

MATEMATICKO - FYZIKÁLNÍ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY
KATEDRA GEOFYZIKY A METEOROLOGIE

Štěpení vlastních kmitů Země
vlivem laterálních nehomogenit hustoty

Diplomová práce

Ladislav Hanyk

Praha 1990

Prohlašuji, že jsem pracoval samostatně
a používal pouze literaturu uvedenou v kapitole 6.

Zadislav Hanžl

Prvnímu geofyzikovi v rodině ...

mé mamince

O B S A H

	strana
1. <u>Úvod do problematiky vlastních kmitů Země</u>	5
1.1. Úvodem o vlastních kmitech	6
1.2. Historie	8
1.3. Třídímenzionální hustotní modely	10
2. <u>Vlastní kmity modelů SNREI</u>	13
2.1. Definice modelu SNREI	13
2.2. Průřez teorií	14
2.3. Vlastní kmity modelu PREM	21
2.4. Klasifikace vlastních kmitů radiálním a úhlovým číslem	23
2.5. Souvislost vlastních kmitů a seismických vln	25
3. <u>Vlastní kmity modelů LHREI - teorie</u>	27
3.1. Definice modelu LHREI	27
3.2. Rayleighův variační princip	31
3.3. Perturbační matice a výpočet frekvencí multipletu pro LHREI	33
4. <u>Vlastní kmity modelů LHREI - praxe</u>	42
4.1. Hustotní modely, generující gravitační pole Země	42
4.2. Výpočet efektu rotace a modelů MD, DH	47
4.3. Diskuse numerických výsledků	48
5. <u>Závěrem</u>	51
6. <u>Literatura</u>	53

1. ÚVOD DO PROBLEMATIKY VLASTNÍCH KMITŮ ZEMĚ

V první kapitole se snažíme čtenáře nastartovat; řekneme několik slov o běžném přístupu k vlastním kmitům Země, zmíníme se o historických souvislostech a naznačíme problémy, číhající při odvozování třídimenzionálního hustotního modelu. V druhé kapitole se zabýváme teorií a praxí modelu SNREI; definujeme jej, naznačíme některá odvození a varujeme čtenáře před možným omylem při indexování vlastních módů. Následující dvě kapitoly jsou věnovány modelům LHREI. Budeme je definovat a poměrně podrobně popíšeme s nimi svázanou perturbační teorii. Provedeme výpočty štěpení vlastních módů sféricky symetrického modelu vlivem rotace a laterálních nehomogenit hustoty. Závěrem shrneme dojmy, které v nás problém štěpení vlastních kmitů zanechal.

Chtěl bych upřímně poděkovat oběma vedoucím a oponentovi své práce; RNDr. Zdeňku Martincovi, CSc. především za jeho dokonalou (1984), v posledním roce to byla moje nejčtenější a nejpodezřívavější knížka (...a přitom to nikdy chyba nebyla!), RNDr. Radkovi Matyskovi, CSc. a zrovna tolik RNDr. Ondrovi Čadkovi za trpělivost s nekonečnými diskusemi o hustotních modelech, s nimiž jsem je zatěžoval. RNDr. Jiřímu Zahradníkovi, CSc. děkuji za vysvětlení (2.19) a jsem mu zavázán za neobyčejnou důslednost, s kterou mě vedl k "rozlousknutí" PREM. Kolegu "vlastního kmitaře" Jirku Mosera tímto zvu na snad ne poslední večerní diskusi o čemkoliv a svou ženu Lenku prosím, aby pro mě měla aspoň ještě několik desetiletí takové pochopení, jako v uplynulých měsících.

1.1. Úvodem o vlastních kmitech

Vlastní kmity, vlastní módy, volné oscilace; tak označujeme makroskopický periodický pohyb, vystopovatelný v mnoha dynamických systémech s nenulovým počtem stupňů volnosti a nepříliš rychlou disipací mechanické energie. Takový pohyb se v systémech budí během procesů, při kterých se uvolňuje dostatečné množství mechanické energie, a přetrvává s určitým útlumem i po ukončení "zdrojových" procesů. Vlastními kmity rozumíme složky celkových oscilací. Časový průběh každého kmitu je obyčejně harmonický a celkový pohyb má proto čárové spektrum. Frekvence vlastních módů jsou pouze funkcemi parametrů systému, zatím co amplitudy souvisejí také s budícím procesem. Obvyklá spočetnost množiny vlastních módů je umožňuje charakterizovat kombinací celočíselných indexů. S jedním z indexů bývá spojena často užívaná terminologie; při pevné volbě ostatních a nejmenší hodnotě zmíněného indexu hovoříme o základním tónu, při vyšších hodnotách o vyšších tónech nebo vyšších harmonických.

Přírozeně i Země jako rozumný dynamický systém koná vlastní kmity. Energii potřebnou k pozorovatelnému vybuzení všech vlastních kmitů uvolňují jen největší zemětřesení. Spektrum vlastních kmitů Země začíná nad 0.3 mHz (perioda asi 54 min), z druhé strany spektra jsme v praxi limitováni frekvencemi řádu desítek mHz (periody desítky sekund), kde při dnešní rozlišovací schopnosti měřících přístrojů a spektrálních metod spektrum vlastních kmitů přechází ve spektrum spojitě. Vlastních módů Země je nekonečně mnoho. Pro výpočet sféricky symetrického modelu Země PREM bylo použito více než 1000 frekvencí určených s přesností $4 \cdot 10^{-6}$ až $4 \cdot 10^{-3}$, počet identifikovaných módů ovšem stále roste.

Víme, že veličiny popisující strukturu reálné Země, např. hustota, reologické parametry ad., jsou obecnými funkcemi tří prostorových souřadnic, dokonce i času. V takové situaci se fyzik uchyluje k osvědčenému postupu, k zavedení nultých, prvních a vyšších přiblížení. Jako první přiblížení k reálné Zemi vybíráme modely časově neměnné, sféricky symetrické, nerotující, elastické a izotropní, tzv. modely SNREI. Takový model je kompletně popsán trojicí funkcí jedné proměnné, např. hustotou a dvěma rychlostmi elastických vln nebo ekvivalentně hustotou a dvojicí elastických parametrů; někdy se uvažuje ještě frekvenční závislost rychlostí. K modelu SNREI pak přidáváme perturbace, vytváříme druhá přiblížení, např. modely laterálně heterogenní, rotující, tzv. modely LHREI.

Stejný přístup se volí i k problému vlastních kmitů Země. V prvním přiblížení užíváme terminologie vlastních kmitů modelu SNREI. Zde se kmity separují do dvou tříd; jednu tvoří kmity toroidální ${}_nT_l$, při kterých nedochází k žádným objemovým změnám a radiálním pohybům, druhou kmity sféroidální ${}_nS_l$ s nenulovými objemovými změnami i všemi složkami posunutí. K vlastnímu kmitu náleží dva indexy, radiální číslo n a úhlové číslo l . Kmity s nulovým radiálním číslem, ${}_0T_l$ a ${}_0S_l$, jsou základní tóny, kmity s nenulovým radiálním číslem vyšší tóny. Sféroidální kmity s nulovým úhlovým číslem, ${}_nS_0$, mají nenulovou jen radiální složku posunutí, nazývají se proto radiálními. Každý kmit s úhlovým číslem l je $(2l+1)$ -krát degenerovaný, jinak řečeno každá čára ve spektru SNREI, kromě čar radiálních kmitů, je degenerovaný multiplet.

Spolu s modelováním perturbací k SNREI dochází k částečnému

nebo úplnému snímání degenerace, hovoří se pak o štěpení vlastních kmitů. Typy štěpení příslušné různým typům perturbací jsou různé. Samotné rotaci (modelu "rotující koule") odpovídá zeemanovské štěpení, tj. úplné sejmutí degenerace a spektrální čáry rovnoměrně a symetricky rozmístěné podle průměrné frekvence multipletu. Samotná elipticita vyvolaná rotací modelu při zachování hydrostatické rovnováhy snímá degeneraci jen částečně, rozloží $(2l+1)$ -krát degenerovaný multiplet na jeden singlet a l degenerovaných dubletů. Perturbace hustoty vyvolává obecně úplné sejmutí degenerace a odchylky frekvencí rozštěpených singletů od degenerovaných frekvencí jsou vlastní čísla tzv. perturbační matice. Její prvky se odvozují z parametrů SNREI a jejich perturbací a z funkcí popisujících degenerované kmity SNREI.

Významným jevem je spřažení (coupling, kvazidegenerace) vlastních módů. Termínem spřažení se v tomto významu míní situace, kdy se vzájemně ovlivňují blízké singlety laterálně nehomogenního modelu, příslušné ovšem různým multipletům. Spřažení vlastních módů citelně komplikuje jak teorii, tak praktickou analýzu reálných spekter.

1.2. Historie

Problém vlastních kmitů byl rozebírán už v minulém století. V literatuře bývá jako historicky první citován S.D.Poisson, který se v roce 1829 zabýval radiálními kmity koule. V roce 1882 publikoval H.Lamb práci o vibracích homogenní elastické koule; separace vlastních kmitů koule na toroidální a sféroidální pochází právě od něho. V následujícím období se teorie rozšiřovala na tělesa s vlastní gravitací, speciálně s planetárními rozměry.

Roku 1911 spočetl A.E.H.Love periody některých vlastních kmitů sféricky symetrické koule s rozměry Země. Předpověděl přitom i jednohodinové periody. Z dalších prací bývají často citovány Jeans (1923), Matumoto, Sato (1954), Jobert (1956), Altermann, Jarosch, Pekeris (1959), Takeuchi (1959) a Slichter (1967).

Poprvé byly vlastní kmity Země pozorovány v roce 1952, detailně byly studovány až na záznamech velmi silného chilského zemětřesení z 22.5.1960. Periody vlastních kmitů používané v současnosti, mj. citované i PREM, jsou kompilací prací odvozených od zemětřesení na Aljašce 28.3.1964 a v Columbií 31.7.1970 a prací odvozených z měření ve světových sítích, např. v síti IDA (International Deployment of Accelerometers).

Bouřlivý rozvoj teorie vlastních kmitů je spojen právě s chilským zemětřesením, s šedesátými a sedmdesátými léty. Pozornost byla namířena jednak na aplikaci mechaniky kontinua na malé elastické pohyby v prostředí s konečným statickým předpětím (Biot 1965, Dahlen 1972, Truesdell, Noll 1965), jednak na problém štěpení vlastních kmitů, tzn. aplikaci perturbační teorie nebo variačních metod. Tady se vývoj ubíral přes práce Backuse a Gilberta (1961), Pekerise, Altermanna a Jarosche (1961) a Dahlena (1968), kteří zpracovali štěpení vlivem rotace a s ní spojené elipticity, Zharkov a Lyubimov (1970), Madariaga (1971), Dahlen (1974,76a,76b) a Luh (1974) se věnovali štěpení vlivem laterálních heterogenit hustoty, elastických parametrů a topografie. Shrnující je článek Woodhouse a Dahlena (1978), popisující kromě již zmíněných vlivů také štěpení vlivem anizotropie a deviátoru tenzoru předpětí. Byla navržena (Dahlen 1974) metoda řešení obrácené úlohy. Na jejím vstupu jsou frekvence rozštěpených multi-

pletů nebo alespoň údaje o rozptýlenosti a nesouměrnosti multipletu (variance a skewance), na výstupu informace o třídímní struktuře parametrů Země; s ohledem na nejednoznačnost úlohy je informace o parametrech uložena v jistých rotačních invariantech. Pozornost poutá také otázka spřažení blízkých módů (Dahlen 1969, Luh 1973, Woodhouse 1980).

Lze tedy shrnout, že teorie štěpení vlastních kmitů Země je dobře propracována; problémy jsou s daty, a to jak pro přímou úlohu (choulostivé třídímní modely hustoty, elastických parametrů, topografie a už vůbec modely anizotropie), tak i pro úlohu obrácenou (nedostatek spolehlivých spektrálních rozkladů multipletů).

1.3. Třídímní hustotní modely

V předkládané práci půjde o podrobnější rozbor vlivu laterálních nehomogenit hustoty na štěpení degenerovaných vlastních kmitů sféricky symetrického modelu. Klíčovým bodem je zřejmě volba hustotního modelu.

Komplikace nevznikají ve sféricky symetrickém případě. Neprehledný přival radiálních modelů v 60. a 70. letech byl šťastně ukončen po více než osmileté práci Komise IUGG pro standardní model Země publikováním modelu PREM - Preliminary reference Earth model (Dziewonski, Anderson 1981). Ačkoliv jedním z hlavních požadavků při jeho výpočtu byla jednoduchost, model velmi dobře vyhovuje obrovskému množství měřených dat, zopakujme - i více než 1000 frekvencí vlastních módů. Předpokládá se, že v budoucnosti opravy PREM nikde nepřesáhnou 5%. Model byl přijat jako konsensus členů komise, "geofyziků-primadon" a stal se uznávaným

standardem při řešení úloh s radiální symetrií.

Situace je ošemetnější při výběru modelu laterálních nehomogenit hustoty. Zde se vývoj ubírá alespoň dvěma cestami. Jednou je sestavování třídímenzionálních (3-D) modelů ze seismických dat, speciálně z výsledků seismické tomografie (Hager ad. 1985). My budeme pracovat s alternativními modely, odvozenými řešením obrácené gravimetrické úlohy. Výpočet takových modelů navrhli a provedli Pěč a Martinec (1984, 1986, 1988) a modifikovali Čadek a Matyska (1988, 1989). Tyto modely generují se zvolenou přesností dobře známé gravitační pole Země a kopírují nebo jistým způsobem nahrazují, opět se zvolenou přesností, topografie hlavních zemských diskontinuit - povrchu Země, rozhraní plášť-jádro (core-mantle boundary, CMB) i jiných.

Závažným, ovšem obrácené úlohy běžně provázejícím problémem je nejednoznačnost takových modelů. Je třeba nějak vybrat kritérium, vydělující z třídy možných modelů ten "nejlepší". Je-li k dispozici dobrý apriorní model, užívá se jako kritérium výběru požadavek nejmenších odchylek 3-D modelu od apriorního, ovšem ani tato formulace není z pohledu matematika jednoznačná. Jednoznačný už ale je např. požadavek nejmenších odchylek od apriorního modelu ve smyslu L_2 -normy (Čadek, Matyska 1989). Právě volba normy však může sehrát až příliš významnou roli při konstrukci 3-D modelů (Sansò ad. 1986). Navíc je v poslední době vytykána výše zmíněným a níže použitým modelům jejich "statičnost". Hlasy ze zahraničí požadují, aby obrácená gravimetrická úloha byla řešena jako dynamický problém, zvláště aby byla zahrnuta reakce topografií na tok plášťového materiálu. Právě tvar uvážených topografií má totiž dominantní vliv na hledané laterální nehomogenity

hustoty.

Nedostí na tom, při numerické realizaci 3-D modelů se opět kalí optimistický náhled na problém radiálně symetrických modelů; ukazuje se, že PREM a pravděpodobně ani žádný z jeho předchůdců nesplňuje příliš přesně tzv. rovnice kompatibility s 3-D teorií (Pěč, Martinec 1984). Praktické počty pak nutí k různým opravám PREM, které se ale nutně projeví deformací seismické informace, v něm obsažené. Je sice možné pohlížet na tuto deformaci v rámci "chyby PREM", nicméně např. odchylky period vlastních módů, způsobené zmíněnými opravami PREM, jsou přinejmenším téhož řádu jako efekty (štěpení vlivem laterálních heterogenit), jimiž se budeme zabývat. Jisté východisko z těchto nepříjemných úvah spočívá v tom, že se multiplety v důsledku oprav PREM posouvají celé; nebudeme tedy porovnávat veličiny absolutně, ale relativně (např. poměry rozštěpených frekvencí k frekvenci degenerované).

Můžeme uzavřít, že spolehlivost (všech) dnešních 3-D hustotních modelů je otevřeným tématem; opravy PREM nebo opravy topografií (zvláště rozhraní plášť-jádro), a ty je nutno očekávat, se výrazně projeví i v hustotním modelu. To přirozeně souvisí s oborem velikostí, s nimiž pracujeme. Očekávané i zatím produkované laterální heterogenity jsou totiž nejvýše 1%-ními odchylkami od celkových hustot.

2. VLASTNÍ KMITY MODELŮ SNREI

V následující kapitole podáme definici modelu SNREI a stručně ukážeme přechod od obecné pohybové rovnice kontinua k soustavám rovnic, vhodným k praktickému řešení problému vlastních kmitů SNREI. Uvedeme numerické výsledky pro izotropní verzi modelu PREM. Budeme diskutovat tvar vlastních funkcí a popíšeme metodu klasifikace sféroidálních kmitů podle radiálního čísla. Na závěr se zmíníme o souvislosti vlastních kmitů Země a seismických vln.

V textu se budeme často odvolávat na podrobnou práci Martinice (1984). Předpokládáme, že čtenář má tuto práci po ruce; odkazy na ni budeme značit (M), eventuálně s příslušným číslem vztahu.

2.1. Definice modelu SNREI

Modelem SNREI nazýváme selfgravitační, sféricky symetrické a nerotující prostředí konečných rozměrů, v každém bodě elastické a izotropní a s konečným izotropním tenzorem statického počátečního napětí (předpětí). Zavedme sférické souřadnice r, θ, φ s počátkem ve středu symetrie, bázové vektory budeme značit $\underline{r}, \underline{\theta}, \underline{\varphi}$. Model SNREI je definován třemi funkcemi souřadnice r , nulovými vně koule $r \leq a$ a hladkými s výjimkou kulových ploch o poloměrech a_j , $j=1, \dots, N$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N = a$. Za tyto funkce volíme hustotu $\sigma_0(r)$ ¹⁾ a dvojici popisující elastické chování modelu; bývají to rychlosti objemových vln $v_S(r)$ a $v_P(r)$, elastické parametry $\mu(r)$ a $\lambda(r)$ nebo $\mu(r)$ a modul nestlačitelnosti $\kappa(r)$. Často chápeme

1) V celém textu budeme hustotu značit malým σ místo standardního ρ . Souvisí to jen a pouze s absencí ρ v sadě písma, kterou máme pro tisk k dispozici.

"elastickou" dvojicí funkcí ještě frekvenčně závislou, např. $v_s(r, \omega)$ a $v_p(r, \omega)$.

K popisu rovnovážného stavu používáme i další veličiny, v případě SNREI svázané s hustotou $\sigma_0(r)$, a to gravitační potenciál $\varphi_0(r)$, jeho derivaci - tíhové zrychlení $g_0(r)$ a hydrostatický tlak $p_0(r)$.

2.2. Průřez teorií

Obecným prostředím, vhodným k popisu vlastních kmitů Země, je nehomogenní elastické kontinuum s konečným statickým předpětím, popsaným tenzorem t_0 . Vlastní kmity pak chápeme jako malé elastické pohyby takového kontinua. Počáteční rovnovážnou konfiguraci označíme B , konfiguraci kmitajícího kontinua $B'(t)$.

Posun bodu x' v konfiguraci $B'(t)$ vzhledem k jeho poloze v B charakterizuje časově závislý vektor posunutí $u(x, t)$, viz (M2.4),

$$(2.1) \quad x' = x + \epsilon u(x, t),$$

ϵ je malý parametr. Vztáhneme-li veličiny popisující $B'(t)$ k B , což nazýváme Lagrangeovým popisem kontinua, dostaneme pohybovou rovnici (M2.25),

$$(2.2) \quad \text{div } T + \sigma_0 f' = \epsilon \sigma_0 \partial^2 u / \partial t^2 .$$

Skalár $\sigma_0(x, t)$ je hustota, tenzor $T(x, t)$ Piola-Kirchhoffův tenzor napětí a objemová síla $f'(x', t)$ je jediná veličina, vztažená k $B'(t)$. Po jejím převedení, spojeném s jistou linearizací, můžeme psát pohybovou rovnici ve tvaru nyní už kompletně vztaženém ke konfiguraci B , (M2.27),

$$(2.3) \quad \text{div } \bar{T} + \sigma_0 (u \cdot \text{grad } f_0 + \bar{f}) = \sigma_0 \partial^2 u / \partial t^2 .$$

Význam f_0 a přírůstků \bar{f} , \bar{T} je dán vztahy (M2.10), (M2.26). Podobně jako pohybovou rovnici vztahujeme i okrajové podmínky k rovno-

vážnému stavu B. Okrajové podmínky se liší pro rozhraní pevná, kapalná a volná; jsou dány rovnicemi (M2.80), vyjadřujícími omezení na hodnoty $u(x,t)$ a $\bar{T}(x,t)$ na rozhraní.

Následujícím krokem na cestě k SNREI je zavedení obecného modelu Země, rotujícího konstantní rychlostí kolem svého středu. To spočívá v přidání Coriolisova členu a konkretizaci objemové síly silou tíhovou. Tíhové pole je konzervativní, jeho potenciál $\Phi_0(x)$ je součtem potenciálu odstředivé síly $\Psi(x)$ a gravitačního potenciálu $\varphi_0(x)$. Odstředivý potenciál lze vyjádřit explicitně, (M3.1), gravitační potenciál splňuje Poissonovu rovnici (M3.5)

$$(2.4) \quad \nabla^2 \varphi_0 = 4\pi G \sigma_0 .$$

Pohyb kontinua $u(x,t)$ je provázen změnou potenciálu; významný je jen přírůstek gravitačního potenciálu $\varphi_1(x,t)$, splňující opět Poissonovu rovnici (M3.18). Pohybová rovnice (2.3) přejde na (M3.21)

$$(2.5) \quad \sigma_0 (\partial^2 u / \partial t^2 + 2 \Omega \times \partial u / \partial t + \text{grad } \varphi_1 + \text{grad grad } \Phi_0 \cdot u) = \text{div } \bar{T},$$

okrajové podmínky (M2.80) na (M3.32).

Uvažme SNREI. Rychlost rotace i rotační potenciál jsou podle předpokladu nulové, tenzor počátečního napětí je izotropní. Pohybová rovnice přejde na (M4.9) a (M4.10) a po zahrnutí lineární elastické a izotropní reologie (M4.13) na (M4.17). Z posledního tvaru (M4.17) lze, při uvážení pouze radiální závislosti parametrů modelu σ, μ, λ , odvodit dva nezávislé systémy diferenciálních rovnic. První je tvořen jedinou diferenciální rovnicí druhého řádu (M4.23) pro radiální složku rotace vektoru posunutí, $\omega_r(r, \theta, \varphi, t) = (\text{rot } u)_r$, druhý třemi diferenciálními rovnicemi druhého řádu pro tři funkce $u(r, \theta, \varphi, t) = u_r$, $\Delta(r, \theta, \varphi, t) \equiv \text{div } u$ a přírůstek potenciálu $\varphi_1(r, \theta, \varphi, t)$. V druhém systému je, kromě rovnic (M4.18), (M4.26) odvozených od pohybové rovnice, zahrnuta

i Poissonova rovnice pro φ_1 (M4.12),

$$(2.6) \quad \nabla^2 \varphi_1 + 4\pi G \operatorname{div} (\sigma_0 u) = 0 .$$

Separace pohybové rovnice na dva systémy umožňuje odpovídající separaci vlastních kmitů. V modelu SNREI budeme oba typy kmitů značit dvěma indexy, úhlovým číslem neboli řádem kmitu l a radiálním číslem nebo číslem tónu n . Harmonické oscilace, vyhovující prvnímu systému, nazveme toroidálními kmity a označíme ${}_n T_l$. Jsou charakterizovány nenulovou funkcí ω_r a nulovými hodnotami radiálního posunutí u a divergence vektoru posunutí Δ . Šíří se pouze pevnými oblastmi s nenulovým modulem torze a nejsou provázány žádnými změnami hustoty $\sigma_0(r)$. Časovou závislost složek posunutí kmitu ${}_n T_l$, jak stojí výše, bereme harmonicky s frekvencí ${}_n \omega_l$ a úhlovou závislost volíme popsanou sférickými funkcemi $Y_{lm}(\Theta, \varphi)$, $-1 \leq m \leq l$, viz (M4.35). K popisu radiální závislosti stačí jediná funkce ${}_n W_l(r)$. Dříve uvedených charakteristik toroidálních kmitů lze využít k odvození explicitního vyjádření složek u, v, w vektoru u ve sférických souřadnicích, $u = u_r + v_\Theta + w_\varphi$, (M4.36)

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= {}_n W_l(r) / \sin \Theta \partial Y_{lm}(\Theta, \varphi) / \partial \varphi \exp(i {}_n \omega_l t) \\ w &= -{}_n W_l(r) \partial Y_{lm}(\Theta, \varphi) / \partial \Theta \exp(i {}_n \omega_l t). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že na rozdíl od (M) značíme úhlové číslo l a indexem n myslíme radiální číslo, ve shodě s většinou prací o štěpení vlastních módů. U frekvence ${}_n \omega_l$ a funkce ${}_n W_l(r)$ vypisujeme oba indexy; při pevném l je radiální číslo kmitu n právě dáno frekvencí ${}_n \omega_l$ a tvarem funkce ${}_n W_l(r)$. A ještě, oproti (M) užíváme jednotlivých sférických funkcí $Y_{lm}(\Theta, \varphi)$ místo jejich součtů $S_l(\Theta, \varphi)$, viz (M4.34). Chceme tak explicitně vyznačit $(2l+1)$ -násobnou degeneraci kmitů s úhlovým číslem l , spojenou

právě s řádem harmonik m . Uvedli jsme, že každý toroidální kmit ${}_nT_l$ je plně určen frekvencí ${}_n\omega_l$ a funkcí ${}_nW_l$. Funkci ${}_nW_l$ budeme dále nazývat vlastní funkcí kmitu ${}_nT_l$.

Diferenciální rovnice (M4.23) pro funkci ω_r se zjednoduší na diferenciální rovnici (M4.37) pro ${}_nW_l$ a substitucí (M4.41)

$$(2.8) \quad y_1 = {}_nW_l, \quad y_2 = \mu(d{}_nW_l/dr - {}_nW_l/r)$$

na soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního stupně (M4.44) pro y_1, y_2 s parametrem ${}_n\omega_l$,

$$(2.9) \quad \begin{aligned} dy_1/dr &= y_1/r + y_2/\mu \\ dy_2/dr &= [\mu(1-1)(1+2)/r^2 - \sigma_0 {}_n\omega_l^2] y_1 - 3/r y_2. \end{aligned}$$

Na pevném rozhraní musí být $y_1(r)$ i $y_2(r)$ spojité, na kapalném a volném $y_1(r)$ libovolné, ale **konečné** a $y_2(r)$ nulové.

Soustava (2.9) je řešitelná pouze iteračně, např. numerickým integrováním klasickou metodou Runge-Kutta čtvrtého řádu. Z praktických důvodů se zajímáme jen o toroidální kmity, šířící se pláštěm a pozorovatelné na zemském povrchu (ne tedy o přípustné toroidální kmity šířící se vnitřním jádrem). Zvolíme testovací frekvenci $\omega \approx \omega_l$, pokud možno blízkou ${}_n\omega_l$, a numericky integrujeme od rozhraní plášť-jádro, $r=b$, směrem k povrchu, přesněji k rozhraní kůra-oceán, $r=a_{N-1} \equiv a^-$; pracujeme-li s modelem bez oceánu, je $a^- = a$ a integrujeme až do $r=a_N \equiv a$. Volíme počáteční hodnoty na CMB $y_1(b)=1, y_2(b)=0$ a usilujeme o to, vyhovět okrajové podmínce na povrchu, $y_2(a^-)=0$, tzv. sekulární rovnici. K tomu užijeme variační princip (M7.11); není-li pro frekvenci ω_l splněna sekulární rovnice, najdeme lepší odhad frekvence ω_b z rovnic (M8.7), (M8.8). Položíme nové $\omega_l = \omega_b$ a postup opakujeme až po dosažení zvolené přesnosti.

Sféroidálními kmity nazýváme oscilace, jejichž radiální

složka posunutí u a divergence $\Delta = \text{div } u$ vyhovují druhému systému diferenciálních rovnic, separovanému z pohybové rovnice. Značíme je, analogicky jako toroidální, ${}_n S_l$. Šíří se všemi oblastmi spolu se změnami radiální hustoty $\sigma_0(r)$, jsou provázeny nenulovým přírůstkem gravitačního potenciálu $\varphi_1(r, \theta, \varphi, t)$. Z požadavku $\omega_r = 0$ se snadno odvodí explicitní vyjádření složek u, v, w vektoru posunutí, viz (M4.50)

$$(2.10) \quad \begin{aligned} u &= {}_n U_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \exp(i_n \omega_l t) \\ v &= {}_n V_l(r) \partial Y_{lm}(\theta, \varphi) / \partial \theta \exp(i_n \omega_l t) \\ w &= {}_n V_l(r) / \sin \theta \partial Y_{lm}(\theta, \varphi) / \partial \varphi \exp(i_n \omega_l t) . \end{aligned}$$

Radiální závislost posunutí je tedy popsána dvěma vlastními funkcemi ${}_n U_l(r)$, ${}_n V_l(r)$. Je nutné ještě volit rozklad potenciálu φ_1 ; píšeme opět ve shodě s dále citovanou literaturou (jinak než (M4.51))

$$(2.11) \quad \varphi_1 = {}_n \varphi_{1l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \exp(i_n \omega_l t) .$$

System rovnic (M4.12), (M4.18) a (M4.26) pro u, Δ a φ_1 se zjednoduší na systém (M4.54)-(M4.56) a substitucí (M4.65)

$$(2.12) \quad \begin{aligned} y_1 &= {}_n U_l, & y_2 &= (\lambda + 2\mu) d_n U_l / dr + \lambda [2 {}_n U_l / r - l(l+1) {}_n V_l / r], \\ y_3 &= {}_n V_l, & y_4 &= \mu (d_n V_l / dr - {}_n V_l / r + {}_n U_l / r), \\ y_5 &= {}_n \varphi_{1l}, & y_6 &= d_n \varphi_{1l} / dr + (l+1) {}_n \varphi_{1l} / r + 4\pi G \sigma_0 {}_n U_l \end{aligned}$$

na soustavu šesti obyčejných diferenciálních rovnic prvního stupně pro funkce y_1, \dots, y_6 s parametrem ${}_n \omega_l$, viz (M4.69). V kapalných oblastech je $\mu=0$, $y_4=0$ a soustava rovnic (M4.69) přejde na soustavu čtyř rovnic (M4.71) pro y_1, y_2, y_5 a y_6 , funkce y_3 je vyjádřena explicitně. Poznamenejme, že u posledního členu čtvrté rovnice systému (M4.69) má správně stát kladné znaménko, tj. $(+ \sigma_0 / r y_5)$.

Podmínky na rozhraních zní: všechny y_i musí být konečné v počátku, spojitě na pevných rozhraních, na kapalných

y_1, y_2, y_5, y_6 spojité, y_3 s libovolným skokem, $y_4=0$ a na volném rozhraní $y_2=y_4=y_6=0$.

Proces numerického řešení soustavy (M4.69) je komplikovanější, než v případě toroidálních kmitů. Počítají se tři nezávislá řešení y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} , $i=1, \dots, 6$, soustavy v pevných oblastech, konečná v počátku, a dvě řešení y_{i1}, y_{i2} , $i=1, 2, 3, 5, 6$ v kapalných oblastech. Tato řešení je třeba na vnitřních rozhraních navazovat takovým způsobem, aby nějaká jejich lineární kombinace jednak splňovala podmínky na vnitřních rozhraních a jednak co nejlépe vyhověla sekulární rovnici, odpovídající podmínce na volném rozhraní. Sekulární rovnice požaduje, aby jistý determinant z hodnot $y_{ij}(a)$, $i=2, 4, 6$, $j=1, 2, 3$, byl roven nule, tj. aby nějaká lineární kombinace partikulárních řešení měla nulové složky $y_2(a)$, $y_4(a)$ a $y_6(a)$. V případě modelů SNREI s oceánem na povrchu (PREM) je $y_4(a)=0$ podle definice a sekulární rovnice zní

$$(2.13) \quad D_S(\omega, 1) \equiv \begin{vmatrix} y_{21}(a) & y_{22}(a) \\ y_{61}(a) & y_{62}(a) \end{vmatrix} = 0,$$

v případě modelů bez oceánu viz (M8.21).

Volíme opět testovací frekvenci ω_t a integrujeme od nějaké sféry blízko počátku směrem k povrchu. Počáteční hodnoty volíme pro menší úhlová čísla ve shodě s (M8.40), pro větší integrujeme počínaje sférou vzdálenější počátku a počáteční hodnoty bereme podle (M8.35) a (M8.38); první způsob totiž vede ke komplikacím při řešení na počítači. Na rozhraních vnitřní jádro - vnější jádro, CMB a kůra - oceán navazujeme podle (M8.28)-(M8.30). Koeficienty lineární kombinace funkcí y_{ij} na povrchu volíme buď $y_{62}(a), -y_{61}(a)$ nebo $y_{21}(a), -y_{22}(a)$, tedy tak, abychom vyhověli (2.13). S ohledem na numerickou stabilitu iterací volíme tu dvojici koeficientů, pro kterou je opravená frekvence ω_b podle (M8.31), (M8.32) blíže k frekvenci ω_t . Položíme $\omega_t = \omega_b$ a můžeme

"jet" znovu.

Doplňme ještě (M), pokud jde o výpočet radiálních módů nS_0 . S nimi spojené složky vektoru posunutí a přídavný potenciál lze podle (2.10) a (2.11) položit rovny

$$(2.14) \quad u = nU_0(r) \exp(in\omega_0 t)$$

$$v = w = 0$$

$$\phi_1 = n\phi_{10}(r) \exp(in\omega_0 t) .$$

Systém rovnic (M4.69) se zjednoduší na systém dvou rovnic (M4.78) pro y_1, y_2

$$(2.15) \quad dy_1/dr = -2\lambda/(\lambda+2\mu) y_1/r + y_2/(\lambda+2\mu)$$

$$dy_2/dr = [-\sigma_0 n\omega_0^2 - 4\sigma_0 g_0/r + 4\mu(3\lambda+2\mu)/((\lambda+2\mu)r^2)] y_1 - 4\mu/(\lambda+2\mu) y_2/r ,$$

rovnici (M4.79) pro y_5

$$(2.16) \quad dy_5/dr = -4\pi G \sigma_0 y_1$$

a rovnice $y_3=0$, $y_4=\mu y_1/r$, $y_6=y_5/r$. Funkce y_1, y_2 a y_5 musí být spojité na pevných a kapalných rozhraních, $y_2=0$ a $y_6=0$ na volném rozhraní.

Podle (M8.48) lze vybrat počáteční hodnoty $y_1(r)=r$, $y_2(r)=3\lambda+2\mu$. Ovšem funkce $y_1(r)$, $y_2(r)$, spočtené pak z (2.15), samotné nestačí k určení frekvenční opravy ω_b podle (M8.50), je vyžadována ještě hodnota přídavného potenciálu $y_5(a)$. K řešení (2.16) potřebujeme opět nějakou počáteční hodnotu, tentokrát $y_5(r)$. Tu nabízí vztah (M6.48),

$$(2.17) \quad y_5(r) = B_5 r^2 = -2\pi G \sigma_0 r^2 .$$

Na tomto místě vzniká spor. Funkce $y_1(r)$ kmitu oS_0 je totiž v celém definičním intervalu kladná, tedy $y_5(r)$ podle (2.16) klesající. Řešení v počátku je podle (2.17) $y_5(0) = 0$, okrajová podmínka žádá $y_5(a) = ay_6(a) = 0$ také. Co s tím?

Počáteční hodnoty (2.17) jsou speciálním případem (M6.40), kde jsou popsána tři nezávislá počáteční řešení pro sféroidální kmity. Řešení (2.17) je podle (M6.44) třetím z nich; první řešení klade $y_1 \approx r^{-1}$, singulární posunutí v počátku, a druhé, $y_1 = y_2 = 0$, $y_5 \approx 1$ a $y_6 \approx 1/r$, dává v počátku singulární y_6 . Ovšem rovnice pro "fyzikálně zajímavá" y_1, y_2 a y_5 , (2.15) a (2.16), lze řešit nezávisle na y_6 , singularita y_6 v ničem nepřekáží. Výsledek je sice prostý, $y_1 = y_2 = 0$ a $y_5 = \text{konst}$ všude, ale náš problém posunutím startovací hodnoty y_5 z nuly úspěšně řeší.

K (2.17), resp. (M6.48) tedy dodáváme:

$$(2.18) \quad y_5(r) = A_5 + B_5 r^2 .$$

Radiální kmity mohou ovlivňovat velikost potenciálu $\varphi_0(0)$ v počátku.

2.3. Vlastní kmity modelu PREM

K výpočtu frekvencí štěpených vlastních kmitů je nezbytná kompletní znalost degenerovaných kmitů SNREI, jejich frekvencí i vlastních funkcí. Budeme proto numericky realizovat algoritmus, popsany v předchozí části. V (M) je výpočet frekvencí SNREI proveden pro model 1066A (Gilbert, Dziewonski 1975), my budeme počítat s dnes preferovanějším PREMem.

