

POTENCIÁLOVÁ POLE

I.

Základy teorie

RNDr. Oldřich Novotný, CSc.

~~UNIVERZITA KARLOVA~~ ● PRAHA

Praha 1982

A x upe. d: 1

fidul

Skripta jsou určena k přednášce "Potenciálová pole" pro posluchače 3. ročníku specializace geofyzika (podle učebních plánů z let 1978-1981). Protože se nepředpokládají žádné předběžné geofyzikální znalosti a používá se jen jednoduchý matematický aparát, mohou být tato skripta použita jako doplňkový učební text také pro posluchače jiných specializací, včetně posluchačů nižších ročníků.

1. ÚVOD

Řešení fyzikálních úloh se často zjednoduší, použijeme-li pomocných funkcí, zvaných potenciály. Máme-li popsat nějakou vektorovou veličinu, musíme obecně popsat tři složky tohoto vektoru. Existuje však široká kategorie vektorových polí, u nichž můžeme všechny tři složky vektoru vyjádřit pomocí jediné skalární funkce (skalárního potenciálu). Metody, založené na použití potenciálu, se ukázaly natolik mocné a užitečné, že se utvořilo samostatné odvětví - teorie potenciálu.

Speciálně, známe-li potenciál pro působící sílu, můžeme tuto sílu snadno určit. Když působící síly známe, můžeme sestavit pohybové rovnice a ty pak řešit. Význam potenciálu se však neomezuje jen na to, že umožňuje snadno určovat síly. Lze ukázat, že ve stacionárních polích, majících skalární potenciál, se zachovává mechanická energie (pole je konzervativní). Určíme-li potenciál a potenciální energii, můžeme pak užitím zákona zachování mechanické energie určit ihned některé charakteristiky pohybu, aniž bychom řešili příslušné pohybové rovnice. Z těchto hledisek můžeme teorii potenciálu považovat za základ nebo součást mechaniky hmotného bodu. Obdobný význam hraje teorie potenciálu v elektrostatičce, magnetostatičce a v teorii nevířivého proudění nestlačitelné tekutiny.

Mohli bychom vydělit ještě třetí skupinu úloh na použití potenciálu, kde nás přímo nezajímají síly nebo pohyby, ale ekvipotenciální plochy. Nejdůležitější takovou úlohou v geofyzice je určení ekvipotenciálních ploch tíhového potenciálu Země. Jedna z těchto ekvipotenciálních ploch, která nejlépe souhlasí se střední hladinou oceánů, se z fyzikálního hlediska považuje za tvar Země; tato ekvipotenciální plocha se nazývá geoid. Teorie potenciálu je tedy rovněž základem teorie tvaru planet.

S jinými typy potenciálů, potenciály skalárními a vektorovými, se setkáváme v teorii elektromagnetického pole nebo v teorii pružnosti. Například značně složitá pohybová rovnice

pro homogenní izotropní elastické prostředí se zavedením potenciálů rozpadá na dvě mnohem jednodušší vlnové rovnice (jednu skalární a jednu vektorovou), které odděleně popisují podélné a příčné elastické vlny. Vektorovými potenciály se však v těchto skriptech vůbec zabývat nebudeme.

Abychom ještě více přiblížili postavení teorie potenciálu ve fyzice a v matematice, uveďme charakteristiku této teorie, jak byla podána v [18].

"K teorii potenciálu můžeme přistupovat z různých hledisek, ale nejobvyklejší cestou jejího zavedení je vyšetřování sil, řídících se Newtonovým zákonem všeobecné gravitace. Při tomto pojetí můžeme tedy teorii potenciálu charakterizovat jako soubor výsledků o vlastnostech sil, které se řídí Newtonovým zákonem všeobecné gravitace.

Použití teorie potenciálu se však neomezuje pouze na studium gravitačních sil. Teorie potenciálu má aplikace daleko širší, a to jak ve fyzice, tak v matematice. Obdobné síly ve fyzice, jako jsou síly gravitační, působí mezi elektrickými náboji nebo "magnetickými množstvími".

Teorii potenciálu můžeme rovněž považovat za teorii jistého typu parciální diferenciální rovnice, zvané rovnice Laplaceova. Tato diferenciální rovnice popisuje také ustálené šíření tepla v homogenním prostředí, ustálené proudění ideální kapaliny, ustálené elektrické proudy, vyskytuje se při studiu rovnováhy elastických látek.

Na základě teorie potenciálu budoval Riemann teorii analytických funkcí komplexní proměnné; reálná a imaginární část analytické funkce totiž splňují dvourozměrnou Laplaceovu rovnici. S Laplaceovou rovnicí se rovněž setkáváme v diferenciální geometrii a v konformním zobrazení. A konečně metody teorie potenciálu velmi významně ovlivnily teorii diferenciálních rovnic matematické fyziky, a to jak obyčejných, tak i parciálních, a jiná odvětví matematické analýzy".

Teorii potenciálu je věnována velká pozornost nejen ve fyzikálních učebnicích, např. [26, 34, 42, 44, 48], ale zejména v učebnicích matematických. Pro potřeby fyziků je však ze

současné literatury o teorii potenciálu obtížné nalézt vhodnou učebnici. Matematické učebnice často postrádají podrobnější fyzikální úvod a teorie je obvykle budována za velmi obecných předpokladů, což komplikuje výklad a snižuje názornost. Ve fyzikálních učebnicích a přednáškách se v jistém smyslu setkáváme zase s druhým extrémem. Jednotlivé partie teorie potenciálu jsou odděleně vykládány v mechanice a v elektřině a magnetismu, ale pro nedostatek místa a času jsou řešeny jen nejjednodušší úlohy, se kterými v praxi nevystačíme. Pro ilustraci uveďme, že při výzkumu gravitačního pole Země musíme uvažovat úlohy s nekonstantním rozložením hustoty včetně případů nespojitosti hustoty, nebo úlohy s neznámým rozložením hustoty (okrajové úlohy teorie potenciálu). Obdobná situace nastává při výzkumu stacionárního magnetického pole Země. Kromě toho v úlohách, týkajících se tvaru Země a vnějšího tíhového pole, se setkáváme se situací, že kromě neznámého potenciálu je neznámým i tvar hranice (povrch Země). Tyto posledně jmenované úlohy, patřící do kategorie tzv. okrajových úloh s volnou hranicí, jsou natolik obtížné, že přesná a vhodná matematická teorie pro ně dosud neexistuje.

Systematické budování teorie potenciálu umožňuje nejen přistupovat k řešení i obtížných úloh, se kterými se v praxi setkáváme, ale též vytvářet přehlednější a jednodušší pohled na fyzikální problémy. Například známou Gaussovu větu elektrostatiky lze s výhodou přenést a aplikovat i při výzkumu gravitačních polí. Obdobně lze jednotně přistupovat k rozvojem gravitačního, elektrostatického a magnetostatického pole.

Uvedené okolnosti nás vedly k zavedení samostatné přednášky "Potenciálová pole" pro posluchače specializace geofyzika. Toto skriptum podává fyzikální základ a nejstručnější kostru teorie potenciálu. Tato kostra je ovšem, podle našeho názoru, naprosto nezbytná k tomu, aby se čtenář mohl orientovat ve zmeti vzorců a postupů, se kterými se setká ve specializované literatuře o teorii potenciálu, elektrostatiice, tíhovém poli a tvaru Země, magnetickém poli Země apod. Výklad je podáván dosti široce, aby byl použitelný i pro širší okruh zájemců, geofyzikální aplikace jsou přeneseny spíše až do

příkladů.

Toto skriptum vzniklo doplněním a podstatným rozšířením části skriptu [30], které bylo určeno pro postgraduální kurs, ale nebylo v prodeji. Kde to bylo možné, byl text převzat doslova. V tomto skriptu se snažíme o jistý kompromis mezi výkladem teorie potenciálu v učebnicích fyzikálních a učebnicích matematických. Mohli bychom proto toto skriptum nazvat "Teorie potenciálu", ale protože se pod tímto pojmem obvykle rozumí teorie pouze v matematickém pojetí, zvolili jsme jiný název. Při zvoleném způsobu výkladu nebylo možné se souvisleji přidržovat žádné osvědčené učebnice; nejvíce jsme čerpali z [18, 19, 35, 14, 26]. Přitom jsme se snažili dát odpověď pokud možno na všechny principiální otázky, které mohou čtenáře těchto skript napadnout, a to i v případech, že jsme příslušnou odpověď v literatuře nenašli. To způsobilo, že text bude nepochybně obsahovat celou řadu nepřesností, chyb i jiných nedostatků. Budu proto velice vděčný každému čtenáři, který mne na ně upozorní. Protože pro posluchače 3. ročníku je obsah tohoto dílu skript převážně opakováním, i když uspořádaným jistým způsobem, snažili jsme se o takový výklad, aby tito posluchači mohli skriptum studovat formou domácí četby. Vědomi si pravdivosti tvrzení, které uvádí motto na začátku následující kapitoly, volili jsme výklad raději rozvleklý, než příliš stručný.

Za cenné připomínky a náměty k různým partiím tohoto skriptu děkuji zejména RNDr.A.Janáčkové, RNDr.J.Langerovi, CSc, RNDr.Z.Martincovi a Ing.M.Pickovi, DrSc.

Praha, březen 1981

Oldřich Novotný

2. FYZIKÁLNÍ ZÁKLADY TEORIE POTENCIÁLU

"Short writing makes long reading."

(P.A.Samuelson)

V dalších výkladech se zaměříme na silová pole (gravitační a elektrostatická), z části na pole magnetostatická. Potenciálové pole teplotní, nevírová pole rychlosti v hydrodynamice a jiná potenciálová pole zde uvažovat nebudeme.

2.1. Síly působící na hmotný bod

Silové působení mezi hmotnými systémy může mít velmi složitý charakter. Uveďme např. nepřiliš složitý případ, jakým je elektrický dipól v elektrickém poli. Síly, působící na tento dipól, závisejí nejen na místě, kde se dipól nachází, ale i na úhlu, který svírá moment dipólu se směrem pole. Abychom si situaci zjednodušili, budeme se v těchto skriptech zabývat pouze silami, působícími na hmotný bod. Síly, působící na složitější soustavy (např. tuhé nebo deformovatelné těleso), se obvykle vyšetřují až v příslušných partiích fyziky.

Zaveďme kartézskou soustavu souřadnic pevně spojenou s nějakou inerciální soustavou. Uvažujme volnou částici (volný hmotný bod), její souřadnice v čase t označme x, y, z . Většinou můžeme sílu \vec{F} , působící na volný hmotný bod, považovat obecně za funkci sedmi proměnných $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$. Tuto závislost zapíšeme symbolicky

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) . \quad (2.1)$$

Tečkou jsme označili derivaci podle času, veličiny $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ jsou tedy složky rychlosti. V mechanice se setkáváme pouze se silami typu (2.1). Síly, závislé na vyšších derivacích souřadnic podle času, se vyskytují v elektrodynamice; např. v teorii brzděného záření se vyskytují síly závislé na druhých a třetích derivacích souřadnic podle času [32]. Pro jednoduchost se v dalším omezíme jen na síly typu (2.1). V následujících paragrafech pojednáme o některých velmi důležitých speciálních případech těchto sil.

Síly, působící na částici, můžeme rozdělovat podle mnohých hledisek. Můžeme např. mluvit o silách gravitačních, elektromagnetických nebo jaderných. Jinou možností by např. bylo rozdělování sil podle toho, zda závisejí či nezávisejí na některých proměnných ve (2.1).

Ještě jiné, ale velice významné, je rozdělování sil na síly konzervativní a nekonzervativní. Toto rozdělení je založeno na energetických hlediscích, na vlastnostech práce, kterou síly dodávají hmotnému bodu při jeho pohybu. Protože kinetická a potenciální energie jsou v mechanice veličiny základního významu, je zmíněná klasifikace sil důležitá z hlediska použití matematického aparátu mechaniky, např. Lagrangeových rovnic. Konzervativní síly tedy představují velice důležitou a širokou kategorii sil.

Konečně z hlediska jednoduchosti popisu, což je hledisko spíše formálně matematické, je důležité rozdělování sil (resp. jiných vektorových veličin) na ty, které mají skalární potenciál a které takový potenciál nemají. Skalárním potenciálem na tomto místě rozumíme libovolnou skalární funkci, jejímž gradientem je příslušná vektorová veličina. V tomto skriptu sledujeme zejména toto hledisko, s výjimkou této kapitoly se budeme zabývat výhradně vektorovými veličinami majícími skalární potenciál.

Dělení sil z hlediska konzervativnosti se používá hlavně v učebnicích mechaniky, dělení z hlediska existence skalárního potenciálu spíše v učebnicích vektorové analýzy a teorie potenciálu. Je proto důležité stanovit, jaký je vztah mezi konzervativními silami a silami majícími skalární potenciál. Můžeme říci, bude to ukázáno dále v této kapitole, že množina konzervativních sil a množina sil majících skalární potenciál se navzájem překrývají, ale nejsou totožné. Ukážeme, že jestliže konzervativní síla závisí jen na souřadnicích (a je spojitá), existuje pro ní skalární potenciál. (Pokud se vyšetřování sil omezuje právě na síly tohoto typu, což je v literatuře dosti časté, nemusíme dělat rozdíl mezi konzervativními silami a silami majícími skalární potenciál.) Existují však konzervativní síly, které nemají skalární potenciál

a naopak zase síly se skalárním potenciálem, které nejsou konzervativní. Například všechny síly kolmé na rychlost jsou podle níže uvedené definice konzervativní, ale obecně pro ně neexistuje skalární potenciál. Opačným příkladem je slapová síla, která není konzervativní, protože závisí na čase, ale skalární slapový potenciál existuje, podrobnosti viz níže.

Protože v rámci teorie potenciálových polí se budeme zabývat zejména poli se skalárním potenciálem, bude pro nás důležitější, zdali danou úlohu lze popsat skalárním potenciálem, než to, zdali působící síly jsou konzervativní. Proto se v dalších kapitolách nebudeme zabývat otázkami konzervativnosti sil, ale budeme jen hledat příslušné potenciály a studovat jejich vlastnosti. Abychom však teorii potenciálových polí zasadili do širšího fyzikálního rámce, zdůraznili některé souvislosti a uvedli typické příklady, budeme výklad v následujících paragrafech této kapitoly ještě orientovat z hledisek běžných v mechanice, tj. zejména z hlediska konzervativních sil.

2.2. Konzervativní síly

Sílu nazveme konzervativní, jestliže práce, vykonaná touto silou při přemístění částice z libovolného bodu P_0 do libovolného bodu P , je jednoznačně určena pouze polohou těchto bodů a nezávisí na dráze samotné [14, 17, 18, 19].

Elementární práce dW , kterou vykoná síla \vec{F} podél elementu dráhy \vec{ds} , se definuje vztahem

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds} = Xdx + Ydy + Zdz, \quad (2.2)$$

kde tečkou jsme označili skalární násobení síly $\vec{F} = (X, Y, Z)$ a elementu dráhy $\vec{ds} = (dx, dy, dz)$. Tato definice vyhovuje obvyklým požadavkům, které na práci klademe, viz níže vzorec (2.4). Nechť se částice přemísťuje z bodu P_0 do bodu P podél dráhy C . Síla \vec{F} , působící na částici, vykoná přitom práci

$$W = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{P_0}^P (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2.3)$$

Poznamenejme, že k existenci křivkového integrálu (2.3) je třeba, aby síla i dráha splňovaly některé předpoklady. Teorie těchto integrálů se obvykle buduje pro lokálně rektifikovatelné křivky [21]. Budeme samozřejmě předpokládat, že každá dráha má tuto vlastnost. Kromě toho se z fyzikálního názoru zdá, že bychom se mohli omezit jen na křivky, které jsou navíc spojité a po částech hladké (toto omezení však potřebujeme jen při důkazu níže uvedené vlastnosti 4, viz následující paragraf).

Má-li síla obecný tvar (2.1), pak integrál (2.3) obecně závisí na dráze, rychlosti pohybu částice, čase a na úhlech, které svírá síla s elementy dráhy. Má-li být síla konzervativní, musí tedy mít určité velmi speciální vlastnosti.

Z pokusů je známo, že práce nezávisí na dráze pro gravitační a elektrostatické síly [19]. Stejný výsledek byl získán také pro interakce mezi elementárními částicemi z pokusů o jejich rozptylu. Pro gravitační síly tento výsledek vyplývá z přesnosti předpovědi drah planet a Měsíce, je-li předpověď založena na Newtonově gravitačním zákonu, podrobnosti viz kap. 3. Na druhé straně např. síly tření nejsou konzervativní, podrobnější zdůvodnění je uvedeno níže.

Jak uvidíme dále, bude účelné rozdělit konzervativní síly do následujících dvou skupin:

- a) síly, které nekonají práci po žádné elementární dráze (to má za následek, že také práce (2.3) je nulová pro libovolnou dráhu);
- b) síly, které obecně nenulovou práci konají (tj. konají nenulovou práci alespoň po některých drahách).

Všimněme si těchto dvou případů trochu blíže.

Je zřejmé, že speciálním případem konzervativních sil budou takové síly, které podél libovolné elementární dráhy nekonají žádnou práci. Užitím známé vlastnosti skalárního

součinu můžeme (2.2) přepsat ve tvaru

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\alpha, \quad (2.4)$$

kde α je úhel sevřený vektory \vec{F} a $d\vec{s}$. Elementární práce dW bude nulová ve dvou případech (předpokládáme nenulovou dráhu $d\vec{s}$) a to, je-li buď $\vec{F} = 0$ nebo $\cos\alpha = 0$. Triviálním případem konzervativní síly je tedy síla, která je všude v uvažovaném oboru rovna nule. Druhý případ je důležitější, jedná se o sílu, která je vždy kolmá na směr pohybu, tzn. je kolmá na rychlost částice. S tímto případem síly kolmé na rychlost se setkáváme např. při pohybu nabitě částice v magnetickém poli. Jiným příkladem je Coriolisova síla. Upozorníme, že síla působící na nabitou částici v elektromagnetickém poli (Lorentzova síla), je konzervativní tehdy, je-li konzervativní příslušné elektrické pole; tato síla má tvar

$$\vec{F} = e\vec{E} + e(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.5)$$

kde e a \vec{v} jsou náboj a rychlost částice, \vec{E} intenzita elektrického pole, \vec{B} magnetická indukce.

