.

Yuen D. A., Sabadini R., Gasperini G., 1986. On transient rheology and glacial isostasy, *J. Geophys. Res.*, 91, 11420–11438.