Model PREM je popsán hustotou a rychlostmi objemových vln, po částech ve tvaru polynomů nejvýše třetího stupně v proměnné x , normalizovaném poloměru $x=r/a$, $a=6371$ km. Vrstva PREM u mezi hloubkami 24.4 km a 200 km je anizotropní, jsou ovšem dány i efektivní izotropní rychlosti. Shoda PREM u s realitou je potom poněkud menší, pro naše účely však potřebujeme model izotropní. Tabulka koeficientů hustoty a rychlostí je doplněna ještě o faktory útlumu Q_μ , Q_κ , po částech konstantami. Rychlosti PREM u jsou

chápany frekvenčně závislé, jsou tabelovány na referenční periodě 1 s. Pro přepočet rychlostí na jiné periody slouží právě faktory Q_μ, Q_k ; je doporučeno používat disperzních relací podle Kanamori, Anderson (1977)

$$(2.19) \quad v_S(T) = v_S(1) (1 - \ln T / \pi \cdot 1/Q_\mu)$$

$$v_P(T) = v_P(1) \{1 - \ln T / \pi [(1 - 4/3 (v_S(1)/v_P(1))^2) \cdot 1/Q_k + 4/3 (v_S(1)/v_P(1))^2 \cdot 1/Q_\mu]\}$$

Součástí Dziewonski, Anderson (1981) je mj. i tabulka period vlastních módů; obsahuje registrované periody a periody vyčíslené pro anizotropní i izotropní PREM. Některé kmity jsou vynechány. Uvádíme proto v tab.2.1 až 2.6 souvislý soubor period a frekvencí vlastních módů izotropního PREM u z nízkofrekvenční části spektra.

V případě sféroidálních kmitů je v tab.2.7 uveden relativní příspěvek kinetické energie z vnitřního a vnějšího jádra a pláště. Poznamenejme, že kinetickou energií (jednoho cyklu) kmity v radiálně symetrické oblasti, $a_i \leq r \leq a_k$, myslíme integrál

$$(2.20) \quad T_{kin} = \int \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dV = \int_{a_i}^{a_k} \frac{1}{2} \rho_0 [U^2 + 1(1+1)(V^2 + W^2)] r^2 dr$$

Obraz rozložení kinetické energie vlastních kmitů v Zemi slouží k dokreslení toho, proč vysokofrekvenční módy nazýváme někdy módy plášťovými; amplitudy posunutí i kinetické energie jako funkce r se posouvají, spolu s růstem frekvence, do pláště a k povrchu Země. Striktně vzato, toto tvrzení platí jen pro základní tóny. Jak je z tab.2.7 patrné, kinetická energie leckterých vyšších sféroidálních tónů může být třeba i více než z 90% soustředěna do vnitřního jádra. Těžko ovšem můžeme očekávat, že takové kmity budou ve spektru Země někdy identifikovány.

Kvalitativně jiná je situace pro radiální kmity. V jejich případě se při rostoucím n také kumuluje kinetická energie ve

vnitřním jádře, ovšem "rozumně". Je zřejmé, že radiální módy nesou i pro pozorovatele na povrchu zřetelnou informaci o hlubokých partiích. Ta sehrála svou úlohu jako jeden z důkazů "pevnosti", tj. nenulového modulu torze μ , vnitřního jádra (Dziewonski, Gilbert 1972).

Průběh závislosti vlastních funkcí na poloměru r je pro některé toroidální, radiální i sféroidální kmity vyneseno na obr.2.1 až 2.5.

2.4. Klasifikace vlastních kmitů radiálním a úhlovým číslem

Systemy diferenciálních rovnic pro toroidální, resp. sféroidální kmity (M4.44), resp. (M4.69) a podmínky na rozhraní splňují při pevném úhlovém čísle l (explicitně vystupujícím v rovnicích) nekonečně mnoho frekvencí $n\omega_l$ a příslušných vlastních funkcí, indexovaných různými radiálními čísly n . Nabízí se otázka, jaké radiální číslo přiřadit toroidálnímu či sféroidálnímu kmitu s úhlovým číslem l , známe-li jen jeho frekvenci ω a průběh vlastních funkcí $W(r)$ či $U(r)$, $V(r)$.

Věc je jednoduchá pro toroidální módy. V jejich případě totiž číslo tónu udává počet nulových bodů funkce $W(r)$ v intervalu $\langle b; a \rangle$. To dokumentuje obr.2.1. Stejný význam má číslo tónu i pro radiální kmity a vlastní funkci $U(r)$, viz obr.2.2. Platí tedy rovnost mezi radiálním číslem a počtem (kulových) uzlových ploch uvnitř Země, a to pro toroidální a radiální kmity.

Pro sféroidální kmity toto tvrzení není pravdivé, i když bývá někdy uváděno. Věc komplikuje, že zde vystupují dvě vlastní funkce $U(r)$ a $V(r)$, navíc druhá z nich, vyjadřující radiální závislost horizontálního posunutí, má povolenou nespojitost na kapalných rozhraních. Není patrná žádná přímá souvislost mezi

radiálním číslem a počtem nulových bodů vlastních funkcí, viz obr.2.3 a 2.5. Vrací se znova otázka, jak se tedy přiřazuje radiální číslo sféroidálnímu kmitu. Že věc není zcela triviální, o tom svědčí např. označení kmitu s $n=1$ a periodou asi 1058 s jako ${}_2S_1$ v Dahlen (1968), Dziewonski, Gilbert (1972) a jako ${}_3S_1$ v Luh (1974) nebo v PREM u (1981). Takových "děr" je v Dziewonski, Gilbert (1972) více, např. ${}_2S_2, {}_6S_2, {}_3S_3, {}_7S_3, {}_3S_4, {}_8S_4$, a všechny jsou spojené s posunutím vyšších tónů "o jednu" směrem dolů.

Vysvětlení je nasnadě; praxe je totiž taková, že se vypočtou teoretická spektra SNREI pro jednotlivá úhlová čísla l a v každém se tóny po řadě očísloují. Může se stát, že nějaká teoreticky možná frekvence - možná i úmyslně - "proklouzne". Jiná kontrola správnosti radiálního čísla není, vynechání módu se přenesse i na číslování všech vyšších módů.

Pro výpočet spektra kmitů s pevným l lze s výhodou užít sekulární rovnice (2.13), resp. (M8.21). Nulové hodnoty determinantu $D_S(\omega; l)$ jako funkce frekvence ω totiž odpovídají přípustným frekvencím vlastních kmitů použitého modelu. Pro $l=0,1,2,3,4$ jsme tyto determinanty sestrojili; jsou vyneseny na obr.2.6 až 2.10. Je z nich patrný původ nejasností kolem kmitu ${}_3S_1$; nulová hodnota determinantu $D_S(\omega; 1)$ při frekvenci $f=\omega/(2\pi)=5.28 \mu\text{Hz}$ (perioda asi 52.6 hod), odpovídající kmitu (pro praxi samozřejmě bezvýznamnému) ${}_0S_1$, je nečekaná (ostatně i na našem obrázku nezřetelná) a mohla snadno uniknout.

Právě řečené tedy napovídá, že primární úlohu při identifikaci (přisouzení n a l) vlastního kmitu ve spektru reálné Země hraje srovnávání s výpočty z apriorních modelů.

2.5. Souvislost vlastních kmitů a seismických vln

Ukážeme zajímavou možnost duální interpretace vlastních kmitů Země jako seismických objemových vln (Dziewonski, Gilbert 1972). Exaktní reprezentace seismických vln superpozicí vlastních kmitů je ovšem mnohem komplikovanější.

V tab.2.7 jsme uvedli poměrné hodnoty kinetické energie vlastních kmitů a jejich rozdělení do vnitřního a vnějšího jádra a pláště. S každým vlastním kmitem je přirozeně spojena i jistá potenciální energie, kterou lze rozdělit na část, svázanou se změnami gravitačního pole, a na část, odpovídající objemovým změnám (typ P) a střížným posunům (typ S), viz Dziewonski, Gilbert (1972), i (M, str.167). Nabízí se přitom "energetická" interpretace vlastních kmitů; kmit s převažující energií typu P v oblasti (plášť, vnější nebo vnitřní jádro) odpovídá objemové P-vlně, šířící se oblastí, kmit s větší energií typu S odpovídá S-vlně. Gravitační část potenciální energie do úvah nezahrnujeme; při konkrétních výpočtech nepřesahuje až na výjimky 10% celkové potenciální energie.

Dziewonski a Gilbert provedli výpočet pro několik desítek kmitů a tabelovali výsledky v (1972). Metoda interpretuje např. kmity ${}_4S_3$, ${}_5S_4$, ${}_4S_7$ jako vlny PcS (v plášti energie typu P i S, v jádře téměř nic), kmity ${}_4S_4$, ${}_5S_2$, ${}_5S_3$ jako SKS (část energie typu S v plášti, část ve vnějším jádře). Pozoruhodné jsou kmity ${}_3S_1$, ${}_6S_1$, ${}_8S_1$ a ${}_{11}S_1$. Ty nabývají zřetelných hodnot (1-11%) energie typu P ve vnitřním jádře; odpovídají vlnám PKIKP. Kmit ${}_9S_2$ obsahuje energie typu S ve vnitřním jádře dokonce 14% z celkové potenciální energie, lze jej tedy, v rámci této interpretace, považovat za vlnu PKJKP.

Praktický význam naznačené metody spočívá v získání informace o "kvalitě" módu v jednotlivých oblastech v Zemi. Taková informace může být s výhodou použita k opravě modelu při eventuální neshodě měřených a vypočtených frekvencí nějaké skupiny kmitů. Tímto způsobem byly na konci šedesátých let definitivně vyvráceny modely Země s celokapalným jádrem, které nevyhovovaly právě frekvencím výše uvedených "ekvivalentů" vln PKIKP a PKJKP.

Tab.2.1. Períody toroidálnych kmitu OTI modelu PREM
(l uhlove číslo)

la	T [s]					6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5					
lb										
0	-	2639.13	1707.43	1307.41	1078.67	928.34	820.67	738.93	674.25	621.50
10	577.44	539.96	507.58	479.27	454.24	431.91	411.85	393.69	377.16	362.03
20	348.13	335.30	323.41	312.37	302.07	292.44	283.42	274.95	266.98	259.47
30	252.37	245.65	239.28	233.24	227.49	222.03	216.82	211.85	207.10	202.57

Tab.2.2. Períody toroidálnych kmitu ITI modelu PREM
(l uhlove číslo)

la	T [s]					6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5					
lb										
0	-	757.50	694.92	630.80	571.37	519.43	475.45	438.68	407.88	381.82
10	359.43	339.91	322.68	307.31	293.49	280.99	269.62	259.23	249.70	240.93
20	232.84	225.84	218.41	211.95	205.92	200.29	195.02	190.07	185.42	181.03
30	176.89	172.97	169.26	165.73	162.38	159.18	156.14	153.22	150.44	147.76

Tab.2.3. Períody a frekvence toroidálnych kmitu nTI modelu PREM
(n radiaľni číslo, l uhlove číslo)

n	T [s]					6	7	8	f [mHz]	
	0	1	2	3	4				0	1
0	-	-	2639.13	1707.43	1307.41	-	-	0.37891	0.58568	0.76487
1	-	-	757.50	694.92	630.80	-	-	1.32013	1.43901	1.58529
2	-	-	448.21	435.70	420.18	-	-	2.23110	2.29516	2.37993
3	-	-	309.15	304.85	299.34	-	-	3.23468	3.28030	3.34068
4	-	-	231.05	229.20	227.00	-	-	4.32807	4.36300	4.40529

Tab.2.4. Períody sferoidálnych kmitu OSI modelu PREM
(l uhlove číslo)

la	T [s]					6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5					
lb										
0	189485.	3233.58	2134.47	1545.71	1190.16	963.48	812.14	707.80	633.98	579.62

Tab.2.5. Períody sferoidálnych kmitu ISI modelu PREM
(l uhlove číslo)

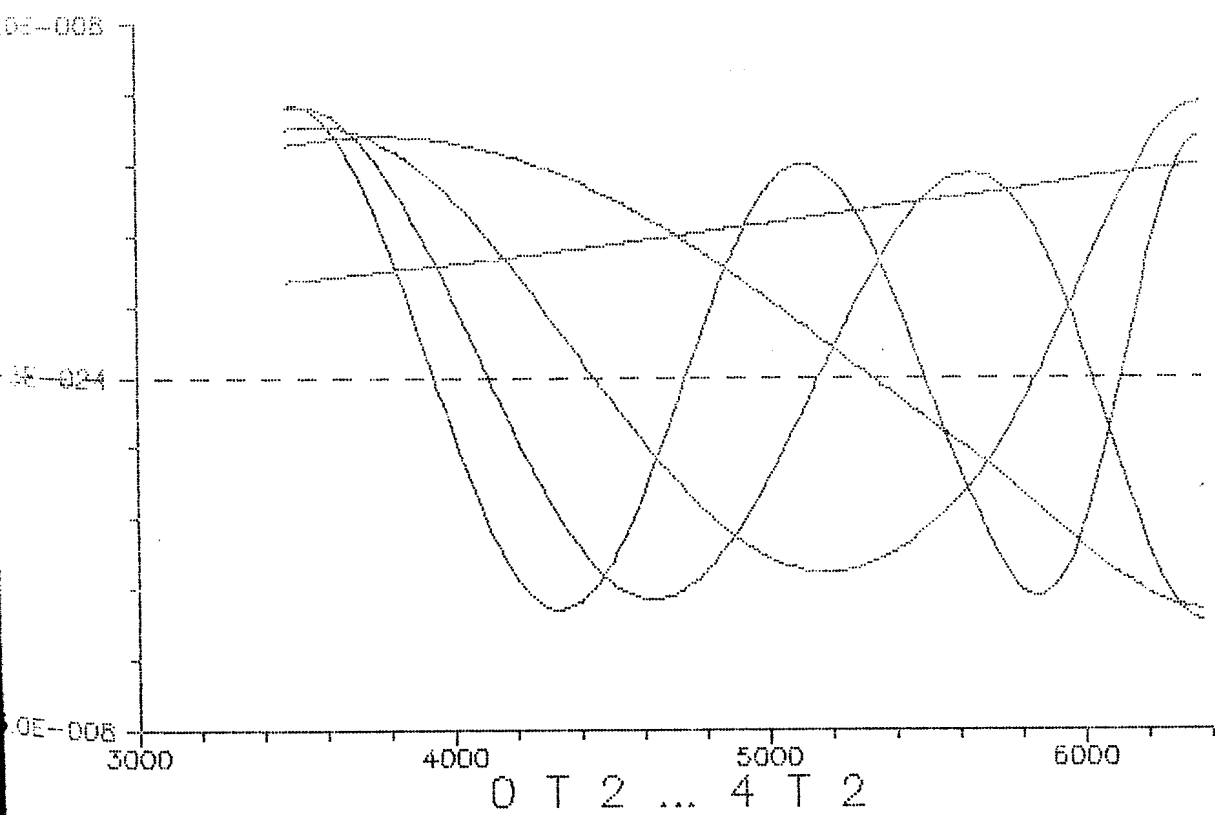
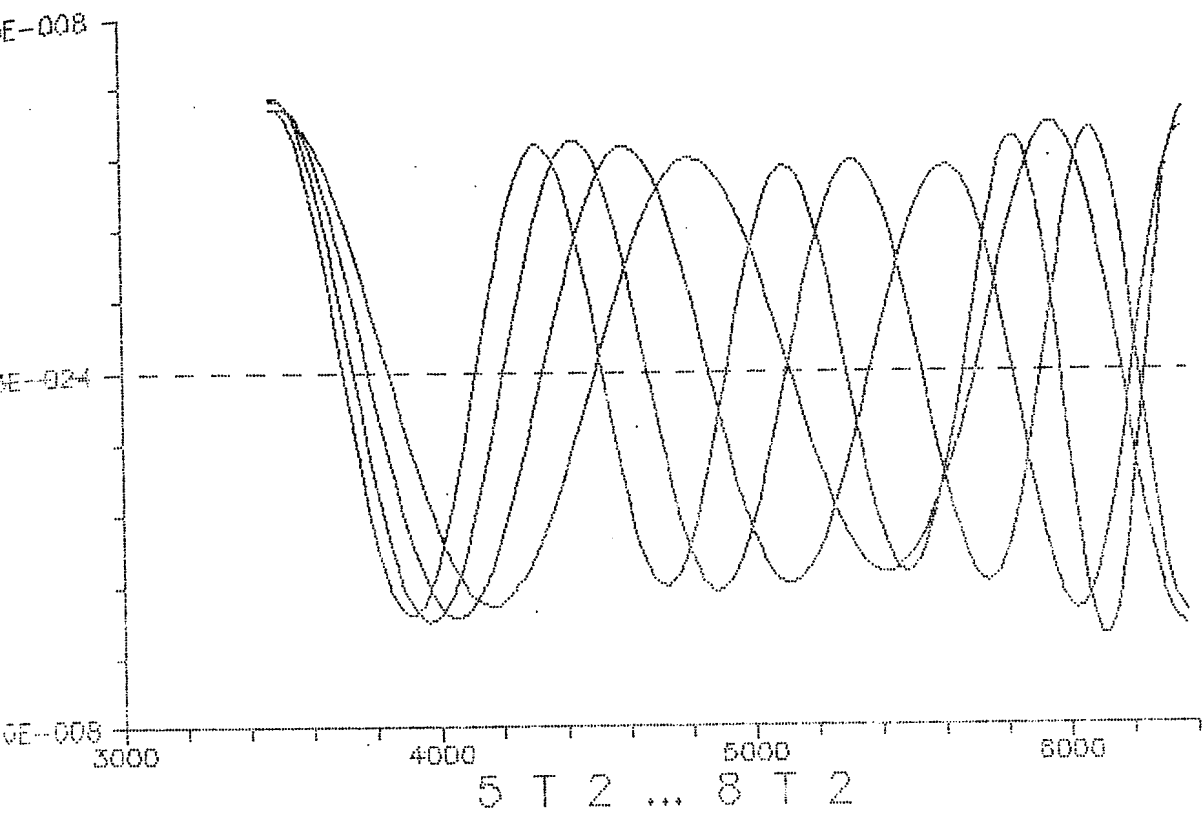
la	T [s]					6	7	8	9	10
	1	2	3	4	5					
lb										
0	19513.	1471.20	1064.31	852.80	729.81	657.00	604.05	555.78	509.24	465.45

Tab.2.6. Períody a frekvence sferoidálnych kmitu nSI modelu PREM
(n radiaľni číslo, l uhlove číslo)

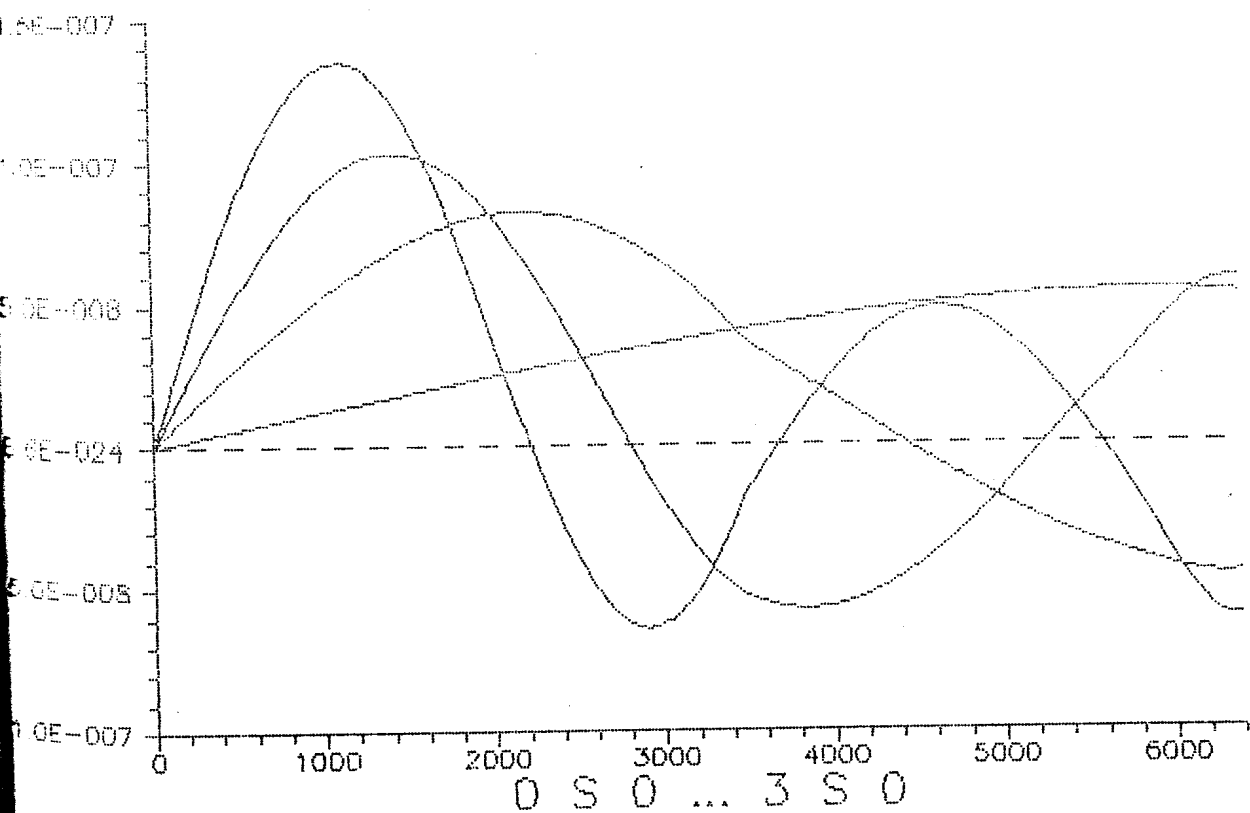
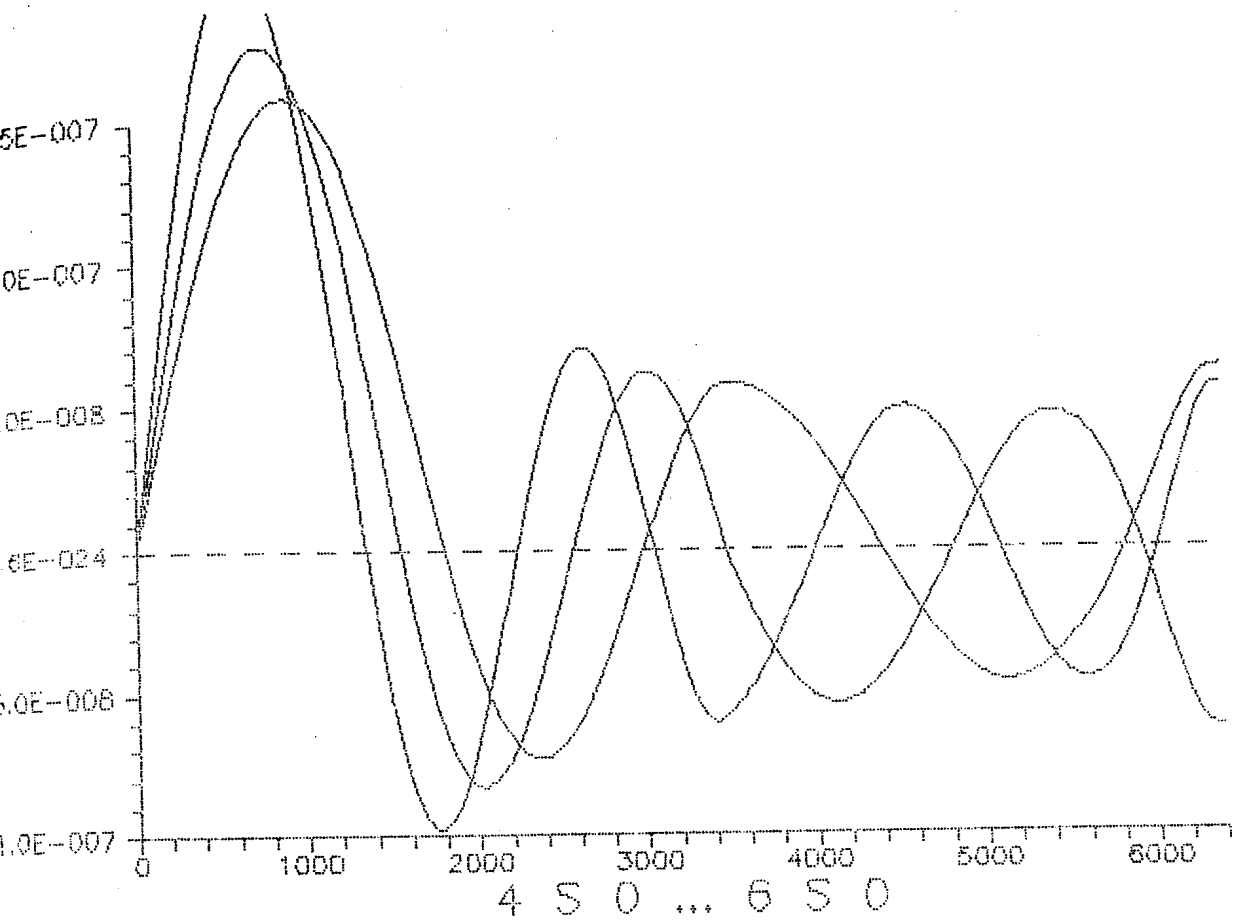
n	T [s]					6	7	8	f [mHz]	
	0	1	2	3	4				0	1
0	1228.02	189485.	3233.58	2134.47	1545.71	0.81431	0.00528	0.30925	0.46850	0.64695
1	612.99	19513.	1471.20	1064.31	852.80	1.63135	0.05125	0.67972	0.93958	1.17260
2	398.30	2475.52	1065.94	805.18	725.32	2.51067	0.40396	0.93814	1.24195	1.37870
3	305.65	1059.40	904.04	705.41	545.32	3.27172	0.94393	1.10615	1.41761	1.83397
4	243.49	707.85	580.58	487.98	438.71	4.10694	1.41274	1.72242	2.04928	2.27942
5	204.65	583.32	478.17	460.91	420.18	4.88639	1.71434	2.09132	2.16960	2.37993
6	174.12	504.94	414.71	354.35	323.36	5.74317	1.98044	2.41133	2.82208	3.09251
7	151.87	449.53	397.20	324.35	292.94	6.58458	2.22454	2.51761	3.08305	3.41373
8	134.61	347.98	311.06	304.50	270.00	7.42887	2.87376	3.21481	3.28412	3.70370
9	120.93	312.64	309.37	281.23	257.79	8.26925	3.19853	3.23238	3.55587	3.87910
10	110.32	294.54	247.93	232.44	209.70	9.06454	3.39513	4.03340	4.30213	4.76874

Tab.2.7. Sferoidalni kmiti; periodi, frekvence
a relativni prispevek vnitrih jadra, vnejsih jadra a plaste
ke kineticke energii kmitu

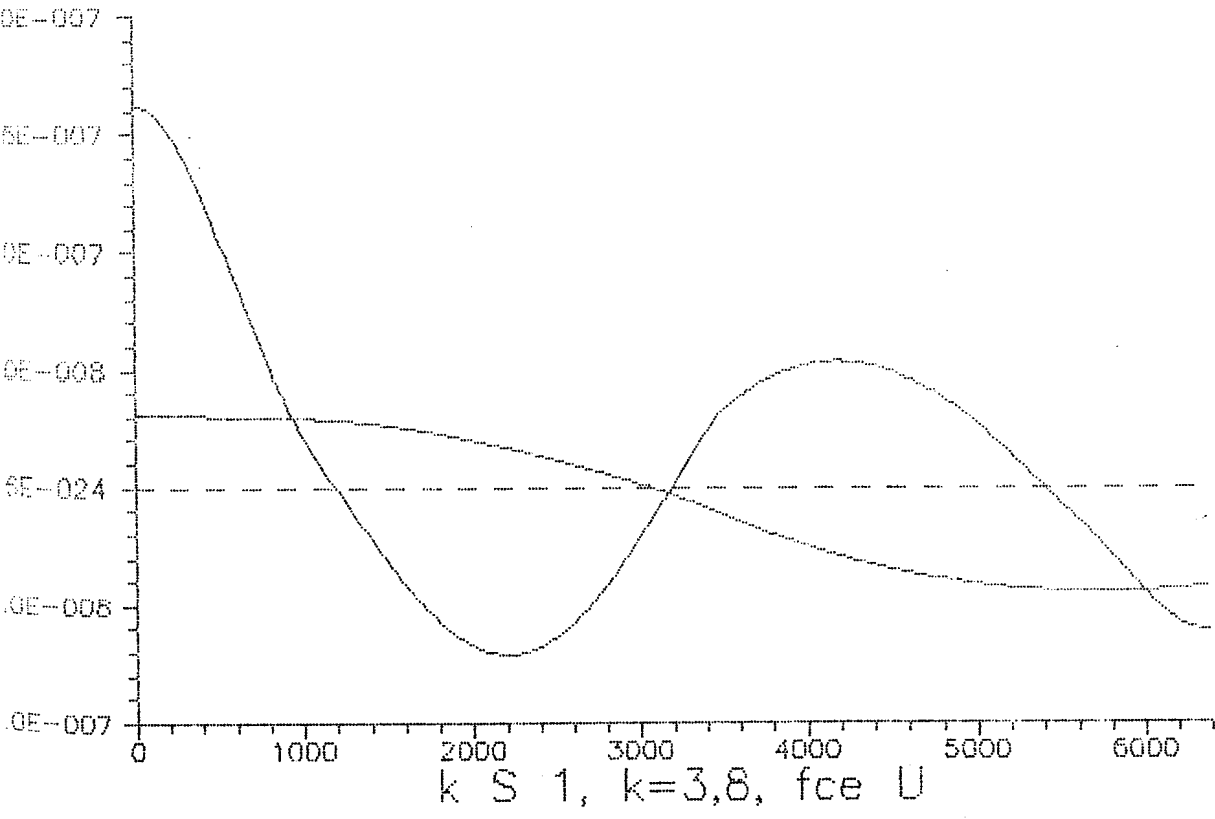
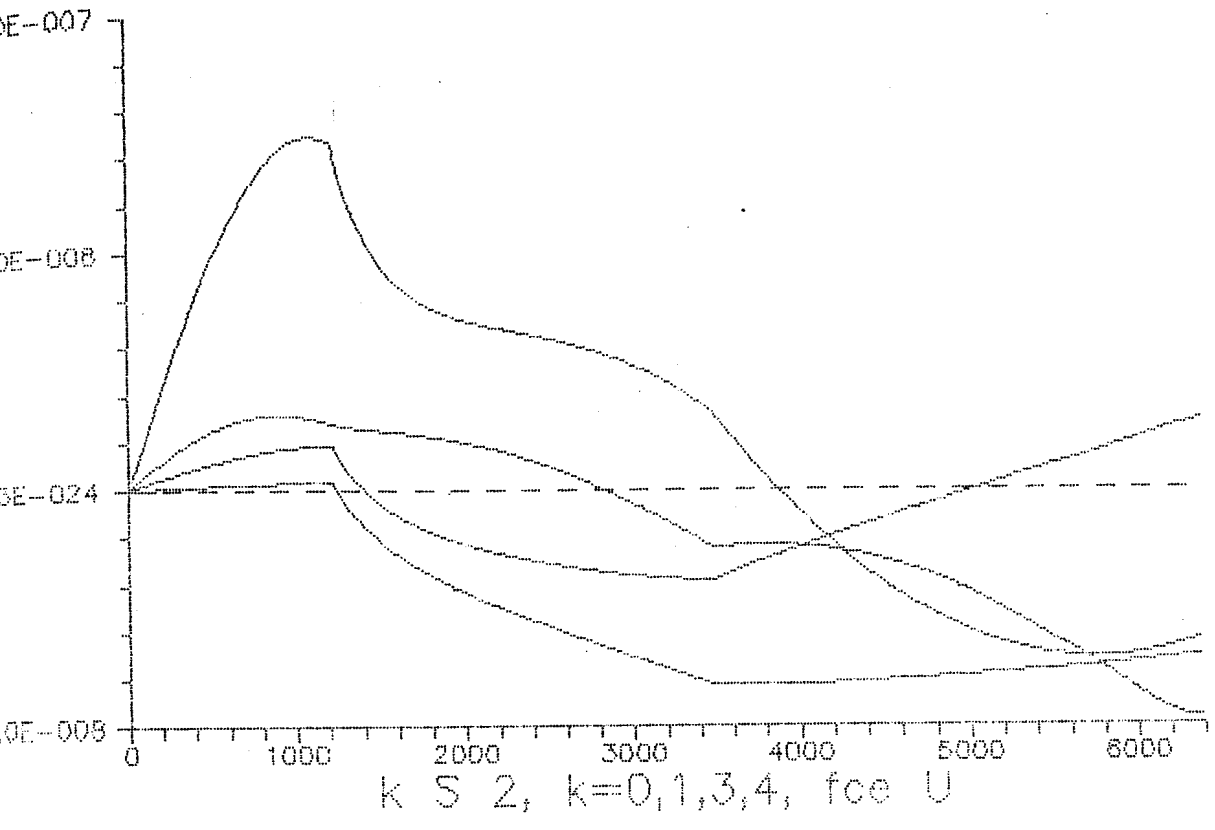
kmit	T [s]	f [mHz]		Tkin [1]		kmit	T [s]	f [mHz]		Tkin [1]	
0 S 2	3233.58	0.30925	0.00	0.39	0.61	1 S 2	1471.20	0.67972	0.00	0.12	0.88
0 S 3	2134.47	0.46850	0.00	0.32	0.68	1 S 3	1064.31	0.93958	0.00	0.06	0.94
0 S 4	1545.71	0.64695	0.00	0.27	0.73	1 S 4	852.80	1.17260	0.00	0.07	0.93
0 S 5	1190.16	0.84022	0.00	0.23	0.77	1 S 5	729.81	1.37021	0.00	0.16	0.84
0 S 6	963.48	1.03790	0.00	0.19	0.81	1 S 6	657.00	1.52208	0.00	0.29	0.71
0 S 7	812.14	1.23132	0.00	0.14	0.86	1 S 7	604.05	1.65549	0.00	0.36	0.64
0 S 8	707.80	1.41282	0.00	0.09	0.91	1 S 8	555.78	1.79926	0.00	0.41	0.59
0 S 9	633.98	1.57733	0.00	0.05	0.95	1 S 9	509.24	1.96371	0.00	0.45	0.55
0 S 10	579.62	1.72528	0.00	0.02	0.98	1 S 10	465.45	2.14845	0.00	0.47	0.53
0 S 11	537.33	1.85104	0.00	0.01	0.99	1 S 11	425.96	2.34765	0.00	0.48	0.52
0 S 12	502.81	1.98881	0.00	0.00	1.00	1 S 12	365.46	2.73629	0.00	0.05	0.95
0 S 13	473.66	2.11123	0.00	0.00	1.00	1 S 13	344.94	2.89905	0.00	0.06	0.92
0 S 0	1228.02	0.81432	0.00	0.16	0.84	8 S 0	134.61	7.42884	0.16	0.46	0.38
1 S 0	612.99	1.63136	0.02	0.70	0.28	9 S 0	120.93	8.26922	0.18	0.39	0.44
2 S 0	398.30	2.51065	0.06	0.42	0.52	10 S 0	110.32	9.06441	0.19	0.40	0.41
3 S 0	305.65	3.27171	0.12	0.47	0.41	11 S 0	101.03	9.99809	0.19	0.39	0.42
4 S 0	243.49	4.10701	0.17	0.38	0.45	12 S 0	93.34	10.71343	0.16	0.38	0.45
5 S 0	204.65	4.88631	0.18	0.36	0.46	13 S 0	86.52	11.55838	0.17	0.43	0.40
6 S 0	174.12	5.74303	0.18	0.42	0.40	14 S 0	80.67	12.39595	0.17	0.39	0.44
7 S 0	151.87	6.58471	0.15	0.39	0.46	15 S 0	75.69	13.21169	0.20	0.42	0.39
0 S 1	189484.80	0.00528	0.00	0.00	0.00	0 S 3	2134.47	0.46850	0.00	0.32	0.68
1 S 1	19513.28	0.05125	0.64	0.36	0.00	1 S 3	1064.31	0.93958	0.00	0.06	0.94
2 S 1	2475.52	0.40396	0.02	0.40	0.58	2 S 3	805.18	1.24195	0.01	0.45	0.54
3 S 1	1059.40	0.94393	0.02	0.23	0.74	3 S 3	705.42	1.41761	0.56	0.43	0.01
4 S 1	707.85	1.41274	0.01	0.04	0.95	4 S 3	487.98	2.04928	0.00	0.03	0.97
5 S 1	583.32	1.71434	0.98	0.01	0.00	5 S 3	460.91	2.16960	0.00	0.12	0.87
6 S 1	504.94	1.98044	0.06	0.41	0.53	6 S 3	354.35	2.82208	0.03	0.41	0.56
7 S 1	449.53	2.22454	0.03	0.18	0.79	7 S 3	324.35	3.08305	0.93	0.04	0.03
8 S 1	347.98	2.87376	0.08	0.36	0.56	8 S 3	304.50	3.26412	0.00	0.02	0.97
9 S 1	312.64	3.19853	0.00	0.00	1.00	9 S 3	281.23	3.55587	0.03	0.45	0.52
10 S 1	294.54	3.39513	0.96	0.02	0.02	10 S 3	232.44	4.30213	0.02	0.16	0.82
0 S 2	3233.58	0.30925	0.00	0.39	0.61	0 S 4	1545.71	0.64695	0.00	0.27	0.73
1 S 2	1471.20	0.67972	0.00	0.12	0.88	1 S 4	852.80	1.17260	0.00	0.07	0.93
2 S 2	1065.94	0.93814	0.52	0.42	0.06	2 S 4	725.32	1.37870	0.00	0.40	0.60
3 S 2	904.04	1.10615	0.06	0.39	0.54	3 S 4	545.26	1.83397	0.57	0.42	0.00
4 S 2	580.58	1.72242	0.00	0.05	0.95	4 S 4	438.71	2.27942	0.00	0.15	0.85
5 S 2	478.17	2.09132	0.01	0.13	0.86	5 S 4	420.18	2.37993	0.00	0.02	0.98
6 S 2	414.71	2.41133	0.91	0.05	0.04	6 S 4	323.36	3.09251	0.00	0.30	0.69
7 S 2	397.20	2.51761	0.11	0.39	0.50	7 S 4	292.94	3.41373	0.00	0.10	0.89
8 S 2	311.06	3.21478	0.04	0.28	0.69	8 S 4	270.00	3.70370	0.87	0.09	0.04
9 S 2	309.37	3.23238	0.02	0.13	0.85	9 S 4	257.79	3.87910	0.07	0.44	0.49
10 S 2	247.93	4.03334	0.46	0.28	0.26	10 S 4	209.70	4.76874	0.02	0.41	0.56
11 S 2	246.33	4.05952	0.61	0.19	0.19						