Poznamenejme, že v literatuře není plné jednotnosti pokud se týče zařazení sil kolmých na rychlost do kategorie konzervativních sil. My jsme je mezi konzervativní síly zařadili, protože vyhovují výše uvedené definici konzervativních sil; stejně tak činí např. autoři učebnice [19]. Častěji se však síly kolmé na rychlost mezi konzervativní síly nezařazují [14, 33, 44]. Hlavní důvod spočívá v tom, že pro síly kolmé na rychlost nelze obecně zavést skalární potenciál, viz níže uvedenou vlastnost 2.

Nyní předpokládejme, že $F \cos\alpha$ není identicky rovné nule, tzn., že alespoň podél některých drah je vykonaná práce nenulová. Má-li být teď síla \vec{F} konzervativní, nesmí záviset na rychlosti částice, ani na čase (porovnejte s (2.1)). Kdyby síla závisela na rychlosti, pak při pomalém a při rychlém proběhnutí stejné dráhy bychom dostali různé práce, což je v rozporu s definicí konzervativní síly. Obdobně, kdyby se síla měnila s časem, dostávali bychom při proběhnutí

stejné dráhy, ale v různých časech, různé hodnoty práce. Dospíváme tedy k výsledku, že konzervativní síla (pokud neuvažujeme síly kolmé na rychlost), může být pouze funkcí souřadnic, tj.

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) . \quad (2.6)$$

Když síla závisí pouze na souřadnicích, mluvíme o silovém poli [33].

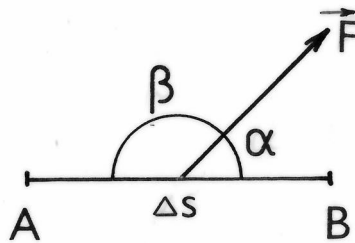
Právě zavedený pojem "pole" rozšířme ještě i na jiné vektory a skaláry. Řekneme, že v nějaké oblasti je zadáno pole, jestliže každému bodu této oblasti odpovídá určitá hodnota nějaké veličiny - skalární nebo vektorové [20, 31]. Jinými slovy, budeme mluvit o vektorovém (resp. skalárním) poli, jestliže příslušný vektor (resp. skalár) je funkcí pouze souřadnic. Často se tento pojem ještě dále rozšiřuje v tom smyslu, že se vedle závislosti na souřadnicích též připouští závislost na čase. Pak se mluví o stacionárních a nestacionárních polích podle toho, zdali příslušná veličina nezávisí či závisí na čase. V tomto skriptu pod pojmem pole budeme dále vždy rozumět pole stacionární, tj. nezávislé na čase. Zcela analogicky lze pro tenzorové veličiny zavést pojem tenzorového pole, avšak v tomto skriptu se těmito případy zabývat nebudeme.

Zavedený pojem pole je velmi široký, ale týká se pouze matematické stránky popisu dané veličiny, nikoliv její povahy. Můžeme proto mluvit o polích nejrůznější povahy, např. o poli gravitačního zrychlení, teplotním poli, poli nadmořských výšek, poli geologického stáří hornin, poli hustoty osídlení aj. Naproti tomu bychom chtěli upozornit na jistý rozdíl od užšího a poněkud jinak chápaného pojmu fyzikálního pole (např. gravitačního nebo elektromagnetického pole), čímž rozumíme jisté formy existence hmoty, tj. v tomto pojmu je důležitým hledisko materiální povahy zkoumaného jevu; podrobněji viz [5]. Pouze pojmy "gravitační pole" a "elektromagnetické pole" budeme chápat z tohoto druhého hlediska, v ostatních případech budeme pak chápat pole ve smyslu výše uvedené matematické definice.

2.3. Vlastnosti konzervativních sil

Odvodíme základní vlastnosti konzervativních sil. Čtenář, který tyto vlastnosti zná, může tento paragraf vynechat. Poznamenejme předem, že vlastnosti 1, 3 a 4 platí i pro síly kolmé na rychlost, přičemž tyto síly mohou záviset i na čase. Vlastnost 2 (existence skalárního potenciálu) platí jen pro síly typu (2.6).

Nejprve dokažme známou vlastnost, že probíháme-li stejnou dráhou v opačných směrech, liší se vykonaná práce znaménkem. Nechť podél úsečky Δs působí na částici konstantní síla \vec{F} (obr. 1). Práce vykonaná silou \vec{F} při přemístění částice z bodu A do bodu B bude $\Delta W_{AB} = F\Delta s \cos \alpha$. Při přemístění částice z bodu B do A dostaneme $\Delta W_{BA} = F\Delta s \cos \beta = -F\Delta s \cos \alpha = -\Delta W_{AB}$. Přejdeme-li odtud k integrálu, dostaneme tvrzení pro obecnou dráhu a sílu.



Obr. 1

Přistupme již k popisu nejdůležitějších vlastností konzervativních sil.

Vlastnost 1: Síla je konzervativní právě tehdy, jestliže práce po libovolné uzavřené křivce je nulová, tj.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0, \quad (2.7)$$

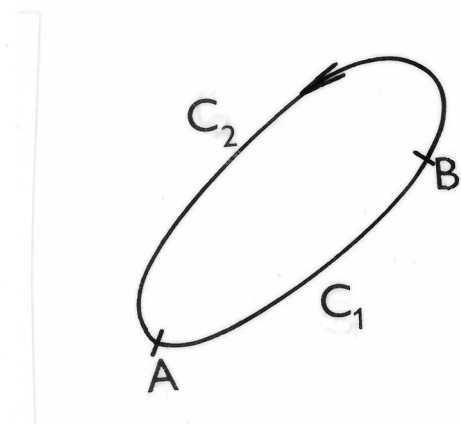
kde \oint označuje integraci po uzavřené křivce.

Důkaz: Předně si uvědomme, že pro konzervativní sílu platí podle její definice, že práce (2.3) závisí pouze na krajních bodech integrace, tj. $W = W(P_0, P)$. Při průchodu dráhy v opačném směru jsme dostali $W(P, P_0) = -W(P_0, P)$. Předpokládejme nejprve, že je síla konzervativní, a počítejme práci po libovolné uzavřené křivce C , vycházející z bodu A (obr. 2a). Nějakým bodem B jsme křivku C rozdělili na části C_1 a C_2 . Platí (tečku pro označení skalárního součinu budeme dále často vynechávat)

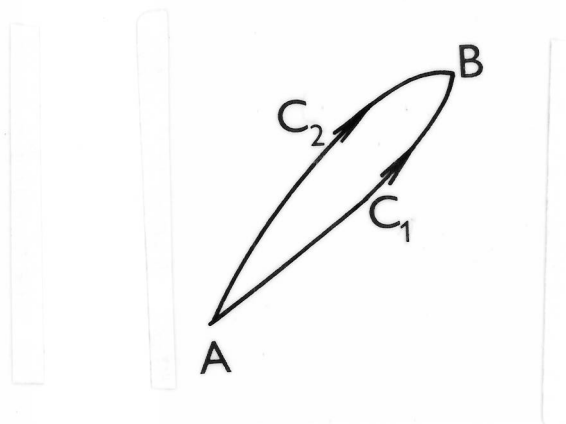
$$\oint \vec{F} \, d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \, d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \, d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \, d\vec{s} - \int_A^B \vec{F} \, d\vec{s} = 0 \quad ,$$

(podél C_1)
(podél C_2)
(podél C_1)
(podél C_2)

tedy práce po uzavřené křivce je nulová.



Obr. 2a



Obr. 2b

Předpokládejme obráceně, že platí (2.7) pro libovolnou uzavřenou křivku. Veďme z bodu A do bodu B dvě libovolné cesty C_1 a C_2 (obr. 2b). Opišme uzavřenou křivku C takovým způsobem, že z A půjdeme do B po C_1 a z B do A po C_2 . Podle předpokladu je

$$0 = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} .$$

(podél C_1)
(podél C_2)
(podél C_1)
(podél C_2)

Třebaže byly dráhy C_1 a C_2 zvoleny zcela libovolně, je práce při přechodu z A do B stejná. Znamená to, že práce je nezávislá na volbě dráhy, síla je tedy konzervativní. Tím je věta dokázána.

Připomeňme, že jsme dokázali ekvivalenci definice konzervativní síly a vlastnosti 1, dané vzorcem (2.7). Za definicí konzervativní síly bychom proto mohli zvolit platnost vztahu (2.7) pro libovolnou uzavřenou křivku, nezávislost práce na tvaru dráhy by pak byla jejím důsledkem [14].

Z fyzikálního hlediska je nyní zřejmé, že tření nebo jiné disipativní síly nemohou být silami konzervativními, protože člen $\vec{F} \cdot d\vec{s}$, příslušející této síle, bude stále záporný, integrál (2.7) se proto nebude rovnat nule [14, 19]; abychom s částicí oběhli po uzavřené křivce, musíme jí dodat nějakou kladnou práci.

Vlastnost 2: Označme X, Y, Z složky síly \vec{F} . Nechť \vec{F} je konzervativní a splňuje ještě následující dvě podmínky:

a) \vec{F} závisí pouze na souřadnicích, $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$, tj. \vec{F} vytváří silové pole;

b) \vec{F} je spojitá (její složky jsou spojité funkce souřadnic). Pak existuje skalární funkce $\phi(x, y, z)$ taková, že

$$X = \frac{\partial \phi}{\partial x} , \quad Y = \frac{\partial \phi}{\partial y} , \quad Z = \frac{\partial \phi}{\partial z} , \quad (2.8)$$

neboli ve vektorovém zápisu

$$\vec{F} = \text{grad } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} , \frac{\partial \phi}{\partial y} , \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) . \quad (2.9)$$

Obráceně, existuje-li taková funkce $\phi(x, y, z)$ se spojitými prvními derivacemi tak, že pro sílu platí (2.8), je tato síla konzervativní.

Důkaz: Všimněme si, že ve (2.3) jsme integrováním síly dostali práci. Obráceně tedy jistým derivováním práce musíme dostat sílu. Lze proto očekávat, že hledaná skalární funkce bude bezprostředně souviset s prací. Práce v poli konzervativní síly je ovšem závislá na počátečním a koncovém bodu dráhy, tj. má tvar $W(P_0, P)$, kdežto my hledáme funkci, která závisí na souřadnicích pouze jednoho bodu. Zvolme proto počáteční bod P_0 pevně a uvažujme pouze dráhy, které vycházejí z tohoto bodu. Protože je počáteční bod dráhy fixován, bude práce po těchto drahách v poli konzervativní síly závislá pouze na poloze koncového bodu dráhy. Tuto práci, kterou silové pole (při pohybu dané částice) vykonává, označíme $\phi = \phi(P) = \phi(x, y, z)$. Počítejme parciální derivaci funkce ϕ podle x v bodě P [18]. Vezměme dráhu z P_0 do $P(x, y, z)$ podél nějaké vhodné křivky; dráhu z P_0 do $P^*(x + \Delta x, y, z)$ vezměme podél stejné dráhy do P a potom podél přímky do P^* . Podle (2.3) je

$$\frac{\phi(P^*) - \phi(P)}{\overline{PP^*}} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} X(x, y, z) dx = X(x + \eta \Delta x, y, z) .$$

Poslední výraz jsme dostali podle věty o střední hodnotě, platí $0 < \eta < 1$. Pro tento poslední krok potřebujeme spojitost funkce X . V limitě pro $\overline{PP^*} = \Delta x$ blížící se k nule dostaneme

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = X .$$

Obdobně bychom postupovali při výpočtu parciálních derivací podle y a z . Pro spojitě konzervativní pole \vec{F} tedy dostáváme (2.8), kde ϕ je pouze funkcí souřadnic.

Obrácené tvrzení se dokáže snadněji. Nechť existuje funkce $\phi(x, y, z)$ se spojitými prvními derivacemi tak, že složky síly lze vyjádřit vztahy (2.8). Funkce ϕ má totální

diferenciál (neboť její parciální derivace jsou spojité [36])

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz .$$

Podle (2.3) nyní platí

$$W(P_0, P) = \int_{P_0}^P \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz \right) = \int_{P_0}^P d\phi = \phi(P) - \phi(P_0) .$$

Práce je nezávislá na dráze, protože poslední výraz závisí pouze na krajních bodech. Síla je tedy konzervativní. Tím je celý důkaz proveden.

Veliká výhoda konzervativního silového pole (spojitého) spočívá tedy v tom, že může být popsáno pomocí jediné skalární funkce $\phi(x, y, z)$, zatímco k popisu obecného silového pole potřebujeme tři skalární funkce (složky) X , Y a Z . O rozšíření této vlastnosti konzervativních polí i na jiná vektorová pole, než jen pole silová, bude pojednáno na konci tohoto paragrafu.

Možnost popisu vektorového pole pomocí pole skalárního je otázka natolik závažná, že považujeme za účelné připojit ještě několik poznámek. Při důkazu vlastnosti 2 jsme předpokládali, že síla závisí pouze na souřadnicích, je spojitá a je konzervativní. V prvních třech poznámkách, které následují, postupně probereme případy, kdy příslušný předpoklad není splněn a budeme se ptát, zdali přesto nelze sílu vyjádřit jako gradient nějakého skaláru.

Poznámka 1: Při důkazu jsme předpokládali, že uvažovaná konzervativní síla závisí pouze na souřadnicích. Pak příslušná skalární funkce také závisela jen na souřadnicích. Síly kolmé na rychlost jsou také konzervativní, ale nemohou být odvozeny ze skalární funkce, která by byla pouze funkcí souřadnic (derivováním funkce ϕ závislé jen na souřadnicích dostaneme funkci závislou zase jen na souřadnicích). Pokud by pro síly kolmé na rychlost taková skalární funkce existo-

vala (obecně o její existenci či neexistenci dokázaná věta nic neříká), musela by tato skalární funkce zřejmě záviset též na rychlosti. Jako příklad uveďme sílu, která působí na nabitou částici v magnetickém poli:

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad ,$$

kde e je náboj částice, \vec{v} její rychlost, \vec{B} magnetická indukce. Je-li \vec{B} konstantní vektor, lze snadno ověřit, že uvedená síla \vec{F} může být popsána pomocí následující skalární funkce $U(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$:

$$U = e(\vec{r} \times \vec{v})\vec{B} \quad , \quad \vec{F} = \text{grad } U \quad , \quad (2.10)$$

kde $\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor [22]. Jestliže \vec{B} není konstantní vektor, ale závisí na souřadnicích, síla zůstane konzervativní, ale příslušnou skalární funkci již nalézt neumíme. V těchto případech je proto vhodné používat jinak zaváděnou skalární funkci, zvanou zobecněný potenciál, viz poznámka 4.

Poznámka 2: V důkazu byl podstatný předpoklad o spojitosti konzervativního pole. Je-li konzervativní pole spojitě, je podle dokázané vlastnosti zajištěna existence skalárního pole tak, že platí výše uvedené vztahy (2.8). Jestliže konzervativní pole není spojitě, z dokázané věty nic neplyne. To znamená, že pro nespojitě konzervativní pole nelze zaručit existenci příslušného skalárního pole, ale na druhé straně ani nelze existenci takového skalárního pole vyloučit. Úlohy s nespojitými konzervativními silami musejí být proto vyšetřovány případ od případu. Například lze ukázat, že konzervativní síla působená tzv. jednoduchou vrstvou je nespojitá při průchodu touto vrstvou, ale příslušná skalární funkce existuje.

Poznámka 3: Základním předpokladem dokázané vlastnosti 2 bylo, že síla je konzervativní. Vzniká ovšem otázka, zdali i pro některé nekonzervativní síly je možné nalézt skalární funkci tak, aby platilo (2.8). Odpověď je kladná. Je ovšem zřejmé, že v tomto případě musí příslušná skalární funkce též

záviset na rychlosti anebo na čase (kdyby závisela jen na souřadnicích, byla by síla konzervativní). Jednoduchým příkladem je síla tření úměrná rychlosti, která může být vyjádřena jako gradient skalární funkce, závislé na souřadnicích a rychlostech:

$$\vec{F} = -k\vec{v} = \text{grad}\phi, \quad \phi = -k\vec{r}\vec{v}, \quad (2.11)$$

kde k je konstanta, \vec{r} polohový vektor, \vec{v} rychlost. Jiným příkladem je gravitační síla působená tělesem, které se vzhledem k uvažované částici pohybuje; v tomto případě bude příslušná skalární funkce záviset nejen na souřadnicích, ale i na čase. Mezi tyto síly patří i slapová síla (pojmem "slapy" souhrnně označujeme příliv a odliv). Tento případ je pro geofyziku velice důležitý, protože umožňuje určit slapový "potenciál", třebaže slapová síla není konzervativní.

Poznámka 4: V mechanice je velice důležitá ještě poněkud obecněji zaváděná skalární funkce, zvaná zobecněný potenciál. Řekneme, že skalární funkce $V(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ je zobecněným potenciálem síly $\vec{F} = (X, Y, Z)$, jestliže platí,

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ Y &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial V}{\partial y}, \\ Z &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Význam zobecněného potenciálu spočívá v tom, že má-li síla působící na částici zobecněný potenciál, můžeme pohyb této částice popsat pomocí známých rovnic analytické mechaniky, např. pomocí Lagrangeových rovnic; tvar vzorců (2.12) připomíná tvar Lagrangeových rovnic. Jestliže zobecněný potenciál nezávisí na rychlostech, vzorce (2.12) lze jednoduše zapsat ve tvaru $\vec{F} = -\text{grad} V$. Odtud plyne, že pokud výše studovaná skalární funkce ϕ nezávisí na rychlostech (kromě souřadnic může však záviset i na čase), můžeme položit

$$V(x, y, z, t) = - \phi(x, y, z, t) \quad . \quad (2.13)$$

Podle tohoto vzorce ovšem nelze určit zobecněný potenciál pro síly (2.10) a (2.11), které závisejí na rychlosti. Pro sílu tření (2.11) dokonce zobecněný potenciál neumíme nalézt; Lagrangeovy rovnice pro pohyb částice se musejí v tomto případě modifikovat [25]. Ovšem pro speciální případy sil kolmých na rychlost, jako je síla působící na nabitou částici v magnetickém poli a síla Coriolisova, zobecněný potenciál nalézt umíme, viz níže uvedené příklady. Zobecněný potenciál tedy umíme nalézt pro všechny konkrétní případy konzervativních sil (žádný protipříklad nám není znám), ale i pro některé síly nekonzervativní (např. zmíněná časově proměnná gravitační síla).