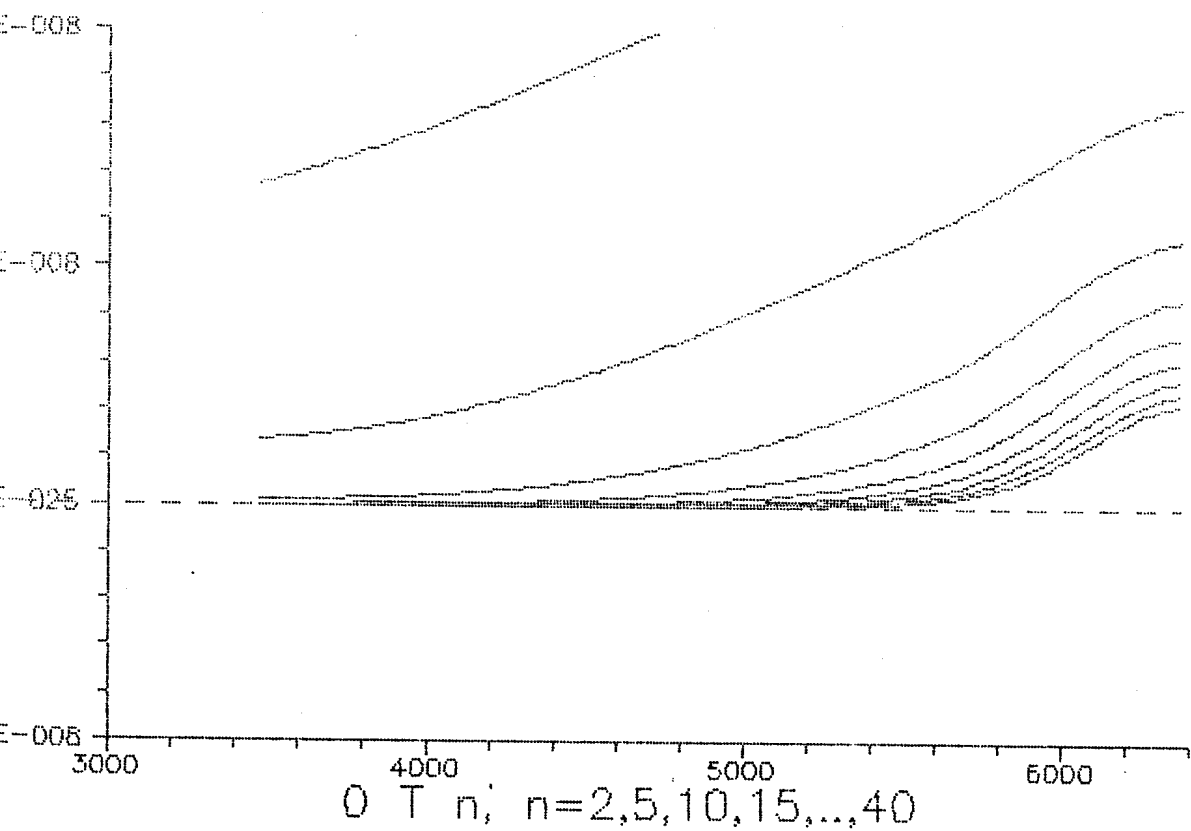
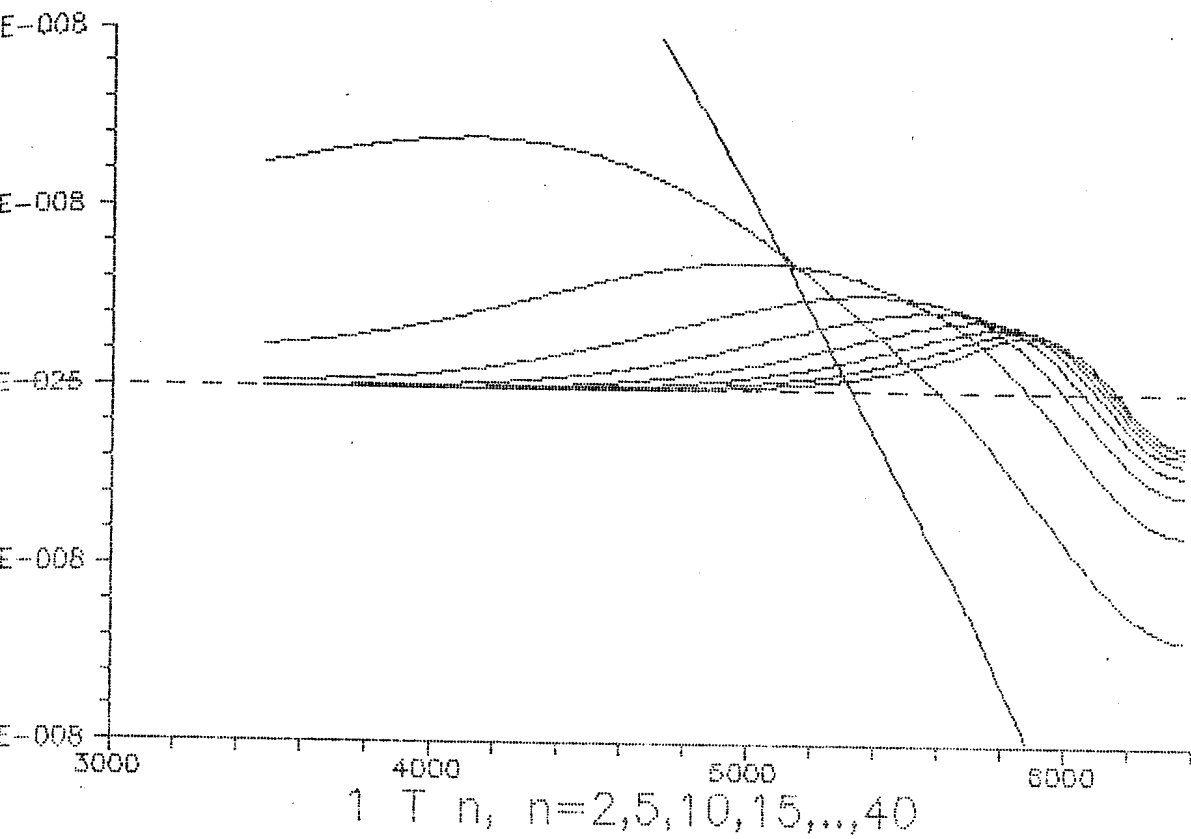
Obr.2.1. Vlastní funkce $W(r)$ toroidálních kmitů,
 x-osa poloměr r , y-osa normovaná $W(r)$ [km]



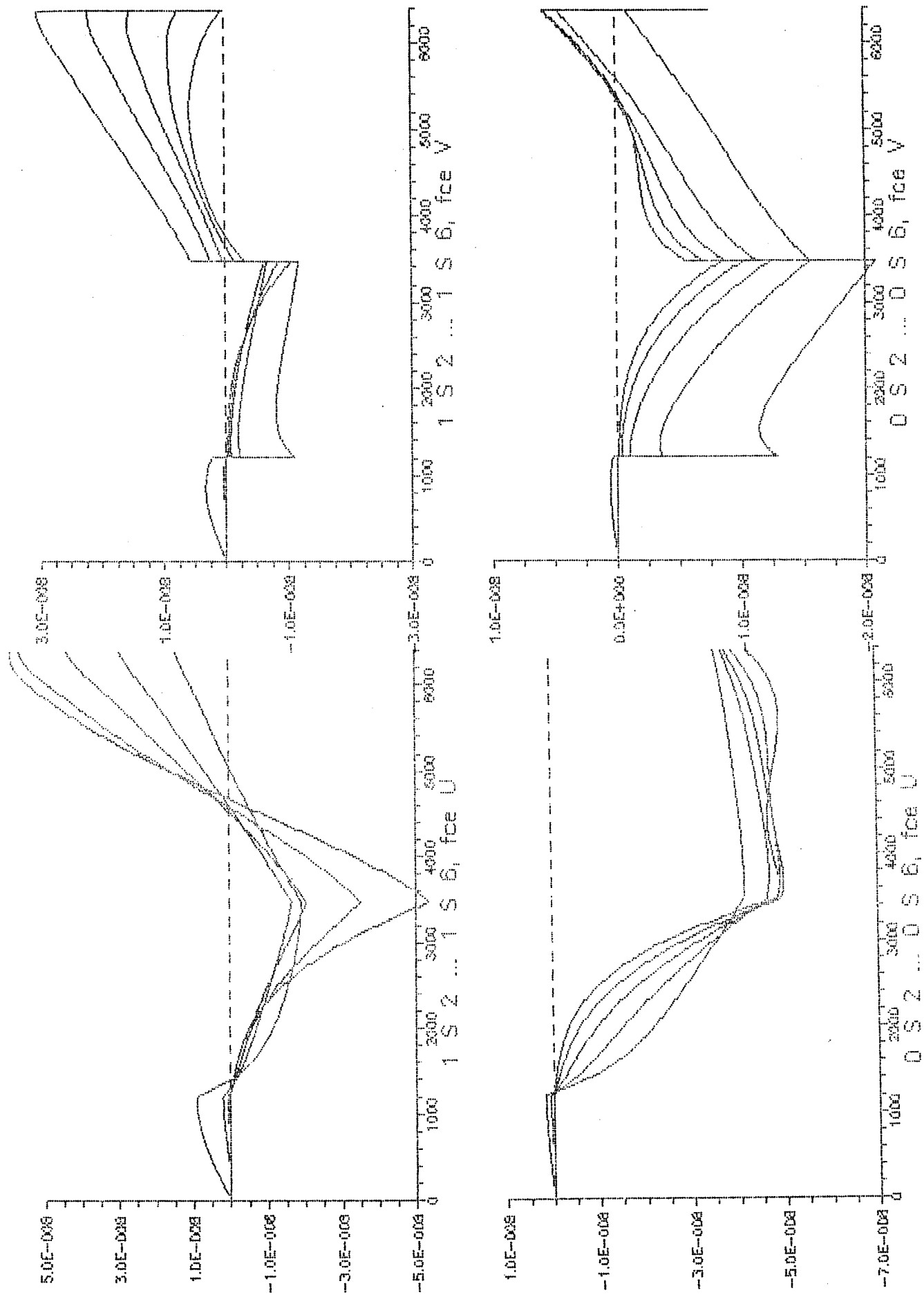
Obr.2.2. Vlastní funkce $U(r)$ radiálních kmitů,
 x-osa poloměr r , y-osa normovaná $U(r)$ [km]



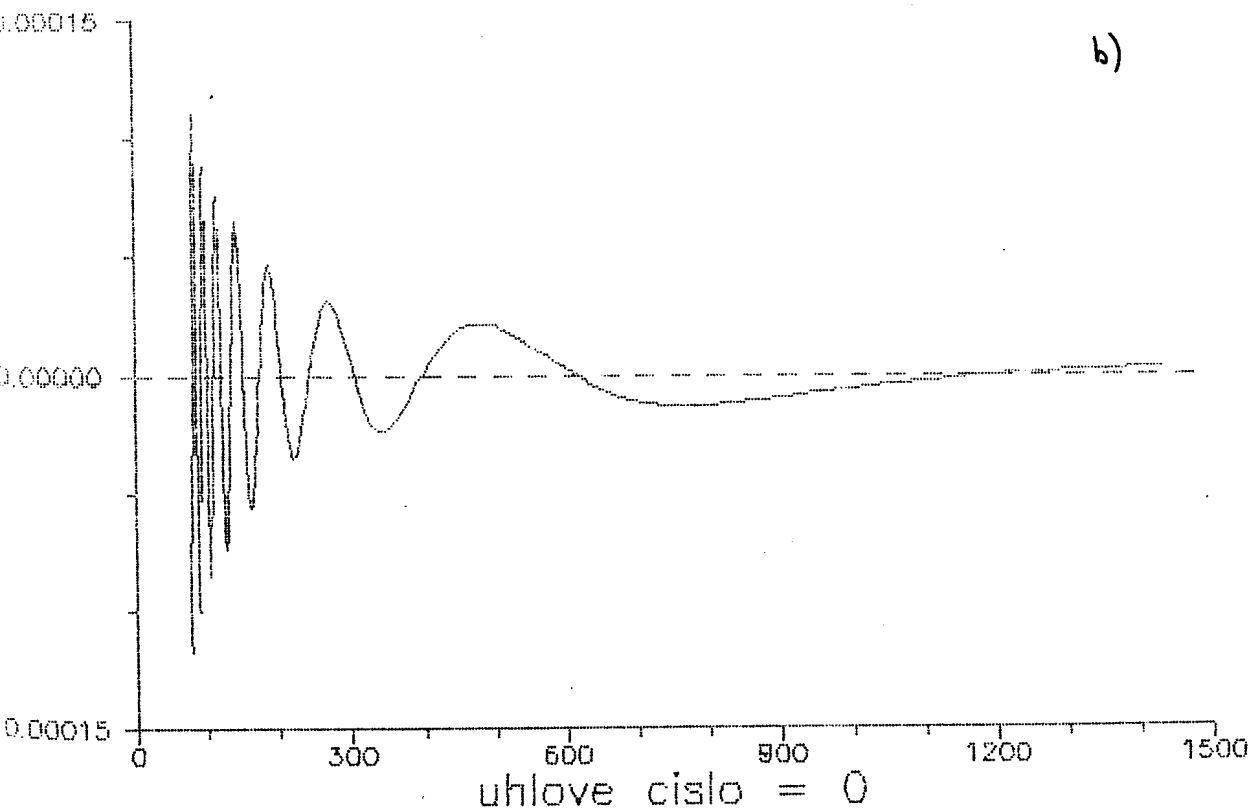
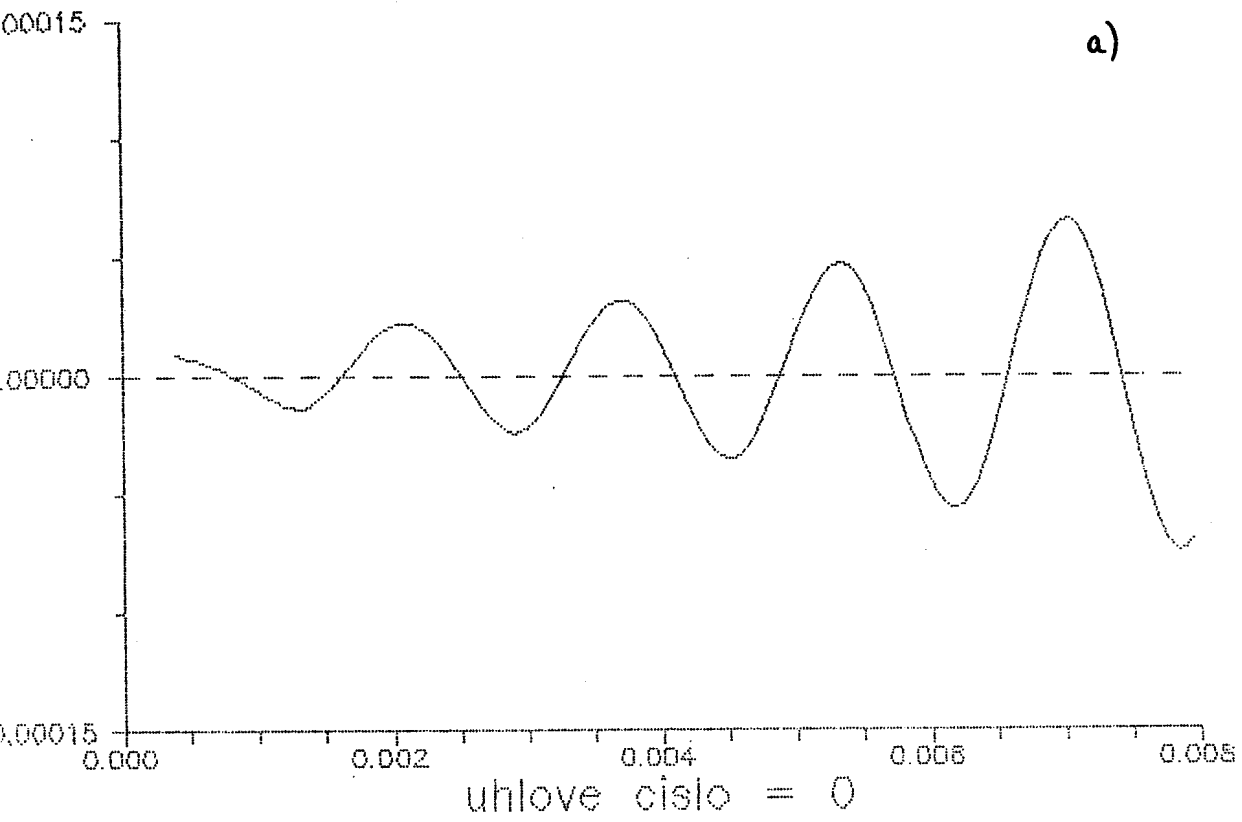
Obr.2.3. Vlastní funkce $U(r)$ sferoidálních kmitů,
 x-osa poloměr r , y-osa normovaná $U(r)$ [km]



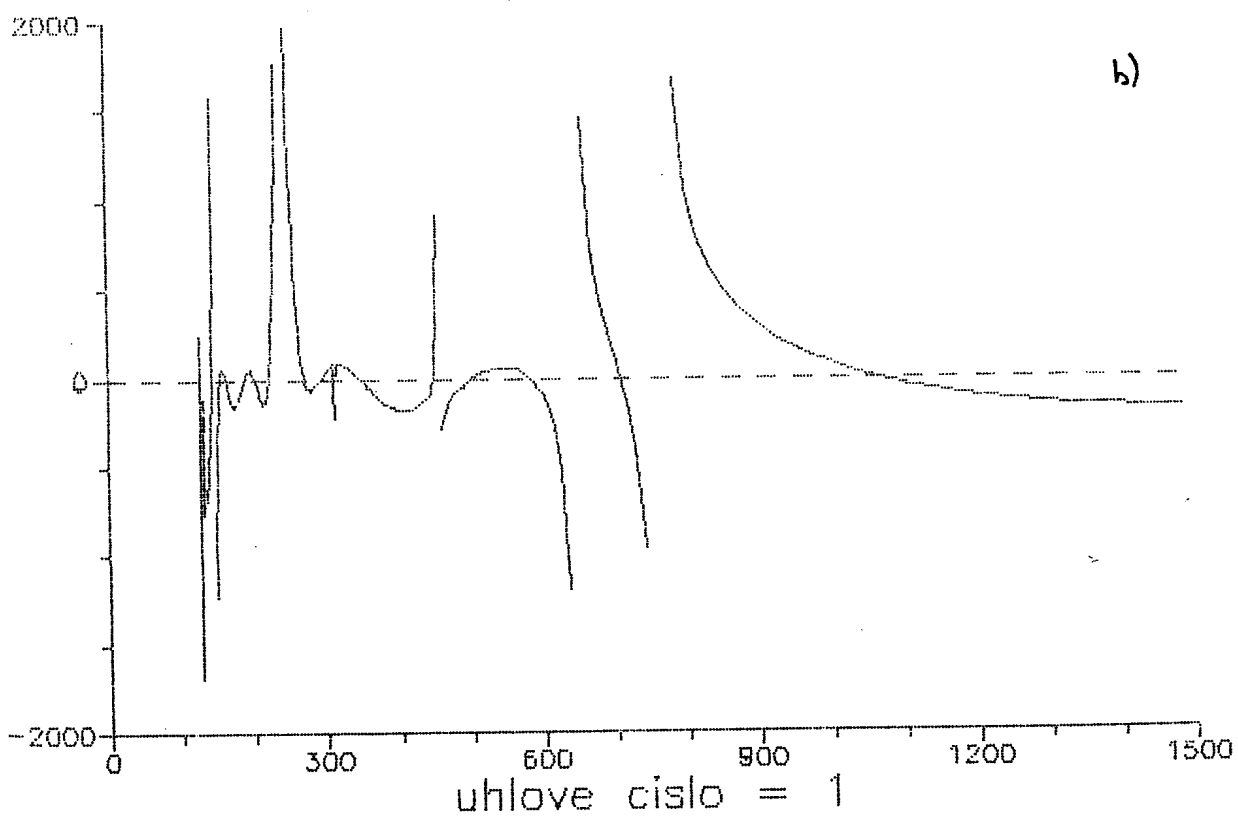
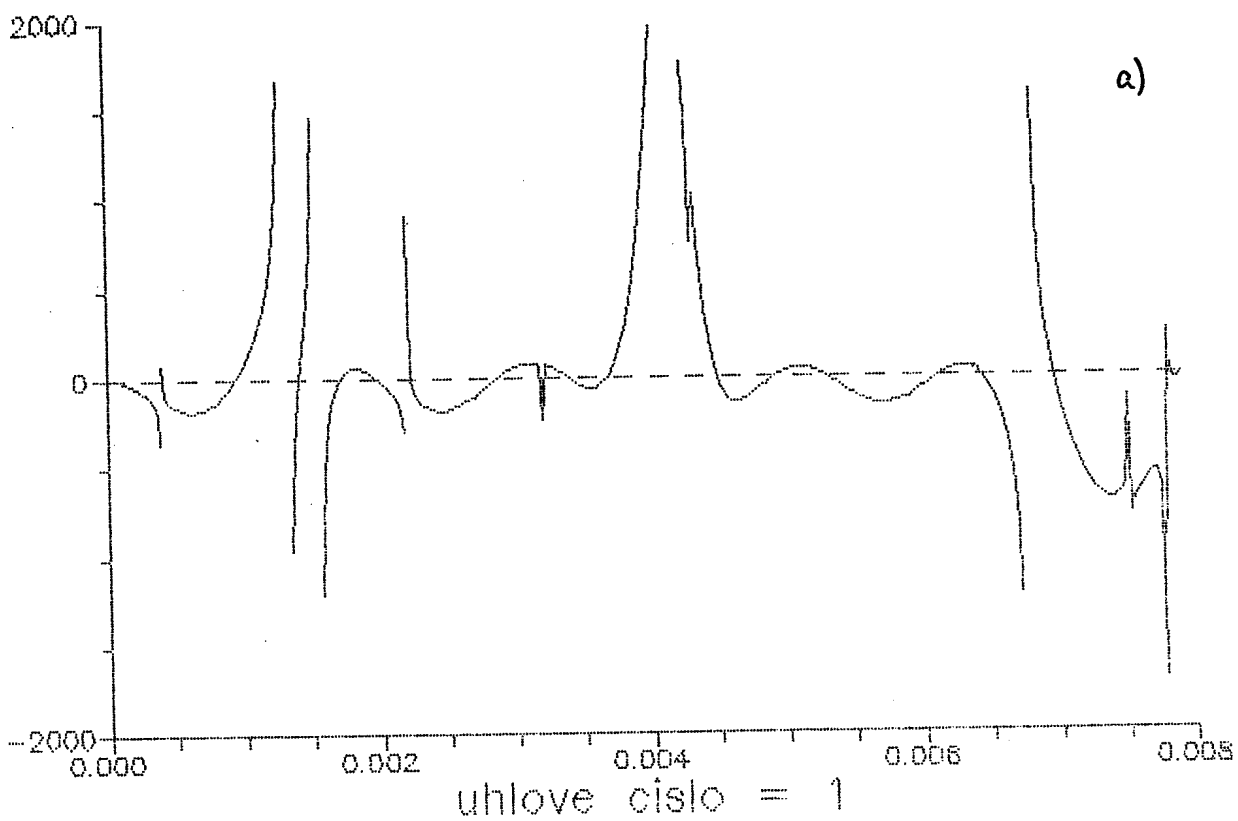
Obr.2.4. Vlastní funkce $W(r)$ toroidálních kmitů,
 x-osa poloměr r , y-osa normovaná $W(r)$ [km]



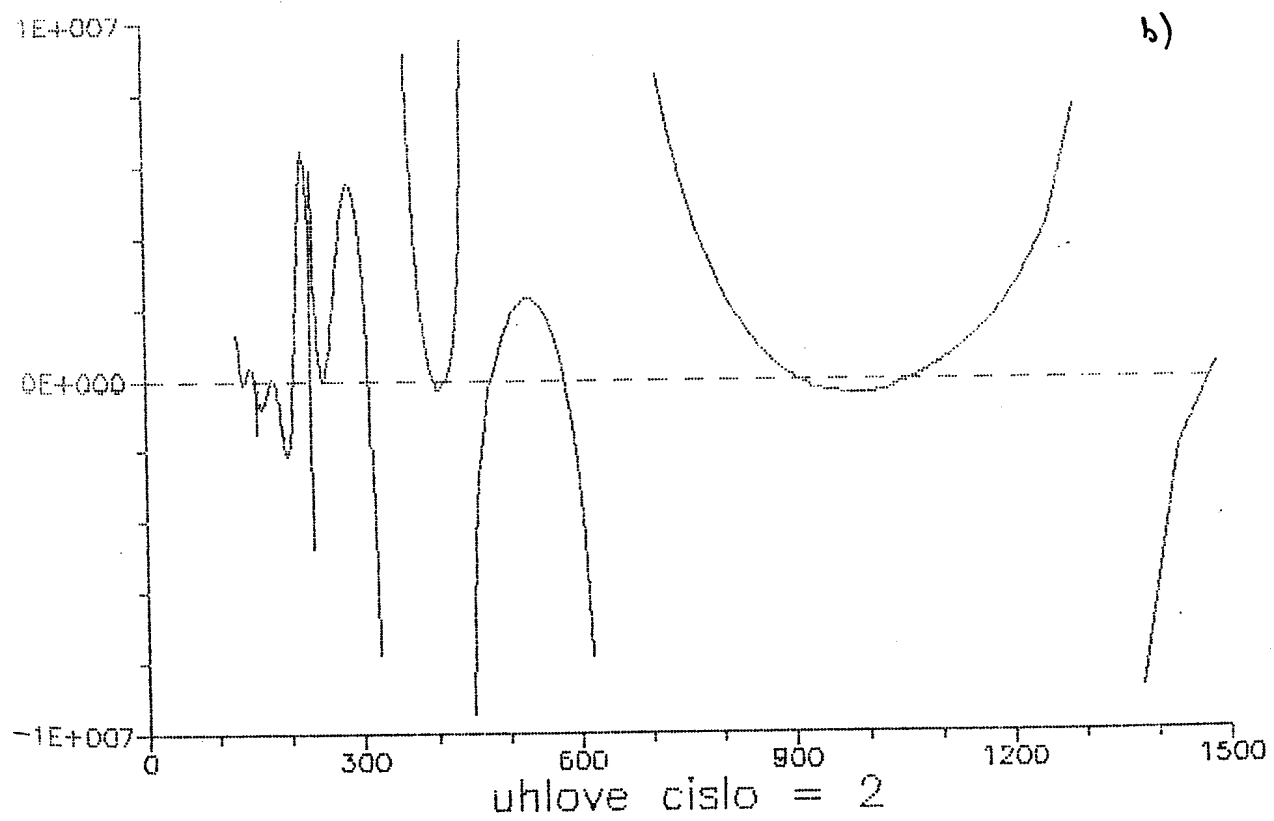
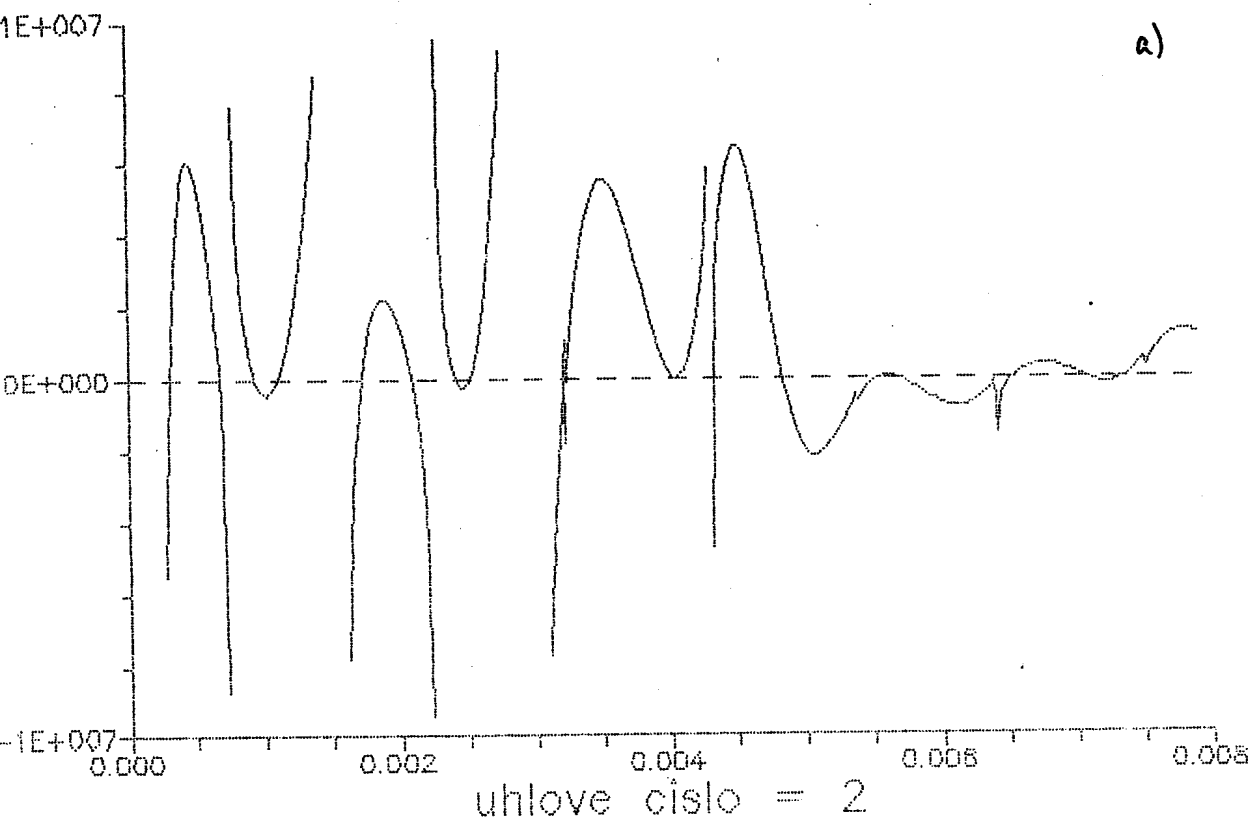
Obr.2.5. Vlastní funkce $U(r), V(r)$ sféroidálních kmitů,
 x-osa poloměr r , y-osa normované $U(r), V(r)$ [km]



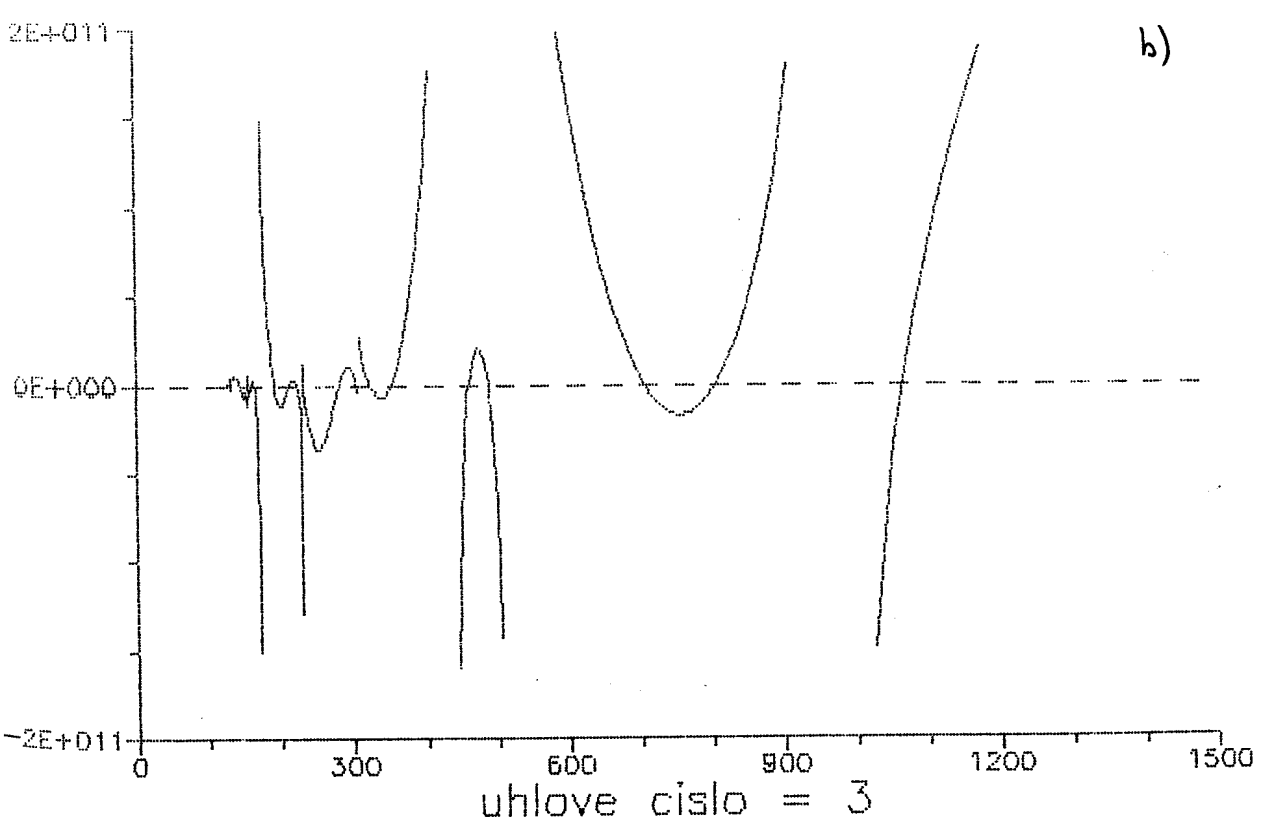
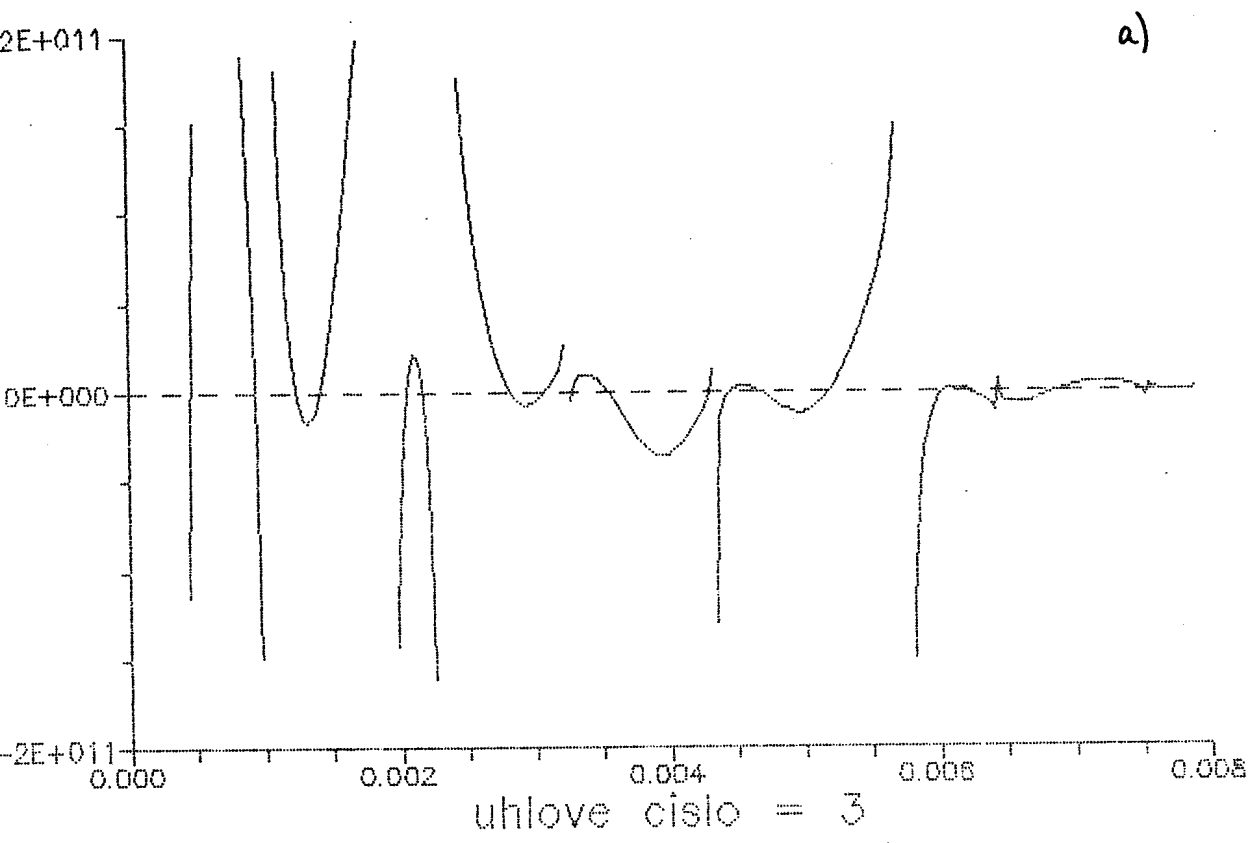
Obr.2.6. Determinant (2.13) pro radiální módy,
 x-osa a) frekvence [Hz], b) perioda [s],
 y-osa determinant [1]