Poznámka 5: Z předchozího výkladu by mohl vzniknout nesprávný dojem, že teorie potenciálu je málo použitelná v magnetismu, protože sílu, která působí na nabitou částici v magnetickém poli, nelze popsat pomocí skalárního pole. Tak by tomu opravdu bylo, kdybychom se zabývali pouze vyšetřováním sil, působících na částici v magnetickém poli. Jestliže však přejdeme na vyšetřování intenzity magnetického pole nebo magnetické indukce, pak tyto veličiny lze již v případě stacionárního magnetického pole vyjádřit jako gradienty skalárních funkcí.

Poznámka 6 (terminologická): Jestliže vektorová funkce \vec{F} a skalární funkce ϕ spolu souvisejí vztahem $\vec{F} = \text{grad } \phi$, pak v případě abstraktních polí, obecných silových polí a polí rychlosti se skalár ϕ nazývá potenciálem [7, 18]. Naproti tomu v teorii Newtonova potenciálu se potenciál vždy vztahuje k intenzitě pole a pro kladnou jednotkovou částici, bodový náboj nebo magnetické množství se obvykle definuje jako $1/r$, kde r je vzdálenost od částice; pro různá rozložení zdrojů pole se pak potenciál dostane jako integrál z hustoty vynásobené $1/r$. Potom je ovšem třeba rozlišovat dva případy: a) jestliže se elementy souhlasného znaménka přitahují, jako v gravitaci, pak mezi intenzitou pole \vec{E} a potenciálem U platí vztah $\vec{E} = \text{grad } U$; b) jestliže se elementy stejného

znaménka odpuzují, jako v elektřině a magnetismu, platí $\vec{E} = -\text{grad } U$. Ve fyzice se však nejčastěji zavádí potenciál tak, aby se ve všech případech dostala intenzita jako minus gradient potenciálu. Tímto způsobem budeme postupovat i v tomto skriptu, viz následující paragraf 2.4. Pro označení práce samotné, případně přepočítané na jednotkovou částici, se pak někdy zavádějí názvy "potenciálová funkce" nebo "silová funkce".

Vlastnost 3 (zákon zachování mechanické energie): Jestliže síly působící na částici jsou konzervativní, zachovává se její mechanická energie.

Než přistoupíme k důkazu této věty, připomeňme definice kinetické, potenciální a mechanické energie. Jestliže částice o hmotnosti m se pohybuje rychlostí v , zavádíme kinetickou energii výrazem $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} mv^2$. Potenciální energii \mathcal{E}_p definujeme jako práci, kterou musíme (proti účinkům silového pole) vykonat, abychom částici přemístili z jistého počátečního bodu do bodu uvažovaného. Potenciální energie je tedy práce, kterou musíme částici dodat, tj. kterou musí dodat vnější síly. Přitom silové pole vykoná práci $(-\mathcal{E}_p)$, což plyne ze zákona akce a reakce. Aby takto definovaná potenciální energie nezávisela na tvaru dráhy, budeme ji zavádět pouze pro konzervativní síly. Za zmíněný počáteční (výchozí) bod zvolme bod P_0 , který jsme používali při konstruování funkce ϕ . Zřejmě platí

$$\mathcal{E}_p(x, y, z) = -\phi(x, y, z) = - \int_{P_0(x_0, y_0, z_0)}^{P(x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (2.14)$$

Doplňme, že pro spojitě síly ze vztahu (2.9) plyne

$$\vec{F} = -\text{grad } \mathcal{E}_p \quad (2.15)$$

Mluvíme-li o potenciální energii, musíme tedy vždy uvést, vzhledem ke kterému výchozímu bodu ji počítáme. Vzhledem k tomu, že však z fyzikálního hlediska je volba tohoto výcho-

zího bodu celkem libovolná, zavádějí se často jisté standardní volby, např. volí se tento bod v nekonečnu apod., některé podrobnosti viz dále. Součet kinetické a potenciální energie nazýváme energií mechanickou.

Důkaz vlastnosti 3: Podle (2.14) je práce, kterou vykoná konzervativní síla \vec{F} při přemístění částice z bodu A do bodu B, rovna záporně vzaté změně potenciální energie částice:

$$\mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_p(A) = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad . \quad (2.16)$$

Předpokládejme, že hmotnost částice m zůstává během pohybu konstantní. Pak platí $\vec{F} = m\vec{a}$, kde \vec{a} je zrychlení částice. Z definice rychlosti $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ plyne $d\vec{s} = \vec{v}dt$. Integrál na pravé straně (2.16) lze nyní upravit na tvar

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{m}{2} \int_A^B \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_A^B = \quad (2.17)$$

$$= \mathcal{E}_k(B) - \mathcal{E}_k(A) \quad .$$

Ze srovnání výrazů (2.16) a (2.17) plyne, že se mechanická energie částice zachovává:

$$\mathcal{E}_k(A) + \mathcal{E}_p(A) = \mathcal{E}_k(B) + \mathcal{E}_p(B) \quad . \quad (2.18)$$

Tím jsme vlastnost 3 dokázali pro konzervativní silová pole (předpokládali jsme ještě, že hmotnost částice je konstantní a platí druhý Newtonův zákon). Pro případ sil kolmých na rychlost je integrál (2.14) nezávislý na dráze, protože je nulový, a podle (2.16) se potenciální energie nemění. Z (2.17) plyne, že také kinetická energie částice se nemění. Pro síly kolmé na rychlost tedy rovněž platí zákon zachování mechanické energie.

Nějaké obrácené tvrzení zde dokazovat nebudeme. Abychom tak mohli učinit, museli bychom přesně specifikovat, jak budeme zavádět potenciální energii v případě nekonzervativních sil, kdy práce již obecně závisí na dráze. Pro nekonzervativní síly pozbývá pojem potenciální energie, a tedy i mechanické energie, obvyklého smyslu.

Pro síly, mající tu vlastnost, že práce je nezávislá na tvaru dráhy, jsme dostali větu o zachování mechanické energie (conservatio energiae). Odtud pro ně pochází označení "konzervativní síly" [44] .

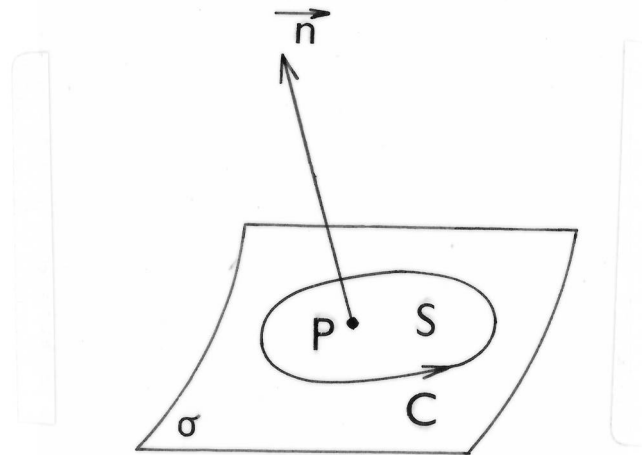
Vlastnost 4: Nechť v jednoduše souvislé oblasti je síla $\vec{F} = (X, Y, Z)$ spojitá a má spojité první parciální derivace podle souřadnic. Pak nutná a postačující podmínka pro to, aby síla \vec{F} byla konzervativní, je, aby byla nevírová, tj. aby

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \quad . \quad (2.19)$$

Důkaz: Uveďme nejprve definici operace rotace [18]. Nechť P označuje nějaký bod a vektor \vec{n} nějaký směr (obr. 3). Bodem P proložme hladkou neuzavřenou jednoduše souvislou plochu σ , jejíž normála v bodě P má směr \vec{n} . Na σ uvažujme neprotínající se uzavřenou konečnou a po částech hladkou křivku C , která obepíná bod P . Orientaci křivky C zvolíme proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na ni z té strany plochy σ , kam míří \vec{n} (v levotočivé soustavě bychom křivku C orientovali opačně). Počítejme cirkulaci vektoru \vec{F} podél C (tj. $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$) ve směru kladné orientace C a dělme ji velikostí plochy S , kterou C vytíná v σ . Zmenšujme křivku C (její nejdelší tětivu zmenšujme k nule) tak, aby bod P stále zůstal uvnitř. Příslušnou limitou definujeme složku vektoru $\text{rot } \vec{F}$ v bodě P do směru \vec{n} :

$$\text{rot}_n \vec{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad . \quad (2.20)$$

K této definici je třeba vznést dvě výhrady: a) limita na pravé straně (2.20) musí existovat a rozumí se, že by měla být nezávislá na konkrétním tvaru σ a C : b) složky,



Obr. 3

definované těmito limitami pro různé směry \vec{n} , musí být skutečně složkami vektoru. Jestliže tyto podmínky nejsou splněny, rotace v bodě P neexistuje. Lze ukázat, že tyto podmínky budou splněny, jestliže složky vektoru \vec{F} budou mít spojité parciální derivace podle souřadnic [18].

Předpokládejme nejprve, že síla \vec{F} je konzervativní (a spojitá do prvního řádu). Podle vlastnosti 1 je pak integrál po libovolné uzavřené křivce roven nule a podle (2.20) bude složka rotace do libovolného směru rovna nule. Odtud plyne (2.19).

Obráceně předpokládejme, že platí (2.19) v nějaké jednoduše souvislé oblasti. Chceme dokázat, že práce vykonaná silou \vec{F} po libovolné uzavřené křivce C v této oblasti je nulová. Použijeme Stokesovu větu

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot}_n \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad , \quad (2.21)$$

kde vektorová funkce \vec{F} je spojitá do prvního řádu, S je jednoduše souvislá neuzavřená po částech hladká plocha, ohraničená neprotínající se uzavřenou po částech hladkou křivkou C . Dosadíme-li sem (2.19), dostáváme ihned, že práce po

uzavřené křivce C je nulová, síla je tedy konzervativní. Tím je vlastnost 4 dokázána (pro křivky po částech hladké).

Hledejme nyní vyjádření $\text{rot } \vec{F}$ v kartézských souřadnicích za předpokladu, že funkce \vec{F} je spojitá do prvního řádu. Bod, v němž počítáme rotaci, považujeme pro jednoduchost za počátek souřadnicové soustavy. Počítejme nejprve složku rotace do směru osy x . Uvažujme souřadnicovou rovinu (y, z) a v ní lomenou uzavřenou křivku C spojující body $A=(0,0,0)$, $B=(0, \Delta y, 0)$, $C=(0, \Delta y, \Delta z)$, $D=(0, 0, \Delta z)$. Pro cirkulaci vektoru $\vec{F} = (X, Y, Z)$ podél C (po dráze ABCDA) platí

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_0^{\Delta y} Y(0, w, 0) dw + \int_0^{\Delta z} Z(0, \Delta y, v) dv + \\ + \int_{\Delta y}^0 Y(0, w, \Delta z) dw + \int_{\Delta z}^0 Z(0, 0, v) dv .$$

V důsledku spojitosti $\partial Y / \partial z$ existuje podle věty o střední hodnotě takový bod $z_0 \in (0, \Delta z)$, obecně závislý na w , že platí

$$Y(0, w, \Delta z) - Y(0, w, 0) = \frac{\partial Y}{\partial z} (0, w, z_0) .$$

Tento výraz máme nyní integrovat podle w v mezích od 0 do Δy . Označme P_1 ten z bodů $(0, w, z_0)$, kde funkce $\partial Y / \partial z$ nabývá minima, a P_2 bod, kde nabývá maxima. Platí

$$\frac{\partial Y(P_1)}{\partial z} \Delta z \Delta y \leq \int_0^{\Delta y} [Y(0, w, \Delta z) - Y(0, w, 0)] dw \leq \frac{\partial Y(P_2)}{\partial z} \Delta z \Delta y .$$

Integrál uprostřed nerovností až na znaménko vystupuje ve výše uvedené cirkulaci. Vydělme tyto nerovnosti plochou $S = \Delta y \Delta z$ a zmenšujme Δy a Δz k nule. V limitě budou levé a pravé strany nerovností stejné, protože body P_1 a P_2 přejdou do počátku. Stejný postup lze aplikovat ve výše

uvedené cirkulaci na integrály funkce Z . Odtud plyne

$$\text{rot}_x \vec{F} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} .$$

Upozorněme, že nutná podmínka, aby z definice (2.20) plynul tento vztah, je spojitost funkcí $\partial Y/\partial z$ a $\partial Z/\partial y$. Analogický postup i pro zbývající dvě složky rotace vede ke známému vzorci

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) . \quad (2.22)$$

Poznamenejme, že dokázaná vlastnost 4 se vztahuje i na síly kolmé na rychlost. Jestliže však \vec{F} závisí jen na souřadnicích, $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$, pak první část důkazu lze provést jednodušeji, bez použití obecné definice rotace (2.20). Protože je podle předpokladů funkce \vec{F} spojitá, lze totiž užít vlastnosti 2, podle níž existuje skalární funkce $\phi(x, y, z)$ tak, že $\vec{F} = \text{grad } \phi$. Přímým výpočtem vektoru rotace v kartézských souřadnicích (2.22) dostáváme

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) .$$

Tento vektor bude mít všechny složky nulové, pokud budou příslušné druhé parciální derivace funkce ϕ záměnné, což je podle známé věty zajištěno v případě spojitosti těchto derivací. Odtud je ihned zřejmé, proč jsme zavedli předpoklad o spojitosti prvních parciálních derivací vektorové funkce \vec{F} . Tato část důkazu není vlastně ničím jiným než důkazem známé vektorové identity $\text{rot grad } \phi = 0$; bylo však užitečné si uvědomit, za jakých předpokladů tato identita platí.

Při výpočtu $\text{rot } \vec{F}$ nikde nevystupují derivace $\partial X/\partial x$, $\partial Y/\partial y$, $\partial Z/\partial z$. Proto je možno předpoklady dokázané vlastnosti oslabit, stačilo předpokládat, že jsou spojitě pouze funkce

$$x, y, z, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y} .$$

Předpoklad o jednoduché souvislosti uvažované oblasti však oslabit nelze (z důvodů použití Stokesovy věty). Existují totiž případy, kdy $\text{rot } \vec{F}$ je nulová ve všech bodech nějaké oblasti a přitom křivkové integrály z P_0 do P mohou být různé pro dvě křivky, které leží v této oblasti. To může nastat v případech, kdy oblast má tvar prstence a jestliže zmíněné dvě křivky probíhají opačnými segmenty prstence (prsteneček si můžeme myslet přeseknutý na dva segmenty tak, že jeden řez prochází bodem P_0 a druhý bodem P). V tomto případě ovšem nelze jednu dráhu spojitým přesunem transformovat na dráhu druhou, aniž bychom vyšli z oblasti [26]. Této situaci je velmi blízký níže uvedený příklad 12.

Vlastnost 4 konzervativních sil bezprostředně souvisí s vlastností 1. Obě vlastnosti popisují v podstatě jediný - nevírový charakter konzervativních sil. Přitom vlastnost 1 toto popisuje v integrálním tvaru, vlastnost 4 ve tvaru diferenciálním. Vlastnost 1 je však obecnější, vlastnost 4 z ní vyplynula jen za předpokladu, že síla je spojitá až do prvního řádu.

Z hlediska zobecnění výše popisovaných vlastností je důležitá následující poznámka. Pouze při důkazu vlastnosti 3 bylo podstatné, že \vec{F} označuje sílu, protože jsme používali druhý Newtonův zákon. V ostatních případech (pokud ještě upustíme od názvu "práce" pro křivkový integrál), může \vec{F} označovat jakékoliv jiné konzervativní pole. Odtud můžeme ihned říci, že např. nevířivý pohyb tekutiny, spojitý do prvního řádu ($\text{rot } \vec{v} = 0$, \vec{v} je rychlost pohybu), je konzervativní a může být tedy popsán skalárním potenciálem φ , tj. $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, viz [7].

Máme-li ověřit, zdali síla nebo jiné vektorové pole je konzervativní, můžeme použít definici konzervativních sil nebo kteroukoliv z uvedených vlastností. Použití vlastnosti 4, tj. ověřování, zdali platí (2.19), je pro tyto účely velmi vhodné, pokud jsou splněny příslušné předpoklady.

Pro praxi je důležitý popis skalárních a vektorových polí v křivočarých souřadnicích. Touto problematikou se zde již zabývat nebudeme, ale přeneseme ji do dalšího dílu těchto skript.

Úlohy

1. Vzájemné působení mezi nukleony (protony a neutrony) může být s dostatečnou přesností vyjádřeno Yukawovým potenciálem

$$U(r) = - \left(\frac{r_0}{r} \right) U_0 e^{-r/r_0} ,$$

kde $U_0 \approx 50$ MeV a $r_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-13}$ cm [19]. Najděte výraz pro odpovídající sílu $F(r) = - dU/dr$.

Odpověď: $F(r) = - \frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right)$.

Síla je brána kladně ve směru rostoucí souřadnice r .

2. Dokažte, že síla $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, která působí na částici o hmotnosti m v konstantním tíhovém poli, je konzervativní; a) důkazem, že práce je nezávislá na dráze; b) nalezením potenciální energie; c) výpočtem rotace.

Odpověď: a) Uvažujte dvě různé dráhy se společným počátečním a koncovým bodem. Dvě blízké roviny kolmé na osu z ve vzdálenostech z a $z + dz$ od počátku vydělí na těchto drahách různé elementární úseky. Užitím (2.4) dokažte, že elementární práce vykonané silou \vec{F} podél obou úseků jsou stejné a rovné $dW = -mgdz$. Postup se opakuje pro další úseky, až se projdou celé dráhy. (Podobný postup je níže v textu použit při důkazu konzervativnosti libovolného centrálního silového pole). b) $\mathcal{E}_p = mgz$.