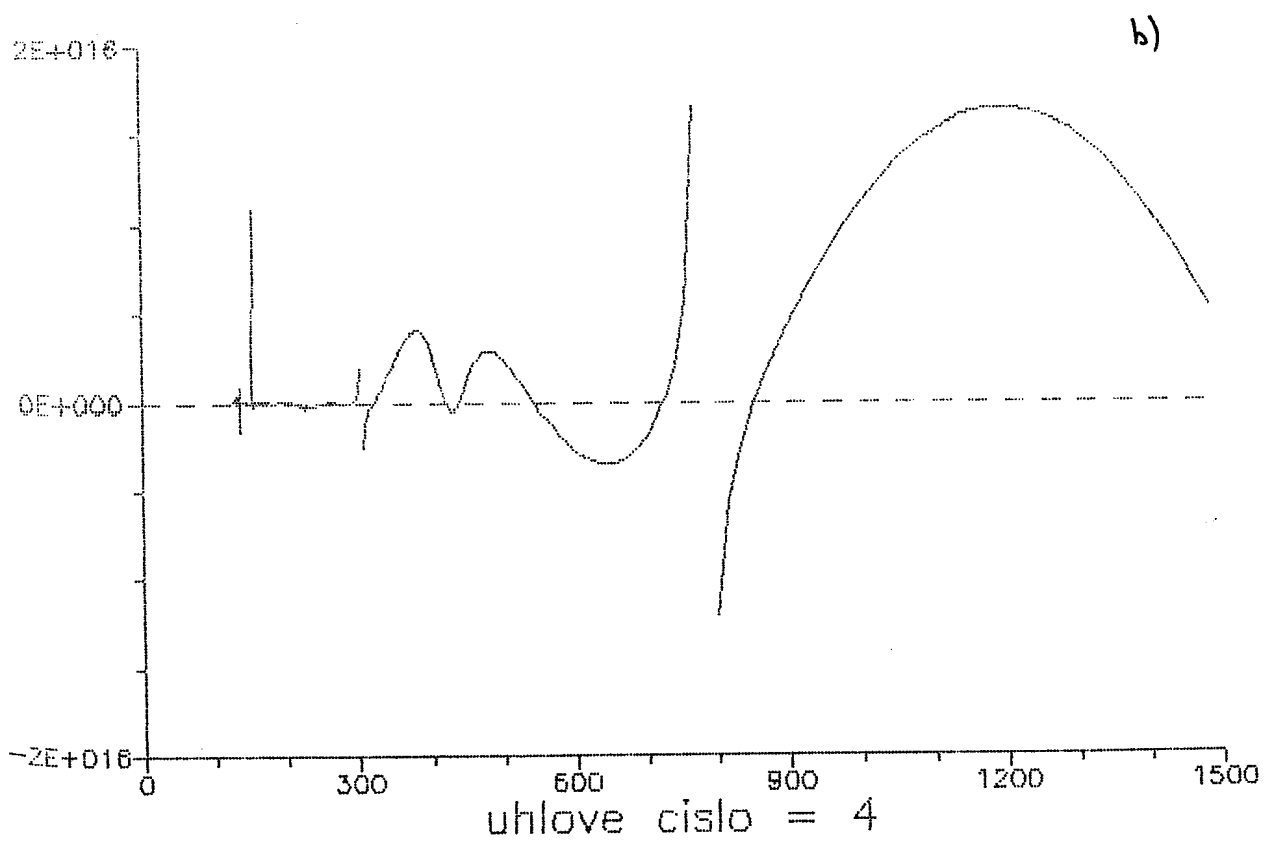
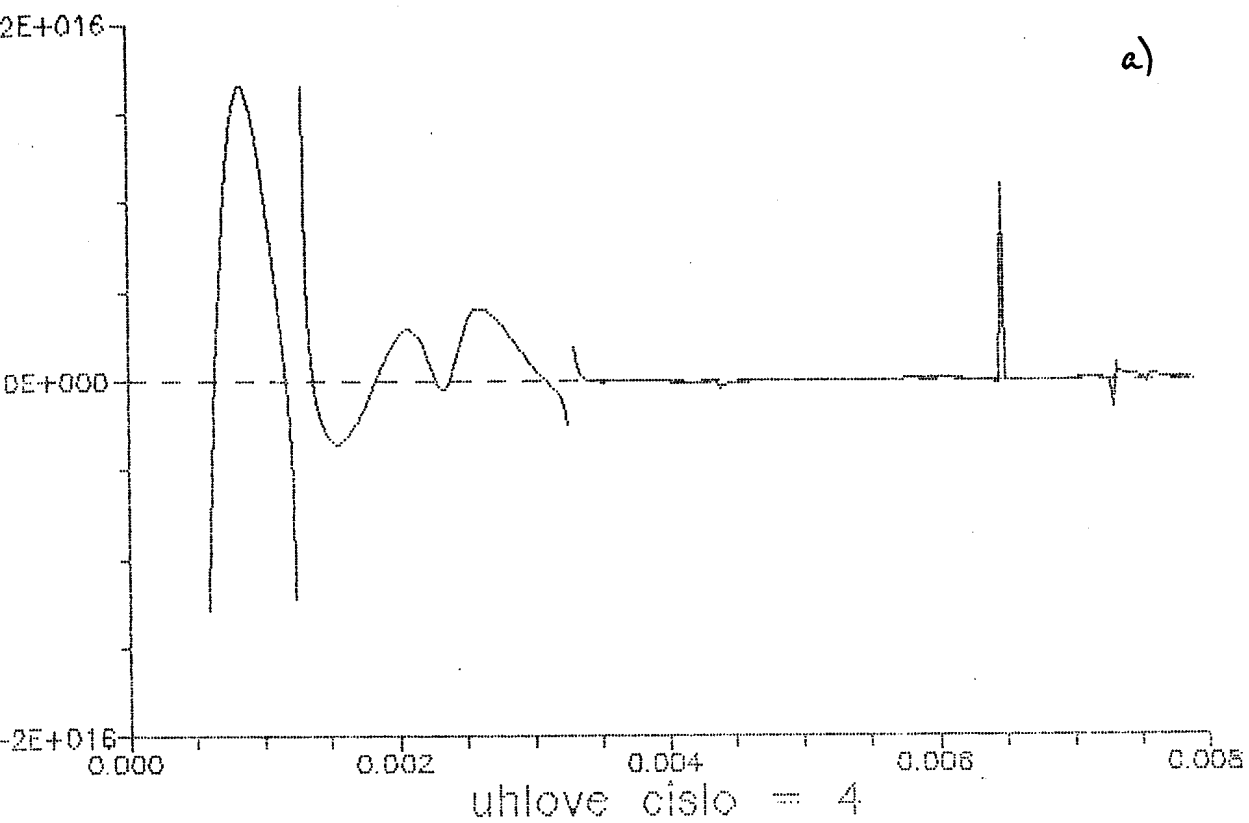
Obr.2.7. Determinant (2.13) pro sféroidální módy,
 x-osa a) frekvence [Hz], b) perioda [s],
 y-osa determinant [1]



Obr.2.8. Totéž jako obr.2.7.



Obr.2.9. Totéž jako obr.2.7.



Obr.2.10. Totéž jako obr.2.7.

3. VLASTNÍ KMITY MODELŮ LHREI - TEORIE

V dalších odstavcích budeme definovat modely LHREI a naznačíme výpočet frekvencí vlastních kmitů těchto modelů. Budeme se zabývat vlivem jednotlivých typů odchylek od sférické symetrie, speciálně rotace a s ní spojené elipticity, laterálních heterogenit elastických parametrů a hustoty, na tvar multipletů ve spektru LHREI.

V této kapitole budeme sledovat Dahlenovy práce (1968, 1974, 1976a, 1976b) a článek Woodhouse a Dahlen (1978).

3.1. Definice modelu LHREI

Modelem LHREI myslíme model v čase neměnný, laterálně heterogenní, rotující, elastický a izotropní. Odvozujeme jej od předem zvoleného modelu SNREI, definovaného třemi funkcemi poloměru $\sigma_0(r), \mu(r), \alpha(r)$ a N poloměry kulových ploch nespojitosti funkcí, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N = a$. Trojici hustota-modul torze-modul nestlačitelnosti σ_0, μ, α jsme vybrali ve shodě s Dahlenem; přepočty podle vzorce $\alpha = \lambda + 2/3\mu$ jsou triviální.

Předpokládejme nepřilíš rychlou konstantní rotaci kolem počátku souřadnic. Model LHREI pak definujeme zadáním vektoru rychlosti rotace Ω , funkcí $\sigma_0(r), \mu(r)$ a $\alpha(r)$ a neprotínajících se ploch nespojitosti $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N = \Sigma$, popsanych funkcemi $h_j(\Theta, \vartheta)$ prostřednictvím vztahů

$$(3.1) \quad r = a_j + h_j(\Theta, \vartheta), \quad j = 1, \dots, N.$$

Funkce $\sigma_0(r), \mu(r)$ a $\alpha(r)$ rozložíme na radiální části a laterálně nehomogenní perturbace, malé ve srovnání s částmi radiálními,

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_0(r) &= \sigma_0(r) + \delta\sigma_0(r) \\ \mu(r) &= \mu(r) + \delta\mu(r) \\ \alpha(r) &= \alpha(r) + \delta\alpha(r) . \end{aligned}$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat

$$(3.3) \quad \int_{\Omega} h_j(\Omega) d\Omega = 0 \quad \text{pro } r=a_1, \dots, a_N,$$

$$\int_{\Omega} \delta\sigma_0(r, \Omega) d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mu(r, \Omega) d\Omega = \int_{\Omega} \delta\alpha(r, \Omega) d\Omega = 0 \quad \text{pro } r \leq a .$$

Zde jsme použili Ω k označení prostorového úhlu (Θ, φ) ¹⁾. Podmínek (3.3) lze užít i v opačném směru; při jejich platnosti lze integrováním funkcí $\sigma_0(r), \mu(r), \alpha(r)$ modelu LHREI přes prostorový úhel Ω najít radiální funkce $\sigma_0(r), \mu(r), \alpha(r)$. Každému modelu LHREI je tak možné přiřadit právě jeden model SNREI, tzv. nejbližší model SNREI.

Model LHREI není selfkonzistentní. Laterální heterogenity hustoty a elastických parametrů jsou totiž v Zemi svázány s nenulovým smykovým napětím. Deviátor tenzoru předpětí, vyjadřující právě přítomnost takových napětí, a s ním související anizotropie však nejsou v izotropním LHREI zahrnuty. Není to principiální potíž; možné zobecnění (dále "obecný model Země"), zahrnující smyková napětí i anizotropii, popsali Woodhouse a Dahlen (1978). Zásadním problémem je ovšem dnešní takřka nulová znalost anizotropních vlastností reálné Země, zvláště ve větších hloubkách. Model LHREI tak zůstává stále jenom krokem, i když v současnosti jedním z posledních, na cestě ke komplexnímu popisu Země.

Pro další části je libovůle ve tvaru ploch nespojitosti Σ_j , $j=1, \dots, N$, příliš obecnou volbou. Dahlen (1974) navrhnul, za

1) Velké Ω používáme v dvojím významu - jako úhlovou rychlost rotace modelu, přesněji její velikost, a alternativně jako prostorový úhel. K záměně nemůže dojít.

předpokladu $h_j(\Theta, \varphi) \ll a_j$, předefinování funkcí $\sigma_0(r), \mu(r), \alpha(r)$ tak, aby jejich body nespojitosti ležely na plochách nespojitosti funkcí $\sigma_0(r), \mu(r), \alpha(r)$. Jeho postup je ekvivalentní náhradě topografií plošnými hustotami; o tomto přechodu se zmíníme podrobněji v kapitole 4.1.

Topografii a perturbace hustoty $\delta\sigma_0(r)$ a elastických parametrů $\delta\mu(r), \delta\alpha(r)$ je zvykem vyjadřovat ve tvaru harmonických rozvojtů, v důsledku (3.3) ve tvaru sum počínaje stupněm 1,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} h_j(\Theta, \varphi) &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=-s}^s (h_j)_{st} Y_{st}(\Theta, \varphi) \\ \delta\sigma_0(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_t \delta\sigma_{st} Y_{st}(\Theta, \varphi) \\ \delta\mu(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_t \delta\mu_{st} Y_{st}(\Theta, \varphi) \\ \delta\alpha(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_t \delta\alpha_{st} Y_{st}(\Theta, \varphi) ; \end{aligned}$$

připomeňme, že $Y_{st}(\Theta, \varphi)$ jsou sférické funkce, zavedené podle (M4.35).

Je známo, že elipticita reálné Země je velmi blízká elipticitě konstantně rotujícího tělesa v hydrostatické rovnováze. Tato okolnost vede k obvyklému rozkladu perturbací (3.4) na dvě skupiny.

Za prvé, tzv. elipsoidální, hydrostatické perturbace jsou svázány právě s konstantní rotací modelu SNREI při zachování hydrostatické rovnováhy. Tyto perturbace lze jednoznačně určit, užijeme-li výsledků Clairautovy hydrostatické teorie (Jeffreys 1970). Ta umožňuje vypočítat průběh hydrostatické elipticity $\epsilon(r)$ ploch konstantní hustoty $\sigma_0(r)$ se středním poloměrem r (viz Pozn.). Označíme-li elipsoidální perturbace indexem e , můžeme citovat, že

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad h_j^e(\Theta) &= -4/3 \sqrt{\pi/5} a_j \epsilon(a_j) Y_{20}(\Theta, \vartheta) \\
 \delta\sigma_0^e(r, \Theta) &= 4/3 \sqrt{\pi/5} r \epsilon(r) d\sigma_0/dr Y_{20}(\Theta, \vartheta) \\
 \delta\mu^e(r, \Theta) &= 4/3 \sqrt{\pi/5} r \epsilon(r) d\mu/dr Y_{20}(\Theta, \vartheta) \\
 \delta z^e(r, \Theta) &= 4/3 \sqrt{\pi/5} r \epsilon(r) dz/dr Y_{20}(\Theta, \vartheta) .
 \end{aligned}$$

Elipsoidální perturbace přispívají tedy jenom ke členu "dva-nula" rozkladu perturbací (3.4).

Druhou, pro oko geofyzika zajímavější skupinu perturbací nazýváme laterálními heterogenitami. Chápeme tedy laterální heterogenity hustoty $\delta\sigma_0^h(r)$ a elastických parametrů $\delta\mu^h(r), \delta z^h(r)$ jako perturbace na rotující, čistě hydrostatické, elipsoidální konfiguraci.

Zopakujme nakonec úplný tvar rozkladu definičních funkcí modelu LHREI. V rozkladu

$$(3.6) \quad m(r; \Omega) = m_0(r) + \delta m^e(r; \Omega; h_j) + \delta m^h(r; h_j)$$

značí každý člen trojici hustota-modul torze-modul nestlačitelnosti; na levé straně stojí kompletní vyjádření modelu LHREI, na pravé straně postupně výrazy pro nejbližší model SNREI, perturbace vlivem rotace a laterální heterogenity.

Pozn. Rovnice, odvozená Clairautem roku 1743, pro elipticitu $\epsilon(r)$ ekvipotenciální (a zároveň "ekvihustotní") plochy Σ_{σ_f} sféroidu, rotujícího při zachování hydrostatické rovnováhy, zní

$$d^2\epsilon/dr^2 + 6\sigma/(\sigma_s r) d\epsilon/dr - 6/r^2 (1-\sigma/\sigma_s) \epsilon = 0 ,$$

kde r je střední poloměr plochy Σ_{σ_f} , $\sigma(r)$ odpovídající hustota a σ_s střední hustota sféroidu s hranicí Σ_{σ_f} .

3.2. Rayleighův variační princip

V následující části uvedeme lagrangián obecného modelu Země a použijeme jej, s pomocí Rayleighova variačního principu, k získání integrálního vyjádření pro frekvence rozštěpeného multi-pletu. Budeme uvažovat jen izolované multiplety, tzn. omezíme se na případ, kdy každý kmit LHREI je odvozen právě od jednoho kmitu SNREI. Teorie spřažení vlastních kmitů je přirozeně náročnější.

Pro obecný model Země lze zavést lagrangián (viz kap.3.1) $L(\omega, u, \vartheta_1)$ jako součet objemového a plošného integrálu

$$(3.7) \quad L(\omega, u, \vartheta_1) = \int_V L(y_i, y_{i,j}) dV + \int_{\Sigma} [M(y_i, y_{i,j})]_{\pm} d\Sigma,$$

kde funkcemi y_i , $i=1, \dots, 8$ zkráceně značíme složky posunutí u_i , $i=1, 2, 3$, v kartézské bázi \underline{x}_i , přírůstek potenciálu ϑ_1 a jejich komplexně sdružené protějšky u_i^* a ϑ_1^* . Obvyklým způsobem značíme derivace, $f_{,j} \equiv \underline{x}_j \cdot \nabla f$, $g_{,j} \equiv \underline{x}_j \cdot \nabla_{\underline{t}} g$, $\nabla_{\underline{t}} = \nabla - \underline{n} (\underline{n} \cdot \nabla)$, a znaméním $[.]_{\pm}$ velikost skoku veličiny na ploše Σ . Explicitní tvar objemové hustoty lagrangiánu $L(y_i, y_{i,j})$ je

$$(3.8) \quad L = \sigma_0 (-\omega^2 u_i u_i^* + 2i\omega \epsilon_{ijk} \Omega_i u_j u_k^* + u_i \vartheta_{1,i}^* + u_i^* \vartheta_{1,i} + u_i u_j^* \Phi_{0,ij}) + (4\pi G)^{-1} \vartheta_{1,i} \vartheta_{1,i}^* + \Lambda_{ijkl} u_{i,j} u_{l,k}^*.$$

Plošnou hustotu $M(y_i, y_{i,j})$ nebudeme teď ani později vypisovat, neovlivní totiž nijak zkoumaný příspěvek objemových hustot ke štěpení vlastních módů. Pro úplnost, Ω_i je složka vektoru rychlosti rotace, Φ_0 je tíhový potenciál (viz text před rovnicí (2.4)) a Λ_{ijkl} , obecně viz (M2.34, M2.35), spojuje přírůstek tenzoru napětí s gradientem posunutí.

Rayleighův variační princip zprostředkovává - v našem případě - ekvivalenci mezi lagrangiánem $L(\omega, u, \vartheta_1)$, pohybovými rovnicemi a podmínkami na rozhraních. Můžeme jej formulovat následujícím způsobem; lagrangián $L(\omega, u, \vartheta_1)$ je stacionární při virtuálním posunutí δu , $\delta \vartheta_1$ právě tehdy, jsou-li u , ϑ_1 vlastní funkce

a ω úhlová frekvence vlastního kmitu. Variace integrálů v (3.7) vzhledem k $y_l, y_{l,j}$

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \delta L &= \int_V \{ (\partial L / \partial y_l) \delta y_l + (\partial L / \partial y_{l,j}) \delta y_{l,j} \} dV + \int_{\Sigma} [\dots]_{\pm} d\Sigma = \\
 &= \int_V \{ (\partial L / \partial y_l) - (\partial L / \partial y_{l,j})_{,j} \} \delta y_l dV - \\
 &\quad - \int_{\Sigma} [n_j (\partial L / \partial y_{l,j}) \delta y_l + \dots]_{\pm} d\Sigma
 \end{aligned}$$

vede totiž bezprostředně k integrálům, v nichž pod integrálním znaméním stojí pohybové rovnice (2.5), (2.6) a okrajové podmínky (M3.32). Požadavek stacionarity $L(\omega, u, \vartheta_1)$ tedy implikuje pohybové rovnice a podmínky na rozhraní a naopak.

Lagrangián $L(\omega, u, \vartheta_1)$ je kvadratickým funkcionálem u a ϑ_1 . Nic nebrání libovolnému zmenšování absolutní velikosti funkcí u, ϑ_1 a spolu s nimi i $L(\omega, u, \vartheta_1)$. Je zřejmé (a důležité), že stacionární hodnotou $L(\omega, u, \vartheta_1)$ je nula.

Lagrangián $L(\omega, u, \vartheta_1)$ je ovšem i funkcí parametrů modelu $p_i, i=1, \dots, i_{par}, p_i \equiv \Omega_i, \sigma_0, \Phi_{0,lj}, \Lambda_{l,jkl}$ ad. Vyznačme jejich vliv zápisem $L(\omega, u, \vartheta_1, M)$. Omezme se pro chvíli na singlet o frekvenci ω a zahrňme ji mezi parametry p_i . Pak lze (3.7) zapsat po novém

$$(3.10) \quad L(\omega, u, \vartheta_1, M) = \int_V L(y_l, y_{l,j}, p_i) dV + \int_{\Sigma} [M(y_l, y_{l,j}, p_i)]_{\pm} d\Sigma.$$

Uvažme nyní, se zřetelem na přechod od SNREI k LHREI, malé perturbace δM modelu M . Ty s sebou nesou přirozeně i změnu frekvence $\delta \omega$ a vlastních funkcí $\delta u, \delta \vartheta_1$ singletu. Lagrangián modelu nabude tvaru $L(\omega + \delta \omega, u + \delta u, \vartheta_1 + \delta \vartheta_1, M + \delta M)$. Je ovšem, podle předchozího odstavce, $L(\omega, u, \vartheta_1, M) = L(\omega + \delta \omega, u + \delta u, \vartheta_1 + \delta \vartheta_1, M + \delta M) = 0$, a tedy také variace vzhledem k $y_l, y_{l,j}$ i p_i

$$(3.11) \quad \delta L = 0 = \int_{V_J} \{ (\partial L / \partial y_i) \delta y_i + (\partial L / \partial y_{i,j}) \delta y_{i,j} + (\partial L / \partial p_i) \delta p_i \} dV + \\ + \int_{\Sigma} [\dots] \pm d\Sigma .$$

První dva členy z objemového integrálu vymizí v důsledku pohybových rovnic, podobně jako některé členy z plošného integrálu v důsledku podmínek na rozhraní. My - stále se zřetelem na náš LHREI - se spokojíme s posledním členem objemového integrálu

$$(3.12) \quad \int_{V_J} (\partial L / \partial p_i) \delta p_i dV = 0 = \int_{V_J} \{ (\partial L / \partial \omega) \delta \omega + (\partial L / \partial \Omega_i) \delta \Omega_i + \\ + (\partial L / \partial \sigma_0) \delta \sigma_0 + (\partial L / \partial \Phi_{0,ij}) \delta \Phi_{0,ij} + \\ + (\partial L / \partial \Lambda_{ijkl}) \delta \Lambda_{ijkl} \} dV$$

a rozepíšeme ho v plné kráse

$$(3.13) \quad \delta \omega \int_{V_J} \{ 2\omega \sigma_0 u_i u_i^* - 2i \sigma_0 \epsilon_{ijk} \Omega_i u_j u_k^* \} dV = \\ = \int_{V_J} \{ 2i\omega \sigma_0 \epsilon_{ijk} \delta \Omega_i u_j u_k^* + \delta \sigma_0 (-\omega^2 u_i u_i^* + u_i u_j^* \Phi_{0,ij} + \\ + u_i \vartheta_{1,i}^* + u_i^* \vartheta_{1,i}) + \sigma_0 u_i u_j^* \delta \Phi_{0,ij} + \delta \Lambda_{ijkl} u_{j,i} u_{l,k}^* \} dV.$$

Rovnice (3.13) svazuje frekvenční perturbaci $\delta \omega$ singletu s výrazy, složenými z neperturovaných vlastních funkcí u , ϑ_1 a perturbací parametrů modelu $\delta \Omega$, $\delta \sigma_0$, $\delta \Phi_0$ a $\delta \Lambda$.

3.3. Perturbační matice a výpočet frekvencí multipletu pro LHREI

Pro speciální případ, kdy neperturovaným modelem je SNREI, ukážeme cestu od rovnice (3.13) k perturbační matici, která řeší problém rozštěpení degenerovaného multipletu LHREI. Vypíšeme tu část matice, která zahrnuje vliv rotace, elipticity a laterálních nehomogenit elastických parametrů, hustoty a gravitačního potenciálu.

Shrňme potřebná vyjádření a rovnice. Pro SNREI je rychlost

rotace i rotační potenciál $\Omega = 0$, $\Psi = 0$, hustota $\sigma_0(\mathbf{r}) = \sigma_0(r)$, tíhový potenciál $\Phi_0(\mathbf{r}) = \varphi_0(r)$ a tenzor

$\Lambda_{ijkl} = C_{ijkl} - p_0 (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})$, kde C_{ijkl} je "Hookeův tenzor", $C_{ijkl} = (\kappa - 2/3 \mu)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, μ, κ elastic-

ké moduly a p_0 tlak. Perturbace LHREI lze psát $\delta\Omega = \Omega$,

$\delta\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r})$, $\delta\sigma_0(\mathbf{r})$, $\delta\Phi_0(\mathbf{r}) = \delta\varphi_0(\mathbf{r}) + \Psi(\mathbf{r})$

a $\delta\Lambda_{ijkl} = \delta C_{ijkl} - \delta p_0 (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})$,

$\delta C_{ijkl} = (\delta\kappa - 2/3 \delta\mu)\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

Rovnice rovnováhy a Poissonova rovnice nabudou v SNREI tvaru

$$(3.14) \quad \partial_r p_0 + \sigma_0 g_0 = 0, \quad \text{kde } g_0 = \partial_r \varphi_0,$$

$$\partial_r g_0 + 2g_0/r = 4\pi G \sigma_0$$

a v LHREI po úpravě pro perturbace

$$(3.15) \quad \delta\sigma_0 g_0 \Gamma + \sigma_0 \nabla(\delta\varphi_0 + \Psi) = -\nabla\delta p_0$$

$$\nabla^2 \delta\varphi_0 = 4\pi G \delta\sigma_0.$$

Necháme teď stranou rotaci (položíme $\Omega = 0$, $\Psi = 0$ i v LHREI)

a budeme se zabývat jen laterálními nehomogenitami hustoty.

Rovnici (3.13) přepíšeme na invariantní tvar,

$$(3.16) \quad 2\omega \delta\omega \int_V \sigma_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* dV = -\omega^2 \int_V \{ \delta\sigma_0 [-\omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* + \\ + (4\pi G \sigma_0 - 2g_0/r) u_r u_r^* + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_1^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \varphi_1] + \\ + \sigma_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \nabla \delta\Phi_0 \cdot \mathbf{u}^* + \\ + [\delta\kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u}^* + 2\delta\mu \Gamma^* : \Gamma - \delta p_0 (\nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u}^* - (\nabla \mathbf{u}^*)^T : \nabla \mathbf{u})] \} dV.$$

Použili jsme (3.14), nově jsme zavedli tenzor $\Gamma = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T -$

$- 1/3 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}]$ a zkrátili $\Gamma^* : \Gamma \equiv \Gamma_{ij}^* \Gamma_{ij}$.

V dalším budeme \mathbf{u} , φ_1 chápat už jako vlastní funkce degenerovaného multipletu. Prakticky to znamená, že je budeme vyjadřovat jako kombinaci bázevých funkcí u_m , φ_{1m} ,

$$(3.17) \quad \mathbf{u} = \sum_{m'} a_{m'} \mathbf{u}_{m'} \quad , \quad \mathbf{u}^* = \sum_m b_m^* \mathbf{u}_m^* \quad ,$$

$$\varphi_1 = \sum_{m'} a_{m'} \varphi_{1m'} \quad , \quad \varphi_1^* = \sum_m b_m^* \varphi_{1m}^* \quad .$$

Funkce \mathbf{u}_m , φ_{1m} vybereme pro toroidální módy ve shodě s (2.7),

$$(3.18) \quad \mathbf{u}_m = n W_l [-\mathbf{r} \times \nabla_1 Y_{lm}]$$

$$\varphi_{1m} = 0$$

a pro sféroidální módy podle (2.10), (2.11)

$$(3.19) \quad \mathbf{u}_m = n U_l Y_{lm} \mathbf{r} + n V_l \nabla_1 Y_{lm}$$

$$\varphi_{1m} = n \varphi_{1l} Y_{lm} \quad ;$$

symbolem ∇_1 budeme značit horizontální část gradientu ve sférických souřadnicích, $\nabla = \mathbf{r} \partial_r + 1/r \nabla_1$,

$\nabla_1 = \partial \theta / \partial \theta + 1/\sin \theta \partial \phi / \partial \phi$. Indexy vlastních funkcí n , l nebudeme pro lepší čitelnost vypisovat.

Funkce (3.17) teď dosadíme do (3.16);

$$(3.20) \quad 2\omega \delta\omega \sum_{m'} \sum_m a_{m'} b_m^* \int_V \sigma_0 \mathbf{u}_{m'} \cdot \mathbf{u}_m^* dV = \sum_{m'} \sum_m a_{m'} b_m^* 2\omega H_{mm'} \quad ,$$

výraz $2\omega H_{mm'}$ odpovídá pravé straně (3.16), nahradíme-li u bázovou funkcí $\mathbf{u}_{m'}$ a \mathbf{u}^* funkcí \mathbf{u}_m^* . Volíme-li normovací podmínku ve tvaru

$$(3.21) \quad \int_V \sigma_0 \mathbf{u}_{m'} \cdot \mathbf{u}_m^* dV = N \delta_{mm'} \quad , \quad N = 1,$$

rovnice (3.20) se zredukuje na

$$(3.22) \quad 2\omega \sum_m b_m^* \left(\sum_{m'} H_{mm'} a_{m'} - \delta\omega a_m \right) = 0 \quad .$$

Konstanty b_m^* byly vybrány libovolně, tedy

$$(3.23) \quad \sum_{m'} H_{mm'} a_{m'} = \delta\omega a_m \quad .$$

Matici $H_{mm'}$ nazveme perturbační maticí. Z (3.23) plyne, že perturbace $\delta\omega$ frekvencí vlastních kmitů jsou vlastními čísly perturbační matice $H_{mm'}$ a koeficienty a_m rozkladu vlastních funkcí \mathbf{u} do bázových funkcí jsou složkami příslušných vlastních vektorů.

Zbývá ukázat, kdy funkce (3.18), (3.19) splňují (3.21), a rozepsat invariantní vyjádření $H_{mm'}$, tj. dosadit do pravé strany

(3.16) harmonické rozvoje perturbací (3.4), báze funkce (3.18), (3.19), připravit si spoustu papíru a upravovat. My zde dopočteme jen některé členy. Především však chceme uvést čtyři integrály sférických funkcí, jejichž znalost je při výpočtech nezbytná.

To uděláme hned. Použijeme k tomu harmonický rozvoj součinu gradientů "ypsilonek"

$$(3.24) \quad \nabla_1 Y_{l_1 m_1} \cdot \nabla_1 Y_{l_2 m_2} = \\ = \partial Y_{l_1 m_1} / \partial \theta \partial Y_{l_2 m_2} / \partial \theta + 1 / \sin^2 \theta \partial Y_{l_1 m_1} / \partial \varphi \partial Y_{l_2 m_2} / \partial \varphi = \\ = \frac{1}{2} \sum_{l, m} [l_1(l_1+1) + l_2(l_2+1) - l(l+1)] Q^{l, m_1, m_2, m} Y_{l, m},$$

kde $Q^{l, m_1, m_2, m} = \sqrt{[(2l_1+1)(2l_2+1) / (4\pi(2l+1))]} \cdot$

$$C^{l, 0, l_1, 0, l_2, 0} C^{l, m_1, m_2, m}$$

a $C^{l, m_1, m_2, m}$ jsou Clebschovy-Gordanovy koeficienty (C-G koeficienty). Z ortonormality $Y_{l, m}$, převodního vztahu

$Y_{l, -m} = (-1)^m Y_{l, m}^*$ a rozvoje (3.24) plynou následující vzorce;

$$(3.25) \quad \int_{\Omega} \pi^1_{mm'} d\Omega \equiv \int_{\Omega} Y_{l, m'} Y_{l, m}^* d\Omega = \delta_{mm'}, \\ \int_{\Omega} \pi^2_{mm'} d\Omega \equiv \int_{\Omega} \nabla_1 Y_{l, m'} \cdot \nabla_1 Y_{l, m}^* d\Omega = \\ = (-1)^m \sqrt{4\pi} l(l+1) Q^{0, 0, l, m', l-m} = l(l+1) \delta_{mm'}, \\ \int_{\Omega} Y_{s, t} \pi^1_{mm'} d\Omega = (-1)^{m+t} Q^{s-t, l, m', l-m} \equiv \gamma^s_{mm'} \delta_{l, m-m'}, \\ \int_{\Omega} Y_{s, t} \pi^2_{mm'} d\Omega = (-1)^{m+t} (l(l+1) - \frac{1}{2}s(s+1)) Q^{s-t, l, m', l-m} = \\ = \gamma^s_{mm'} (l(l+1) - \frac{1}{2}s(s+1)) \delta_{l, m-m'}.$$

Vypíšeme pro úplnost, že

$$(3.26) \quad \gamma^s_{mm'} \equiv \int_{\Omega} Y_{s, m-m'} Y_{l, m'} Y_{l, m}^* d\Omega = \\ = (-1)^{m'} Q^{s, m', m, l, m', l-m} = \\ = (-1)^{m'} (2l+1) / \sqrt{4\pi(2s+1)} C^{s, 0, l, 0, 0} C^{s, m', m, l, m', l-m}.$$

Uvažme nyní toroidální báze funkce (3.18) a podmínku ortonormality (3.21),

$$(3.27) \int_V \sigma_0 u_{m'} \cdot u_m^* dV = \int_0^\alpha \int_\Omega \sigma_0 W^2 (-\mathbf{E} \times \nabla_1 Y_{l m'}) \cdot (-\mathbf{E} \times \nabla_1 Y_{l m}^*) d\Omega r^2 dr = \\ = \int_0^\alpha \int_\Omega \sigma_0 W^2 \pi^2_{mm'} d\Omega r^2 dr = \delta_{mm'} \int_0^\alpha \sigma_0 l(l+1) W^2 r^2 dr .$$

Poslední integrál je podmínkou na funkci $W(r)$;

při $N = \int_0^\alpha \sigma_0 l(l+1) W^2 r^2 dr = 1$ jsou tedy funkce u_m (3.18) ortonormální.

Pravá strana z (3.16) dává pro toroidální módy

$$(3.28) \int_V \delta \sigma_0 (-\omega^2 u_{m'} \cdot u_m^*) dV = \int_0^\alpha \sum_{s \neq l} \delta \sigma_{st} (-\omega^2 W^2) \int_\Omega Y_{st} \pi^2_{mm'} d\Omega r^2 dr = \\ = \sum_s \gamma_s^{mm'} \int_0^\alpha \delta \sigma_{s, m-m'} [-(l(l+1) - \frac{1}{2}s(s+1)) \omega^2 W^2] r^2 dr ,$$

nenulové jsou ještě členy s $\delta\mu$, $\delta\alpha$.