3. Zobecnění předchozího příkladu. Stejným postupem jako v předchozím příkladu dokažte, že silové pole $\vec{F} = (0, 0, f(z))$, kde f je nějaká funkce, je konzervativní.

Odpověď: a) Lze postupovat naprosto stejně jako v předchozím příkladu. b) $\mathcal{E}_p(z) = - \int_0^z f(\xi) d\xi$.

4. Další zobecnění předchozích dvou příkladů. Dokažte, že silové pole $\vec{F} = (f(x), g(y), h(z))$ je konzervativní; vypočítejte rotaci a potenciální energii.

Odpověď:

$$\mathcal{E}_p(M) = - \int_0^M (f(x)dx + g(y)dy + h(z)dz) .$$

5. Odstředivá síla. Hmotný bod m se otáčí kolem osy z s úhlovou rychlostí ω ve vzdálenosti r od osy. Napište vzorec pro odstředivou sílu a výpočtem potenciální energie dokažte, že tato síla je konzervativní (nulovou potenciální energii volte na rotační ose). Proč nelze zvolit nulovou potenciální energii v nekonečnu? Všimněte si, že tato úloha je speciálním případem příkladu 4.

Odpověď: $\vec{F} = m\omega^2\vec{r} = (m\omega^2x, m\omega^2y, 0)$,
 $\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$. Abychom dostali v nekonečnu nulovou potenciální energii, museli bychom k \mathcal{E}_p přičíst "nekonečnou" konstantu.

6. Nechť se tuhé těleso otáčí kolem osy procházející počátkem s úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Pak rychlost bodu o polohovém vektoru \vec{r} je dána známým vzorcem

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} . \quad (2.23)$$

Je-li $\vec{\omega}$ konstantní vektor, dokažte, že platí [20]

$$\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega} . \quad (2.24)$$

Odtud vyplývá fyzikální význam vektoru rotace: Jestliže např. kapalina proudí rychlostí \vec{v} a v některém bodě je $\text{rot } \vec{v}$ nenulová, pak se malé okolí tohoto bodu otáčí jako celek s úhlovou rychlostí

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} . \quad (2.25)$$

7. Pro hledání zobecněného potenciálu sil kolmých na rychlost je užitečná následující věta: Jestliže sílu působící na částici lze vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F} = \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} , \quad (2.26)$$

kde \vec{v} je rychlost částice a $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ nějaký vektor, pak zobecněný potenciál této síly má tvar

$$V = - \vec{v} \cdot \vec{A} . \quad (2.27)$$

Dokažte!

8. Síla, působící na nabitou částici ve stacionárním magnetickém poli, je dána vzorcem

$$\vec{F}_m = e\vec{v} \times \vec{B} , \quad (2.28)$$

kde e je náboj, \vec{v} rychlost částice a $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$ magnetická indukce. Zaveďme vektorový potenciál $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ vztahem $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Pro sílu \vec{F}_m nalezněte zobecněný potenciál V_m užitím předchozího příkladu. Poznamenejme, že zobecnění na případ nestacionárního elektromagnetického pole (pro Lorentzovu sílu) lze nalézt např. v [25].

Odpověď: $V_m = - e\vec{v} \cdot \vec{A} . \quad (2.29)$

9. Pro Coriolisovu sílu

$$\vec{F}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} , \quad (2.30)$$

nalezněte zobecněný potenciál V_c za předpokladu, že $\vec{\omega}$ je konstantní vektor. Návod: Vyjádřete $\vec{\omega}$ podle (2.24), dosaďte do (2.30) a užitím příkladu 7. Ověřte správnost nalezeného zobecněného potenciálu.

Odpověď: $V_c = - m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) . \quad (2.31)$

10. Ověřte, zdali následující vektorová pole \vec{A} jsou konzervativní, a nalezněte potenciál φ tak, aby $\vec{A} = \text{grad } \varphi$:

a) $\vec{A} = (3x^2 + 2xy, x^2 + 2y + z, y + 3z^2) ;$

b) $\vec{A} = (3x^2y^2z + 3x^2, 2x^3yz, x^3y^2 + 3z^2) ;$

c) $\vec{A} = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy) ;$

d) $\vec{A} = (2yz(1 - 6xyz), 2xz(1 - 6xyz), 2xy(1 - 6xyz)).$

Při výpočtu potenciálu doporučujeme volit dráhu tak, aby její úseky byly rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Odpověď: a) $\varphi = x^3 + x^2y + y^2 + zy + z^3 + C$,

b) $\varphi = x^3 + x^3y^2z + z^3 + C$,

c) $\varphi = (x^3 + y^3 + z^3)/3 - 2xyz + C$,

d) $\varphi = 2xyz(1 - 3xyz) + C$.

11. I když má pole ve všech místech stejný směr, nemusí být konzervativní. Příkladem je síla $\vec{F} = (y, 0, 0)$, dokažte. Počítejte práci vykonanou touto silou při pohybu částice z bodu $(0, 0, 0)$ do $(1, 1, 0)$ podél následujících drah v rovině (x, y) : a) po lomené čáře přes body $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$; b) po lomené čáře přes body $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$; c) po parabolickém oblouku $y = x^2$. Ukažte, jak je třeba stanovit dráhu, aby práce byla tak velká, jak si budeme přát [18]. Vysvětlete, proč tato síla není konzervativní, zatímco obdobná síla z příkladu 3 (též závislá jen na jedné souřadnici a jen s jednou nenulovou složkou) konzervativní je.

12. Jestliže částice obíhají ve stejném smyslu po kružnicích se společnou osou, rotace příslušného pole může být přesto nulová. Příkladem je pole o složkách $X = -y/(x^2 + y^2)$, $Y = x/(x^2 + y^2)$, $Z = 0$, dokažte. Potom ukažte, že práce (příslušný křivkový integrál), vykonaná tímto polem při oběhu částice po kružnici $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, proti směru hodinových ručiček, je 2π . Není zde nějaký rozpor? Ukažte, že práce po libovolné uzavřené křivce, která neobepíná osu z , je nulová [18].

Odpověď: Třebaže vyjde rotace všude nulová, přesto pole není konzervativní, protože na ose z nejsou splněny předpoklady o spojitosti derivací, viz vlastnost 4 konzervativních polí. Kdybychom z uvažované oblasti vyjmuli jisté okolí osy z , nedostaneme zase jednoduše souvislou oblast.

2.4. Intenzita pole a potenciál

V předcházejících paragrafech jsme vyšetřovali síly, které působí na jedinou vybranou částici. Abychom mohli naše úvahy zobecnit, musíme vyšetřit, jaké síly budou působit na jinou vybranou částici, lišící se od původní např. hmotností. Odpověď na tuto otázku je velmi jednoduchá v případě gravitačního nebo elektrostatického pole. Z Newtonova gravitačního zákona plyne, že gravitační síla, která ve stejném místě bude působit na dvě částice lišící se hmotností, bude mít v obou případech stejný směr a její velikost bude přímo úměrná hmotnosti částic. Obdobně z Coulombova zákona plyne, že elektrostatické síly budou mít v daném místě stejný směr, ale jejich velikost bude úměrná velikostem náboje. Z těchto důvodů bude velmi užitečné vyšetřovat síly a potenciální energii, vztažené na jednotkovou částici, tj. na částici s hmotností rovnou jedné, resp. s nábojem rovným jedné apod.

Intenzitou $\vec{E}(\vec{r})$ silového pole budeme nazývat sílu, kterou pole působí na jednotkovou částici v místě o polohovém vektoru \vec{r} . Potenciálem $U(\vec{r})$ konzervativního pole nazveme práci, kterou musíme jednotkové částici dodat (proti účinkům silového pole), abychom ji z výchozího bodu, kde potenciál považujeme za nulový, přemístili do daného bodu.

Označme $\vec{F} = \vec{F}(m, \vec{r})$ sílu, kterou pole působí na částici o hmotnosti m (resp. o náboji, magnetickém množství atd. rovným m), a její potenciální energii označme $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(m, \vec{r})$. Pro širokou kategorii silových polí (jak jsme již uvedli, např. pro pole popsaná Newtonovým gravitačním zákonem, Coulombovým zákonem) jsou působící síla a velikost potenciální energie přímo úměrné velikosti m . V těchto případech existují velmi jednoduché vztahy mezi silou \vec{F} a intenzitou \vec{E} a mezi potenciální energií \mathcal{E}_p a potenciálem U , dané vzorci

$$\vec{F}(m, \vec{r}) = m\vec{E}(\vec{r}), \quad \mathcal{E}_p(m, \vec{r}) = mU(\vec{r}). \quad (2.32)$$

Intenzitu pole a potenciál můžeme tedy v tomto případě definovat pomocí vzorců (proměnné již nevypisujeme)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} , \quad U = \frac{\mathcal{E}_p}{m} . \quad (2.33)$$

Podle (2.14) a (2.15) odtud vyplývá

$$U(x, y, z) = - \int_{P_0(x_0, y_0, z_0)}^{P(x, y, z)} \vec{E} \, d\vec{s} \quad (2.34)$$

a pro spojité silové pole

$$\vec{E} = - \text{grad } U . \quad (2.35)$$

Výchozí bod, v němž pokládáme potenciál za nulový, jsme označili P_0 . Kdybychom za výchozí bod zvolili nějaký jiný bod, změnil by se potenciál o konstantu. Protože volba výchozího bodu P_0 je celkem libovolná, jsou fyzikálně důležité pouze rozdíly potenciálu, nikoliv hodnoty potenciálu samotného. Z (2.35) např. plyne, že intenzita \vec{E} se nezmění, jestliže k potenciálu U přičteme libovolnou konstantu. Při nespecifikovaném počátečním bodě nemá tedy potenciál fyzikální význam. Potenciálem při takovém zavedení rozumíme libovolnou funkci U , z níž lze intenzitu pole vypočítat pomocí vzorce (2.35). Přesto se však v mnohých fyzikálních úlohách výchozí bod specifikuje. Nejčastěji se bod s nulovým potenciálem volí v nekonečnu; v některých úlohách však takovou volbu učinit nelze, např. u potenciálu ostředivé síly nebo u tzv. logaritmického potenciálu.

Poznamenejme, že v obecném případě se intenzita pole obvykle zavádí vztahem

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(m, \vec{r})}{m} .$$

Obdobným vzorcem se definuje U pomocí \mathcal{E}_p . Speciálním případem obecných vzorců, jsou-li \vec{F} a \mathcal{E}_p přímo úměrné velikosti m , jsou vzorce (2.33). Protože se v těchto skriptech budeme zabývat pouze poli, popsány zákony typu Newto-

nova gravitačního zákona nebo Coulombova zákona, budeme při určování intenzity a potenciálu rovnou vycházet ze speciálních vzorců (2.32) a (2.33).

Ještě několik slov k historii názvu "potenciál". Metoda uvažování složek vektoru jako derivací jisté funkce souřadnic podle těchto souřadnic byla objevena Laplacem v jeho pojednání o teorii přitažlivosti. Název "potenciál" (potential) byl této funkci prvně dán Greenem, který ji vzal za základ svého pojednání o elektřině (Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, Nottingham 1828), viz [26]. Greenova práce byla opomíjena matematiky až do r. 1846 a mezi tím byla většina důležitých vět z této práce znovu objevena Gaussem, Chaslesem, Sturmem a Thomsonem. Gauss se však v podstatě přidržel Greenova označení (někdy bývá mylně za autora pojmu "potential" považován až Gauss [18]).

2.5. Siločáry a ekvipotenciální plochy

Pro názornou představu má velký význam grafické znázorňování polí [20].

Uvažujme nejprve skalární pole $\varphi(x, y, z)$. Kdyby se jednalo o nestacionární pole, tj. $\varphi(x, y, z, t)$, budeme je vyšetřovat v určitý časový okamžik. Nechť v nějakém bodě $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nabývá funkce φ hodnotu $\varphi_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0)$. Vyznačme všechny body, ve kterých je hodnota funkce rovna φ_0 . Tyto body budou obecně tvořit plochu, která případně může sestávat i z několika oddělených částí.

Plochu, kde skalární funkce $\varphi(x, y, z)$ nabývá konstantní hodnoty, budeme nazývat hladinou [7, 44], hladinovou plochou nebo izoplochou [34, 20]. Rovnice hladinové plochy v kartézských souřadnicích má zřejmě tvar

$$\varphi(x, y, z) = \text{konst.} \quad (2.36)$$

Speciálně plochám konstantního potenciálu budeme říkat ekvipotenciální plochy.

Poznamenejme, že v dvourozměrném případě, $\varphi = \varphi(x, y)$, hladinovým plochám odpovídají izočáry, např. na mapách zakreslované izotermy, izobary nebo vrstevnice.

Uvažujme nyní vektorové pole. Pro jeho názorné zobrazení zavedeme tzv. vektorové čáry, mající tu vlastnost, že v každém bodě vektorové čáry je tečný vektor k této čáře rovnoběžný se směrem pole [20]. V [18] se pro tyto čáry používá označení "field lines" (polní čáry, čáry pole). Jestliže vektorovým polem je pole rychlosti proudící kapaliny, nazýváme vektorové čáry proudnicemi [7, 18]. Jedná-li se o silová pole, mluvíme o siločárách (silokřivkách). Dobře známý je pokus se znázorňováním siločar pole magnetu pomocí železných pilin. Představa siločar se ukázala natolik podnětná, že vedla Faradaye k mnoha jeho důležitým objevům v elektřině a magnetismu.

Určení vektorových čar v některých nejjednodušších úlohách je záležitostí snadné geometrické úvahy. Obecně však spočívá v řešení dvojice obyčejných diferenciálních rovnic, jak hned ukážeme. Nechť $\vec{ds} = (dx, dy, dz)$ je tečný vektor k vektorové čáře pole $\vec{F} = (X, Y, Z)$. Podle definice vektorové čáry musí být oba vektory \vec{ds} a \vec{F} rovnoběžné, což můžeme vyjádřit vztahem $\vec{ds} = k\vec{F}$, kde k je nějaké číslo. Zmenšujeme-li velikost vektoru \vec{ds} k nule (k zmenšujeme k nule), přejde \vec{ds} v infinitesimální úsek vektorové čáry. Podmínka rovnoběžnosti tak přechází v rovnici vektorové čáry, kterou pomocí složek obvykle zapisujeme ve tvaru

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} . \quad (2.37)$$

Vektorová čára ovšem dává informaci pouze o směru pole. Velikost vektoru, což je skalár, musíme graficky znázornit nějakým jiným způsobem. Například bychom mohli ještě sestavit hladinové plochy tohoto skaláru. Jiná možnost spočívá v tom, že bychom velikost vektoru charakterizovali hustotou vektorových čar, kde je velikost větší, nakreslíme je hustěji. Pak se ovšem obecně může stát, že při přechodu do jiného místa prostoru budeme muset nějaké vektorové čáry vypustit nebo naopak zase některé přidat. U některých polí však k tomuto

problému nedochází (nezřídlová pole, $\text{div } \vec{F} = 0$, např. gravitační nebo elektrostatické pole ve vakuu).

Je-li silové pole konzervativní, můžeme je znázorňovat pomocí siločar i pomocí ekvipotenciálních ploch. Vyšetřeme jejich vzájemný vztah. Uvažujme element dráhy \vec{ds} , ležící na ekvipotenciální ploše potenciálu U . Podle definice ekvipotenciální plochy je přírůstek potenciálu dU podél tohoto elementu nulový. Odtud plyne (má-li U spojitě první derivace, což zajišťuje existenci totálního diferenciálu [36])

$$0 = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = (\text{grad } U) \cdot \vec{ds} = -\vec{E} \cdot \vec{ds}.$$

Dostali jsme, že skalární součin intenzity pole a libovolného elementu dráhy na ekvipotenciální ploše je nulový. Odtud plyne, že intenzita je kolmá na ekvipotenciální plochu. Z toho dále vyplývá, že siločáry jsou ortogonální trajektorie k ekvipotenciálním plochám. Výjimečná situace nastává pouze v bodech, kde všechny tři složky intenzity jsou nulové. Zde nelze mluvit o směru pole, tyto body jsou body rovnováhy [18].

Nyní vyvstává přirozeně otázka, kdy dáme přednost zobrazení pole pomocí siločar a kdy pomocí ekvipotenciálních ploch. Jednoznačnou odpověď dát nelze, v mnohých případech na tom příliš nezáleží. Pouze snad v případech, kdy nás více zajímá směr pole, dáme přednost zobrazení pomocí siločar, zatímco v úlohách, kdy nás více zajímá velikost intenzity pole, dáme přednost zobrazení pomocí ekvipotenciálních ploch (vzdálenost ekvipotenciálních ploch je nepřímě úměrná velikosti intenzity [18]). Někdy je způsob zobrazení přímo požadován charakterem úlohy, např. pohyb nabitě částice kolem magnetické siločáry nebo naopak určování tvaru geoidu (ekvipotenciální plocha tíhového potenciálu, která nejlépe souhlasí se střední hladinou světových moří).

Podotkněme ještě, že zobrazování vektorového pole pomocí siločar a ekvipotenciálních ploch má jistý dvojrozměrný protějšek v zobrazování terénu na mapách pomocí šrafování a vrs-tevnic.

Čtenáři, který by se chtěl podrobněji seznámit s některými metodami konstruování ekvipotenciálních ploch a siločar, doporučuji knihu Maxwellovu [26], která v mnohých směrech dosud neztratila na aktuálnosti a obsahuje řadu pěkných obrazových příloh k této problematice.

Úlohy

1. Rovnici vektorové čáry pole \vec{F} můžeme také psát ve tvaru

$$\vec{ds} \times \vec{F} = 0 ,$$

kde \vec{ds} je element vektorové čáry [20]. Tento vzorec nejprve zdůvodněte interpretací vektorového součinu a pak dokažte ekvivalenci s rovnicí (2.37).

2. Nechť silové pole $\vec{F} = (X, Y, Z)$ má velmi jednoduchý tvar $X = x, Y = y, Z = z$. Nalezněte tvar siločar [18].

Řešení: Diferenciální rovnice siločar jsou

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} ,$$

ze kterých ihned plynou integrály

$$\log y = \log x + \log c_1 , \quad \log z = \log x + \log c_2$$

nebo

$$y = c_1 x , \quad z = c_2 x .$$

Dostáváme tedy výsledek, že siločáry jsou přímky, procházející počátkem (uvedené integrály však nepopisují siločáry v rovině $x = 0$).

2.6. Speciální případy konzervativních sil. Centrální síly.

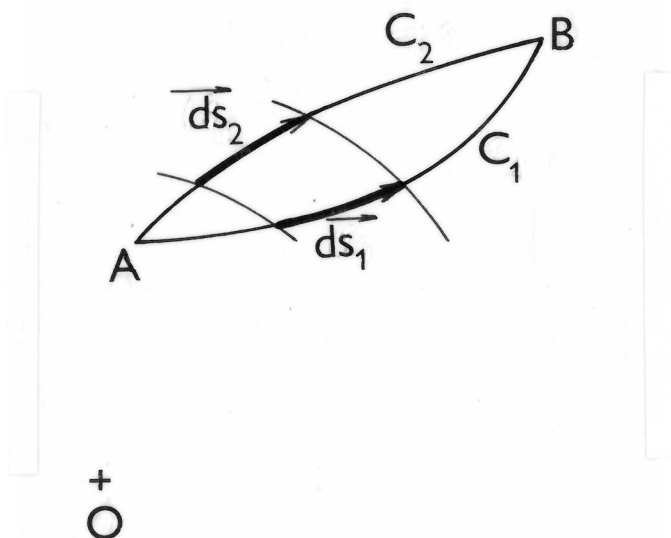
Velmi jednoduchým speciálním případem konzervativních sil je homogenní silové pole, kdy má intenzita pole ve všech místech stejnou velikost a směr. Ze složitějších případů patrně nejdůležitějším a často ve fyzice vyšetřovaným speciálním případem konzervativních sil jsou síly centrální a z nich potom síly přímo úměrné vzdálenosti a hlavně pak síly nepřímo úměrné kvadrátu vzdálenosti. Všimněme si centrálních sil trochu podrobněji.

Centrální silové pole je takové, v němž směr síly vždy prochází pevným bodem a velikost a smysl síly závisí pouze na vzdálenosti od tohoto bodu. Tento pevný bod se nazývá centrum pole [18]. Zvolíme-li počátek soustavy souřadnic do centra pole, bude síla \vec{F} směřovat podél polohového vektoru \vec{r} , její velikost bude pouze funkcí r :

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} . \quad (2.38)$$

Věta: Každé centrální silové pole je konzervativní.

Důkaz: Uvažujme práci, kterou centrální silové pole vykoná při přenosu dané částice z libovolného bodu A do libovolného bodu B nejprve podél dráhy C_1 , potom podél dráhy C_2 , viz obr. 4. Kolem centra sil O opišme dvě blízké kulové plochy σ



Obr. 4

poloměrech r a $r + dr$ tak, aby protínaly dráhy C_1 a C_2 . Označme \vec{ds}_1 element dráhy, který tyto kruhové plochy vytínají na dráze C_1 , a obdobně \vec{ds}_2 element dráhy na C_2 . Síly, působící podél těchto elementů označme \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , příslušné elementární práce dW_1 a dW_2 . Platí

$$dW_1 = \vec{F}_1 \vec{ds}_1 = F_1 ds_1 \cos \gamma_1, \quad dW_2 = F_2 ds_2 \cos \gamma_2,$$

kde γ_1 a γ_2 jsou úhly sevřené silou a elementem dráhy. Protože uvažované elementy dráhy se nacházejí ve stejné vzdálenosti od centra pole, platí $F_1 = F_2$. Protože směr síly \vec{F}_1 prochází bodem O , je průmět elementu \vec{ds}_1 do směru síly totožný s průmětem do směru poloměru kulové plochy, tedy $ds_1 \cos \gamma_1 = dr$. Totéž platí pro element \vec{ds}_2 , $ds_2 \cos \gamma_2 = dr$. Odtud plyne

$$F_1 ds_1 \cos \gamma_1 = F_2 ds_2 \cos \gamma_2,$$

tj. práce centrální síly podél odpovídajících si úseků \vec{ds}_1 a \vec{ds}_2 jsou stejné. Přejdem k integrálu dostáváme, že práce podél drah C_1 a C_2 jsou stejné, síla je tedy konzervativní. Zobecnění úvah na složitější dráhy, kdy např. "klikatou" dráhu protínají kulové vrstvy ve více úsecích, je jednoduché a přenecháme je čtenáři. Tím je věta dokázána.

Obrácená věta neplatí. Existují síly, které jsou konzervativní a přitom nejsou centrální. Uveďme jednoduchý příklad. Nechť dva různé hmotné body P_1 a P_2 budí gravitační pole podle Newtonova gravitačního zákona (nebo elektrostatické pole podle Coulombova zákona). Pole působené každým z bodů jednotlivě je centrální. Výsledné pole, které vznikne složením těchto dvou centrálních polí, již centrální není, ale zůstává konzervativní.

V učebnicích mechaniky se odvozují pohybové rovnice, popisující pohyb částice v poli centrální síly. K nejdůležitějším obecným vlastnostem patří, že tento pohyb je rovinný a plošná rychlost zůstává konstantní (druhý Keplerův zákon). Toto platí pro obecnou centrální sílu, nikoliv jen pro sílu

nepřímo úměrnou čtverci vzdálenosti [14].

Analytický výpočet dráhy částice v poli centrální síly je možný pouze pro některé konkrétní zákony změny síly [14]. Nejčastěji se vyšetřuje mocninový zákon, tj. závislost typu

$$|\vec{F}| = Kr^n, \quad (2.39)$$

kde K a n jsou konstanty, r je vzdálenost od centra pole. Zvláštní pozornost zasluhují následující speciální případy [14, 33]:

- a) Lineární vracející síla (lineární harmonický oscilátor), kdy síla je přímo úměrná okamžité výchylce, ale má opačný směr. V tomto případě máme

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \quad k > 0. \quad (2.40)$$

Protože v rovině dráhy lze (2.40) rozložit na dva na sebe kolmé harmonické pohyby se stejnou frekvencí, plyne odtud, že dráhou volného hmotného bodu bude nejjednodušší Lissajousův obrazec, tedy elipsa [14]. Známým příkladem jsou malé kmity sférického kyvadla [44]. Jestliže speciálně elipsa degeneruje na úsečku, dostáváme přímočarý harmonický pohyb. Nejznámějším jeho příkladem jsou malé kmity matematického kyvadla, malé kmity pružiny, další příklady viz [19].

- b) Síla nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti. Zde je $F = K/r^2$ nebo vektorově

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.41)$$

kde K může být kladné i záporné. Tato síla je jednou z nejdůležitějších centrálních sil. Příkladem tohoto pole je gravitační pole působené pevným hmotným bodem nebo elektrostatické pole buzené pevným bodovým nábojem; stačí si všimnout, že speciální volbou K dostaneme z (2.41) Newtonův gravitační zákon nebo Coulombův zákon. Také vnější gravitační pole buzené kulově symetrickým tělesem (Slunce nebo planeta) patří do této skupiny. Lze ukázat, že dráha hmotného bodu v poli síly (2.41) je kuželosečkou (viz

např. [14]). Je-li tato kuželosečka elipsou, platí pro pohyb známé tři Keplerovy zákony (druhý Keplerův zákon platil pro libovolnou centrální sílu).

V dalších kapitolách se budeme zabývat převážně jen silami, které bezprostředně souvisejí se silami nepřímo úměrnými čtverci vzdálenosti. Budou to síly sice obecnější než (2.41), ale budou tvořeny superpozicí konečného i nekonečného počtu sil tohoto typu (2.41). Nebudou to obecně již síly centrální, viz příklad uvedený výše, ale budou konzervativní. Potenciál takového silového pole budeme nazývat Newtonovým potenciálem. Např. gravitační pole hmotného tělesa obecného tvaru vyjádříme jako součet (integrál) polí působených jednotlivými malými elementy tělesa, kde pole každého elementu bude popsáno Newtonovým gravitačním zákonem.

Úlohy

1. Dokažte, že libovolné centrální silové pole je konzervativní; a) nalezením potenciálu, b) důkazem, že práce je nezávislá na dráze [18].

Odpověď:

$$a) \quad U(r) = - \int_{r_0}^r E(\xi) d\xi, \quad \vec{E}(\vec{r}) = - \frac{dU(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

b) Důkaz proveden v textu.

2. Obdobně dokažte, že libovolné axiální silové pole je konzervativní. Axiální silové pole je takové, v němž směr síly vždy prochází pevnou přímkou (kolmo na tuto přímku) a velikost a smysl síly závisí pouze na vzdálenosti od této přímky. Tato přímka se nazývá osa pole [18].

Návod: Postupujte obdobně jako v předchozím příkladu.

3. Vypočítejte potenciální energii částice, na níž působí lineární síla (2.40).

Odpověď: $\zeta_p = \frac{1}{2} kr^2$.

4. Vypočítejte potenciální energii částice, na níž působí síla nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti (2.41). Proč se v tomto a v předchozím příkladu volí různě místa nulové potenciální energie?

Odpověď: $\mathcal{E}_p = K/r$, viz odvození v následující kapitole.

5. Uvažujme dvě nepolární molekuly (mají totožná těžiště kladných a těžiště záporných nábojů). Tyto molekuly se v malých vzdálenostech odpuzují, ve velkých vzdálenostech přitahují silou nepřímo úměrnou sedmé mocnině vzdálenosti, tj. $F = k/r^7$, kde k je konstanta závislá na typu molekul [11]. Určete potenciální energii jedné molekuly v poli druhé molekuly ve velkých vzdálenostech.

Odpověď: $\mathcal{E}_p = -k/(6r^6)$.

6. Nakreslete přibližně siločáry a ekvipotenciální plochy elektrostatického pole buzeného dvěma stejně velikými náboji; a) souhlasného znaménka, b) opačného znaménka.
7. Nakreslete přibližně siločáry a ekvipotenciální plochy pole, které je superpozicí centrálního pole a pole homogenního (konstantního co do velikosti i směru).

3. NEWTONŮV POTENCIÁL

3.1. Newtonův zákon všeobecné gravitace. Coulombův zákon

Newtonův zákon všeobecné gravitace zní [44]: "Dva hmotné body m_1, m_2 přitahují se vzájemně silou přímo úměrnou součinu obou hmot a nepřímo úměrnou čtverci jejich vzdálenosti; směr síly padá do spojnice obou bodů. Tedy síla \vec{F}_{12} , kterou působí hmota m_1 na hmotu m_2 , je

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (3.1)$$

kde \vec{r}_{12} je vektor, jehož počátek je v bodě m_1 a konec v bodě m_2 .

Konstanta G se nazývá gravitační konstanta, její hodnota je $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Různé metody určování gravitační konstanty jsou uvedeny v [44] a zejména pak v [37, 38]. Mezi nejznámější patří určování gravitační konstanty pomocí torzních vah.

Silové pole (3.1), působené hmotným bodem m_1 , je centrální a tedy konzervativní. Položme hladinu nulové potenciální energie do nekonečna. Potenciální energii \mathcal{E}_p hmotného bodu m_2 v gravitačním poli bodu m_1 vypočítáme podle (2.14). Protože je práce nezávislá na tvaru dráhy, volíme jednoduchou integrační cestu, a to podél polopřímky, vycházející z bodu m_1 . Dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(r_{12}) &= - \int_{\infty}^{r_{12}} \vec{F}_{12}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\infty}^{r_{12}} G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dr = \\ &= G m_1 m_2 \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{r dr}{r^3} = G m_1 m_2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r_{12}} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Položíme-li v předcházejících výrazech $m_2 = 1$, dostaneme výrazy pro intenzitu \vec{E} a potenciál U gravitačního pole, které je buzené hmotným bodem m_1 (místo r_{12} píšeme r_1):

$$\vec{E} = - \frac{Gm_1}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1}, \quad U = - \frac{Gm_1}{r_1} \quad (3.3)$$

Vynecháme-li zde ještě index 1, dostáváme tento výsledek: Intenzita a potenciál gravitačního pole, které je buzené hmotným bodem o hmotnosti m , jsou dány vzorci

$$\vec{E} = - \frac{Gm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad U = - \frac{Gm}{r}, \quad (3.4)$$

kde \vec{r} je vektor, jehož počátek je v hmotném bodě m a konec v místě, kde potenciál a intenzitu určujeme.

Potenciál, který lze odvodit ze zákonů typu (3.1) budeme nazývat Newtonovým potenciálem. Při budování matematické teorie tohoto potenciálu není podstatné, jaké konstanty vystupují v čitateli vzorce (3.1), ale podstatné je pouze to, že síly mezi dvěma hmotnými body jsou nepřímo úměrné čtverci vzdáleností. Proto také potenciál elektrostatického a magnetostatického pole budeme zařazovat mezi Newtonův potenciál, což vyplývá z následujícího rozboru.

Se silami typu (3.1) se setkáváme také v elektrostatickém poli. Podle Coulombova zákona je síla \vec{F}_{12} , kterou ve vakuu působí bodový náboj q_1 na bodový náboj q_2 , dána vzorcem

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (3.5)$$

kde vektor \vec{r}_{12} je definován obdobně jako u vzorce (3.1), ϵ_0 je konstanta zvaná permitivita vakua, jejíž číselná hodnota je $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ [11, 23]. Podle analogií s gravitačním polem odtud ihned plyne, že intenzita a potenciál elektrostatického pole, buzeného bodovým elektrickým nábojem q , jsou dány vzorci

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{r^2} , \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} . \quad (3.6)$$

Kdybychom zavedli pojem magnetického náboje (magnetického množství), dostaneme pro sílu, intenzitu a potenciál v magnetickém poli opět obdobné vzorce jako výše.

V dalším se zaměříme především na studium gravitačního potenciálu. Z rozboru zde provedeného ovšem plyne, že obecné výsledky lze automaticky přenést i na jiné typy Newtonova potenciálu.

3.2. Princip superpozice

"...To se do takového dortu dá všechno, co je k jídlu nejlepší, všechno, co nejraději jíš, a pak je ten dort nejlepší. Když tam dáš takových nejlepších jídel pět, tak je pětkrát dobrý, když jich tam dáš deset, tak je potom desetkrát dobrý. Ale my si jich tam dáme sto a budeme mít stokrát dobrý dort!"

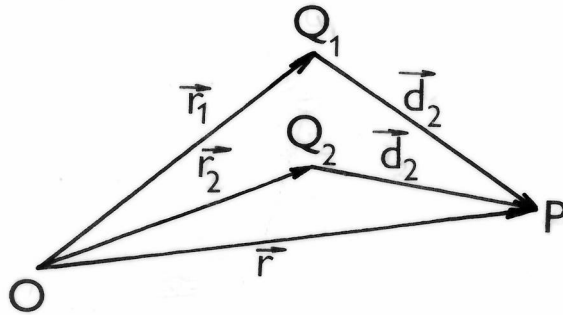
(J. Čapek: Povídaní o pejskovi a kočičce).

Newtonův gravitační zákon říká, jakou silou na sebe působí dva hmotné body. Ze samotného gravitačního zákona ovšem naprosto nic neplyne o tom, jaké budou síly, kterými na sebe budou působit tři nebo více hmotných bodů. Abychom mohli Newtonův gravitační zákon použít ke studiu silových polí, působených větším počtem hmotných bodů, musíme k němu připojit ještě pravidlo, jak se budou účinky od jednotlivých hmotných bodů skládat. Z pozorování vyplývá, že toto pravidlo je velmi jednoduché, že jím je pravidlo o vektorovém sčítání sil. Protože tomuto pravidlu o vektorovém sčítání sil budeme přisuzovat velmi obecnou platnost, budeme mu říkat princip superpozice.

Podle (3.4) a podle principu superpozice bude intenzita gravitačního pole v bodě P , která je působena hmotnými body Q_1, Q_2, \dots, Q_n , dána vzorcem

$$\vec{E} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{d_i^2} \frac{\vec{d}_i}{d_i}, \quad (3.7)$$

kde m_i je hmotnost částice Q_i a \vec{d}_i je vektor, který začíná v bodě Q_i a končí v bodě P , viz obr. 5. Dříve než



Obr. 5

budeme hledat potenciál pro sílu (3.7), vyjádříme ji ve složkách. Polohový vektor bodu P označme $\vec{r} = (x, y, z)$, polohový vektor bodu Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) označme $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Pak platí

$$\vec{d}_i = \vec{r} - \vec{r}_i = (x - x_i, y - y_i, z - z_i), \quad (3.8)$$

$$d_i = |\vec{d}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}.$$

Pro složky intenzity (3.7) můžeme psát

$$E_x = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{d_i^2} \frac{x - x_i}{d_i}, \quad E_y = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{d_i^2} \frac{y - y_i}{d_i}, \quad (3.9)$$

$$E_z = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{d_i^2} \frac{z - z_i}{d_i}.$$

Při pevně daných bodech Q_1, Q_2, \dots, Q_n je intenzita pole pouze funkcí souřadnic bodu P , kde pozorujeme, tj. $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$. Všimněme si nyní, viz (3.8), že platí

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x-x_i}{d_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{d_i} \right) = - \frac{1}{d_i^2} \frac{x-x_i}{d_i}, \quad (3.10)$$

tedy

$$E_x = - G \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{m_i}{d_i} \right).$$

Zcela obdobné vzorce můžeme dostat pro zbývající dvě složky. Odtud plyne, že gravitační pole soustavy hmotných bodů můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\vec{E} = - \text{grad } U, \quad (3.11)$$

kde

$$U = - G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{d_i}. \quad (3.12)$$

Porovnáme-li tento vzorec se (3.4), vidíme, že potenciál soustavy hmotných bodů dostaneme prostě jako součet potenciálů od jednotlivých hmotných bodů. Odvodili jsme tak dobře známé pravidlo pro skládání potenciálů (princip superpozice pro potenciál) pro případ soustavy hmotných bodů.