Vypíšeme nyní matici $H_{mm'}$ kompletně; tím myslíme zahrnutí příspěvků od rotace, elipticity, nehomogenit elastických parametrů a hustoty. Od začátku jsme vypustili úvahy o topografiích, nebudeme tedy "topografické členy" vypisovat ani teď.

Prvky perturbační matice $H_{mm'}$ pro toroidální módy jsou dány výrazem

$$(3.29) \quad H_{mm'} = [m/\beta\Omega + \alpha\epsilon_h\omega (1 - 3m^2/(l(l+1)))] \delta_{mm'} + \\ + \sum_s \gamma_s^{mm'} \int_0^\alpha [\delta\mu_{s, m-m'} M_s + \delta\sigma_{s, m-m'} R_s] r^2 dr ,$$

kde $\beta = 1/(l(l+1))$ je tzv. Coriolisův parametr, α eliptický parametr a ϵ_h elipticita rotujícího modelu v hydrostatické rovnováze.

Jádra M_s , R_s jsou

$$(3.30) \quad 2\omega M_s = (l(l+1) - \frac{1}{2}s(s+1)) (\partial_r W - W/r)^2 + \\ + [l(l+1)(l(l+1)-2) - \frac{1}{2}s(s+1)(4l(l+1)-s(s+1)-2)] W^2/r^2 , \\ 2\omega R_s = -(l(l+1) - \frac{1}{2}s(s+1)) \omega^2 W^2 .$$

Součin $\alpha\epsilon_h\omega$ lze převést na integrál výrazů, složených z μ , σ_0 , W a $\partial_r W$; postup, čerpající z už zmíněné Clairautovy teorie, je popsán ve Woodhouse, Dahlen (1978).

Nalezneme nyní normovací podmínku na sféroidální vlastní funkce U, V. Dosadíme (3.19) do (3.21),

$$(3.31) \quad \int_V \sigma_0 \mathbf{u}_{m'} \cdot \mathbf{u}_{m'}^* dV = \int_0^a \sigma_0 (U^2 \int_{\Omega} \pi^1_{mm'} d\Omega + V^2 \int_{\Omega} \pi^2_{mm'} d\Omega) r^2 dr = \\ = \delta_{mm'} \int_0^a \sigma_0 (U^2 + 1(1+1)V^2) r^2 dr .$$

Přepíšeme ještě první tři členy z pravé strany (3.16);

$$(3.32) \quad \int_{\Omega} \delta\sigma_0 (-\omega^2 \mathbf{u}_{m'} \cdot \mathbf{u}_{m'}^*) dV = \\ = \int_0^a \sum_{s=t} \delta\sigma_{st} [-\omega^2 (U^2 \int_{\Omega} Y_{st} \pi^1_{mm'} d\Omega + V^2 \int_{\Omega} Y_{st} \pi^2_{mm'} d\Omega)] r^2 dr = \\ = \sum_s \gamma_s^{mm'} \int_0^a \delta\sigma_{s, m-m'} [-\omega^2 U^2 - (1(1+1) - \frac{1}{2}s(s+1))\omega^2 V^2] r^2 dr ,$$

$$(3.33) \quad \int_{\Omega} \delta\sigma_0 (4\pi G\sigma_0 - 2g_0/r) u_r u_r^* dV = \\ = \sum_s \gamma_s^{mm'} \int_0^a \delta\sigma_{s, m-m'} (4\pi G\sigma_0 - 2g_0/r) U^2 r^2 dr ,$$

$$(3.34) \quad \int_{\Omega} \delta\sigma_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \vartheta_1^* dV = \\ = \int_0^a \sum_{s=t} \delta\sigma_{st} (U\partial_r \vartheta_1 \int_{\Omega} Y_{st} \pi^1_{mm'} d\Omega + V\vartheta_1/r \int_{\Omega} Y_{st} \pi^2_{mm'} d\Omega) r^2 dr = \\ = \sum_s \gamma_s^{mm'} \int_0^a \delta\sigma_{s, m-m'} [U\partial_r \vartheta_1 + (1(1+1) - \frac{1}{2}s(s+1))V\vartheta_1/r] r^2 dr .$$

Výpočty s následujícími členy jsou už objemnější. Překročíme je proto až k výsledku.

Perturbační matice pro sféroidální módy má tvar

$$(3.35) \quad H_{mm'} = [m\beta\Omega + (\alpha\epsilon_h\omega + \alpha'\Omega^2/\omega) (1 - 3m^2/(1(1+1))) + \\ + 1/3 (1-1(1+1)\beta) \Omega^2/\omega] \delta_{mm'} + \\ + \sum_s \gamma_s^{mm'} \int_0^a [\delta\mu_{s, m-m'} M_s + \delta\alpha_{s, m-m'} K_s + \delta\sigma_{s, m-m'} R_s^{(1)} + \\ + \delta\vartheta_{s, m-m'} G_s^{(1)} + \partial_r \delta\vartheta_{s, m-m'} G_s^{(2)}] r^2 dr ,$$

kde $\beta = \int_0^a \sigma_0 (U^2 + 2UV) r^2 dr$ je opět Coriolisův parametr, pro návod k výpočtu $(\alpha\epsilon_h\omega + \alpha'\Omega^2/\omega)$ odkazujeme znovu na Woodhouse, Dahlen (1978). Jádra jsou dána výrazy

$$(3.36) \quad 2\omega M_s = 1/3 (2\partial_r U - F)^2 + (1(1+1) - \frac{1}{2}s(s+1)) (r\partial_r V - V + U)^2 / r^2 + \\ + [1(1+1)(1(1+1) - 2) - \frac{1}{2}s(s+1)(4(1+1) - s(s+1) - 2)] V^2 / r^2 , \\ 2\omega K_s = (\partial_r U + F)^2 ,$$

$$2\omega R_s^{(1)} = 8\pi G\sigma_0 U^2 - g_0 U(F + 2U/r) + 2U\partial_r \vartheta_1 - \omega^2 U^2 + \\ + (1(1+1) - \frac{1}{2}s(s+1)) (-\omega^2 V^2 + 2V\vartheta_1/r + g_0 UV/r) ,$$

$$2\omega G_s^{(1)} = \sigma_0 [s(s+1)U^2 / r^2 + \\ + \frac{1}{2}s(s+1) (U\partial_r V/r - V/r (\partial_r U + 2F - U/r))] ,$$

$$2\omega G_s^{(2)} = \sigma_0 [-2UF + \frac{1}{2}s(s+1)UV/r] ,$$

kde $F = (2U - 1(1+1)V)/r$.

Do třetice odkážeme na Woodhouse a Dahlena (1978) pro alternativní možnost vyjádření perturbační matice, a to bez potenciálových členů. Odpovídajícím způsobem je pak zkomplikován hustotní příspěvek, v kterém jsou obě "potenciálová" jádra, $G_s^{(1)}$ i $G_s^{(2)}$, ukryta.

Ukázali jsme postup k nalezení perturbační matice $H_{mm'}$, jejíž vlastní čísla udávají - pro daný multiplet - frekvenční odchylky módů LHREI od degenerovaného stavu v nejbližším SNREI. Rotace a hydrostatická elipticita přispívají pouze k diagonálním prvkům. Přitom samotná rotace ("model SREI"), tj. člen $m\beta\Omega \delta_{mm'}$, by multiplet štěpila zeemanovsky, tj. ekvidistantně a symetricky kolem "mateřské" frekvence, a samotná elipticita, člen úměrný $(1 - 3m^2/(1(1+1))) \delta_{mm'}$, by snímala degeneraci jen částečně. Perturbace elastických parametrů a hustoty už vedou k nenulovým nediagonálním prvkům perturbační matice a tvar štěpeného multipletu je poměrně libovolný. Z definice $\gamma_s^{mm'}$ (3.26) a z vlastností C-G koeficientů plyne, že k perturbační matici kmitu s úhlovým číslem l přispívají pouze sudé koeficienty rozvoje perturbací, stupně nejvýše $2l$. Absence lichých koeficientů perturbací

je důsledkem přiblížení izolovaného multipletu; v teorii spřažení vlastních módů liché členy rozvoju už svou roli hrají.

Gilbert (1971) upozornil na užitečnou vlastnost rozštěpených multipletů. Totiž průměrná frekvence multipletu je - s malou výhradou - rovna degenerované frekvenci nejbližšího SNREI. Jinými slovy - součet frekvenčních perturbací přes multiplet je nulový, nebo ještě jinak, stopa perturbační matice je nulová,

$$(3.37) \quad \text{Tr } H_{mm'} \equiv \sum_{m=-l}^l H_{mm} = 0 = \\ = \sum_m \left\{ mH^1 + (1-3m^2/(l(l+1))) H^2 + \sum_s \gamma_s^{mm} H_s^3 \right\} .$$

Pro toroidální módy odpovídá (3.37) matici (3.29) kompletně, v případě sféroidálních módů (3.35) s onou malou výhradou, chybí člen $[1/3 (1-l(l+1)\beta) \Omega^2/\omega] \delta_{mm'}$. Jde o příspěvek sférické části rotačního potenciálu (Dahlen 1968), který způsobuje malý posun průměrné frekvence multipletu. K důkazu (3.37) stačí integrální definice $\gamma_s^{mm'}$ (3.26), adiční teorém pro sférické funkce

$$(3.38) \quad \sum_{m=-l}^l Y_{lm} Y_{lm}^* = (2l+1) / (4\pi)$$

a předpoklad (3.3), tj. nulové členy $\delta\sigma_{00}$, $\delta\mu_{00}$ a δx_{00} . Poznatek nazval Gilbert diagonálním sumačním pravidlem. Jeho aplikace je běžná při hledání frekvencí vlastních kmitů SNREI. Obor sumace je ovšem v praxi volen zcela pragmaticky - sčítá se přes dostupné zdroje, průměrují se průměrné frekvence, odečtené z různých záznamů.

Na závěr připomeňme meze předložené teorie. Jde o perturbační teorii modelu LHREI pro izolovaný multiplet, prvního řádu v perturbacích modelu a ve frekvencích, nultého řádu ve vlastních funkcích módů. Přesto je - i v této podobě - v současnosti spíš na úrovni predikce. Je otázkou, nakolik je zatím mizivá rozliši-

telnost struktury multipletů problémem technickým a nakolik principiálním. Netroufáme si tvrdit, nakolik může být v naší záležitosti reálnou snaha technikou překlenout překážky, jako útlum, specifika zdroje buzení nebo proměny reálné Země v čase.

4. VLASTNÍ KMITY MODELŮ LHREI - PRAXE

V následující kapitole uvážíme dva konkrétní 3-D modely hustoty a jejich příspěvek ke štěpení vlastních kmitů PREM. Porovnáme je s příspěvkem od rotace a s ní spojené elipticity. Zamysleme se nad schopností štěpených vlastních kmitů vypovídat o struktuře vnitřních partií Země.

4.1. Hustotní modely, generující gravitační pole Země

Nyní nám jde o to, získat vhodný model laterálních nehomogenit hustoty. Účinnou metodou vytváření 3-D hustotních modelů je řešení obrácené úlohy pro gravitační pole Země. Možný přístup k jejímu řešení vypracovali Pěč a Martinec (1984). Předpokládá se znalost dobrého sféricky symetrického modelu, v němž je obsažena vydatná informace o reálné Zemi - její hmotnost, moment setrvačnosti, periody vlastních kmitů a hodochrony seismických vln. Dál se zadává sférický rozvoj vnějšího gravitačního potenciálu a rozvoje výšky topografií ploch nespojitosti radiální hustoty. Řešením soustavy lineárních rovnic pro koeficienty sférického rozvoje hustoty se získá 3-D model pláště, rozložený v reálných topografiích (s přesností danou použitými rozvoji) a generující vnější gravitační pole (použité členy jeho rozvoje). V jádře se v souladu s představami o něm ponechává původní sféricky symetrické rozložení.

Modely Martince a Pěče (1986, 1988) však nelze použít pro teorii štěpení, tak jak stojí v kap.3. Tyto modely jsou, jak jsme zdůraznili, definovány v reálných, tedy nikoliv v kulových topografiích, které teorie předpokládá. Její zobecnění by komplikovalo výrazy pro prvky perturbační matice, uvažme jen výskyt reál-

ných topografií místo konstantního poloměru v integračních mezích. Do vzorců by byly vtaženy další C-G koeficienty a již tak nenasytný výpočet by pohltit další sousto výpočetního času. Z druhé strany, formální předdefinování modelu na kulový tvar je příliš lehkomyšlné, okamžitě by znehodnotilo pracně udržovanou exaktnost předchozího odvození modelu.

Jsou přitom k dispozici 3-D modely, které - právě s ohledem na použití v praxi - kulové plochy nespojitosti zachovávají. Takové modely sestrojili Čadek a Matyska (1989, dál krátce Č&M). Jejich postup se nesnaží o výše zmíněnou exaktnost, nabízí místo toho podstatné ulehčení - soustava rovnic pro hustotní koeficienty se separuje podle stupně a řádu. Popíšeme konstrukci těchto modelů podrobněji.

Myšlenka se nemění; s apriorní znalostí sféricky symetrického modelu hustoty

$$(4.1) \quad \sigma_0 = \sigma_0(r), \quad 0 \leq r \leq a,$$

se odvozuje 3-D model $\sigma(r, \Omega)$ pláště, generující vnější gravitační pole a neovlivňující radiální gravitační pole $\varphi_0(r)$ v jádře,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \varphi(r, \Omega) &= GM/r \sum_{l=0}^{l_{\max}} (a/r)^l \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\Omega) && \text{vně,} \\ \varphi(r, \Omega) &= \varphi_0(r) && \text{v jádře,} \end{aligned}$$

kde GM je geocentrická gravitační konstanta a Stokesovy koeficienty A_{lm} jsou dány integrálem

$$(4.3) \quad A_{lm} = 4\pi / ((2l+1)M a^l) \int_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega) \int_0^{r_S(\Omega)} \sigma(r, \Omega) r^{l+2} dr d\Omega, \\ l=0, 1, \dots, l_{\max}, \quad m=-l, \dots, l.$$

Rovnicemi $r=r_S(\Omega)$, resp. $r=r_C(\Omega)$ jsou popsány reálné topografie povrchu Země, resp. CMB, $r_S=a$, resp. r_C značí střední poloměry obou topografií. Ke slíbenému kulovému tvaru diskontinuit se přejde tzv. nahrazením topografií plošnými hustotami. V našem případě jde o definici plošné hustoty

$$(4.4) \quad \tilde{\sigma}(r, \Omega) = \sigma_s \sum_{l,m} T_{l,m} Y_{l,m}(\Omega) \delta(r-r_s) + \\ + \sigma_c \sum_{l,m} C_{l,m} Y_{l,m}(\Omega) \delta(r-r_c),$$

kde σ_s , resp. σ_c jsou kladné hustotní skoky modelu (4.1) v $r=r_s$, resp. $r=r_c$, a o přechody $r_s(\Omega) \rightarrow r_s$, resp. $r_c \rightarrow r_c$ v integračních mezích v (4.3). O volbě koeficientů topografií $T_{l,m}$, resp. $C_{l,m}$ v praxi viz níže.

Úloha má, jak lze čekat, nekonečně mnoho řešení. Vzhledem k obsažné geofyzikální informaci, uložené v apriorním modelu (4.1), navrhuji Č&M řešení, které minimalizuje 3-D hustotní odchylky $\delta\sigma(r, \Omega)$ v L_2 -normě. Sansò ad. (1986) ukázali, že takové řešení lze vyjádřit ve tvaru

$$(4.5) \quad \delta\sigma(r, \Omega) = \sum_{l,m} [E_{l,m} (r/r_s)^l + I_{l,m} (r/r_c)^{-(l+1)}] Y_{l,m}(\Omega), \\ r_c \leq r \leq r_s.$$

Rovnice pro koeficienty $E_{l,m}$, $I_{l,m}$ plynou přímo z (4.3), provedeme-li zmíněnou substituci integračních mezí a dosadíme-li z (4.4) a (4.5) na místo $\sigma(r, \Omega)$ úplný výraz

$$(4.6) \quad \sigma(r, \Omega) = \sigma_0(r) + \tilde{\sigma}(r, \Omega) + \delta\sigma(r, \Omega).$$

Na první pohled je zřejmé, že rovnice systému (4.3) se separují podle stupně l a řádu m . Integrováním přes r se konečně získá

$$(4.7) \\ [1-(r_c/r_s)^{2l+3}] r_s^3 (2l+3)^{-1} E_{l,m} + [1-(r_c/r_s)^2] (r_c/r_s)^{l-2} r_c^3 I_{l,m} / 2 = \\ = (2l+1) (4\pi)^{-1} M A_{l,m} - \sigma_c (r_c/r_s)^l r_c^2 C_{l,m} - \sigma_s r_s^2 T_{l,m}, \quad l > 0, \\ [1-(r_c/r_s)^2] (r_c/r_s)^l r_s^2 E_{l,m} + [1-(r_c/r_s)^{2l-1}] r_c^2 I_{l,m} = \\ = -\sigma_c r_c C_{l,m} - \sigma_s (r_c/r_s)^l r_s T_{l,m}, \quad l > 0.$$

Podle (4.7) lze tedy konstruovat 3-D hustotní modely, v popsaném smyslu korespondující s vnějším gravitačním polem a respektující topografie povrchu a CMB. Je třeba mít na paměti omezení na nejvyšší stupeň rozvoje, plynoucí z přiblížení plošných hustot (Matyska 1988). To ovšem při dnešní znalosti reálných

rozvoju potenciálu a topografií není nijak významné.

Právě současný stav znalostí o vstupních datech metody limituje zřejmě nejvýrazněji důvěryhodnost výsledku. V modelech Č&M lze, díky separaci rovnic, "podezřelé" členy rozvoju jednoduše vynechat - ovšemže s důkladným zdůvodněním. Vznikají totiž problémy se sice malou, ale existující nekompatibilitou vstupních dat s metodou i mezi sebou navzájem.

Jako apriorní radiální model hustoty se volí přirozeně PREM. Už jen tato volba působí nepříjemnosti v teorii Pěče a Martince (1984). PREM totiž nesplňuje s potřebnou přesností tzv. rovnice kompatibility, zajišťující shodu hmotnosti a momentu setrvačnosti modelu s realitou; nesouhlas je významný zvláště v druhém případě, neboť reálná data, určující moment setrvačnosti Země, jsou známá s vysokou přesností (kolem 7 platných míst). Rovnice kompatibility pak nutí k započtení hustotního členu "nula-nula", tj. radiální opravy hustoty PREM. Každá taková jednostranná oprava, i když malá, nutně ovlivní fundamentální vlastnost PREM - při standardních metodách výpočtu produkovat "statisticky správně" data reálné Země, speciálně frekvence vlastních kmitů.

Č&M své koeficienty E_{00} , I_{00} prostě neuvažují. My uděláme totéž. Průzkumné výpočty, které jsme provedli s PREMem původním i opraveným, totiž ukázaly, že jakkoliv oprava PREM způsobí i několikasekundové systematické odchylky v periodách SNREI, tak nemá nijak výrazný vliv na rozdíl (nebo poměry) frekvence multipletu LHREI a frekvence SNREI. Jinými slovy, v důsledku oprav radiálního modelu se multiplety posouvají jako celek, bez znatelných změn své struktury. Omezíme se tedy na relativní hodnoty - podíly frekvence štěpené ku frekvenci degenerované. Tolik o "problému členu nula-nula".

Nejméně práce je s přejmutím rozvoje gravitačního potenciálu, např. Lerch ad. (1982). Gravitační pole je z družicových měření známé s vysokou přesností. Ovšem, díky svému převážně sféricky symetrickému charakteru nemá pro odvozené 3-D modely zdaleka takový význam, jak by se očekávalo. Č&M (1988) uvádějí, že rozdíly hustot 3-D modelů, odvozených s uvážením a bez uvážení neradiální části gravitačního pole, činí maximálně procenta hustot (4.5), tj. zlomky promile celkových hodnot.

Samotné 3-D hustoty jsou tedy z největší části "produktem topografií", kompenzují jejich vliv na vnější gravitační pole. To je obsaženo i v případném termínu "kompenzační hustoty" pro $\delta\sigma(r, \Omega)$.

Pokud jde o volbu topografie povrchu Země, k dispozici je 30-stupňový rozvoj Ščerbakova (1983). Jde o výšky (a hloubky) nad sféroidem, vnucuje se tedy nový "problém členu dva-nula". Budeme proto zde i dále předpokládat, že všechny použité topografie jsou definovány právě na sféroidu $r = a_j + h_j^e(\Omega)$, kde $h_j^e(\Omega)$ je dáno vztahem (3.5), a hustotní členy s E_{20} , I_{20} pokládat za čistou laterální nehomogenitu (jako v kap.3). Poznamenejme, že Č&M použili pro výpočet plošných hustot na povrchu Ščerbakovova data přepočtená na tzv. ekvivalentní pevnou topografii a uvážili kompenzaci pohoří větší hloubkou Moho (crustal thickening); T_{lm} jsou tedy koeficienty sférického rozvoje funkce $(\Sigma S_{lm} Y_{lm}(\Omega) + h) x(\Omega)$, kde $\Sigma S_{lm} Y_{lm}(\Omega)$ je ekvivalentní pevná topografie, h je průměrná hloubka "oceánů ekvivalentní pevné topografie" a $x(\Omega)$ je tzv. funkce oceánů, $x(\Omega) = 1$ na oceánech a $x(\Omega) = 0$ na kontinentech (Koppelt, Biegel 1989).

Otázka volby topografie CMB je zhavě současná a zcela otevřená. Bylo publikováno několik sférických rozvojtů, odvozených

z různých typů dat (Morelli, Dziewonski 1987 do 4. stupně a řádu, Doornbos, Hilton 1989 do 4. stupně a řádu). K jejich věrohodnosti se staví skepticky i jejich autoři. Např. Doornbos (1990, z doslechu) zkoumal souvislost amplitud topografie a "šumu". Zdá se, že čím méně je topografie překryta šumem, tím že je menší. Těšme se tedy na den, kdy se zjistí, že CMB je opět kulové.

Shrňme, že Č&M řešením rovnic (4.7) spočetli dva 3-D modely pláště. Odvodili je z PREMu a rozvojtů gravitačního potenciálu podle Lercha ad. (1982), topografie povrchu podle Ščerbakova (1983) a topografie CMB v prvním případě podle Morelli a Dziewonského (1987), v druhém podle Doornbose a Hiltona (1989). Na první model se budeme odvolávat zkratkou MD, na druhý DH. K dispozici jsme měli oba modely v rozvojtích do stupně a řádu 20; v tab.4.1 jsou vypsány koeficienty E_{jm} , I_{jm} do stupně a řádu 12. Poznamenejme, že naprogramování i výpočet modelu podle (4.7) je zcela bezprostřední; k jakémukoliv novému modelu třeba CMB můžeme snadno a rychle získat odpovídající kompenzační model hustoty.

4.2. Výpočet efektu rotace a modelů MD, DH

S užitím předložené teorie jsme provedli výpočty vlivu rotace, s ní spojené elipticity a vlivu laterálních nehomogenit hustoty na rozštěpení degenerovaných vlastních kmitů nerotujícího sféricky symetrického modelu Země.

Vyšli jsme z výsledků kap.2, speciálně ze znalosti frekvencí a vlastních funkcí PREMu. Uvážili jsme denní rotaci o úhlové rychlosti $\Omega = 2\pi/86164 \text{ s}^{-1}$. Laterální nehomogenity hustoty jsme reprezentovali pomocí 3-D hustotních modelů MD a DH (viz kap.4.1). Frekvence rozštěpených multipletů jsme hledali výpočtem vlastních čísel perturbační matice (3.29), resp. (3.35). Omezili

jsme se na úhlová čísla $l \leq 30$ v případě toroidálních kmitů, $l \leq 10$ v případě sféroidálních kmitů a na základní a první tóny v obou případech; přidali jsme řady ${}_nS_2$ a ${}_nS_3$ pro $n=0,1,\dots,10$.

Periody a frekvence štěpených kmitů jsou uvedeny v tab.4.2 (základní tóny ${}_0T_1$), tab.4.3 (tóny ${}_1T_1$), tab.4.4 (základní tóny ${}_0S_1$), tab.4.5 (tóny ${}_1S_1$), tab.4.6 (řada ${}_nS_2$) a tab.4.7 (řada ${}_nS_3$). Poměry frekvencí štěpené ku degenerované v závislosti na úhlovém čísle zachycují obr.4.1 pro toroidální kmity a obr.4.2 pro sféroidální kmity. V tabulkách 4.8 a 4.9 je zapsána a na obr.4.3 až 4.6 vynesena relativní šířka multipletu (viz kap.4.3) jako funkce úhlového čísla.

Získané výsledky diskutujeme v následující části.

4.3. Diskuse numerických výsledků

S obrázky 4.3 až 4.6 v ruce vidíme, že naše diskuse nemusí být nijak dlouhá. Upřesníme nejdřív, co jsme do obrázků této kapitoly vůbec vynášeli. Jsou-li ω_m , $m=-1,\dots,1$, úhlové frekvence kmitů z multipletu stupně 1 a frekvence

$$(4.8) \quad \hat{\omega}_0 = 1/(2l+1) \sum_{m=-l}^l \omega_m$$

průměrná frekvence multipletu, pak veličinu $(\Delta\omega/\hat{\omega}_0)$, kde

$$(4.9) \quad \Delta\omega = \sqrt{\Delta\omega^2}, \quad \Delta\omega^2 = 1/(2l+1) \sum_{m=-l}^l (\omega_m - \hat{\omega}_0)^2,$$

nazveme (relativní) šířkou multipletu.

Z obrázků vidíme, jak si stojí příspěvky rotace (plná čára) a hustotních modelů MD, resp. DH (dlouhé, resp. krátké čárky). Porovnání hustotního příspěvku s rotačním působí možná zbytečně depresivně; jak je patrné z obr.4.4, s růstem úhlového čísla klesá vliv rotace, zatím co vliv laterálních heterogenit roste. Nicméně ještě u kmitu ${}_0T_{30}$ "přebíjí rotace hustotu" 3-krát.

Okamžitou námitkou nad našimi obrázky může být, proč jsme

vlastně skončili s výpočtem tak nízko, když nehomogenity, jak se zdá, nabývají významu právě pro vyšší úhlová čísla. Odpověď by mohla být právě tak bezprostřední; je to nad síly obyčejného PC 8088, 4,77 MHz, 512 KB, 5,25'' 360 KB, bez koprocessoru a hard disku, alespoň v rozumných časových mezích. Konkrétně - problémy nejsou spojeny s výpočtem vlastních funkcí, to trvá (jednou iterací) pro toroidální mód zhruba 1 minutu a pro sféroidální 5 minut bez ohledu na úhlové číslo, ovšem výpočet perturbační matice kmitu s $l \geq 10$ jde do hodin. Výpočet obrázku 4.4 trval dva dny. Záleží na nejvyšším stupni rozvoju perturbací; tím je dána horní mez sumy přes s v (3.29), (3.35) a tou zase počet C-G koeficientů, potřebných k výpočtu. A doba potřebná k výpočtu C-G koeficientu přibývá s růstem velikosti indexů výrazně strměji než lineárně.

Ovšem to podstatné je jinde. I kdybychom se nakrásně dokázali vymanit ze zničující převahy rotace, nebude v našich silách říci, který hustotní model "štěpí lépe". Jednak proto, že příspěvek různých hustotních modelů k šířce multipletu je - jak se zdá - příliš uniformní, ale především - není s čím srovnávat. Literatura se téměř výhradně specializuje na frekvence SNREI, v lepším případě se udává většinou blíže nespecifikovaná "chyba". Světlou výjimkou je jeden sloupeček jedné tabulky v Dziewonski, Gilbert (1972), nazvaný "R.M.S.", o kterém se lze v textu dočíst jen to, že jde o "raw multiplet splitting". Tato data např. Dahlen (1976a) opravuje o "šum" a používá pak jako realistické protějšky (4.9). Při hledání novějších dat jsme ovšem narazili v knihovnách i na "černé díry"; nebudeme raději absolutizovat.

Přesto však - zdá se, že po mohutném "boomu" prací o štěpení v 60. a 70. letech horečka poklesla. Teorie i v předložené po-

době, nemluvě o kvazidegeneraci, přitom jistě pokrok nebrzdí. Kde je tedy zakopaný pes?

Není ovšem nutné od štěpení vlastních kmitů ihned utíkat. Praktik by sice namítnul - za hodně peněz málo muziky, ale co nám brání pokládat naše výsledky za predikci? Vždyť frekvence vlastních kmitů Země jsou v reálných spektrech vyhledávány také s jejich apriorní znalostí. Odkazujeme v této souvislosti na paralelní diplomovou práci J. Mosera, ve které se zabývá štěpením vlastních kmitů vlivem perturbací topografií. Bude užitečné - a chystáme se k tomu - odvodit spektrum celého LHREI, tedy spojit dohromady s rotací jak vliv perturbací hustoty, tak i topografií.

Tab.4.1. Hustotni modely MD (podle Morelli & Dziewonski,1987) a DH (podle Doornbos & Hilton,1989)
(vyznam velicin j,m,Ejm,ljm viz text)

j	m	M		D		D		H	
		Re(Ejm)	Im(Ejm)	Re(ljm)	Im(ljm)	Re(Ejm)	Im(Ejm)	Re(ljm)	Im(ljm)
1	0	0.842E+01	0.000E+00	-0.142E+02	0.000E+00	-0.366E+01	0.000E+00	0.108E+02	0.000E+00
1	1	-0.249E+01	0.212E+01	0.349E+01	-0.208E+01	-0.686E+01	-0.383E+01	0.125E+02	0.102E+02
2	0	0.587E+01	0.000E+00	-0.821E+01	0.000E+00	0.446E+01	0.000E+00	-0.423E+01	0.000E+00
2	1	-0.344E+01	-0.539E+01	0.106E+02	0.188E+02	-0.162E+01	-0.724E+00	0.548E+01	0.554E+01
2	2	0.239E+01	0.175E+01	-0.615E+01	-0.166E+01	0.198E+01	0.179E+01	-0.500E+01	-0.178E+01
3	0	-0.394E+01	0.000E+00	0.953E+01	0.000E+00	-0.172E+01	0.000E+00	0.138E+01	0.000E+00
3	1	-0.735E+00	0.238E+00	0.589E+01	0.531E+00	0.135E+01	0.163E+01	-0.250E+01	-0.508E+01
3	2	0.470E+01	-0.860E+00	-0.240E+02	-0.486E+01	0.754E+00	-0.229E+01	-0.811E+01	0.919E+00
3	3	0.210E+01	-0.596E+01	-0.355E+01	0.267E+02	0.864E-01	0.215E+00	0.458E+01	0.186E+01
4	0	-0.564E+01	0.000E+00	0.679E+01	0.000E+00	-0.507E+01	0.000E+00	0.338E+01	0.000E+00
4	1	0.587E+00	0.150E+01	0.471E+01	-0.912E+01	0.216E+01	0.153E+01	-0.463E+01	-0.927E+01
4	2	-0.252E+01	-0.249E+01	0.115E+02	0.418E+01	0.819E+00	-0.122E+01	-0.834E+01	-0.341E+01
4	3	0.293E+01	-0.227E+00	-0.168E+02	0.105E+01	-0.105E+00	-0.590E+00	0.121E+01	0.320E+01
4	4	-0.158E+01	-0.198E+01	0.618E+01	-0.145E+02	0.113E+00	-0.341E+01	-0.390E+01	-0.594E+01
5	0	-0.140E+01	0.000E+00	0.572E+00	0.000E+00	-0.140E+01	0.000E+00	0.572E+00	0.000E+00
5	1	-0.128E+01	-0.404E+00	0.525E+00	0.165E+00	-0.128E+01	-0.404E+00	0.525E+00	0.165E+00
5	2	-0.137E+01	0.162E+00	0.560E+00	-0.662E-01	-0.137E+01	0.162E+00	0.560E+00	-0.662E-01
5	3	0.151E+01	0.136E+01	-0.617E+00	-0.554E+00	0.151E+01	0.136E+01	-0.617E+00	-0.554E+00
5	4	0.405E+01	0.154E+01	-0.166E+01	-0.631E+00	0.405E+01	0.154E+01	-0.166E+01	-0.631E+00
5	5	-0.159E+01	0.970E+00	0.651E+00	-0.397E+00	-0.159E+01	0.970E+00	0.651E+00	-0.397E+00
6	0	-0.359E+01	0.000E+00	0.101E+01	0.000E+00	-0.359E+01	0.000E+00	0.101E+01	0.000E+00
6	1	0.121E+01	0.610E-01	-0.338E+00	-0.171E-01	0.121E+01	0.610E-01	-0.338E+00	-0.171E-01
6	2	-0.461E+00	-0.239E+01	0.129E+00	0.670E+00	-0.461E+00	-0.239E+01	0.129E+00	0.670E+00
6	3	0.136E+01	0.134E+01	-0.436E+00	-0.374E+00	0.136E+01	0.134E+01	-0.436E+00	-0.374E+00
6	4	-0.121E+00	-0.211E+00	0.339E-01	0.591E-01	-0.121E+00	-0.211E+00	0.339E-01	0.591E-01
6	5	-0.796E+00	-0.131E+00	0.223E+00	0.367E-01	-0.796E+00	-0.131E+00	0.223E+00	0.367E-01
6	6	-0.103E+00	-0.546E+00	0.287E-01	0.153E+00	-0.103E+00	-0.546E+00	0.287E-01	0.153E+00
7	0	0.752E+00	0.000E+00	-0.139E+00	0.000E+00	0.752E+00	0.000E+00	-0.139E+00	0.000E+00
7	1	0.860E-01	0.204E+01	-0.159E-01	-0.377E+00	0.860E-01	0.204E+01	-0.159E-01	-0.377E+00
7	2	0.121E+01	-0.147E+01	-0.223E+00	0.271E+00	0.121E+01	-0.147E+01	-0.223E+00	0.271E+00
7	3	0.135E+01	0.155E+01	-0.249E+00	-0.287E+00	0.135E+01	0.155E+01	-0.249E+00	-0.287E+00
7	4	-0.417E+00	-0.101E+00	0.772E-01	0.186E-01	-0.417E+00	-0.101E+00	0.772E-01	0.186E-01
7	5	-0.420E+00	-0.229E+01	0.777E-01	0.424E+00	-0.420E+00	-0.229E+01	0.777E-01	0.424E+00
7	6	-0.458E+00	0.150E+01	0.848E-01	-0.277E+00	-0.458E+00	0.150E+01	0.848E-01	-0.277E+00
7	7	0.422E+00	-0.177E+01	-0.781E-01	0.327E+00	0.422E+00	-0.177E+01	-0.781E-01	0.327E+00
8	0	-0.385E+01	0.000E+00	0.458E+00	0.000E+00	-0.385E+01	0.000E+00	0.458E+00	0.000E+00
8	1	-0.501E+00	-0.136E+00	0.596E-01	0.162E-01	-0.501E+00	-0.136E+00	0.596E-01	0.162E-01
8	2	-0.973E+00	0.799E+00	0.116E+00	-0.950E-01	-0.973E+00	0.799E+00	0.116E+00	-0.950E-01
8	3	-0.118E+01	0.457E+00	0.140E+00	-0.543E-01	-0.118E+01	0.457E+00	0.140E+00	-0.543E-01
8	4	0.915E+00	-0.277E+00	-0.109E+00	0.329E-01	0.915E+00	-0.277E+00	-0.109E+00	0.329E-01
8	5	0.101E+01	-0.854E+00	-0.120E+00	0.101E+00	0.101E+01	-0.854E+00	-0.120E+00	0.101E+00
8	6	-0.150E+00	-0.133E+01	0.178E-01	0.159E+00	-0.150E+00	-0.133E+01	0.178E-01	0.159E+00
8	7	-0.183E+00	0.178E+01	0.218E-01	-0.211E+00	-0.183E+00	0.178E+01	0.218E-01	-0.211E+00
8	8	0.856E+00	-0.404E+00	-0.102E+00	0.480E-01	0.856E+00	-0.404E+00	-0.102E+00	0.480E-01