Dále budeme předpokládat, že uvedené principy superpozice platí i pro jakékoliv složitější případy rozložení hmoty. Bude-li hmota rozložena podél nějaké křivky C s hustotou λ (λ je hmotnost připadající na jednotku délky), bude tedy potenciál dán vzorcem

$$U = - G \int_C \frac{\lambda}{d} ds, \quad (3.13)$$

kde d je vzdálenost pozorovatele od jednotlivých úseků ds křivky C . Obdobně při plošném rozložení hmoty po ploše S

s plošnou hustotou σ dostaneme potenciál ve tvaru

$$U = - G \iint_S \frac{\sigma}{a} dS . \quad (3.14)$$

Konečně při prostorovém rozložení hmoty v tělese V s prostorovou hustotou ρ bude potenciál dán vzorcem

$$U = - G \iiint_V \frac{\rho}{a} dV . \quad (3.15)$$

Poznamenejme, že v posledních vzorcích nemusejí být hustoty λ , σ a ρ konstantní, ale mohou se od místa k místu měnit. V dalším budeme teorii budovat na Newtonově gravitačním zákonu a principu superpozice pro potenciál. Naším fyzikálním představám ale odpovídá, že by také současně měl platit princip superpozice pro intenzity; proto také bude třeba ověřovat, zdali z teorie vyplývá platnost principu superpozice pro intenzitu, zdali je tedy teorie v soulase s fyzikální zkušeností.

3.3. Singularita pole

K právě zavedeným potenciálům uveďme několik poznámek a zatím bez důkazu několik jejich vlastností [32].

Je-li hustota omezená, pak objemový integrál ve vzorci (3.15) nemá singularitu. Jestliže však zdroje pole považujeme za plošné, lineární nebo bodové, pak se objevují singularity. Různé typy singularit jsou uvedeny v tab. 1. Připomeňme, že při nekonečné rozlehlosti plošných nebo lineárních zdrojů (např. v případě jednorozměrných nebo rovinných polí) už nelze potenciál v nekonečnu považovat za nulový.

Singularita uvažovaného typu ve skutečnosti neexistují, ale v mnohých případech se reálná pole málo liší od polí s dostatečně jednoduše rozloženými singularitami. Taková záměna reálných zdrojů pole zdroji bodovými, lineárními nebo plošnými umožňuje hodně zjednodušit matematické výpočty při řešení konkrétních úloh. Kromě toho takové zdroje jsou vhodné

Tabulka 1. Typy singularit pole [32].

Rozložení zdrojů	Závislost potenciálu na vzdálenosti v blízkosti daného rozložení zdrojů	Závislost intenzity na vzdálenosti v blízkosti daného rozložení zdrojů
Plošné	r	konst
Lineární	$\ln r$	r^{-1}
Bodové	r^{-1}	r^{-2}
Multipól řádu 2^n	r^{-n-1}	r^{-n-2}

jako jednoduché fyzikální pojmy při popisu reálných polí. Vyušetřováním vlastností potenciálů takových zdrojů se budeme zabývat v následující kapitole a zejména pak v připravovaném dalším dílu těchto skript.

3.4. Meze použitelnosti Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona

Newtonův gravitační zákon a jemu příslušný princip superpozice byly odvozeny z pozorování. Jejich význam pro vědu a pokrok lidstva nelze ani dobře ocenit. Osvědčily se a stále osvědčují při řešení mnohých úloh fyziky, astronomie, geofyziky, geodézie aj. S Newtonovým gravitačním zákonem jsou spojeny i takové triumfy lidského ducha, jakým byla např. předpověď existence a výpočet polohy planety Neptun (Leverrier a Adams r. 1846), na základě čehož bezprostředně následoval objev této planety [19]. Obdobně Coulombův zákon a příslušný zákon pro magnetická množství se staly základem celé teorie v elektrostatice a magnetostatice.

Přesto kolem těchto zákonů zůstávaly některé nevyjasněné problémy. Od samého počátku byly proti těmto zákonům vznášeny námítky v souvislosti s otázkami přímého silového působení do dálky, protože tyto zákony tvrdí, doslova vzato, že působení do dálky není ničím zprostředkováno. Další problémy přinesly objevy v elektrodynamice v 19. století. Ty postavily teorii

před úkoly, které se na rozdíl od dřívějších úkolů nedaly již řešit jen pomocí centrálních sil mezi hmotnými body, závislých jen na vzdálenosti [24]. K dalším velkým změnám v nazírání na tyto problémy došlo v souvislosti s budováním teorie relativity.

Speciální teorie relativity nepřipouští okamžité působení na dálku (takové působení představuje nekonečně rychlé šíření signálu, které je v rámci teorie relativity ve sporu s kausalitou). V době vzniku teorie relativity bylo již ovšem dlouho známo, že elektromagnetické působení je obecně popsáno Maxwellovými rovnicemi a Coulombův zákon je jejich speciálním důsledkem v případě vzájemného působení dvou nábojů v klidu. Maxwellovy rovnice vyhovují požadavkům speciálního principu relativity, ve skutečnosti právě požadavek, aby rovnice Maxwellovy elektrodynamiky měly stejný tvar ve všech inerciálních systémech, odvozený z experimentálních dat, vedl k vybudování speciální teorie relativity.

Přes formální podobnost je mezi Coulombovým zákonem a Newtonovým gravitačním zákonem hluboký rozdíl: gravitace je vždy přitažlivá a úlohu "gravitačního náboje" hraje hmotnost, tedy tíž parametr, který stojí u zrychlení v pohybových rovnicích. Důsledkem této skutečnosti je, že všechna tělesa padají v daném gravitačním poli s týmž zrychlením. Tento experimentálně velmi dobře ověřený fakt se stal základem Einsteinovy obecné teorie relativity, kde je gravitace popisována zcela jinak než ostatní působení; nikoliv jako síla, nýbrž jako zakřivení prostoročasu. Rovnice, které určují toto zakřivení, představují velice složitou soustavu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Z jejich nelinearity plyne, že na rozdíl od elektromagnetismu neplatí princip superpozice.

Ačkoliv obecně relativistická teorie gravitace představuje v současné době experimentálně dobře prověřenou teorii, pro slabá statická gravitační pole se její předpovědi liší od newtonovské teorie jen nepatrně. Gravitační pole Země je v tomto smyslu slabé a proto v geofyzikálních aplikacích zcela vystačíme s Newtonovým gravitačním zákonem. Pokud bychom přesto chtěli relativistické vlivy uvažovat, např. u pohybu

družice kolem Země, stačí obvykle uvažovat klasickou mechaniku a zavést malé relativistické korekce. Kromě toho v případě družice Země existuje řada jiných "rušivých" vlivů, jako nepravidelnosti v rozložení hmot v Zemi, vliv atmosféry aj., které jsou mnohonásobně větší než relativistické vlivy. Na nevhodnost používání obecných teorií v situacích, kdy toho není třeba, upozorňuje Bondi v [6], kde uvádí tento příklad: "Egyptské stavitelství vycházelo z předpokladu, že Země je rovinná. I když současný stavitel ví, že je Země kulatá, přesto při stavbě domu křivost Země neuvažuje". Nebo jiný citát z této knihy: "Pro libovolnou teorii je potřebná určitá hloubka, ale v rozumných mezích".

V dalším tedy budeme užívat výhradně Newtonův gravitační zákon. Pouze kdybychom chtěli studovat pohyby těles v blízkosti Slunce, museli bychom relativistické efekty uvažovat (známý problém se stáčením dráhy Merkura). Výzkum gravitačních polí na Zemi a teorie relativity se spíše setkávají v jiných souvislostech, jako např. v otázkách detekce gravitačních vln, časové proměnlivosti gravitační konstanty nebo ověřování principu ekvivalence setrvačné a gravitační hmoty.

Závěrem poznamenejme, že je dobře známo, jaký význam sehrála astronomická měření při formování Newtonova gravitačního zákona a při jeho ověřování. Méně je asi známo, že nemenší roli ve své době sehrála i měření tvaru Země, která měla poskytnout nezávislý důkaz platnosti gravitačního zákona, a to hned ve dvou směrech. Přesné určení poloměru Země bylo základem přesného určení vzdálenosti Měsíce od Země, což sehrálo v Newtonových úvahách, jak je dobře známo, velmi důležitou roli. Druhou otázkou bylo zploštění Země, předpověděné Newtonem jako důsledek působení gravitační a odstředivé síly. Teprve spolehlivý experimentální důkaz o zploštění Země, získaný až po Newtonově smrti, byl považován za rozhodující argument pro všeobecné přijetí Newtonovy teorie; až o sto let později došlo k slavné předpovědi a objevu planety Neptun. Vedle toho Newtonova teorie umožnila snadno vysvětlit příliv a odliv na mořích, v té době již velmi dobře známý přírodní jev. Tehdejší měření Země, vedle bezprostředního významu pro geodézii, měla

tedy i zásadní význam při utváření základů fyziky, nehledě již na to, že byla také základem pro definici metru. Blíže se lze s těmito otázkami seznámit např. v [11, 40, 49].

Úlohy

Pro osvěžení některých číselných údajů a zopakování uvádíme i velmi jednoduché příklady na použití Keplerových zákonů a Newtonova gravitačního zákona.

1. Jak zní Keplerovy zákony?

2. Siderická oběžná doba Jupitera je 11,86 let, Pluta 247,7 let. Vypočítejte velké poloosy drah těchto planet.

Odpověď: 5,20 a 39,4 AU.

3. Halleyova kometa obíhá kolem Slunce po protáhlé eliptické dráze s hlavní poloosou $a = 17,95$ AU a excentricitou $e = 0,967$. Určete její nejmenší a největší vzdálenost od středu Slunce. Víte-li, že prošla perihéliem 19. dubna 1910, určete rok, kdy se znovu vrátí.

Odpověď: $r_p = a(1-e) = 0,6$ AU; $r_a = a(1+e) = 35,3$ AU; 1986.

4. Střední vzdálenost Měsíce od Země činí 384 400 km a oběžná doba je 27,322 dnů (siderická perioda). Sputnik 1, první umělá družice Země vypuštěná 4. října 1957, se pohyboval po dráze, jejíž perigeum bylo ve výšce 227 km a apogeum ve výšce 947 km nad zemským povrchem. Rovníkový poloměr Země je 6378 km. Vypočítejte velkou poloosu a oběžnou dobu Sputniku 1. (Pro zjednodušení zanedbejte hmotnost Měsíce ve srovnání s hmotností Země, tj. neuvažujte jako problém dvou těles).

Odpověď: 6965 km, 96 min (skutečná oběžná doba byla 96,17 min).

5. Roku 1610 objevil Galilei čtyři největší měsíce Jupitera. Nazývají se Io, Europa, Ganymed a Callisto. Io obíhá s periodou 1,769 dnů po kruhové dráze o poloměru 421 600 km. Oběžné dráhy dalších galileovských měsíců jsou postupně 3,551; 7,155 a 16,689 dnů. Určete poloměry jejich drah

v tisících km.

Odpověď: Skutečné poloměry jsou 671, 1070 a 1880 (v tisících km [13]).

6. Luna 1, první kosmická raketa vypuštěná k Měsíci dne 2. ledna 1959, se po několika dnech po vypuštění stala první umělou planetou. Perihélium její dráhy bylo ve vzdálenosti $146,4 \cdot 10^6$ km od středu Slunce, afélium ve vzdálenosti $197,2 \cdot 10^6$ km. Naleznete její oběžnou dobu kolem Slunce, jestliže víte, že Země obíhá kolem Slunce po dráze s velkou poloosou $149,6 \cdot 10^6$ km a periodou 365,256 dnů [4].

Odpověď: Ze vzorců pro vzdálenost perihélia $r_p = a(1-e)$ a vzdálenost afélia $r_a = a(1+e)$ plyne vzorec pro výpočet velké poloosy $a = (r_p + r_a)/2$. Odtud plyne $a = 171,8 \cdot 10^6$ km, oběžná doba je pak 450 dnů.

7. Za předpokladu, že dráhy planet jsou kružnice, odvoďte ze třetího Keplerova zákona, že přitažlivá síla je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. Tento výsledek byl znám již Newtonovým předchůdcům. Newton však rozšířil tento výsledek i na případ eliptických drah.

Řešení: Přitažlivá síla je rovna síle odstředivé, pro níž platí $F = m\omega^2 r$, kde m je hmotnost planety, ω oběžná úhlová rychlost, r poloměr dráhy. Podle třetího Keplerova zákona platí $r^3\omega^2 = K$, kde K je konstanta společná pro všechny planety. Vyloučením ω^2 dostáváme $F = mK/r^2$. Konstanta K charakterizuje Slunce. Použijeme-li dále zákona akce a reakce a předpokladu, že gravitační přitažlivost je obecnou vlastností všech těles, bude planeta přitahovat Slunce stejně velikou silou, pro níž analogicky platí $F = Mk/r^2$, kde M je hmotnost Slunce a k charakterizuje planetu. Odtud plyne, že čitatel ve výrazu pro sílu musí obsahovat součin mM , z čehož ihned vyplývá Newtonův gravitační zákon [29].

8. Dokažte, že na Měsíc při jeho oběhu kolem Země působí dostředivé zrychlení $2,7 \text{ mm/s}^2$ (použijte číselných údajů z příkladu 4). Zrychlení volného pádu na zemském povrchu je $9,8 \text{ m/s}^2$. Mají-li obě uvedená zrychlení společný původ, pak příslušná síla musí klesat se čtvercem vzdálenosti od středu Země. Ověřte! Této úvahy použil Newton (s tehdejšími číselnými údaji) jako prvního ověření správnosti jeho gravitačního zákona, které nezáviselo na Keplerových zákonech.
9. Poloměry Země a Měsíce jsou 6378 a 1738 km, jejich hmotnosti jsou v poměru 81,3 : 1. Vypočítejte tíhové zrychlení na Měsíci, je-li na Zemi rovno $9,8 \text{ m/s}^2$. Kolikrát je tíhové zrychlení na Měsíci menší než na Zemi?
Odpověď: $1,6 \text{ m/s}^2$; 6 krát.
10. S přesností na jednu platnou cifru uveďte, kolikrát je hmotnost Slunce větší než hmotnost Země.
11. Ověřte váš odhad poměru hmotností Slunce a Země z předchozího příkladu tím, že porovnáte parametry oběžných pohybů Země kolem Slunce a Měsíce kolem Země. (Použijte údaje z příkladů 4 a 6).
Odpověď: 330 000.
12. Obdobným postupem jako v předchozím příkladu určete poměr hmotností Marsu, Jupitera a Saturna k hmotnosti Země, je-li známo, že
- a) Měsíc Phobos obíhá kolem Marsu s periodou 0,319 dnů (pozemských) po dráze o poloměru 9380 km;
 - b) Io obíhá kolem Jupitera s periodou 1,769 dnů po dráze o poloměru 421 600 km;
 - c) Titan obíhá kolem Saturna s periodou 15,945 dnů po dráze o poloměru $1222 \cdot 10^3$ km. Parametry dráhy Měsíce vezměte z příkladu 4.
- Odpovědi: a) 0,11; b) 315 (přesněji 318); c) 94 (přesněji 95).
13. Určete hmotnost Země za předpokladu, že Země je kulově symetrická o poloměru 6370 km a hodnota gravitačního

zrychlení na jejím povrchu je $9,81 \text{ m/s}^2$. Volte hodnotu gravitační konstanty G jak je uvedeno na začátku kapitoly (v předchozích příkladech jsme hodnotu G nepotřebovali), Důkaz, že Zemi můžeme v tomto případě nahradit hmotným bodem, bude podán v dalším dílu těchto skript.

Odpověď: $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

14. Odvoďte vzorec pro výpočet rychlosti družice v_1 na kruhové dráze (první kosmická rychlost) ve vzdálenosti r od středu Země:

$$v_1 = \sqrt{GM/r} \quad , \quad (3.16)$$

kde M je hmotnost Země. Určete kruhovou rychlost vztaženou k zemskému povrchu (rovniku o poloměru 6378 km, kdyby nebylo atmosféry) a pro výšku 300 km nad zemským povrchem. Hmotnost Země vezměte z předchozího příkladu. Všimněte si, že kruhová rychlost s výškou klesá a že dvojnásobek kinetické energie na kruhové dráze je roven energii potenciální.

Odpověď: $7,90 \text{ km/s}$; $7,72 \text{ km/s}$.

15. Odvoďte vzorec pro únikovou rychlost (druhou kosmickou rychlost)

$$v_2 = \sqrt{2GM/r} = v_1 \sqrt{2} \quad . \quad (3.17)$$

Ukažte, že na zemském povrchu je $v_2 = 11,2 \text{ km/s}$.

Návod: Použijte zákona o zachování mechanické energie a velikosti této energie v nekonečnu.

16. Určete poloměr dráhy stacionární družice Země. Upozorníme, že Země se otáčí o 360° za jeden hvězdný den, který má 86 164 s.

Odpověď: 42 160 km.

17. Marsův měsíc Phobos je malé těleso nepravidelného tvaru, jeho střední poloměr je asi 11,0 km, hustota asi $1,9 \text{ g/cm}^3$. Zjistěte, zda-li by skokan do výšky dokázal na povrchu Phobose vyvinout druhou kosmickou rychlost a vzdálit se z jeho gravitačního pole, jestliže na povrchu Země dokáže při výšce zvednout těžišť svého těla o 100 cm. (Tíhové pole u

zemského povrchu považujte za konstantní se zrychlením $9,81 \text{ m/s}^2$). Jak by to dopadlo na povrchu druhého Marsova měsíce Deimose za předpokladu, že má stejnou hustotu, ale poloměr jen 6,3 km.

Odpověď: Nedokáže na Phobosu, ani na Deimosu.

18. Které těleso přitahuje Měsíc více, Země nebo Slunce?

19. Dokažte, že oběžná doba družice, která se pohybuje těsně u povrchu planety, závisí jen na střední hustotě planety a nezávisí na velikosti planety [4]. Jakou oběžnou dobu by měla družice, jestliže střední hustota planety je rovna hustotě vody? Poznamenejme, že hustotě vody jsou dosti blízké střední hustoty Slunce a obřích planet.