... pokračovani

j	m	M		D		D		H	
		Re(Ejm)	Im(Ejm)	Re(Ijm)	Im(Ijm)	Re(Ejm)	Im(Ejm)	Re(Ijm)	Im(Ijm)
9	0	-0.143E+01	0.000E+00	0.107E+00	0.000E+00	-0.143E+01	0.000E+00	0.107E+00	0.000E+00
9	1	0.746E+00	0.427E+00	-0.558E-01	-0.320E-01	0.746E+00	0.427E+00	-0.558E-01	-0.320E-01
9	2	-0.954E+00	0.871E-01	0.713E-01	-0.652E-02	-0.954E+00	0.871E-01	0.713E-01	-0.652E-02
9	3	-0.172E+01	0.176E+01	0.129E+00	-0.131E+00	-0.172E+01	0.176E+01	0.129E+00	-0.131E+00
9	4	-0.108E-01	-0.932E+00	0.811E-03	0.697E-01	-0.108E-01	-0.932E+00	0.811E-03	0.697E-01
9	5	0.163E+01	0.903E+00	-0.122E+00	-0.675E-01	0.163E+01	0.903E+00	-0.122E+00	-0.675E-01
9	6	0.485E+00	0.398E+00	-0.363E-01	-0.298E-01	0.485E+00	0.398E+00	-0.363E-01	-0.298E-01
9	7	-0.168E+01	0.212E+01	0.126E+00	-0.159E+00	-0.168E+01	0.212E+01	0.126E+00	-0.159E+00
9	8	-0.767E+00	0.137E+01	0.574E-01	-0.103E+00	-0.767E+00	0.137E+01	0.574E-01	-0.103E+00
9	9	0.416E+00	0.178E+01	-0.311E-01	-0.133E+00	0.416E+00	0.178E+01	-0.311E-01	-0.133E+00
10	0	0.118E+01	0.000E+00	-0.547E-01	0.000E+00	0.118E+01	0.000E+00	-0.547E-01	0.000E+00
10	1	-0.643E+00	0.852E+00	0.298E-01	-0.394E-01	-0.643E+00	0.852E+00	0.298E-01	-0.394E-01
10	2	-0.317E+00	-0.145E+01	0.147E-01	0.671E-01	-0.317E+00	-0.145E+01	0.147E-01	0.671E-01
10	3	0.397E+00	-0.369E+00	-0.184E-01	0.171E-01	0.397E+00	-0.369E+00	-0.184E-01	0.171E-01
10	4	-0.305E+00	0.312E+00	0.141E-01	-0.144E-01	-0.305E+00	0.312E+00	0.141E-01	-0.144E-01
10	5	-0.698E+00	0.942E+00	0.323E-01	-0.436E-01	-0.698E+00	0.942E+00	0.323E-01	-0.436E-01
10	6	-0.102E+01	0.531E-01	0.473E-01	-0.246E-02	-0.102E+01	0.531E-01	0.473E-01	-0.246E-02
10	7	-0.138E+01	0.384E+00	0.636E-01	-0.178E-01	-0.138E+01	0.384E+00	0.636E-01	-0.178E-01
10	8	-0.288E+00	-0.114E+00	0.133E-01	0.528E-02	-0.288E+00	-0.114E+00	0.133E-01	0.528E-02
10	9	0.660E+00	-0.865E+00	-0.305E-01	0.400E-01	0.660E+00	-0.865E+00	-0.305E-01	0.400E-01
10	10	-0.120E+00	-0.986E+00	0.554E-02	0.457E-01	-0.120E+00	-0.986E+00	0.554E-02	0.457E-01
11	0	-0.142E+01	0.000E+00	0.402E-01	0.000E+00	-0.142E+01	0.000E+00	0.402E-01	0.000E+00
11	1	0.139E+00	-0.579E+00	-0.392E-02	0.164E-01	0.139E+00	-0.579E+00	-0.392E-02	0.164E-01
11	2	-0.708E+00	0.964E+00	0.200E-01	-0.272E-01	-0.708E+00	0.964E+00	0.200E-01	-0.272E-01
11	3	-0.670E+00	0.205E+01	0.189E-01	-0.580E-01	-0.670E+00	0.205E+01	0.189E-01	-0.580E-01
11	4	-0.122E+01	0.441E-01	0.344E-01	-0.125E-02	-0.122E+01	0.441E-01	0.344E-01	-0.125E-02
11	5	0.136E+01	0.484E+00	-0.385E-01	-0.137E-01	0.136E+01	0.484E+00	-0.385E-01	-0.137E-01
11	6	0.916E+00	-0.646E+00	-0.259E-01	0.182E-01	0.916E+00	-0.646E+00	-0.259E-01	0.182E-01
11	7	-0.112E+01	0.760E+00	0.317E-01	-0.215E-01	-0.112E+01	0.760E+00	0.317E-01	-0.215E-01
11	8	0.331E+00	0.133E+01	-0.936E-02	-0.376E-01	0.331E+00	0.133E+01	-0.936E-02	-0.376E-01
11	9	0.720E+00	-0.128E+01	-0.204E-01	0.362E-01	0.720E+00	-0.128E+01	-0.204E-01	0.362E-01
11	10	-0.851E+00	0.809E+00	0.240E-01	-0.229E-01	-0.851E+00	0.809E+00	0.240E-01	-0.229E-01
11	11	-0.510E+00	0.175E+00	0.144E-01	-0.495E-02	-0.510E+00	0.175E+00	0.144E-01	-0.495E-02
12	0	0.231E+01	0.000E+00	-0.394E-01	0.000E+00	0.231E+01	0.000E+00	-0.394E-01	0.000E+00
12	1	-0.219E+01	-0.149E+00	0.373E-01	0.255E-02	-0.219E+01	-0.149E+00	0.373E-01	0.255E-02
12	2	0.911E+00	0.240E+01	-0.155E-01	-0.409E-01	0.911E+00	0.240E+01	-0.155E-01	-0.409E-01
12	3	0.459E+00	0.661E+00	-0.783E-02	-0.113E-01	0.459E+00	0.661E+00	-0.783E-02	-0.113E-01
12	4	-0.726E+00	-0.367E+00	0.124E-01	0.626E-02	-0.726E+00	-0.367E+00	0.124E-01	0.626E-02
12	5	-0.105E+01	0.295E+01	0.179E-01	-0.504E-01	-0.105E+01	0.295E+01	0.179E-01	-0.504E-01
12	6	-0.110E+01	-0.114E+01	0.187E-01	0.194E-01	-0.110E+01	-0.114E+01	0.187E-01	0.194E-01
12	7	0.863E+00	-0.300E+01	-0.147E-01	0.511E-01	0.863E+00	-0.300E+01	-0.147E-01	0.511E-01
12	8	-0.751E+00	-0.395E+00	0.128E-01	0.674E-02	-0.751E+00	-0.395E+00	0.128E-01	0.674E-02
12	9	0.308E+00	-0.116E+01	-0.526E-02	0.198E-01	0.308E+00	-0.116E+01	-0.526E-02	0.198E-01
12	10	-0.190E+00	-0.177E+01	0.323E-02	0.302E-01	-0.190E+00	-0.177E+01	0.323E-02	0.302E-01
12	11	-0.124E+00	0.211E+00	0.211E-02	-0.360E-02	-0.124E+00	0.211E+00	0.211E-02	-0.360E-02
12	12	-0.240E+00	0.153E+01	0.410E-02	-0.261E-01	-0.240E+00	0.153E+01	0.410E-02	-0.261E-01

Tab.4.2. Stepeni degenerovanych toroidalnich kmitu OTI modelu PREM
 vlivem denni rotace a lateralnich nehomogenit hustoty
 (modely Cadek, Matyska podle Morelli, Dziewonski - MD,
 a podle Doornbos, Hilton - DH)

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
O T 2	2639.13	2639.13	2639.13	0.3789128	0.3789128	0.3789128
	32.68	0.22	0.22	-0.0046353	-0.0000316	-0.0000320
	10.85	0.19	0.15	-0.0015509	-0.0000275	-0.0000223
	-5.33	0.02	0.04	0.0007667	-0.0000030	-0.0000064
	-16.04	-0.16	-0.16	0.0023177	0.0000223	0.0000229
	-21.43	-0.28	-0.26	0.0031018	0.0000398	0.0000377
O T 3	1707.43	1707.43	1707.43	0.5856755	0.5856755	0.5856755
	11.56	0.13	0.13	-0.0039400	-0.0000442	-0.0000442
	5.66	0.12	0.12	-0.0019343	-0.0000410	-0.0000413
	1.00	0.03	0.03	-0.0003440	-0.0000103	-0.0000097
	-2.42	0.02	0.02	0.0008308	-0.0000063	-0.0000068
	-4.62	-0.03	-0.03	0.0015903	0.0000118	0.0000115
	-5.41	-0.11	-0.11	0.0018629	0.0000368	0.0000368
	-5.62	-0.15	-0.16	0.0019343	0.0000531	0.0000538
O T 4	1307.41	1307.41	1307.41	0.7648710	0.7648710	0.7648710
	6.17	0.15	0.15	-0.0035947	-0.0000893	-0.0000888
	3.53	0.09	0.09	-0.0020593	-0.0000515	-0.0000525
	1.36	0.07	0.07	-0.0007967	-0.0000392	-0.0000424
	-0.33	0.06	0.06	0.0001930	-0.0000322	-0.0000332
	-1.55	0.00	0.00	0.0009097	-0.0000024	0.0000017
	-1.79	-0.01	-0.02	0.0010476	0.0000072	0.0000099
	-2.31	-0.09	-0.09	0.0013535	0.0000509	0.0000524
	-2.43	-0.11	-0.10	0.0014225	0.0000637	0.0000585
	-2.60	-0.16	-0.16	0.0015245	0.0000927	0.0000945
O T 5	1078.67	1078.67	1078.67	0.9270676	0.9270676	0.9270676
	3.99	0.15	0.15	-0.0034200	-0.0001251	-0.0001248
	2.50	0.11	0.11	-0.0021417	-0.0000911	-0.0000931
	1.24	0.08	0.09	-0.0010615	-0.0000692	-0.0000745
	0.21	0.06	0.06	-0.0001794	-0.0000525	-0.0000485
	-0.52	0.03	0.02	0.0004436	-0.0000232	-0.0000155
	-0.59	0.00	0.01	0.0005046	-0.0000026	-0.0000064
	-1.11	-0.02	-0.02	0.0009532	0.0000174	0.0000176
	-1.15	-0.04	-0.06	0.0009905	0.0000380	0.0000498
	-1.46	-0.08	-0.08	0.0012596	0.0000669	0.0000709
	-1.49	-0.11	-0.11	0.0012783	0.0000975	0.0000918
-1.59	-0.17	-0.15	0.0013680	0.0001429	0.0001327	
O T 6	928.34	928.34	928.34	1.0771910	1.0771910	1.0771910
	2.88	0.18	0.18	-0.0033356	-0.0002085	-0.0002117
	1.92	0.13	0.11	-0.0022204	-0.0001452	-0.0001333
	1.09	0.10	0.10	-0.0012578	-0.0001166	-0.0001171
	0.39	0.07	0.08	-0.0004477	-0.0000845	-0.0000878
	0.02	0.06	0.06	-0.0000196	-0.0000753	-0.0000688
	-0.18	0.03	0.04	0.0002099	-0.0000345	-0.0000432
	-0.47	-0.01	-0.02	0.0005428	0.0000109	0.0000194
	-0.62	-0.03	-0.03	0.0007150	0.0000347	0.0000375
	-0.82	-0.05	-0.06	0.0009528	0.0000599	0.0000704
	-0.92	-0.08	-0.08	0.0010676	0.0000909	0.0000959
	-1.04	-0.09	-0.09	0.0012103	0.0001001	0.0001029
	-1.09	-0.14	-0.13	0.0012676	0.0001681	0.0001536
	-1.13	-0.17	-0.16	0.0013152	0.0002000	0.0001823

... pokračovani

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
0 T 7	820.67	820.67	820.67	1.2185170	1.2185170	1.2185170
	2.23	0.15	0.14	-0.0033041	-0.0002161	-0.0002118
	1.55	0.12	0.13	-0.0023025	-0.0001853	-0.0001911
	0.96	0.11	0.11	-0.0014232	-0.0001671	-0.0001630
	0.45	0.09	0.08	-0.0006660	-0.0001295	-0.0001153
	0.27	0.08	0.07	-0.0004026	-0.0001161	-0.0001038
	0.02	0.04	0.04	-0.0000311	-0.0000596	-0.0000648
	-0.12	0.02	0.02	0.0001844	-0.0000316	-0.0000336
	-0.32	0.01	0.00	0.0004816	-0.0000198	-0.0000001
	-0.44	-0.02	-0.02	0.0006493	0.0000358	0.0000277
	-0.59	-0.04	-0.04	0.0008722	0.0000569	0.0000562
	-0.67	-0.07	-0.07	0.0009919	0.0001016	0.0000967
	-0.77	-0.07	-0.08	0.0011405	0.0001102	0.0001207
	-0.82	-0.09	-0.09	0.0012124	0.0001337	0.0001374
	-0.87	-0.12	-0.11	0.0012867	0.0001812	0.0001673
	-0.88	-0.21	-0.19	0.0013106	0.0003058	0.0002776
0 T 8	738.93	738.93	738.93	1.3533080	1.3533080	1.3533080
	1.81	0.15	0.14	-0.0033066	-0.0002738	-0.0002559
	1.31	0.13	0.13	-0.0023890	-0.0002408	-0.0002451
	0.86	0.10	0.10	-0.0015723	-0.0001810	-0.0001896
	0.47	0.10	0.09	-0.0008564	-0.0001779	-0.0001727
	0.40	0.09	0.08	-0.0007276	-0.0001664	-0.0001368
	0.13	0.06	0.06	-0.0002413	-0.0001064	-0.0001162
	0.07	0.04	0.03	-0.0001323	-0.0000671	-0.0000500
	-0.15	0.02	0.01	0.0002728	-0.0000435	-0.0000170
	-0.20	-0.01	-0.01	0.0003620	0.0000204	0.0000240
	-0.37	-0.02	-0.02	0.0006862	0.0000345	0.0000403
	-0.41	-0.03	-0.04	0.0007555	0.0000482	0.0000670
	-0.54	-0.04	-0.04	0.0009986	0.0000812	0.0000728
	-0.57	-0.07	-0.06	0.0010482	0.0001172	0.0001027
	-0.66	-0.09	-0.08	0.0012103	0.0001627	0.0001390
	-0.68	-0.12	-0.11	0.0012400	0.0002277	0.0002050
	-0.72	-0.13	-0.14	0.0013210	0.0002361	0.0002524
	-0.73	-0.18	-0.15	0.0013309	0.0003266	0.0002822
0 T 9	674.25	674.25	674.25	1.4831290	1.4831290	1.4831290
	1.52	0.17	0.14	-0.0033326	-0.0003708	-0.0003189
	1.13	0.13	0.14	-0.0024796	-0.0002854	-0.0003047
	0.78	0.11	0.11	-0.0017118	-0.0002529	-0.0002483
	0.47	0.09	0.09	-0.0010292	-0.0001968	-0.0002030
	0.46	0.08	0.08	-0.0010114	-0.0001667	-0.0001633
	0.20	0.07	0.06	-0.0004318	-0.0001465	-0.0001394
	0.19	0.06	0.06	-0.0004164	-0.0001210	-0.0001333
	-0.04	0.05	0.02	0.0000804	-0.0001002	-0.0000460
	-0.04	0.01	0.00	0.0000935	-0.0000141	0.0000071
	-0.23	-0.01	-0.01	0.0005075	0.0000189	0.0000193
	-0.24	-0.01	-0.03	0.0005182	0.0000319	0.0000582
	-0.39	-0.03	-0.03	0.0008494	0.0000749	0.0000656
	-0.39	-0.03	-0.04	0.0008577	0.0000760	0.0000835
	-0.50	-0.06	-0.06	0.0011061	0.0001267	0.0001220
	-0.51	-0.08	-0.08	0.0011120	0.0001740	0.0001721
	-0.58	-0.11	-0.09	0.0012776	0.0002401	0.0001986
	-0.58	-0.12	-0.11	0.0012812	0.0002575	0.0002524
	-0.62	-0.14	-0.12	0.0013640	0.0003098	0.0002735
	-0.62	-0.16	-0.14	0.0013652	0.0003448	0.0003096

... pokračovani

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
0 T 10	621.50	621.50	621.50	1.6090100	1.6090100	1.6090100
	1.31	0.15	0.14	-0.0033752	-0.0003999	-0.0003617
	1.00	0.14	0.12	-0.0025737	-0.0003713	-0.0003195
	0.71	0.11	0.11	-0.0018454	-0.0002885	-0.0002916
	0.49	0.10	0.10	-0.0012651	-0.0002553	-0.0002676
	0.46	0.09	0.09	-0.0011904	-0.0002214	-0.0002343
	0.26	0.07	0.07	-0.0006745	-0.0001702	-0.0001719
	0.24	0.05	0.06	-0.0006086	-0.0001375	-0.0001564
	0.06	0.04	0.03	-0.0001573	-0.0001046	-0.0000820
	0.04	0.03	0.02	-0.0001001	-0.0000829	-0.0000610
	-0.11	0.01	0.02	0.0002867	-0.0000383	-0.0000492
	-0.13	0.00	0.00	0.0003351	-0.0000028	0.0000092
	-0.25	0.00	-0.01	0.0006575	0.0000083	0.0000376
	-0.27	-0.03	-0.03	0.0006970	0.0000665	0.0000870
	-0.37	-0.04	-0.05	0.0009549	0.0000928	0.0001170
	-0.38	-0.06	-0.06	0.0009857	0.0001530	0.0001658
	-0.46	-0.07	-0.07	0.0011791	0.0001793	0.0001760
	-0.46	-0.07	-0.08	0.0012011	0.0001938	0.0002022
	-0.51	-0.10	-0.09	0.0013300	0.0002710	0.0002368
	-0.52	-0.13	-0.11	0.0013432	0.0003382	0.0002833
	-0.54	-0.14	-0.12	0.0014077	0.0003752	0.0003170
	-0.54	-0.15	-0.14	0.0014121	0.0003946	0.0003573

Tab.4.3. Stepeni degenerovanych toroidalnich kaitu 1T1 modelu PREM
 vlivem denni rotace a lateralnich nehomogenit hustoty
 (modely Cadek, Matyska podle Morelli, Dziewonski - MD,
 a podle Doornbos, Hilton - DH)

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
1 T 2	757.50	757.50	757.50	1.3201320	1.3201320	1.3201320
	2.53	0.15	0.09	-0.0043881	-0.0002629	-0.0001637
	0.96	0.06	0.04	-0.0016745	-0.0001124	-0.0000698
	-0.30	-0.03	0.00	0.0005195	0.0000459	-0.0000032
	-1.26	-0.06	-0.04	0.0021940	0.0001000	0.0000776
	-1.92	-0.13	-0.09	0.0033491	0.0002295	0.0001591
	694.92	694.92	694.92	1.4390150	1.4390150	1.4390150
1 T 3	1.86	0.09	0.05	-0.0038449	-0.0001951	-0.0000977
	0.94	0.07	0.04	-0.0019343	-0.0001484	-0.0000755
	0.19	0.04	0.02	-0.0004011	-0.0000755	-0.0000401
	-0.36	0.00	0.02	0.0007547	-0.0000095	-0.0000311
	-0.74	-0.02	-0.02	0.0015332	0.0000435	0.0000412
	-0.93	-0.09	-0.04	0.0019343	0.0001775	0.0000931
	-0.94	-0.10	-0.05	0.0019580	0.0002074	0.0001120
1 T 4	630.80	630.80	630.80	1.5852890	1.5852890	1.5852890
	1.42	0.11	0.06	-0.0035637	-0.0002642	-0.0001502
	0.82	0.10	0.05	-0.0020515	-0.0002418	-0.0001215
	0.32	0.06	0.04	-0.0008056	-0.0001587	-0.0001068
	-0.07	0.03	0.03	0.0001741	-0.0000866	-0.0000655
	-0.35	0.02	0.00	0.0008875	-0.0000531	0.0000050
	-0.43	-0.05	-0.02	0.0010786	0.0001135	0.0000520
	-0.53	-0.05	-0.03	0.0013347	0.0001267	0.0000809
	-0.57	-0.10	-0.05	0.0014302	0.0002490	0.0001230
-0.60	-0.13	-0.07	0.0015156	0.0003152	0.0001830	
1 T 5	571.37	571.37	571.37	1.7501790	1.7501790	1.7501790
	1.13	0.11	0.06	-0.0034467	-0.0003341	-0.0001902
	0.70	0.10	0.05	-0.0021524	-0.0002947	-0.0001631
	0.35	0.07	0.04	-0.0010597	-0.0002006	-0.0001343
	0.06	0.06	0.04	-0.0001487	-0.0001788	-0.0001169
	-0.14	0.03	0.01	0.0004219	-0.0000959	-0.0000349
	-0.17	0.01	0.00	0.0005206	-0.0000348	-0.0000130
	-0.31	-0.01	-0.01	0.0009425	0.0000402	0.0000314
	-0.33	-0.06	-0.03	0.0010083	0.0001875	0.0001021
	-0.41	-0.07	-0.04	0.0012614	0.0002020	0.0001335
	-0.42	-0.11	-0.06	0.0012943	0.0003371	0.0001800
-0.45	-0.12	-0.07	0.0013787	0.0003721	0.0002053	
1 T 6	519.43	519.43	519.43	1.9251870	1.9251870	1.9251870
	0.93	0.10	0.06	-0.0034416	-0.0003932	-0.0002213
	0.61	0.09	0.05	-0.0022735	-0.0003286	-0.0001919
	0.34	0.07	0.05	-0.0012675	-0.0002594	-0.0001804
	0.11	0.06	0.04	-0.0004236	-0.0002120	-0.0001615
	0.03	0.04	0.03	-0.0001257	-0.0001403	-0.0001033
	-0.07	0.03	0.01	0.0002581	-0.0001105	-0.0000447
	-0.13	0.01	0.00	0.0004898	-0.0000442	0.0000142
	-0.21	-0.01	-0.01	0.0007776	0.0000308	0.0000276
	-0.25	-0.04	-0.02	0.0009432	0.0001378	0.0000809
	-0.31	-0.07	-0.04	0.0011350	0.0002436	0.0001371
	-0.33	-0.07	-0.05	0.0012344	0.0002628	0.0001884
	-0.36	-0.10	-0.06	0.0013303	0.0003868	0.0002098
	-0.37	-0.11	-0.07	0.0013634	0.0004164	0.0002450

... pokračovani

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
1 T 7	475.45	475.45	475.45	2.1032710	2.1032710	2.1032710
	0.79	0.09	0.06	-0.0035110	-0.0003949	-0.0002511
	0.55	0.08	0.05	-0.0024208	-0.0003580	-0.0002277
	0.33	0.06	0.04	-0.0014664	-0.0002684	-0.0001833
	0.15	0.05	0.04	-0.0006479	-0.0002138	-0.0001641
	0.14	0.05	0.03	-0.0006095	-0.0002006	-0.0001140
	-0.01	0.03	0.02	0.0000348	-0.0001535	-0.0000943
	-0.01	0.03	0.01	0.0000662	-0.0001189	-0.0000631
	-0.13	0.00	0.00	0.0005817	-0.0000044	-0.0000119
	-0.14	0.00	-0.01	0.0006061	0.0000133	0.0000333
	-0.22	-0.03	-0.02	0.0009927	0.0001199	0.0000685
	-0.23	-0.04	-0.03	0.0010101	0.0001656	0.0001146
	-0.29	-0.06	-0.03	0.0012678	0.0002722	0.0001536
	-0.29	-0.07	-0.05	0.0012783	0.0003087	0.0002198
	-0.32	-0.09	-0.06	0.0014072	0.0003802	0.0002434
	-0.32	-0.10	-0.06	0.0014107	0.0004526	0.0002764
1 T 8	438.68	438.68	438.68	2.2795660	2.2795660	2.2795660
	0.70	0.08	0.06	-0.0036249	-0.0004091	-0.0002895
	0.50	0.07	0.04	-0.0025880	-0.0003496	-0.0002282
	0.32	0.05	0.04	-0.0016678	-0.0002653	-0.0002122
	0.20	0.05	0.03	-0.0010459	-0.0002545	-0.0001815
	0.17	0.04	0.03	-0.0008643	-0.0002009	-0.0001613
	0.06	0.04	0.02	-0.0003313	-0.0001827	-0.0001197
	0.03	0.03	0.02	-0.0001777	-0.0001511	-0.0000891
	-0.05	0.01	0.01	0.0002665	-0.0000724	-0.0000425
	-0.08	0.01	0.00	0.0003922	-0.0000536	-0.0000115
	-0.14	-0.01	0.00	0.0007476	0.0000637	0.0000061
	-0.16	-0.01	-0.02	0.0008453	0.0000732	0.0000954
	-0.21	-0.03	-0.03	0.0011118	0.0001677	0.0001333
	-0.23	-0.03	-0.03	0.0011817	0.0001817	0.0001478
	-0.26	-0.06	-0.04	0.0013594	0.0002944	0.0001901
	-0.27	-0.07	-0.04	0.0014012	0.0003396	0.0002090
	-0.29	-0.08	-0.05	0.0014901	0.0003958	0.0002668
	-0.29	-0.08	-0.06	0.0015041	0.0004231	0.0002860
1 T 9	407.88	407.88	407.88	2.4517010	2.4517010	2.4517010
	0.63	0.07	0.05	-0.0037610	-0.0003909	-0.0003253
	0.46	0.06	0.05	-0.0027653	-0.0003869	-0.0002735
	0.31	0.05	0.04	-0.0019715	-0.0002768	-0.0002155
	0.24	0.04	0.03	-0.0014399	-0.0002537	-0.0002094
	0.18	0.04	0.03	-0.0010797	-0.0002244	-0.0001770
	0.12	0.03	0.03	-0.0007020	-0.0001970	-0.0001527
	0.06	0.02	0.02	-0.0003898	-0.0001409	-0.0001074
	0.01	0.02	0.01	-0.0000661	-0.0001114	-0.0000858
	-0.03	0.01	0.01	0.0001980	-0.0000855	-0.0000313
	-0.08	0.01	0.00	0.0004678	-0.0000324	-0.0000269
	-0.11	0.00	-0.01	0.0006839	-0.0000018	0.0000472
	-0.15	-0.02	-0.01	0.0008997	0.0001153	0.0000762
	-0.18	-0.02	-0.02	0.0010678	0.0001463	0.0001121
	-0.20	-0.03	-0.03	0.0012297	0.0001962	0.0001643
	-0.22	-0.03	-0.03	0.0013497	0.0002075	0.0001805
	-0.24	-0.05	-0.03	0.0014576	0.0003134	0.0002023
	-0.25	-0.05	-0.04	0.0015297	0.0003252	0.0002233
	-0.26	-0.06	-0.04	0.0015836	0.0003720	0.0002697
	-0.27	-0.07	-0.05	0.0016076	0.0004259	0.0003294

... pokračovani

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
1 T 10	381.82	381.82	381.82	2.6190350	2.6190350	2.6190350
	0.57	0.06	0.05	-0.0039050	-0.0004203	-0.0003554
	0.43	0.05	0.04	-0.0029445	-0.0003572	-0.0002779
	0.30	0.04	0.04	-0.0020740	-0.0002997	-0.0002607
	0.26	0.04	0.03	-0.0017949	-0.0002800	-0.0002347
	0.19	0.04	0.03	-0.0012735	-0.0002480	-0.0002141
	0.15	0.03	0.03	-0.0010454	-0.0002147	-0.0001807
	0.09	0.02	0.02	-0.0006030	-0.0001430	-0.0001328
	0.06	0.02	0.02	-0.0003859	-0.0001290	-0.0001053
	0.00	0.01	0.01	-0.0000025	-0.0000811	-0.0000531
	-0.03	0.01	0.01	0.0001836	-0.0000597	-0.0000487
	-0.07	0.01	0.00	0.0005090	-0.0000462	-0.0000216
	-0.10	0.00	0.00	0.0006630	0.0000272	0.0000327
	-0.14	-0.01	-0.01	0.0009285	0.0000455	0.0000495
	-0.15	-0.02	-0.02	0.0010525	0.0001572	0.0001245
	-0.18	-0.03	-0.02	0.0012570	0.0001741	0.0001377
	-0.20	-0.03	-0.03	0.0013520	0.0001910	0.0001928
	-0.22	-0.04	-0.03	0.0014995	0.0002477	0.0002237
	-0.23	-0.05	-0.03	0.0015615	0.0003167	0.0002301
	-0.24	-0.05	-0.04	0.0016500	0.0003399	0.0002546
	-0.24	-0.06	-0.04	0.0016810	0.0003880	0.0002916
	-0.25	-0.06	-0.05	0.0017105	0.0003916	0.0003479

Tab.4.4. Stepeni degenerovanych sferoidalnich kmitu OSI modelu PREM
 vlivem denni rotace a lateralnich nehomogenit hustoty
 (modely Cadek, Matyska podle Morelli, Dziewonski - MD,
 a podle Doornbos, Hilton - DH)

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
0 S 2	3233.58	3233.58	3233.58	0.3092547	0.3092547	0.3092547
	102.87	0.56	0.32	-0.0095346	-0.0000537	-0.0000310
	50.57	0.22	0.19	-0.0047617	-0.0000213	-0.0000183
	0.99	-0.03	0.00	-0.0000949	0.0000030	-0.0000003
	-46.03	-0.27	-0.05	0.0044657	0.0000263	0.0000044
	-90.65	-0.48	-0.47	0.0089201	0.0000458	0.0000452
0 S 3	2134.47	2134.47	2134.47	0.4685004	0.4685004	0.4685004
	31.21	0.28	0.26	-0.0067525	-0.0000611	-0.0000571
	20.48	0.19	0.18	-0.0044527	-0.0000425	-0.0000405
	10.10	0.17	0.05	-0.0022060	-0.0000370	-0.0000104
	0.06	0.04	-0.02	-0.0000125	-0.0000098	0.0000053
	-9.65	-0.16	-0.10	0.0021278	0.0000360	0.0000224
	-19.03	-0.23	-0.15	0.0042149	0.0000498	0.0000328
-28.09	-0.29	-0.22	0.0062489	0.0000647	0.0000475	
0 S 4	1545.71	1545.71	1545.71	0.6469519	0.6469519	0.6469519
	12.30	0.21	0.19	-0.0051089	-0.0000862	-0.0000785
	8.91	0.19	0.15	-0.0037065	-0.0000799	-0.0000625
	5.67	0.11	0.06	-0.0023656	-0.0000459	-0.0000240
	2.60	0.08	0.04	-0.0010861	-0.0000337	-0.0000177
	-0.32	0.00	0.01	0.0001321	-0.0000007	-0.0000058
	-3.07	-0.06	-0.07	0.0012888	0.0000238	0.0000299
	-5.68	-0.14	-0.10	0.0023841	0.0000574	0.0000418
	-8.12	-0.16	-0.11	0.0034180	0.0000674	0.0000446
-10.42	-0.23	-0.17	0.0043906	0.0000977	0.0000723	
0 S 5	1190.17	1190.17	1190.17	0.8402161	0.8402161	0.8402161
	5.78	0.18	0.15	-0.0040641	-0.0001262	-0.0001059
	4.36	0.14	0.11	-0.0030677	-0.0000970	-0.0000772
	3.03	0.11	0.09	-0.0021354	-0.0000767	-0.0000628
	1.80	0.09	0.07	-0.0012672	-0.0000613	-0.0000478
	0.66	0.04	0.01	-0.0004633	-0.0000278	-0.0000079
	-0.39	0.00	0.00	0.0002765	0.0000024	-0.0000009
	-1.35	-0.03	-0.05	0.0009522	0.0000181	0.0000330
	-2.21	-0.08	-0.06	0.0015636	0.0000582	0.0000418
	-2.98	-0.12	-0.08	0.0021109	0.0000818	0.0000568
	-3.66	-0.15	-0.11	0.0025940	0.0001041	0.0000775
-4.25	-0.18	-0.13	0.0030129	0.0001242	0.0000934	
0 S 6	963.48	963.48	963.48	1.0379040	1.0379040	1.0379040
	3.04	0.14	0.12	-0.0032641	-0.0001482	-0.0001276
	2.32	0.12	0.10	-0.0024895	-0.0001334	-0.0001131
	1.65	0.12	0.10	-0.0017789	-0.0001302	-0.0001041
	1.05	0.07	0.07	-0.0011323	-0.0000805	-0.0000763
	0.51	0.04	0.04	-0.0005495	-0.0000473	-0.0000464
	0.03	0.02	0.01	-0.0000306	-0.0000259	-0.0000155
	-0.39	0.01	-0.01	0.0004244	-0.0000138	0.0000140
	-0.76	-0.04	-0.03	0.0008155	0.0000386	0.0000338
	-1.06	-0.05	-0.05	0.0011426	0.0000514	0.0000534
	-1.30	-0.09	-0.06	0.0014059	0.0000969	0.0000680
	-1.49	-0.10	-0.08	0.0016052	0.0001103	0.0000852
	-1.61	-0.12	-0.10	0.0017406	0.0001302	0.0001049
	-1.68	-0.14	-0.11	0.0018122	0.0001520	0.0001237

... pokračovani

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
0 S 7	812.14	812.14	812.14	1.2313150	1.2313150	1.2313150
	1.67	0.12	0.11	-0.0025293	-0.0001786	-0.0001595
	1.25	0.11	0.10	-0.0018948	-0.0001634	-0.0001488
	0.87	0.10	0.09	-0.0013242	-0.0001562	-0.0001400
	0.54	0.09	0.08	-0.0008166	-0.0001334	-0.0001234
	0.25	0.05	0.05	-0.0003720	-0.0000803	-0.0000728
	-0.01	0.03	0.03	0.0000098	-0.0000419	-0.0000442
	-0.22	0.01	0.01	0.0003286	-0.0000146	-0.0000214
	-0.39	0.00	0.00	0.0005844	0.0000032	0.0000049
	-0.40	-0.01	-0.02	0.0006131	0.0000119	0.0000315
	-0.51	-0.04	-0.04	0.0007773	0.0000641	0.0000676
	-0.53	-0.06	-0.05	0.0007978	0.0000911	0.0000781
	-0.60	-0.08	-0.06	0.0009073	0.0001163	0.0000969
	-0.61	-0.10	-0.08	0.0009196	0.0001465	0.0001182
	-0.64	-0.10	-0.10	0.0009743	0.0001563	0.0001530
	-0.64	-0.12	-0.11	0.0009784	0.0001791	0.0001601
0 S 8	707.80	707.80	707.80	1.4128290	1.4128290	1.4128290
	0.92	0.12	0.11	-0.0018331	-0.0002305	-0.0002262
	0.65	0.10	0.10	-0.0012932	-0.0002029	-0.0001916
	0.41	0.10	0.09	-0.0008151	-0.0001935	-0.0001878
	0.30	0.08	0.08	-0.0006026	-0.0001674	-0.0001653
	0.20	0.06	0.06	-0.0003988	-0.0001165	-0.0001187
	0.11	0.05	0.05	-0.0002166	-0.0001008	-0.0000964
	0.02	0.01	0.01	-0.0000441	-0.0000185	-0.0000271
	-0.05	0.01	0.01	0.0001077	-0.0000181	-0.0000198
	-0.12	-0.01	0.00	0.0002488	0.0000177	0.0000045
	-0.19	-0.02	-0.02	0.0003703	0.0000333	0.0000445
	-0.24	-0.03	-0.03	0.0004800	0.0000594	0.0000632
	-0.29	-0.04	-0.05	0.0005711	0.0000841	0.0000911
	-0.33	-0.06	-0.06	0.0006495	0.0001112	0.0001104
	-0.36	-0.08	-0.08	0.0007103	0.0001604	0.0001510
	-0.38	-0.09	-0.08	0.0007573	0.0001813	0.0001665
	-0.39	-0.10	-0.10	0.0007677	0.0001907	0.0001912
	-0.40	-0.11	-0.11	0.0008033	0.0002102	0.0002105
0 S 9	633.98	633.98	633.98	1.5773370	1.5773370	1.5773370
	0.67	0.12	0.12	-0.0016658	-0.0002899	-0.0002875
	0.53	0.11	0.11	-0.0013072	-0.0002815	-0.0002790
	0.46	0.09	0.09	-0.0011394	-0.0002207	-0.0002278
	0.33	0.08	0.09	-0.0008206	-0.0002097	-0.0002115
	0.27	0.07	0.07	-0.0006726	-0.0001731	-0.0001789
	0.16	0.05	0.06	-0.0003937	-0.0001340	-0.0001394
	0.11	0.04	0.04	-0.0002654	-0.0000941	-0.0000911
	0.01	0.02	0.02	-0.0000263	-0.0000422	-0.0000469
	-0.03	0.01	0.01	0.0000822	-0.0000392	-0.0000170
	-0.11	-0.01	-0.01	0.0002814	0.0000241	0.0000308
	-0.15	-0.02	-0.02	0.0003702	0.0000443	0.0000460
	-0.21	-0.03	-0.03	0.0005296	0.0000743	0.0000706
	-0.24	-0.04	-0.04	0.0005987	0.0000942	0.0000950
	-0.29	-0.05	-0.05	0.0007182	0.0001317	0.0001364
	-0.31	-0.06	-0.06	0.0007676	0.0001468	0.0001382
	-0.34	-0.08	-0.08	0.0008473	0.0001928	0.0001911
	-0.35	-0.09	-0.09	0.0008769	0.0002288	0.0002355
	-0.37	-0.11	-0.10	0.0009167	0.0002627	0.0002606
	-0.37	-0.11	-0.11	0.0009266	0.0002755	0.0002747