Odpověď: $T = \sqrt{3\pi / (G \rho)}$; $3,3^{\text{h}}$.

20. Io obíhá po dráze o poloměru 5,95 Jupiterových poloměrů s periodou 1,769 dnů [13]. Měsíc obíhá po dráze o poloměru 60,3 zemských poloměrů s periodou 27,32 dnů. Určete:

- a) poměr středních hustot Země a Jupitera;
- b) hustotu Jupitera, je-li střední hustota Země rovna $5,52 \text{ g/cm}^3$.

Všimněte si, že v této úloze nepotřebujeme znát absolutní délková měřítka.

Odpověď: $4,4 : 1$; $1,3 \text{ g/cm}^3$.

21. Kolikrát větší je elektrostatická síla než síla gravitační, kterými se přitahují proton a elektron v atomu vodíku? Klidová hmotnost elektronu $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, protonu $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, elementární náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ [46].

Odpověď: $2 \cdot 10^{39}$.

22. Podle newtonovské teorie gravitace je potenciál hmotného bodu o hmotnosti M dán vzorcem $U = -GM/r$. Podle Einsteina je třeba newtonovskou teorii zpřesnit. Zavedeme-li opravu prvního řádu, můžeme gravitační potenciál hmotného bodu psát ve tvaru

$$U = -\frac{GM}{r} - \frac{A}{r^2} \quad (3.18)$$

Z úvah o rozměrech veličin se pokuste nalézt výraz pro opravný koeficient A ; musí záviset na rychlosti světla c a také na G a M . Pak oceňte relativní velikost opravného členu pro gravitační potenciál Slunce ve vzdálenosti Země [28].

Řešení: Označme $D(A)$ rozměr parametru A . Ze vzorce pro potenciál plyne $D(A) = D(GMr)$. Užitím vztahu

$$D(GMr^{-1}) = D(\text{energie}) = D(mc^2)$$

dostáváme $D(r) = D(GMc^{-2})$. Dosazením do prvního rozměrového vzorce dostáváme

$$D(A) = D(G^2M^2c^{-2});$$

tedy

$$A \sim G^2M^2c^{-2}.$$

Dosadíme-li za M hmotnost Slunce, za r vzdálenost Země-Slunce, bude poměr druhého členu k prvnímu ve vzorci (3.18) roven

$$GMr^{-1}c^{-2} \sim 10^{-8}.$$

Pro Zemi je tato veličina velmi malá. Pouze pro Merkur se vliv opravného členu projeví.

23. Historie s objevem Neptuna se do značné míry opakovala také při objevu Pluta. Na základě pozorovaných poruch v pohybech Uranu a Neptuna předpověděl Lowell r. 1915 existenci další planety. Tato planeta, Pluto, byla objevena až r. 1930 Tombaughem. Souvislost mezi předpovědí a objevem Pluta se však dnes považuje za zcela náhodnou [24, 27]. Zjistilo se, že Pluto je velmi malá planeta, jeho poloměr je asi 1500 km. Aby bylo možné vysvětlit pozorované poruchy, bylo třeba předpokládat velkou hustotu Pluta; uvažovaly se hustoty až 30 g/cm^3 i více, čemuž neodpovídalo žádné přijatelné chemické složení. Roku 1978 objevili Christy a Harrington, že Pluto má poměrně velký

měsíc ve vzdálenosti 17500 ± 2500 km a oběžnou dobou asi 6,4 dne. Tento měsíc se nazývá Charon. Objev Charona umožnil přibližně stanovit hustotu Pluta. Vypočítejte tuto hustotu! Zjištěná hustota je v souhlase s kosmochemickými představami. Tedy tajemství hustoty Pluta se zdá být uspokojivě vyřešeno, ale za cenu jiné stejně podivuhodné záhady: co je vlastně příčinou poruch drah Uranu a Neptuna, které původně vedly ke hledání další planety? [10].

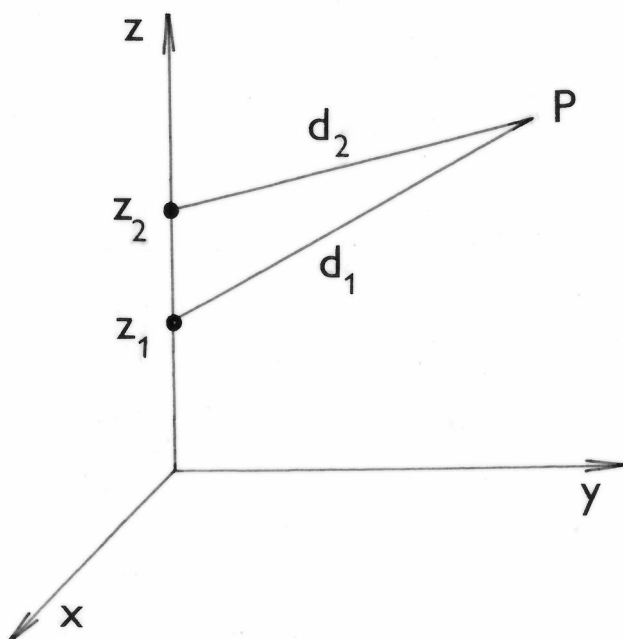
Odpověď: Kolem $0,7 \text{ g/cm}^3$.

4. POTENCIÁL SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ

Probereme podrobněji Newtonův potenciál soustavy bodových zdrojů. Nejprve uvedeme některé příklady, obecné vlastnosti odvodíme v druhé části této kapitoly.

4.1. Dva pevné hmotné body

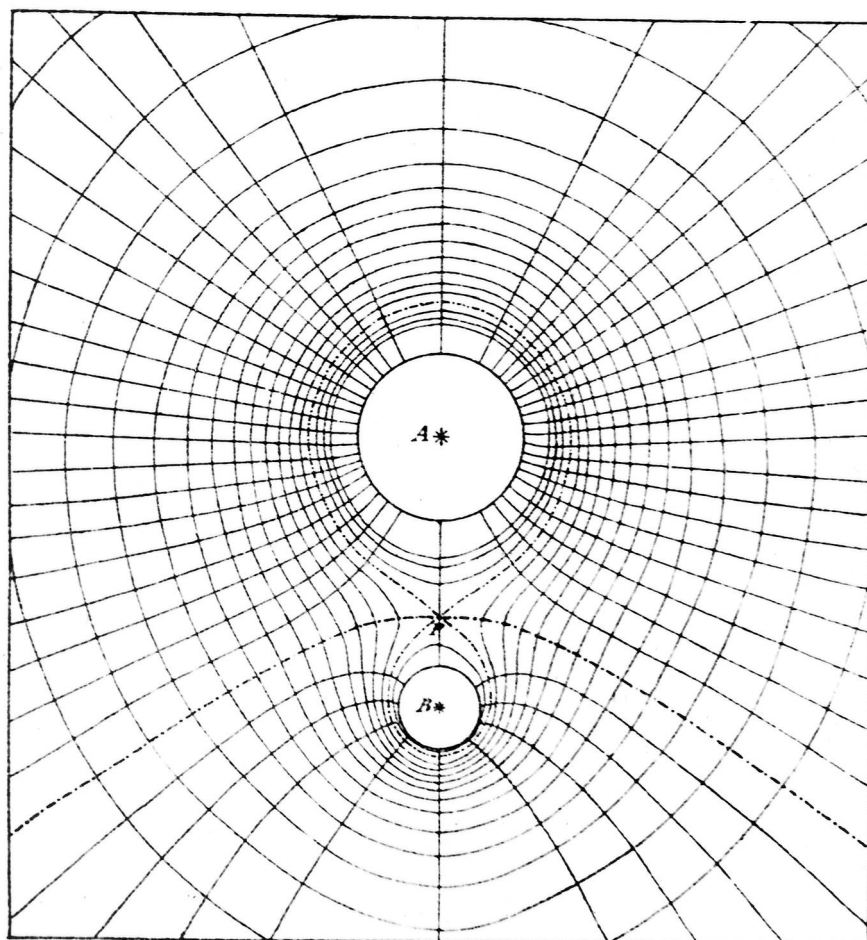
Uvažujme dva hmotné body umístěné pevně na ose z . První s hmotností m_1 nechť se nachází v bodě $(0, 0, z_1)$, druhý s hmotností m_2 v bodě $(0, 0, z_2)$, viz obr. 6. Gravi-



Obr. 6

tační potenciál v bodě P o souřadnicích (x, y, z) je dán vzorcem

$$U(P) = -G \left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} \right) = -G \left[\frac{m_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_2)^2}} \right]. \quad (4.1)$$



Obr. 7. Siločáry a ekvipotenciální plochy [26].
 $A=20$ $B=5$ P je bod rovnováhy. $AP=2/3 AB$

Na obr. 7 jsou znázorněny siločáry a ekvipotenciální plochy pro jeden konkrétní příklad. V této úloze existuje jeden rovnovážný bod, v němž je gravitační síla nulová. Leží na spojnici obou hmotných bodů blíže k tomu, který má menší hmotnost. Vlastnostmi pole v okolí rovnovážných bodů se budeme zabývat ke konci této kapitoly.

Popsané gravitační pole může sloužit například jako model gravitačního pole soustavy Slunce-planeta nebo planeta-měsíc v některých jednoduchých úlohách, kdy vzájemné pohyby těchto těles nemusíme uvažovat. Pohyb částice v gravitačním poli dvou nepohyblivých hmotných bodů, tzv. problém dvou pevných center, je popsán pohybovými rovnicemi, které ještě lze integrovat. Velkého významu nabývá tato úloha zejména v souvislosti

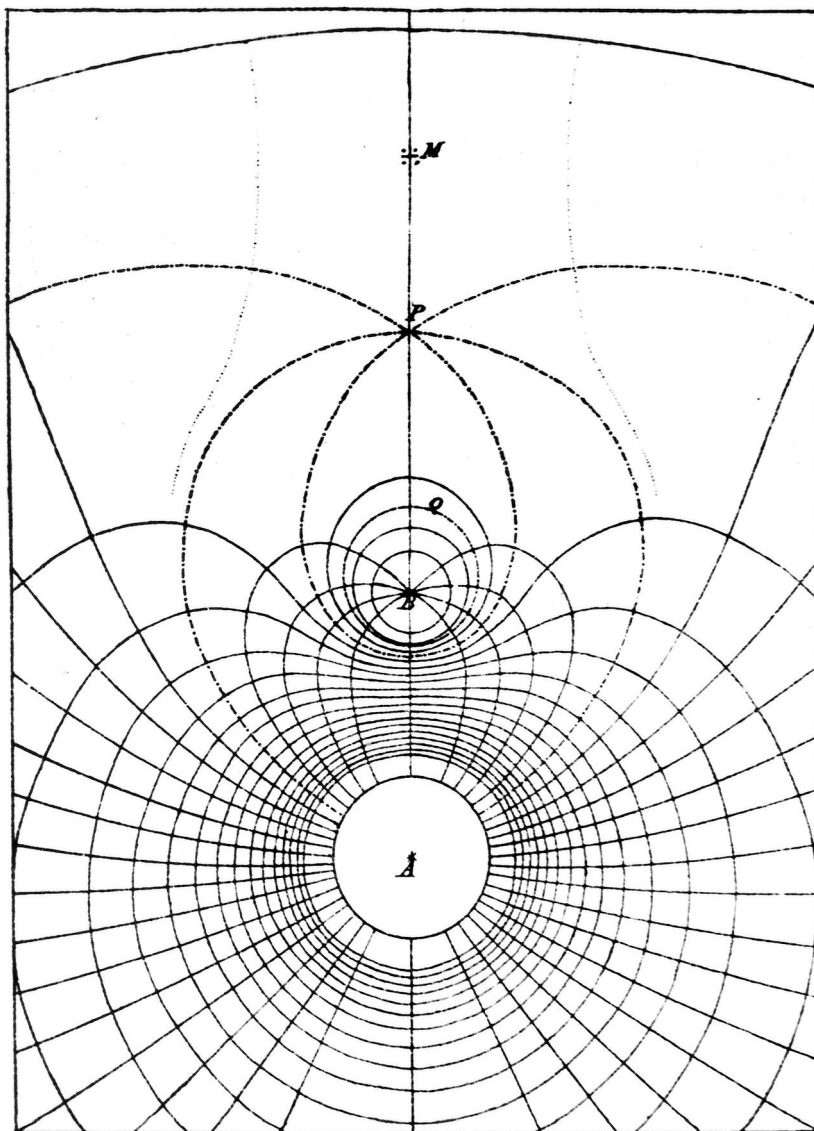
s výzkumem pohybů umělých družic planet, jestliže úlohu ještě zobecníme zavedením komplexních veličin. Zvolme $m_1 = \frac{1}{2} M(1+i\sigma)$ v bodě $(0, 0, ic)$ a $m_2 = \frac{1}{2} M(1-i\sigma)$ v bodě $(0, 0, -ic)$, kde M je hmotnost planety, σ charakterizuje rovníkové zploštění a c pólové zploštění planety. Potom tento tzv. zobecněný problém dvou pevných center umožňuje s vysokou přesností aproximovat pohyb družice v gravitačním poli zploštělé planety [2]. Vhodné parametry pro Zemi jsou přibližně $c = 210$ km, $\sigma = 0,04$. Podrobněji je možné se seznámit s touto problematikou v astronomické literatuře.

Předpokládejme nyní, že místo hmotných bodů m_1 a m_2 se ve stejných místech nacházejí bodové náboje Q_1 a Q_2 . Pak výraz pro elektrostatický potenciál v bodě P bude obdobou vzorce (4.1):

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_1)^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_1)^2}} \right] \cdot \quad (4.2)$$

Budou-li Q_1 a Q_2 souhlasného znaménka, budou mít siločáry a ekvipotenciální plochy stejný tvar jako v případě gravitačního pole. Budou-li náboje opačného znaménka, charakter pole se mění, příklad je uveden na obr. 8.

Vzorec (4.2) popisuje nejen elektrostatické pole dvou nabitých částic, ale může být použit i v některých jednoduchých elektrostatických úlohách s vodiči. Víme, že v ustáleném stavu je na povrchu vodiče konstantní potenciál. Uvažujme nejprve obr. 7. V blízkosti bodových nábojů mají ekvipotenciální plochy přibližně kulový tvar, jsou jen mírně protáhlé proti sobě. Mysleme si, že dvě z těchto ekvipotenciálních ploch, obklopujících jednotlivé náboje, reprezentují povrchy vodičů, které byly nabity příslušnými náboji. Pak obr. 7 popisuje také vnější pole, působené těmito nabitými vodiči, uvnitř vodičů (kde je potenciál konstantní) musíme však ekvipotenciální plochy a siločáry vymazat. Nechť obdobně některá z oválných ekvipotenciálních ploch, obklopujících oba náboje, představuje povrch vodiče, nabitého celkovým nábojem $Q_1 + Q_2$. Potom



Obr. 8. Siločáry a ekvipotenciální plochy [26].
 $A=20$ $B=-5$ P je bod rovnováhy. $AP=2AB$
 Q kulová plocha nulového potenciálu.
 M bod maximální intenzity na polopřímce (P, ∞) .

elektrostatické pole vně tohoto vodiče můžeme jednoduše popsat pomocí pole dvou bodových nábojů. Z tohoto hlediska je také velmi zajímavý obr. 8, kde jedna ekvipotenciální plocha má tvar koule. Klasickou úlohu, týkající se výpočtu pole buzeného bodovým nábojem a vodivou koulí, můžeme tak převést na mnohem jednodušší úlohu bodových nábojů.

Je zřejmé, že počítáním polí různých soustav nábojů můžeme vyřešit i mnohé úlohy o polích vodičů různého tvaru.

Ukazuje se, že tento jaksi obrácený postup, kdy určujeme tvar vodičů pro daný výraz pro potenciál, je lépe zvládnutelný než přímá úloha, spočívající v určení potenciálu, je-li tvar vodičů dán. Maxwell uvádí, že ve skutečnosti každá elektrostatická úloha, pro níž tehdy bylo známo matematické řešení, byla zkonstruována tímto obráceným postupem [26]. Možnost popisu elektrostatického pole vodičů pomocí polí bodových nábojů je základem tzv. metody elektrických obrazů.

Poznamenejme ještě, že elektrostatické pole vně nabitých vodičů můžeme nahrazovat polem bodových nábojů teprve tehdy, až dokážeme, že pole vně vodičů je jednoznačně určeno rozměry a tvarem vodičů a jejich náboji (věta o jednoznačnosti potenciálu). Těmito problémy se budeme zabývat až v dalším dílu těchto skript.

Úlohy

1. Uvažujme dva hmotné body o stejné hmotnosti m umístěné v bodech $(0, 0, z_0)$ a $(0, 0, -z_0)$.
 - a) Dokažte, že v rovině $z=0$ působí centrální síla, naleznete její potenciál a intenzitu.
 - b) Určete rychlost v částice, která v rovině $z=0$ obíhá po kruhové dráze o poloměru r kolem počátku. Všimněte si, že zde částice obíhá kolem bodu, v němž se nenachází žádná hmota.

Odpověď: a) $U = - 2Gm(r^2 + z_0^2)^{-1/2}$, $E_r = - 2Gmr(r^2 + z_0^2)^{-3/2}$,

kde r je vzdálenost od počátku.

b) $v = r(2Gm)^{1/2}(r^2 + z_0^2)^{-3/4}$.

2. Dokažte, že geometrické místo bodů, ve kterých jsou velikosti přitažlivých sil Slunce a Země stejné, je koule o poloměru $r = R\sqrt{Mm}/(M-m)$ a se středem na přímce, spojující Slunce a Zemi, ve vzdálenosti $d = mR/(M-m)$ od Země na opačné straně, než je Slunce. Zde M a m jsou hmotnosti Slunce a Země, R je vzdálenost Země od Slunce. Vyjádřete dvě výše uvedené veličiny v km [47].

Odpověď: Vezmeme-li $R = 150 \cdot 10^6$ km, $M/m = 330\ 000$, je $r = 262\ 000$ km, $d = 454$ km .