... pokračovani

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
0 S 10	579.62	579.62	579.62	1.7252680	1.7252680	1.7252680
	0.81	0.13	0.13	-0.0024155	-0.0003801	-0.0003721
	0.61	0.11	0.11	-0.0018145	-0.0003337	-0.0003256
	0.43	0.09	0.09	-0.0012695	-0.0002660	-0.0002743
	0.35	0.09	0.09	-0.0010510	-0.0002555	-0.0002586
	0.26	0.07	0.08	-0.0007806	-0.0002156	-0.0002304
	0.20	0.07	0.07	-0.0005864	-0.0002069	-0.0002224
	0.12	0.05	0.05	-0.0003478	-0.0001342	-0.0001436
	0.06	0.04	0.03	-0.0001779	-0.0001071	-0.0000901
	-0.01	0.02	0.02	0.0000289	-0.0000587	-0.0000514
	-0.06	0.01	0.01	0.0001746	-0.0000356	-0.0000266
	-0.12	0.00	0.00	0.0003495	-0.0000096	0.0000141
	-0.16	-0.01	-0.01	0.0004709	0.0000252	0.0000340
	-0.21	-0.03	-0.04	0.0006140	0.0000970	0.0001179
	-0.24	-0.04	-0.04	0.0007112	0.0001302	0.0001326
	-0.28	-0.05	-0.05	0.0008225	0.0001463	0.0001432
	-0.30	-0.06	-0.06	0.0008953	0.0001920	0.0001740
	-0.33	-0.07	-0.06	0.0009748	0.0002053	0.0001803
	-0.34	-0.08	-0.09	0.0010234	0.0002390	0.0002563
	-0.36	-0.10	-0.09	0.0010711	0.0002937	0.0002801
	-0.37	-0.11	-0.10	0.0010954	0.0003206	0.0003101
	-0.37	-0.12	-0.12	0.0011113	0.0003539	0.0003525

Tab.4.5. Stepeni degenerovanych sferoidalnich kmitu 1S1 modelu PREM
 vlivem denni rotace a laterálních nehomogenit hustoty
 (modely Cadec, Matyska podle Morelli, Dziewonski - MD,
 a podle Doornbos, Hilton - DH)

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
1 S 2	1471.20	1471.20	1471.20	0.6797172	0.6797172	0.6797172
	13.56	0.12	0.12	-0.0062068	-0.0000540	-0.0000536
	5.72	0.07	0.08	-0.0026312	-0.0000318	-0.0000350
	-0.99	0.02	0.01	0.0004567	-0.0000110	-0.0000059
	-6.59	-0.08	-0.08	0.0030568	0.0000376	0.0000365
	-11.10	-0.13	-0.13	0.0051692	0.0000592	0.0000580
1 S 3	1064.31	1064.31	1064.31	0.9395759	0.9395759	0.9395759
	9.67	0.07	0.08	-0.0084619	-0.0000635	-0.0000675
	5.73	0.07	0.07	-0.0050312	-0.0000622	-0.0000602
	2.25	0.03	0.03	-0.0019815	-0.0000259	-0.0000220
	-0.78	0.01	0.01	0.0006873	-0.0000076	-0.0000083
	-3.36	-0.02	-0.01	0.0029751	0.0000138	0.0000120
	-5.50	-0.07	-0.07	0.0048819	0.0000606	0.0000596
	-7.21	-0.10	-0.10	0.0064077	0.0000849	0.0000865
1 S 4	852.80	852.80	852.80	1.1726080	1.1726080	1.1726080
	7.74	0.09	0.08	-0.0105514	-0.0001169	-0.0001157
	5.34	0.06	0.06	-0.0072922	-0.0000796	-0.0000837
	3.15	0.03	0.04	-0.0043114	-0.0000439	-0.0000491
	1.17	0.03	0.03	-0.0016089	-0.0000392	-0.0000423
	-0.59	0.01	0.01	0.0008153	-0.0000108	-0.0000072
	-2.15	0.00	-0.01	0.0029611	-0.0000032	0.0000091
	-3.50	-0.05	-0.05	0.0048286	0.0000671	0.0000697
	-4.64	-0.08	-0.07	0.0064178	0.0001071	0.0001007
	-5.58	-0.09	-0.09	0.0077286	0.0001194	0.0001184
1 S 5	729.81	729.81	729.81	1.3702200	1.3702200	1.3702200
	6.17	0.08	0.08	-0.0114952	-0.0001560	-0.0001555
	4.62	0.07	0.07	-0.0086169	-0.0001262	-0.0001270
	3.18	0.04	0.04	-0.0059405	-0.0000755	-0.0000752
	1.85	0.03	0.03	-0.0034663	-0.0000578	-0.0000632
	0.64	0.01	0.01	-0.0011940	-0.0000195	-0.0000166
	-0.47	0.00	0.00	0.0008762	-0.0000035	-0.0000013
	-1.46	-0.02	-0.02	0.0027443	0.0000406	0.0000451
	-2.34	-0.03	-0.02	0.0044105	0.0000485	0.0000469
	-3.12	-0.05	-0.05	0.0058745	0.0000914	0.0000891
-3.78	-0.06	-0.06	0.0071366	0.0001201	0.0001197	
-4.34	-0.07	-0.07	0.0081966	0.0001379	0.0001389	
1 S 6	657.00	657.00	657.00	1.5220700	1.5220700	1.5220700
	4.21	0.08	0.08	-0.0096919	-0.0001771	-0.0001748
	3.29	0.07	0.06	-0.0075733	-0.0001639	-0.0001376
	2.42	0.06	0.06	-0.0055971	-0.0001466	-0.0001304
	1.63	0.04	0.04	-0.0037634	-0.0000926	-0.0000910
	0.90	0.01	0.02	-0.0020719	-0.0000338	-0.0000492
	0.23	0.01	0.01	-0.0005229	-0.0000267	-0.0000144
	-0.38	0.01	0.00	0.0008837	-0.0000129	0.0000090
	-0.93	-0.02	-0.02	0.0021479	0.0000476	0.0000522
	-1.41	-0.03	-0.03	0.0032697	0.0000758	0.0000600
	-1.83	-0.05	-0.04	0.0042492	0.0001058	0.0000880
	-2.19	-0.05	-0.05	0.0050862	0.0001164	0.0001063
	-2.49	-0.06	-0.05	0.0057809	0.0001351	0.0001265
	-2.72	-0.07	-0.07	0.0063332	0.0001728	0.0001554

... pokračovani

	kait	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
1 S 7	604.05	604.05	604.05	1.6554920	1.6554920	1.6554920	
	3.02	0.08	0.06	-0.0082415	-0.0002201	-0.0001691	
	2.43	0.07	0.06	-0.0066243	-0.0001886	-0.0001524	
	1.87	0.06	0.05	-0.0051117	-0.0001645	-0.0001267	
	1.35	0.05	0.04	-0.0037037	-0.0001276	-0.0001087	
	0.88	0.04	0.03	-0.0024005	-0.0001019	-0.0000786	
	0.44	0.02	0.02	-0.0012019	-0.0000675	-0.0000628	
	0.04	0.02	0.01	-0.0001079	-0.0000458	-0.0000303	
	-0.32	0.00	0.00	0.0008814	0.0000008	-0.0000055	
	-0.64	0.00	-0.01	0.0017650	0.0000061	0.0000299	
	-0.93	-0.03	-0.02	0.0025459	0.0000758	0.0000635	
	-1.17	-0.04	-0.03	0.0032212	0.0000993	0.0000818	
	-1.38	-0.05	-0.03	0.0037919	0.0001462	0.0000958	
	-1.55	-0.06	-0.05	0.0042578	0.0001698	0.0001302	
	-1.68	-0.07	-0.06	0.0046192	0.0001824	0.0001618	
	-1.77	-0.09	-0.06	0.0048758	0.0002356	0.0001710	
1 S 8	555.78	555.78	555.78	1.7992730	1.7992730	1.7992730	
	2.44	0.09	0.06	-0.0078528	-0.0002892	-0.0001959	
	2.01	0.08	0.05	-0.0064821	-0.0002678	-0.0001482	
	1.61	0.06	0.04	-0.0051916	-0.0001852	-0.0001350	
	1.23	0.05	0.03	-0.0039812	-0.0001635	-0.0001092	
	0.88	0.04	0.03	-0.0028510	-0.0001289	-0.0001006	
	0.56	0.03	0.03	-0.0018010	-0.0001077	-0.0000815	
	0.26	0.03	0.02	-0.0008312	-0.0000817	-0.0000616	
	-0.02	0.02	0.01	0.0000585	-0.0000700	-0.0000371	
	-0.27	0.01	0.00	0.0008680	-0.0000356	-0.0000041	
	-0.49	-0.01	-0.01	0.0015973	0.0000185	0.0000212	
	-0.69	-0.02	-0.01	0.0022464	0.0000515	0.0000348	
	-0.87	-0.04	-0.02	0.0028154	0.0001159	0.0000724	
	-1.02	-0.04	-0.03	0.0033041	0.0001262	0.0000959	
	-1.14	-0.06	-0.04	0.0037127	0.0002017	0.0001398	
	-1.25	-0.07	-0.04	0.0040411	0.0002187	0.0001434	
	-1.32	-0.09	-0.05	0.0042894	0.0002975	0.0001722	
	-1.37	-0.09	-0.06	0.0044574	0.0002986	0.0001935	
1 S 9	509.23	509.23	509.23	1.9637490	1.9637490	1.9637490	
	2.05	0.10	0.05	-0.0078850	-0.0003851	-0.0002046	
	1.73	0.10	0.05	-0.0066578	-0.0003725	-0.0001863	
	1.43	0.06	0.04	-0.0054944	-0.0002362	-0.0001704	
	1.14	0.06	0.04	-0.0043950	-0.0002132	-0.0001489	
	0.87	0.04	0.03	-0.0033594	-0.0001651	-0.0001087	
	0.62	0.04	0.02	-0.0023878	-0.0001521	-0.0000757	
	0.38	0.04	0.02	-0.0014800	-0.0001377	-0.0000690	
	0.17	0.03	0.01	-0.0006361	-0.0001232	-0.0000539	
	-0.04	0.02	0.01	0.0001439	-0.0000817	-0.0000367	
	-0.22	0.01	0.00	0.0008600	-0.0000238	-0.0000068	
	-0.39	0.00	0.00	0.0015122	0.0000027	0.0000106	
	-0.54	-0.02	-0.01	0.0021005	0.0000642	0.0000319	
	-0.68	-0.02	-0.01	0.0026249	0.0000822	0.0000396	
	-0.80	-0.05	-0.02	0.0030854	0.0001751	0.0000836	
	-0.90	-0.05	-0.02	0.0034820	0.0001877	0.0000859	
	-0.99	-0.07	-0.05	0.0038148	0.0002662	0.0001862	
	-1.06	-0.07	-0.05	0.0040836	0.0002821	0.0001943	
	-1.11	-0.11	-0.05	0.0042886	0.0004076	0.0002014	
	-1.15	-0.11	-0.06	0.0044296	0.0004227	0.0002275	

.... pokračovani

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
1 S 10	465.45	465.45	465.45	2.1484580	2.1484580	2.1484580
	1.74	0.11	0.05	-0.0079818	-0.0004912	-0.0002522
	1.49	0.10	0.05	-0.0068544	-0.0004815	-0.0002400
	1.26	0.07	0.04	-0.0057806	-0.0003144	-0.0001905
	1.03	0.06	0.04	-0.0047604	-0.0002980	-0.0001791
	0.82	0.05	0.02	-0.0037938	-0.0002083	-0.0001090
	0.62	0.04	0.02	-0.0028807	-0.0001897	-0.0001017
	0.44	0.04	0.02	-0.0020212	-0.0001839	-0.0000936
	0.26	0.04	0.02	-0.0012154	-0.0001670	-0.0000839
	0.10	0.02	0.01	-0.0004531	-0.0001125	-0.0000540
	-0.05	0.02	0.01	0.0002357	-0.0000817	-0.0000280
	-0.19	0.01	0.00	0.0008908	-0.0000491	0.0000017
	-0.32	-0.01	0.00	0.0014723	0.0000253	0.0000176
	-0.44	-0.01	-0.01	0.0020103	0.0000441	0.0000296
	-0.54	-0.02	-0.01	0.0024947	0.0001141	0.0000384
	-0.63	-0.03	-0.01	0.0029255	0.0001265	0.0000455
	-0.71	-0.05	-0.02	0.0033027	0.0002501	0.0001060
	-0.78	-0.06	-0.02	0.0036263	0.0002564	0.0001072
	-0.84	-0.07	-0.05	0.0038964	0.0003395	0.0002297
	-0.89	-0.07	-0.05	0.0041128	0.0003423	0.0002462
	-0.92	-0.11	-0.05	0.0042757	0.0005303	0.0002481
	-0.95	-0.12	-0.06	0.0043850	0.0005476	0.0002610

Tab.4.6. Stupeni degenerovanych sferoidalnich kmitu nS2 modelu PREM
 vlivem denni rotace a lateralnich nehomogenit hustoty
 (modely Cadek, Matyska podle Morelli, Dziewonski - MD,
 a podle Doornbos, Hilton - DH)

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
0 S 2	3233.58	3233.58	3233.58	0.3092547	0.3092547	0.3092547
	102.87	0.56	0.32	-0.0095346	-0.0000537	-0.0000310
	50.57	0.22	0.19	-0.0047617	-0.0000213	-0.0000183
	0.99	-0.03	0.00	-0.0000949	0.0000030	-0.0000003
	-46.03	-0.27	-0.05	0.0044657	0.0000263	0.0000044
	-90.65	-0.48	-0.47	0.0089201	0.0000458	0.0000452
1 S 2	1471.20	1471.20	1471.20	0.6797172	0.6797172	0.6797172
	13.56	0.12	0.12	-0.0062068	-0.0000540	-0.0000536
	5.72	0.07	0.08	-0.0026312	-0.0000318	-0.0000350
	-0.99	0.02	0.01	0.0004567	-0.0000110	-0.0000059
	-6.59	-0.08	-0.08	0.0030568	0.0000376	0.0000365
	-11.10	-0.13	-0.13	0.0051692	0.0000592	0.0000590
2 S 2	1065.94	1065.94	1065.94	0.9381391	0.9381391	0.9381391
	3.41	0.01	0.01	-0.0029876	-0.0000090	-0.0000045
	1.28	0.00	0.00	-0.0011223	-0.0000041	-0.0000033
	-0.43	0.00	0.00	0.0003791	-0.0000007	-0.0000014
	-1.72	-0.01	0.00	0.0015166	0.0000056	0.0000028
	-2.60	-0.01	-0.01	0.0022903	0.0000073	0.0000064
3 S 2	904.04	904.04	904.04	1.1061460	1.1061460	1.1061460
	3.21	0.03	0.03	-0.0039185	-0.0000354	-0.0000332
	1.04	0.02	0.02	-0.0012715	-0.0000261	-0.0000270
	-0.56	0.01	0.01	0.0006911	-0.0000091	-0.0000112
	-1.61	-0.02	-0.02	0.0019691	0.0000247	0.0000241
	-2.09	-0.04	-0.04	0.0023627	0.0000469	0.0000473
4 S 2	580.58	580.58	580.58	1.7224150	1.7224150	1.7224150
	1.31	0.09	0.05	-0.0039796	-0.0002791	-0.0001497
	0.27	0.03	0.01	-0.0007966	-0.0000936	-0.0000346
	-0.39	-0.02	0.01	0.0011470	0.0000509	-0.0000185
	-0.54	-0.03	-0.02	0.0016158	0.0001029	0.0000594
	-0.66	-0.07	-0.05	0.0019511	0.0002189	0.0001434
5 S 2	478.17	478.17	478.17	2.0913060	2.0913060	2.0913060
	0.90	0.03	0.02	-0.0039243	-0.0001420	-0.0000935
	0.21	0.03	0.01	-0.0009040	-0.0001241	-0.0000425
	-0.24	0.01	0.01	0.0010609	-0.0000233	-0.0000308
	-0.42	-0.03	-0.01	0.0018246	0.0001329	0.0000603
	-0.45	-0.04	-0.02	0.0019704	0.0001564	0.0001066
6 S 2	414.71	414.71	414.71	2.4113240	2.4113240	2.4113240
	0.58	0.00	0.00	-0.0033756	-0.0000077	-0.0000059
	0.21	0.00	0.00	-0.0012139	-0.0000063	-0.0000037
	-0.08	0.00	0.00	0.0004762	-0.0000025	-0.0000017
	-0.29	0.00	0.00	0.0016947	0.0000068	0.0000040
	-0.42	0.00	0.00	0.0024416	0.0000096	0.0000074
7 S 2	397.20	397.20	397.20	2.5176230	2.5176230	2.5176230
	0.33	0.02	0.01	-0.0020928	-0.0001374	-0.0000618
	0.09	0.01	0.01	-0.0005432	-0.0000824	-0.0000434
	-0.05	0.00	0.00	0.0002930	-0.0000153	-0.0000304
	-0.17	-0.02	-0.01	0.0010678	0.0000995	0.0000539
	-0.21	-0.02	-0.01	0.0013465	0.0001355	0.0000817

... pokračovani

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
8 S 2	311.06	311.06	311.06	3.2148140	3.2148140	3.2148140
	0.28	0.01	0.01	-0.0028990	-0.0001529	-0.0001137
	0.03	0.01	0.01	-0.0003533	-0.0001264	-0.0000711
	-0.02	0.01	0.00	0.0001907	-0.0000537	-0.0000384
	-0.14	-0.01	-0.01	0.0014636	0.0001407	0.0000795
	-0.16	-0.02	-0.01	0.0016449	0.0001923	0.0001437
9 S 2	309.37	309.37	309.37	3.2323760	3.2323760	3.2323760
	0.43	0.04	0.02	-0.0050024	-0.0003804	-0.0002197
	0.05	0.01	0.01	-0.0005227	-0.0001331	-0.0000899
	-0.10	0.00	0.00	0.0010545	0.0000302	-0.0000153
	-0.19	-0.02	-0.01	0.0019800	0.0001806	0.0001292
	-0.24	-0.03	-0.02	0.0025057	0.0003027	0.0001958
10 S 2	247.93	247.93	247.93	4.0333970	4.0333970	4.0333970
	0.21	0.01	0.01	-0.0034863	-0.0002054	-0.0001167
	0.02	0.01	0.00	-0.0002915	-0.0000826	-0.0000668
	-0.01	0.00	0.00	0.0001555	0.0000155	-0.0000024
	-0.11	-0.01	0.00	0.0017530	0.0000965	0.0000121
	-0.12	-0.01	-0.01	0.0019020	0.0001760	0.0001739
11 S 2	246.33	246.33	246.33	4.0595950	4.0595950	4.0595950
	0.23	0.01	0.01	-0.0037878	-0.0001548	-0.0000868
	0.02	0.00	0.00	-0.0003813	-0.0000615	-0.0000487
	-0.05	0.00	0.00	0.0007751	0.0000133	-0.0000010
	-0.09	0.00	0.00	0.0015149	0.0000733	0.0000090
	-0.12	-0.01	-0.01	0.0019007	0.0001297	0.0001275

Tab.4.7. Stepeni degenerovanych sferoidalnich kmitu n53 modelu PREM
 vlivem denni rotace a laterálních nehomogenit hustoty
 (modely Cadec, Matyska podle Morelli, Dziewonski - MD,
 a podle Doornbos, Hilton - DH)

kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
0 S 3	2134.47	2134.47	2134.47	0.4685004	0.4685004	0.4685004
	31.21	0.28	0.26	-0.0067525	-0.0000611	-0.0000571
	20.48	0.19	0.18	-0.0044527	-0.0000425	-0.0000405
	10.10	0.17	0.05	-0.0022060	-0.0000370	-0.0000104
	0.06	0.04	-0.02	-0.0000125	-0.0000098	0.0000053
	-9.65	-0.16	-0.10	0.0021278	0.0000360	0.0000224
	-19.03	-0.23	-0.15	0.0042149	0.0000498	0.0000328
	-28.09	-0.29	-0.22	0.0062489	0.0000647	0.0000475
1 S 3	1064.31	1064.31	1064.31	0.9395759	0.9395759	0.9395759
	9.67	0.07	0.08	-0.0084619	-0.0000635	-0.0000675
	5.73	0.07	0.07	-0.0050312	-0.0000622	-0.0000602
	2.25	0.03	0.03	-0.0019815	-0.0000259	-0.0000220
	-0.78	0.01	0.01	0.0006873	-0.0000076	-0.0000083
	-3.36	-0.02	-0.01	0.0029751	0.0000139	0.0000120
	-5.50	-0.07	-0.07	0.0048819	0.0000606	0.0000596
	-7.21	-0.10	-0.10	0.0064077	0.0000849	0.0000865
2 S 3	805.18	805.18	805.18	1.2419580	1.2419580	1.2419580
	2.26	0.05	0.05	-0.0034775	-0.0000722	-0.0000707
	1.08	0.03	0.03	-0.0016565	-0.0000454	-0.0000464
	0.15	0.02	0.02	-0.0002315	-0.0000259	-0.0000238
	-0.52	0.01	0.01	0.0007973	-0.0000206	-0.0000204
	-0.93	-0.01	-0.01	0.0014300	0.0000171	0.0000143
	-0.98	-0.04	-0.04	0.0015072	0.0000595	0.0000592
	-1.08	-0.06	-0.06	0.0016667	0.0000876	0.0000878
3 S 3	705.41	705.41	705.41	1.4176150	1.4176150	1.4176150
	1.29	0.00	0.00	-0.0025874	-0.0000035	-0.0000022
	0.65	0.00	0.00	-0.0012985	-0.0000025	-0.0000018
	0.13	0.00	0.00	-0.0002634	-0.0000017	-0.0000008
	-0.26	0.00	0.00	0.0005179	0.0000000	-0.0000005
	-0.52	0.00	0.00	0.0010454	0.0000009	0.0000005
	-0.66	0.00	0.00	0.0013190	0.0000031	0.0000022
	-0.67	0.00	0.00	0.0013387	0.0000037	0.0000026
4 S 3	487.98	487.98	487.98	2.0492640	2.0492640	2.0492640
	1.01	0.06	0.04	-0.0042298	-0.0002348	-0.0001568
	0.40	0.05	0.03	-0.0016950	-0.0002002	-0.0001414
	-0.04	0.03	0.02	0.0001655	-0.0001349	-0.0000878
	-0.21	0.00	-0.01	0.0008631	0.0000144	0.0000216
	-0.32	-0.02	-0.02	0.0013515	0.0000884	0.0000650
	-0.40	-0.05	-0.03	0.0017003	0.0002140	0.0001343
	-0.44	-0.06	-0.04	0.0018531	0.0002531	0.0001650
5 S 3	460.91	460.91	460.91	2.1696210	2.1696210	2.1696210
	0.84	0.05	0.03	-0.0039593	-0.0002451	-0.0001470
	0.33	0.04	0.02	-0.0015539	-0.0001762	-0.0001056
	-0.04	0.02	0.01	0.0002009	-0.0001154	-0.0000625
	-0.15	0.00	0.01	0.0007145	0.0000023	-0.0000358
	-0.28	-0.01	-0.01	0.0013052	0.0000573	0.0000444
	-0.33	-0.05	-0.03	0.0015620	0.0002165	0.0001425
	-0.37	-0.06	-0.03	0.0017589	0.0002606	0.0001639

... pokračovani

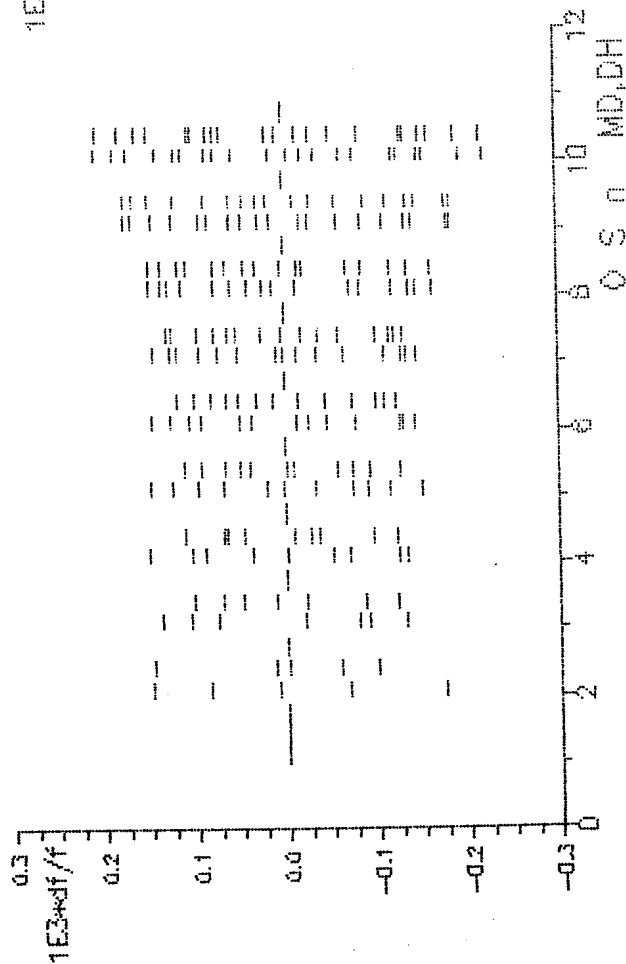
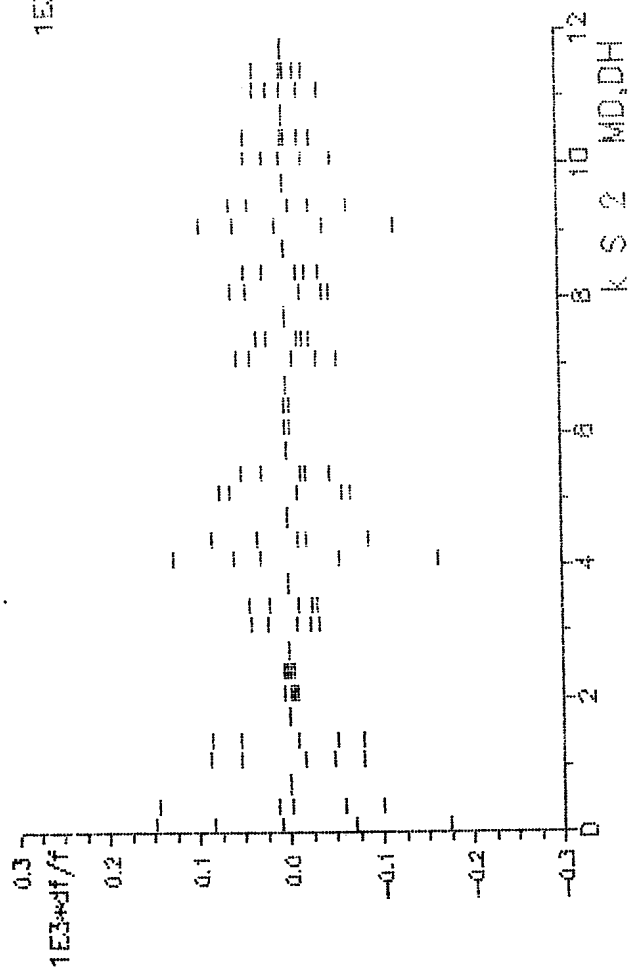
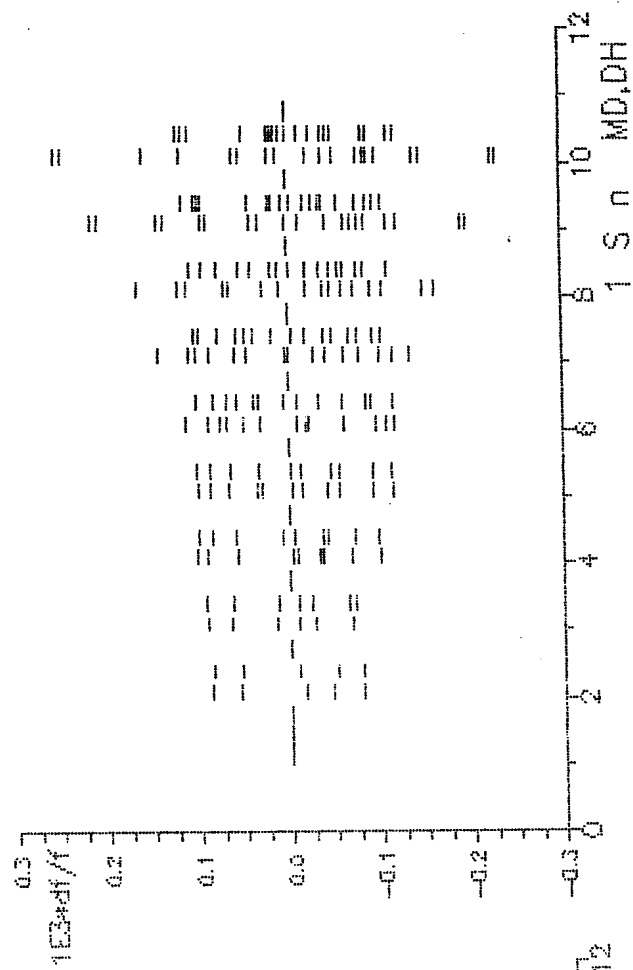
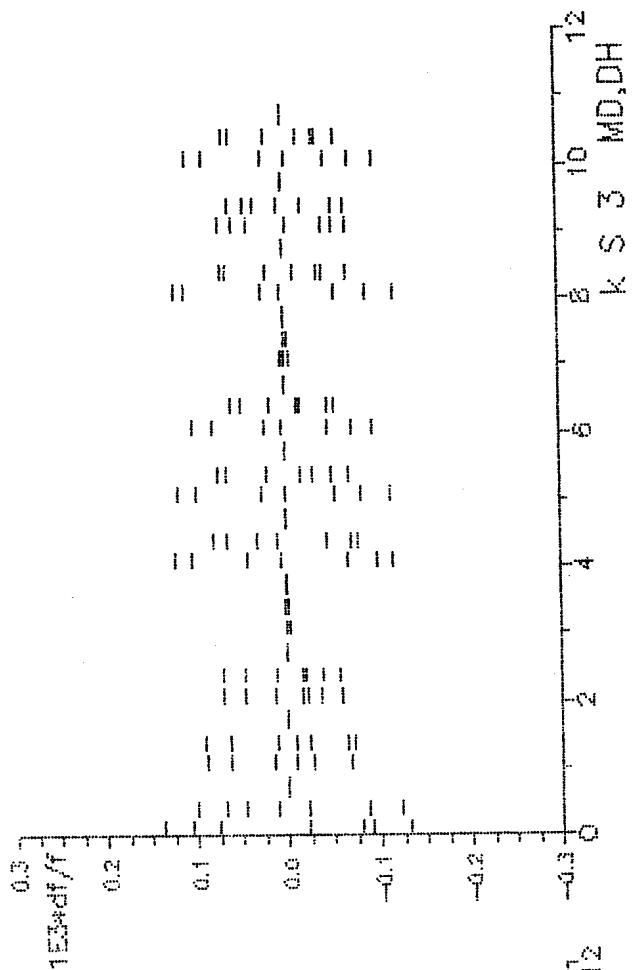
kmit	rotace [s]	MD [s]	DH [s]	rotace [mHz]	MD [mHz]	DH [mHz]
6 S 3	354.35	354.35	354.35	2.8220680	2.8220680	2.8220680
	0.29	0.03	0.02	-0.0023144	-0.0002640	-0.0001516
	0.19	0.03	0.02	-0.0014861	-0.0002016	-0.0001275
	0.03	0.02	0.01	-0.0002579	-0.0001295	-0.0000469
	-0.04	0.00	0.00	0.0002943	0.0000149	-0.0000371
	-0.13	-0.01	-0.01	0.0010312	0.0000652	0.0000512
	-0.16	-0.03	-0.02	0.0013073	0.0002258	0.0001400
	-0.19	-0.04	-0.02	0.0015529	0.0002892	0.0001719
7 S 3	324.35	324.35	324.35	3.0830890	3.0830890	3.0830890
	0.37	0.00	0.00	-0.0035367	-0.0000139	-0.0000082
	0.16	0.00	0.00	-0.0014844	-0.0000106	-0.0000070
	0.00	0.00	0.00	0.0000445	-0.0000068	-0.0000024
	-0.10	0.00	0.00	0.0009267	0.0000006	-0.0000019
	-0.11	0.00	0.00	0.0010500	0.0000035	0.0000025
	-0.16	0.00	0.00	0.0014911	0.0000120	0.0000076
	-0.16	0.00	0.00	0.0015323	0.0000152	0.0000093
8 S 3	304.50	304.50	304.50	3.2840720	3.2840720	3.2840720
	0.49	0.04	0.02	-0.0052486	-0.0003872	-0.0002207
	0.17	0.03	0.01	-0.0018747	-0.0002891	-0.0001350
	-0.03	0.02	0.01	0.0003767	-0.0001824	-0.0001197
	-0.05	0.00	0.00	0.0005247	0.0000163	-0.0000319
	-0.17	-0.01	-0.01	0.0018755	0.0000827	0.0000659
	-0.18	-0.03	-0.02	0.0019495	0.0003641	0.0002111
	-0.22	-0.04	-0.02	0.0023998	0.0003958	0.0002303
9 S 3	281.23	281.23	281.23	3.5558080	3.5558080	3.5558080
	0.26	0.02	0.02	-0.0033448	-0.0002390	-0.0002376
	0.17	0.02	0.02	-0.0022045	-0.0001916	-0.0001912
	0.03	0.01	0.01	-0.0003700	-0.0001507	-0.0000729
	-0.03	0.00	0.00	0.0003903	-0.0000108	0.0000194
	-0.12	-0.01	-0.01	0.0014910	0.0001407	0.0001136
	-0.15	-0.02	-0.01	0.0018711	0.0002005	0.0001557
	-0.18	-0.02	-0.02	0.0022380	0.0002509	0.0002129
10 S 3	232.44	232.44	232.44	4.3021860	4.3021860	4.3021860
	0.26	0.02	0.01	-0.0048427	-0.0004220	-0.0002471
	0.02	0.02	0.01	-0.0014232	-0.0003050	-0.0001586
	0.06	0.01	0.01	-0.0011355	-0.0001936	-0.0001397
	-0.06	0.00	0.00	0.0011441	-0.0000160	-0.0000697
	-0.07	-0.01	0.00	0.0013167	0.0001003	0.0000813
	-0.13	-0.02	-0.01	0.0024566	0.0003749	0.0002492
	-0.14	-0.02	-0.02	0.0025141	0.0004514	0.0002846

Tab.4.8. Relativni sirka multiplētu toroidalnich kmitu 0T1 a 1T1, stepenych vlivem rotace a lateralnich nehomogenit hustoty

n	l	rotace	MD	DH	n	l	rotace	MD	DH
0	2	0.007415	0.000073	0.000070	1	2	0.002098	0.000130	0.000085
0	3	0.003524	0.000058	0.000058	1	3	0.001419	0.000099	0.000053
0	4	0.002220	0.000074	0.000074	1	4	0.001065	0.000125	0.000070
0	5	0.001622	0.000085	0.000084	1	5	0.000865	0.000135	0.000077
0	6	0.001301	0.000110	0.000107	1	6	0.000749	0.000135	0.000082
0	7	0.001110	0.000119	0.000114	1	7	0.000684	0.000125	0.000080
0	8	0.000987	0.000128	0.000121	1	8	0.000647	0.000113	0.000079
0	9	0.000903	0.000138	0.000129	1	9	0.000626	0.000103	0.000078
0	10	0.000843	0.000146	0.000136	1	10	0.000612	0.000095	0.000079
0	11	0.000799	0.000145	0.000133	0	21	0.000633	0.000172	0.000175
0	12	0.000765	0.000152	0.000139	0	22	0.000625	0.000194	0.000177
0	13	0.000739	0.000158	0.000144	0	23	0.000619	0.000197	0.000180
0	14	0.000717	0.000164	0.000150	0	24	0.000613	0.000199	0.000182
0	15	0.000699	0.000169	0.000154	0	25	0.000608	0.000201	0.000183
0	16	0.000684	0.000174	0.000159	0	26	0.000603	0.000203	0.000185
0	17	0.000671	0.000178	0.000163	0	27	0.000598	0.000205	0.000187
0	18	0.000659	0.000182	0.000166	0	28	0.000594	0.000206	0.000188
0	19	0.000649	0.000186	0.000169	0	29	0.000590	0.000208	0.000190
0	20	0.000641	0.000189	0.000172	0	30	0.000586	0.000209	0.000191

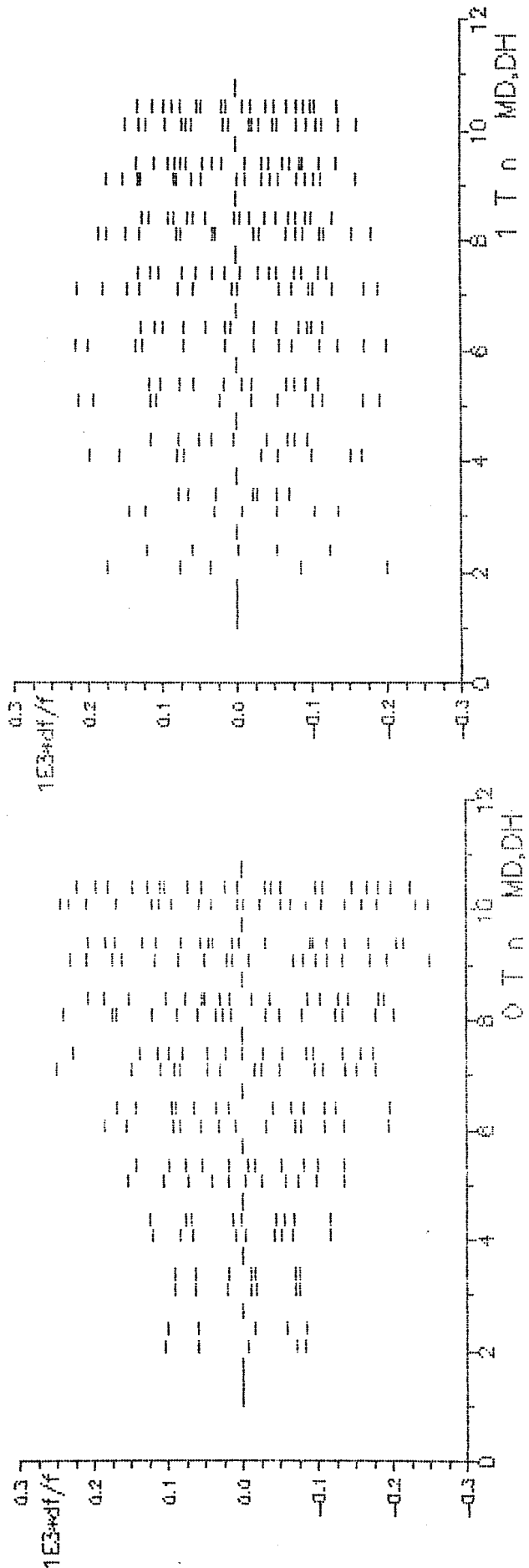
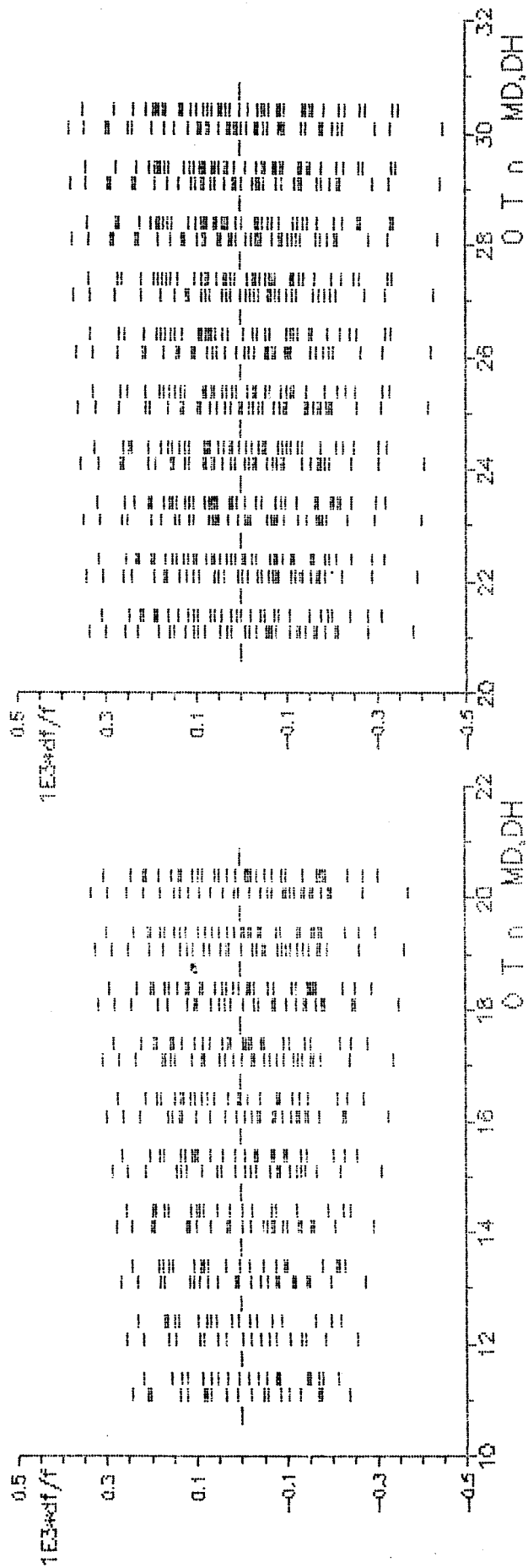
Tab.4.9. Relativni sirka multiplētu sferoidalnich kmitu 0S1, 1S1, nS2 a nS3, stepenych vlivem rotace a lateralnich nehomogenit hustoty

n	l	rotace	MD	DH	n	l	rotace	MD	DH
0	2	0.021110	0.000113	0.000084	1	2	0.005948	0.000062	0.000062
0	3	0.009256	0.000099	0.000076	1	3	0.005322	0.000056	0.000057
0	4	0.004748	0.000096	0.000074	1	4	0.005080	0.000066	0.000066
0	5	0.002685	0.000097	0.000075	1	5	0.004592	0.000068	0.000068
0	6	0.001572	0.000097	0.000080	1	6	0.003335	0.000075	0.000069
0	7	0.000894	0.000097	0.000088	1	7	0.002501	0.000085	0.000067
0	8	0.000537	0.000101	0.000099	1	8	0.002149	0.000100	0.000065
0	9	0.000510	0.000113	0.000114	1	9	0.001958	0.000120	0.000068
0	10	0.000583	0.000127	0.000127	1	10	0.001790	0.000136	0.000072
0	2	0.021110	0.000113	0.000084	0	3	0.009256	0.000099	0.000076
1	2	0.005948	0.000062	0.000062	1	3	0.005322	0.000056	0.000057
2	2	0.002015	0.000006	0.000004	2	3	0.001447	0.000043	0.000043
3	2	0.002135	0.000028	0.000028	3	3	0.000974	0.000002	0.000001
4	2	0.001256	0.000100	0.000057	4	3	0.001006	0.000089	0.000059
5	2	0.001060	0.000060	0.000035	5	3	0.000886	0.000082	0.000051
6	2	0.000868	0.000003	0.000002	6	3	0.000481	0.000069	0.000041
7	2	0.000493	0.000041	0.000023	7	3	0.000565	0.000003	0.000002
8	2	0.000509	0.000044	0.000030	8	3	0.000768	0.000086	0.000049
9	2	0.000837	0.000074	0.000046	9	3	0.000553	0.000052	0.000045
10	2	0.000483	0.000033	0.000024	10	3	0.000570	0.000072	0.000045
11	2	0.000505	0.000025	0.000018					

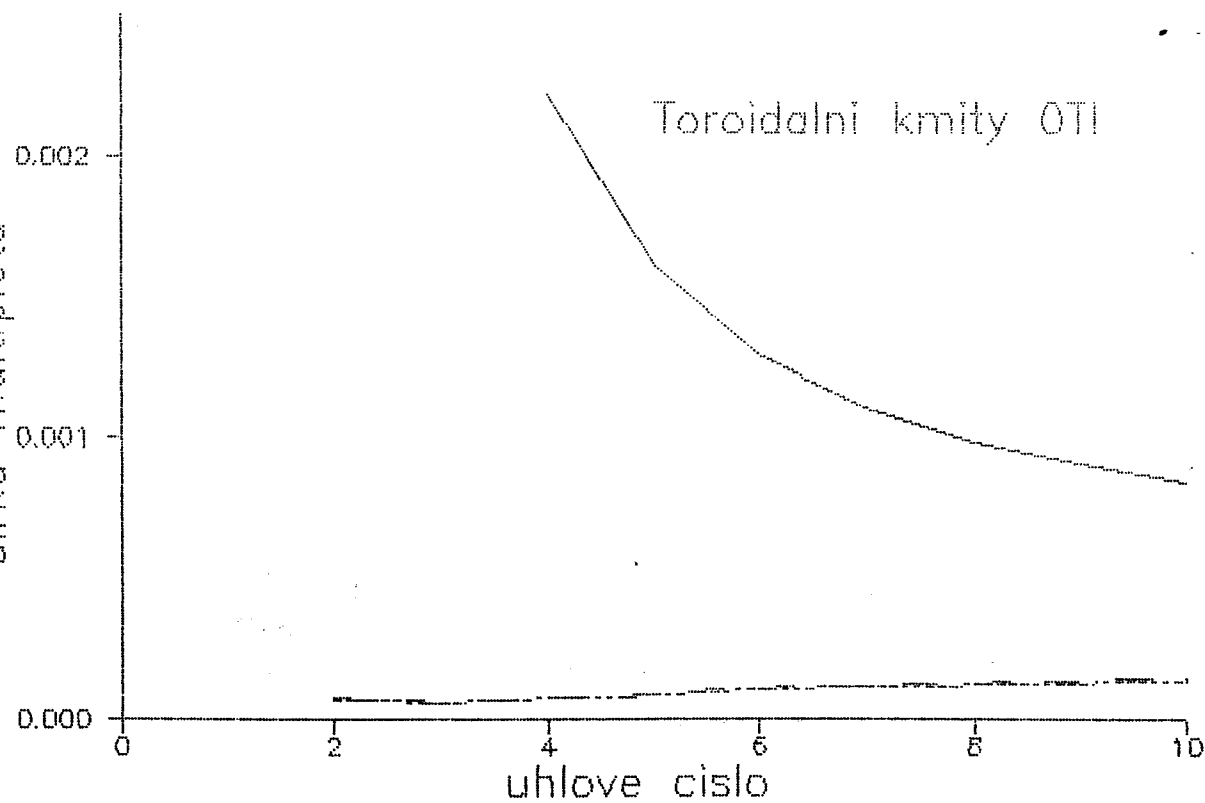
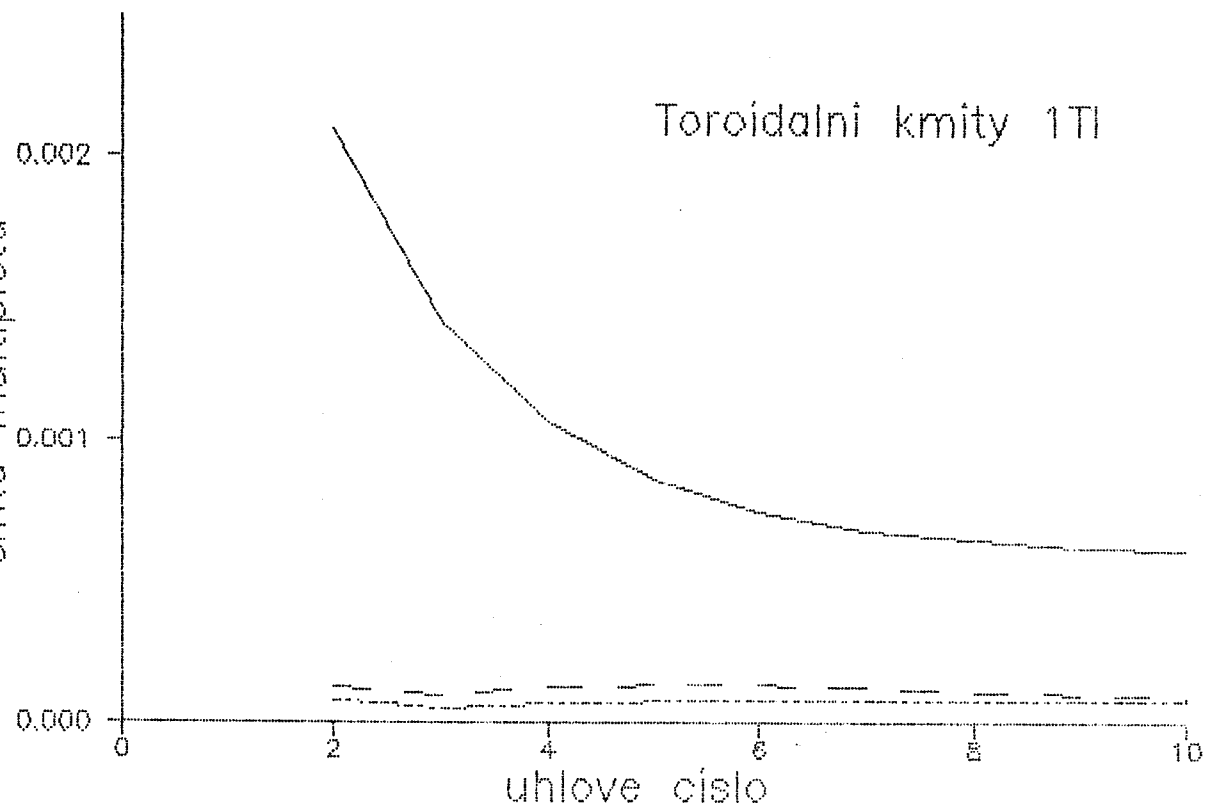


Obr.4.1. Poměr frekvenční odchylky ku degenerované frekvenci pro sferoidální módy,

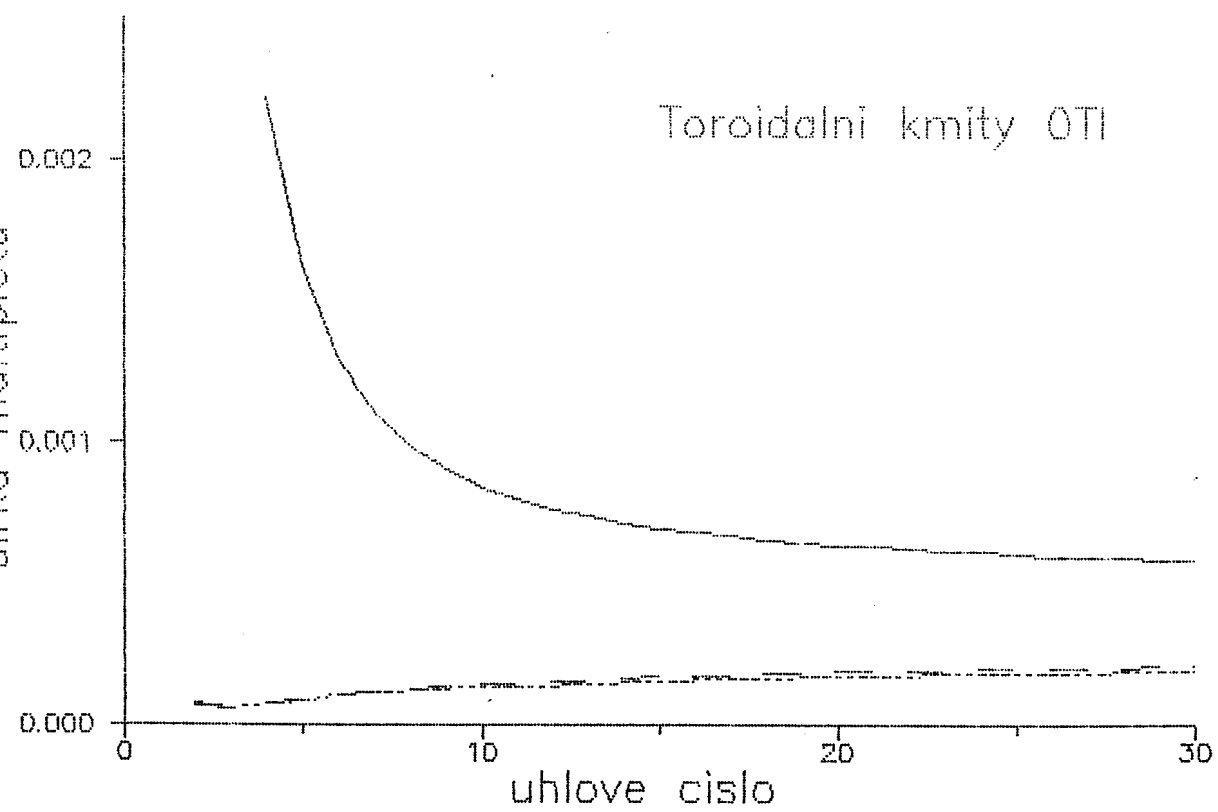
x-osa úhlové číslo, y-osa poměr [10^{-3}]



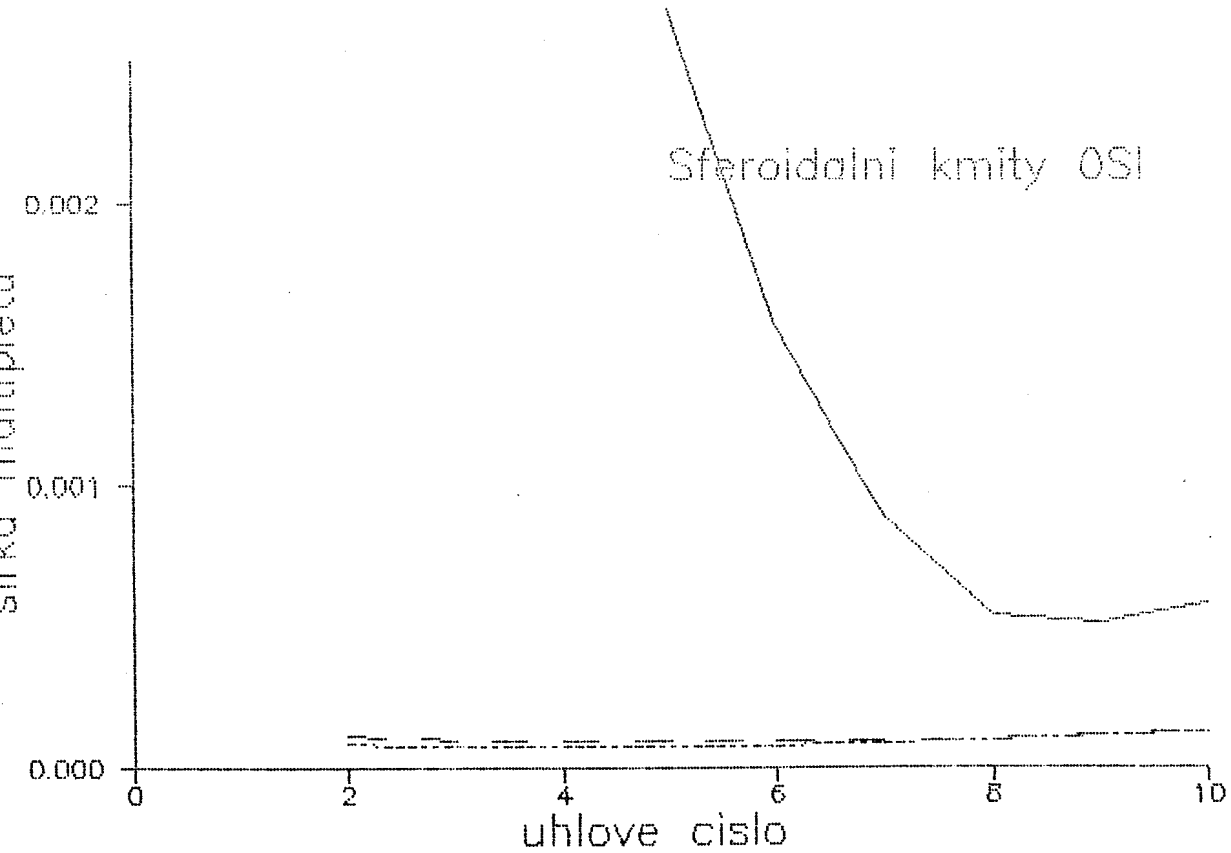
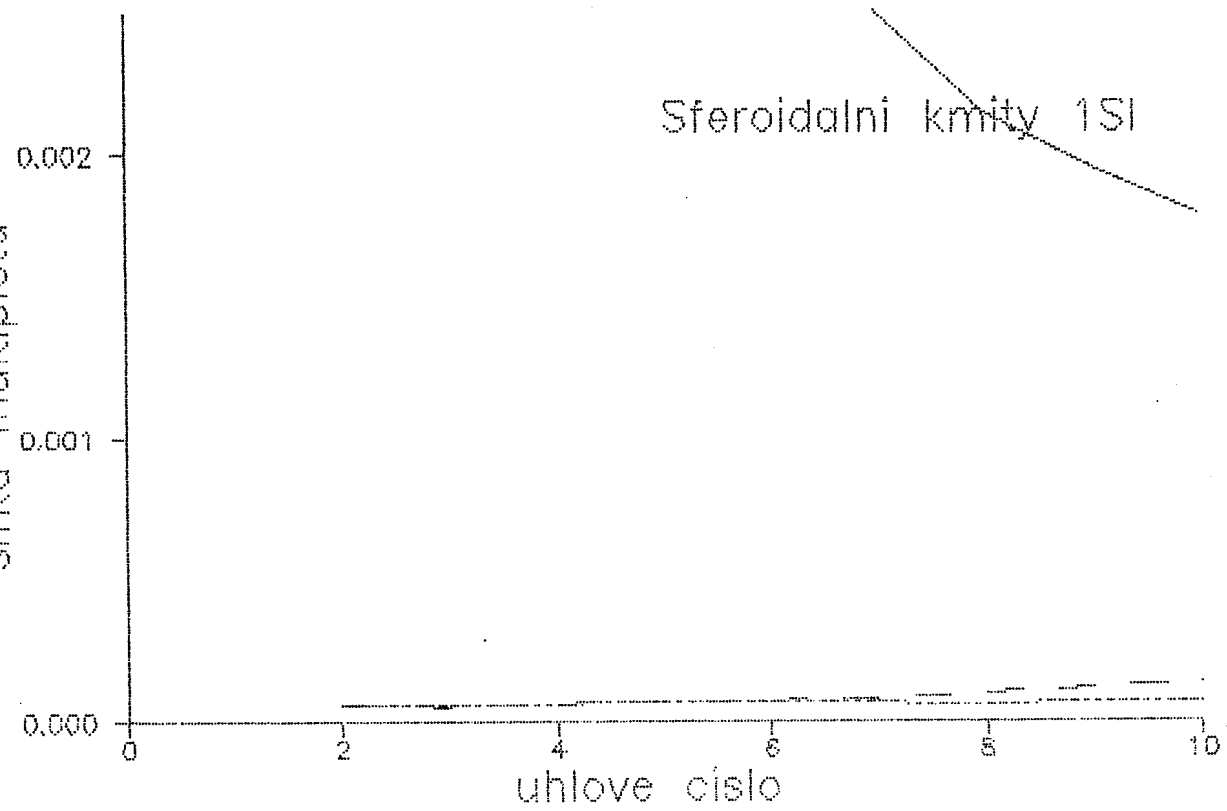
Obr.4.2. Totéž jako obr.4.1 pro toroidální módy



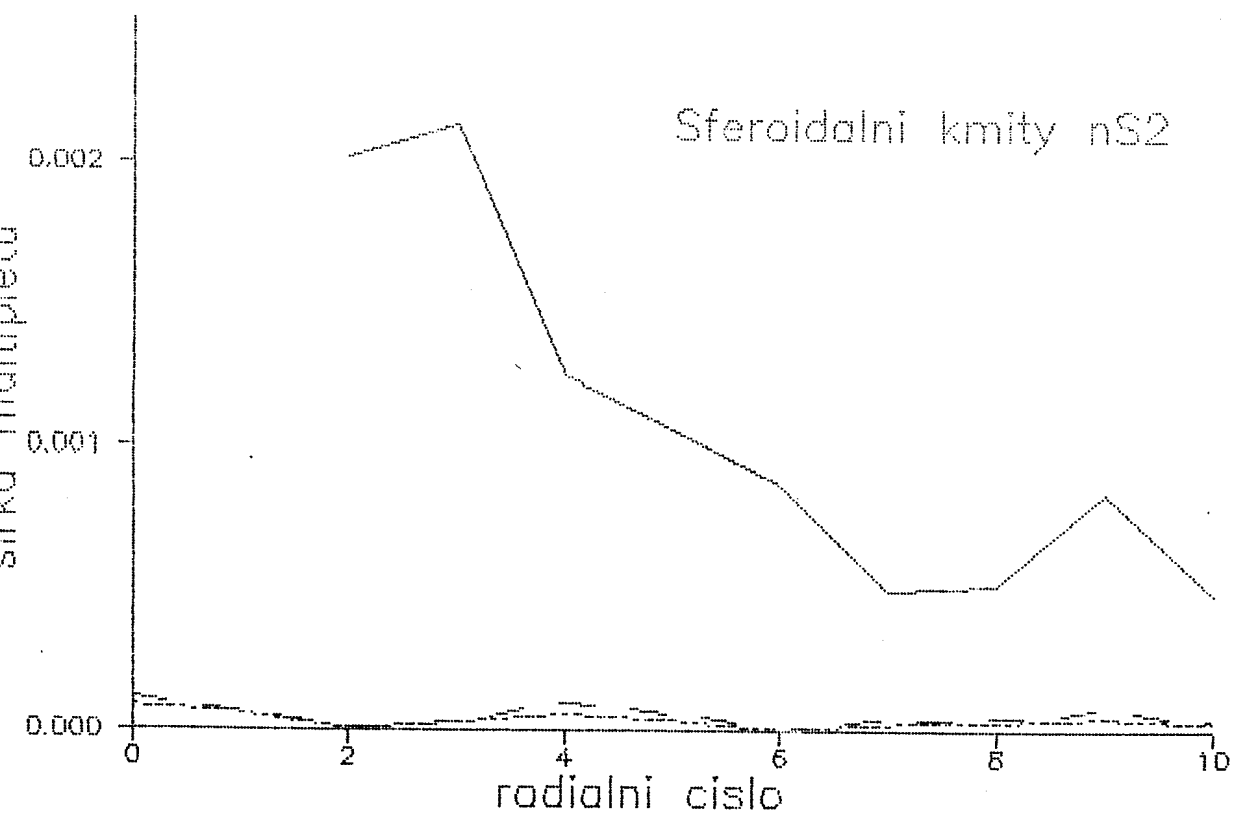
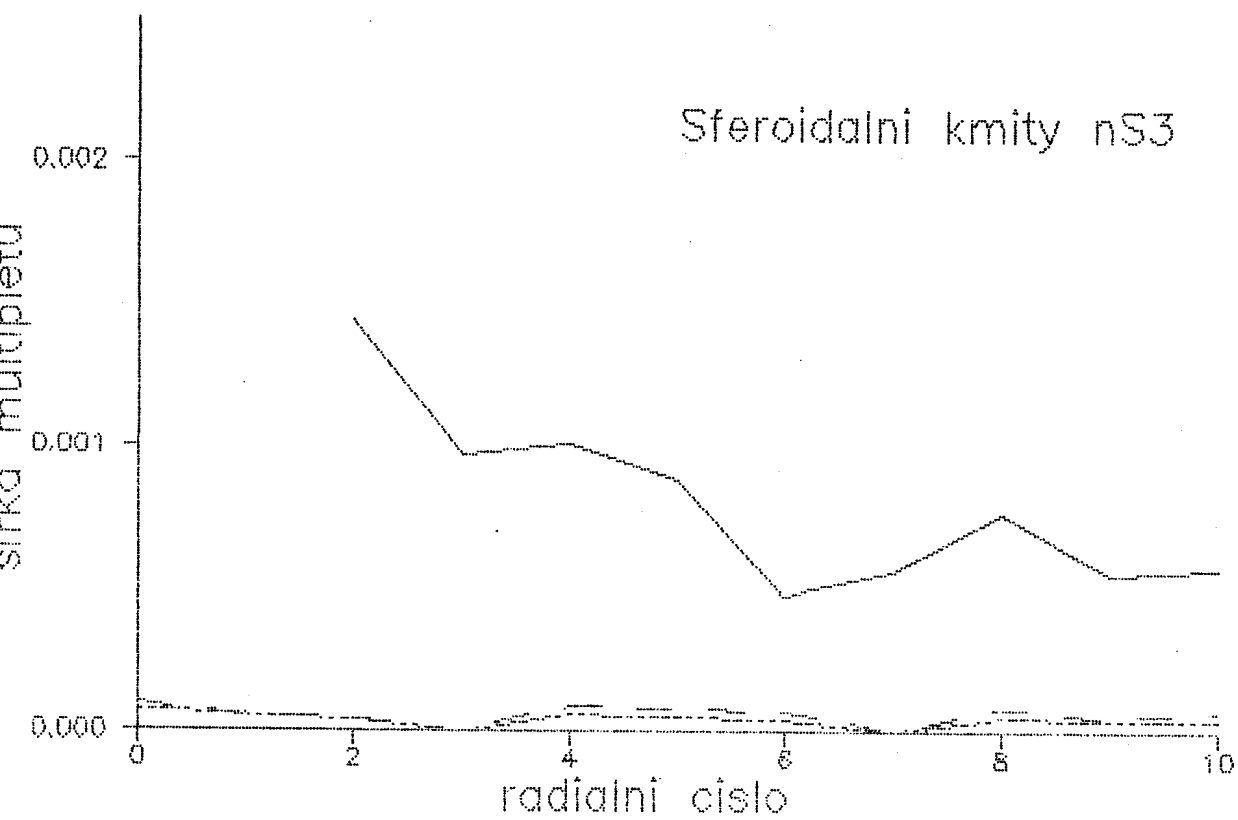
Obr.4.3. Relativní šířka multipletu pro toroidální módy, štěpení vlivem rotace (plná čára) a modelů MD (dlouhé čárky) a DH (krátké čárky), x-osa úhlové číslo, y-osa $\Delta\omega/\hat{\omega}_0$



Obr.4.4. Totéž jako obr.4.3.



Obr.4.5. Relativní šířka multiplietu pro sféroidální módy, štěpení vlivem rotace (plná čára) a modelů MD (dlouhé čárky) a DH (krátké čárky), x-osa úhlové číslo, y-osa $\Delta\omega/\hat{\omega}_0$



Obr.4.6. Totéž jako obr.4.5, x-osa radiální číslo

5. ZÁVĚREM

Prakticky užitečnou se nám jeví "1-D část" naší práce - část věnovaná SNREI. Ukázali jsme zaprvé, jakým způsobem klasifikovat sféroidální kmity radiálním číslem. Ztotožnění radiálního čísla a počtu nulových bodů vlastních funkcí je totiž správné jen v případě toroidálních a radiálních módů; "zobecnování" i na kmity sféroidální patří k "mýtům", živořícím někde na okraji geofyzikálního podvědomí a občas v nestřežených chvílích vystrkujícím růžky (např. v Bullenovi 1975, v ruském překladu str.315). A za druhé jsme "zprovozuschopnili" metodu výpočtu frekvencí a vlastních funkcí radiálních kmitů, uvedenou v Martincovi (1984).

Prvotním záměrem naší práce však bylo ohodnotit příspěvek 3-D modelů laterálních nehomogenit hustoty ke štěpení vlastních módů. Chtěli jsme přitom sledovat, jaká je "rozlišovací schopnost" rozštěpených multipletů pro různé hustotní modely. Shledali jsme, že alespoň v nízkofrekvenční oblasti hraje zcela dominantní roli rotace s hydrostatickou elipticitou; vysokofrekvenční oblast zůstala našemu hardware uzavřena. Přitom dva různé hustotní modely "štěpily" takřka stejně, což ovšem může souviset s tím, že oba nebyly až tolik různé.

Ukázalo se, že kruciální obtíží je nedostatek dat. Nikde se nehovoří o struktuře multipletů; když už, tak o jejich šířce nebo nesouměrnosti. Naznačili jsme, že snaha zpřesňovat data může být limitována i jinak než jen úrovní techniky.

Význam "3-D části" naší práce spočívá tedy v již zmíněném - jde o numerické ocenění hustotního příspěvku k rozštěpení degenerovaných multipletů a predikci spektra vlastních kmitů modelu LHREI, ovšem s nulovými perturbacemi topografií.

6. LITERATURA 1)

- Backus, G. E. & Gilbert, F. (1961), The rotational splitting of the free oscillations of the Earth, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **47**, 362-371.
- Bullen, K. E. (1975), *The earth's density*, Chapman and Hall, London (ruský překlad Mir, Moskva, 1978).
- Čadek, O. & Matyska, C. (1988), Gravitační účinek rozhraní plášť - jádro, *Problémy současné gravimetrie*, sborník referátů z celostátního semináře 3.-7. 10. 88 v Liblicích, 119-126.
- Čadek, O. & Matyska, C. (1989), Three-dimensional modelling convection in the Earth's mantle: influence of the core-mantle boundary, *Studia geoph. et geod.*, v tisku.
- Dahlen, F. A. (1968), The normal modes of a rotating, elliptical earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **16**, 329-367.
- Dahlen, F. A. (1969), The normal modes of a rotating, elliptical earth-II near-resonance multiplet coupling, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **18**, 397-436.
- Dahlen, F. A. (1972), Elastic dislocation theory for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **28**, 357-383.
- Dahlen, F. A. (1974), Inference of the lateral heterogeneity of the Earth from the eigenfrequency spectrum: a linear inverse problem, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **38**, 143-167.

1) Zde neuvedené citace, volané z kap.1.2, viz Bullen (1975) nebo Martinec (1984).

- Dahlen, F. A. (1976a), Models of the lateral heterogeneity of the Earth consistent with eigenfrequency splitting data, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **44**, 77-105.
- Dahlen, F. A. (1976b), Reply, *J. geophys. Res.*, **81**, 4951-4956.
- Doornbos, D. J. & Hilton, T. (1989), Models of the core-mantle boundary and the travel times of internally reflected core phases, *J. geophys. Res.*, v tisku.
- Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L. (1981), Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **25**, 297-356.
- Dziewonski, A. M. & Gilbert, J. F. (1972), Observations of normal modes from 84 recordings of the Alaskan earthquake of 1964 March 28, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **27**, 393-446.
- Gilbert, F. (1971), The diagonal sum rule and averaged eigenfrequencies, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **23**, 119-123.
- Gilbert, J. R. & Dziewonski, A. M. (1975), An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanismus from seismic spectra, *Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser.A.*, **278**, 187-269.
- Hager, B. H. & Clayton, R. W. & Richards, M. A. & Comer, R. P. & Dziewonski, A. M. (1985), Lower mantle heterogeneity, dynamic topography and the geoid, *Nature*, **313**, 541-545.
- Jeffreys, H. (1970), *The Earth*, 5th edn, Cambridge University Press, 183-192.
- Kanamori, H. & Anderson, D. L. (1977), Importance of physical dispersion in surface waves and free oscillation problems, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **15**, 105-112.
- Koppelt, U. & Biegel, M. (1989), Spherical harmonic expansion of the continents and oceans distribution function, *Studia geoph. et geod.*, **33**, 315-321.

- Lerch, F. J. & Klosko, S. M. & Patel, G. B. (1982), A refined gravity model from Lageos (GEM-L2), *Geophys. Res. Lett.*, **9**, 1263-1270.
- Luh, P. C. (1973), Free oscillations of the laterally inhomogeneous earth: quasi-degenerate multiplet coupling, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **32**, 187-202.
- Luh, P. C. (1974), Normal modes of a rotating, self-gravitating, inhomogeneous earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **38**, 187-224.
- Madariaga, R. I. (1971), Toroidal free oscillations of the laterally heterogeneous earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **27**, 81-100.
- Martinec, Z. (1984), Free oscillations of the Earth, *Travaux de l'Institut géophysique de l'Académie Tchécoslovaque des sciences*, No 591, 117-236.
- Martinec, Z. & Pěč, K. (1986), Normal density earth's models, *Studia geoph. et geod.*, **30**, 124-147.
- Martinec, Z. & Pěč, K. (1988), Three-dimensional earth's density model inferred from external gravitational field, *Inverse modelling in exploration geophysics*, 6th international mathematical geophysics seminar, Free University of Berlin, Feb. 3-6, 1988, 65-78.
- Matyska, C. (1988), Invarianty gravitačně ekvivalentních těles, *Problémy současné gravimetrie*, sborník referátů z celostátního semináře 3.-7. 10. 88 v Liblicích, 127-129.
- Morelli, A. & Dziewonski, A. M. (1987), Topography of the core-mantle boundary and lateral homogeneity of the liquid core, *Nature*, **325**, 678-683.

- Pěč, K. & Martinec, Z. (1984), Constraints to the three-dimensional non-hydrostatic density distribution in the Earth, *Studia geophys. et geod.*, 28, 364-380.
- Pekeris, C. L. & Alterman, Z. & Jarosch, H. (1961), Rotational multiplets in the spectrum of the Earth, *Phys. Rev.*, 122, 1692-1700.
- Sansò, F. & Barzaghi, R. & Tscherning, C. C. (1986), Choise of norm for the density distribution of the Earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 87, 123-141.
- Ščerbakov, A. M. (1983), Garmoničeskij analiz rel'efa Zemli po sferičeskim funkcijam do 30-go porjadka i stepeni, *Fizika Zemli*, No 11, 15-27.
- Woodhouse, J. H. (1980), The coupling and attenuation of nearly resonant multiplets in the Earth's free oscillation spectrum, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 61, 261-283.
- Woodhouse, J. H. & Dahlen, F. A. (1978), The effect of a general aspherical perturbation on the free oscillations of the Earth, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 53, 335-354.
- Zharkov, B. N. & Lyubimov, V. M. (1970), Theory of spheroidal vibrations for a spherically asymmetric model of the Earth, *Bull. (Izv.) Akad. Sci. U.S.S.R., Earth Physics*, 10, 613-618.