3. Necht v bodě $(0, 0, z_0)$ je umístěn bodový náboj Q a v bodě $(0, 0, -z_0)$ bodový náboj $(-Q)$. Nakreslete přibližně tvar siločar a ekvipotenciálních ploch.
- a) Jaký je potenciál v rovině $z=0$?
- b) Jakou elektrostatickou úlohu s vodiči lze tímto modelem popsat?

Odpověď: a) nulový; b) například vodivý poloprostor $z=0$ a náboj Q v bodě $(0, 0, z_0)$.

4. Vodivá koule se středem v počátku soustavy souřadnic a o poloměru R má nulový potenciál (uzemněna). Vně koule na ose z v bodě $A=(0, 0, z_A)$ se nachází bodový náboj Q_A . Ukažte, že elektrostatický obraz tohoto náboje se nachází také na ose z v bodě $B=(0, 0, z_B)$, který je kulově inverzní k bodu A , tj.

$$z_B z_A = R^2 \quad (4.3)$$

a náboj tohoto obrazu je

$$Q_B = - Q_A \sqrt{z_B/z_A} \quad (4.4)$$

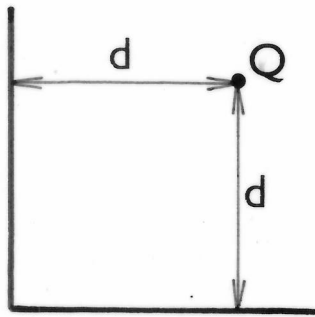
5. Elektrický náboj Q je umístěn ve stejné vzdálenosti d od dvou vzájemně kolmých nekonečných vodivých rovin (obr. 9a). Určete potenciál pole v libovolném bodě prostoru [28].

Odpověď: V prvním kvadrantu je pole superpozicí polí čtyř bodových nábojů, znázorněných na obr. 9b. Ve zbývajících částech prostoru je potenciál nulový.

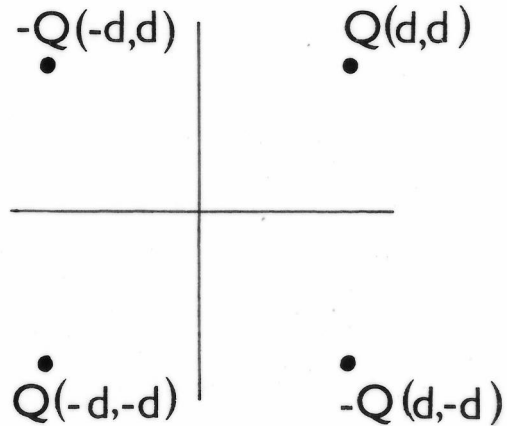
6. Nakreslete přibližně siločáry a ekvipotenciální plochy pro pole, které je superpozicí homogenního pole (má všude stejnou velikost a směr) a pole bodového náboje. Jakou elektrostatickou úlohu s vodiči lze tímto modelem popsat?

Odpověď: Příklad je uveden na obr. 10. Uvažujme např. dvě ekvipotenciální plochy pod bodem A na obr. 10, jednu blíže k A , druhou daleko. Pole mezi těmito ekvipotenciálními plochami je stejné jako pole dvou nabitých vodivých ploch téhož tvaru, tj. dolní plocha je přibližně rovinná, v horní ploše je

dolík.



Obr. 9a



Obr. 9b

7. Nakreslete přibližně siločáry a ekvipotenciální plochy pole buzeného třemi náboji $A=15$, $B=-12$ a $C=20$, ležícími v jedné přímce.

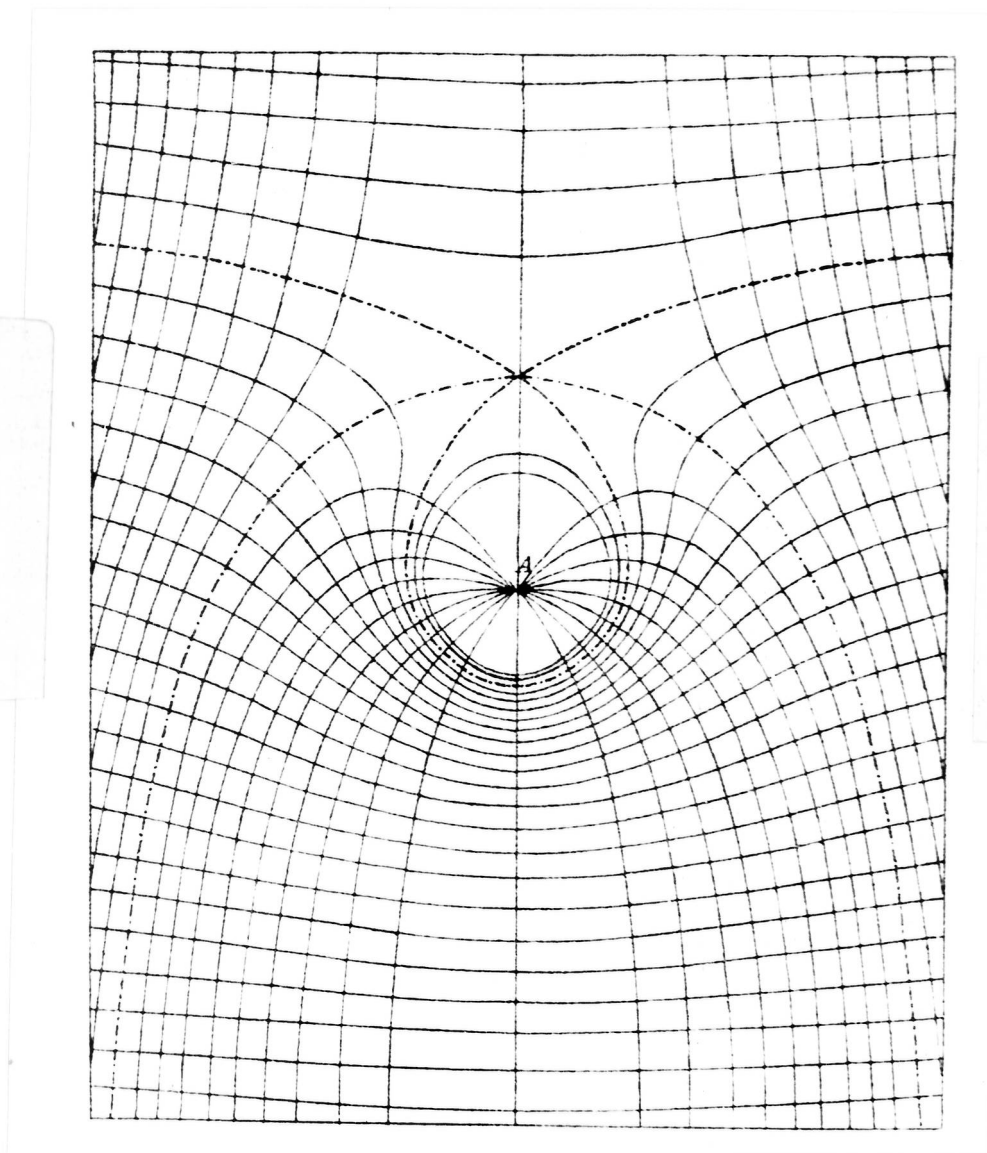
Odpověď: Viz obr. 11, v této úloze existují dvě kulové protínající se ekvipotenciální plochy vyznačené čerchovaně.

4.2. Dipól

Budeme uvažovat jistý limitní případ soustavy dvou nábojů opačného znaménka (obr.12). Počátek soustavy souřadnic zvolme v bodě $(-Q)$, polohu náboje Q udává polohový vektor \vec{s} , polohu pozorovatele P vektor \vec{r} , vzdálenost bodů Q a P označme r' , úhel sevřený vektory \vec{s} a \vec{r} označme ϑ . Potenciál v bodě P je dán vzorcem

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r'} - \frac{Q}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rs \cos \vartheta + s^2}} - \frac{1}{r} \right]. \quad (4.5)$$

Nyní přibližujme náboj Q k náboji $(-Q)$ a současně zvětšujme velikost obou nábojů tak, aby vektor

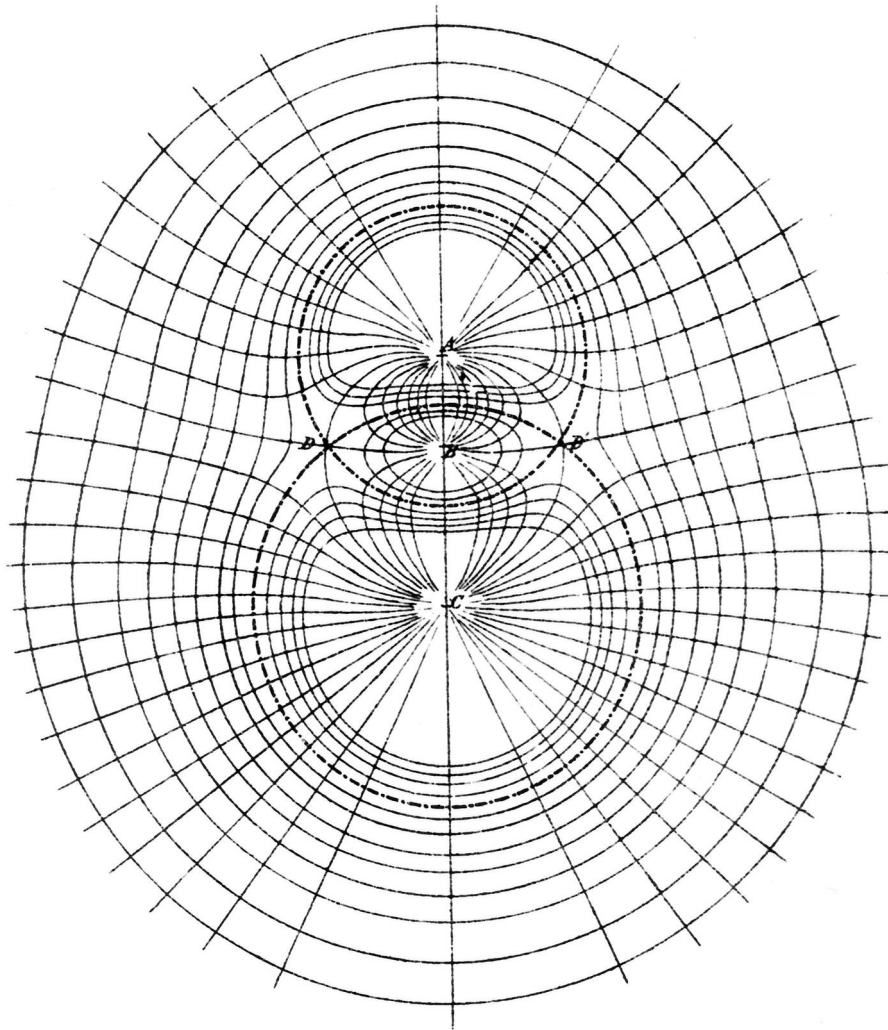


Obr. 10 Siločáry a ekvipotenciální plochy [26].
A=10

$$\vec{p} = Q\vec{s} \quad (4.6)$$

zachovával svou velikost i směr. Vzniklé limitní uspořádání bodových nábojů nazveme dipólem a vektor \vec{p} nazveme momentem dipólu. Pro potenciál dipólu ze (4.5) a (4.6) plyne

$$U(P) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r s} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2(s/r)\cos\vartheta + (s/r)^2}} - 1 \right]. \quad (4.7)$$



Obr. 11 Siločáry a ekvipotenciální plochy [26].
A=15 B=-12 C=20

Provedeme-li rozvoj v mocninách (s/r) , stačí vlastně jen použít známého vzorce (pro malá x)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots ,$$

dostáváme pro potenciál dipólu jednoduchý vzorec

$$U(P) = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{\cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (4.8)$$

Upozorňujeme zejména, že potenciál dipólu klesá se vzdáleností jako $1/r^2$, zatímco potenciál bodového náboje klesá jen jako $1/r$.

Předpokládejme na okamžik, že směr momentu dipólu souhlasí s kladným směrem osy z . Označíme-li souřadnice bodu P jako x, y, z , platí

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \vartheta. \quad (4.9)$$

Odtud plyne

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} = - \frac{\cos \vartheta}{r^2}. \quad (4.10)$$

Poslední výraz, až na znaménko, vystupuje ve vzorci (4.8), tedy

$$U(P) = - \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.11)$$

V potenciálu dipólu tedy vystupuje složka gradientu funkce $1/r$ do osy z , tj. průmět gradientu funkce $1/r$ do směru dipólu. Vzorec (4.8) pro potenciál dipólu můžeme tak přepsat, již nezávisle na orientaci osy z , ve tvaru

$$U(P) = - \frac{1}{4\pi\epsilon} \vec{p} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.12)$$

Intenzitu magnetostatického pole H , pokud vodivé proudy jsou nulové, lze rovněž popsat skalárním potenciálem U , $H = -\text{grad } U$. Potenciál magnetického dipólu se vyjadřuje vzorcem, obdobným vzorci (4.8),

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (4.13)$$

kde m je magnetický moment [8].

Dipól pro gravitační pole nelze izolovaně uvažovat,

protože všechny hmotnosti považujeme pouze za kladné. Často se však vyšetřují různé "poruchové" potenciály, působené odchylkami v rozložení hmot od určitého průměru. Tyto odchylky mají jak kladné, tak i záporné znaménko, takže pro poruchové gravitační pole má pojem dipólu stejné opodstatnění jako pro pole elektrostatické nebo magnetostatické. Ze stejného důvodu se objevuje dipólový člen (tj. člen úměrný $1/r^2$) v rozvoji gravitačního potenciálu pro obecná rozložení hmot (pouze v případě, kdy je počátek soustavy souřadnic zvolen v těžišti, vyjde tento dipólový člen nulový).

Úlohy

1. Elektrický dipól se nachází v počátku, jeho moment \vec{p} míří v kladném směru kartézské osy z . Vypočítejte intenzitu pole ve sférických souřadnicích r, ϑ, λ , kde r je vzdálenost od počátku a ϑ úhlová vzdálenost od kladného směru osy z .

Odpověď:

$$E_r = - \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{p \cos \vartheta}{2\pi\epsilon r^3},$$

$$E_\vartheta = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon r^3}, \quad (4.14)$$

$$E_\lambda = 0.$$

2. Zemské magnetické pole má převážně dipólový charakter. Jaký je vztah mezi velikostí intenzity tohoto pole v oblasti geomagnetických pólů a v oblasti geomagnetického rovníku?

Odpověď: Dvakrát větší intenzita v oblasti pólů než na rovníku (viz vzorce v předchozím příkladu).

3. Magnetická indukce $B = \mu_0 H$ zemského magnetického pole v oblasti rovníku je asi $3 \cdot 10^{-5} \text{T}$; platí $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{T}/(\text{Am}^{-1})$. Určete velikost dipólového magnetického momentu Země.

Odpověď:

$$B_\vartheta = \mu_0 H_\vartheta = \frac{\mu_0 m \sin \vartheta}{4\pi r^3}, \quad m = 8 \cdot 10^{22} \text{Am}^2,$$

přesnější hodnota je $m = 7,98 \cdot 10^{22} \text{Am}^2$.

4. Ze všech planet sluneční soustavy má Jupiter největší dipólový magnetický moment o velikosti $1,55 \cdot 10^{27} \text{Am}^2$. Vypočítejte magnetickou indukci na Jupiterově rovníku, který má poloměr 71 398 km a porovnejte s příslušnou hodnotou pro Zemi.

Odpověď: $B = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{T}$, 14krát silnější pole než na Zemi.

5. V bodě o souřadnicích $(0, 0, s)$ se nachází hmotný bod o velikosti $3m$, v bodě o souřadnicích $(0, 0, -s)$ bod o velikosti $2m$. Pro $r > s$, kde r je vzdálenost od počátku, vyjádřete potenciál této soustavy hmotných bodů ve tvaru řady v mocninách $1/r$. Jak lze fyzikálně interpretovat první dva členy této řady?

Odpověď a poznámky:

$$U = -G \frac{5m}{r} - G \frac{ms}{r^2} \cos \vartheta + \dots$$

První člen je potenciál hmotného bodu umístěného v počátku (v němž je soustředěna veškerá hmota $5m = 3m + 2m$), druhý člen je potenciál dipólu, další členy by odpovídaly vyšším multipólům. Toto je speciální případ obecnějšího tvrzení, označovaného jako věta o multipólovém rozvoji [39, 48].

Všimněme si ještě, že výraz ms v dipólovém členu se dostal jako rozdíl $3ms - 2ms$; kdyby uvažované hmotné body měly stejnou hmotnost, dipólový člen vymizí (počátek bude v těžišti soustavy).

6. Nalezněte rovnice siločar magnetického dipólu, umístěného v počátku kartézské soustavy a orientovaného ve směru osy z , $\vec{m} = (0, 0, m)$.

Řešení: Použijme sférické souřadnice r, ϑ, λ a označme element siločáry jako $\vec{ds} = (ds_r, ds_\vartheta, ds_\lambda) = (dr, r d\vartheta, r \sin\vartheta d\lambda)$. Rovnice siločáry má podle analogie s (2.37) tvar

$$\frac{ds_r}{H_r} = \frac{ds_\vartheta}{H_\vartheta} = \frac{ds_\lambda}{H_\lambda},$$

přičemž složky magnetické intenzity dostaneme ihned ze (4.14), jestliže místo p/ϵ píšeme m . Protože je $H_\lambda = 0$, musí být také $ds_\lambda = 0$, tedy λ konstantní, $\lambda = c_1$. Pro souřadnice r a ϑ na siločáře dostáváme po dosazení jednoduchou rovnici

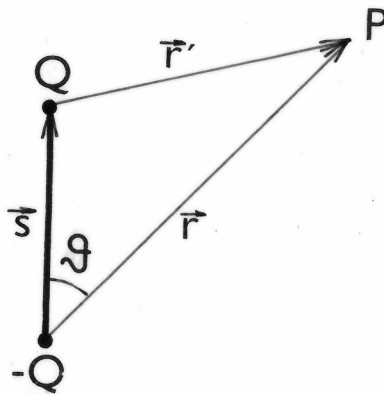
$$\frac{dr}{2r} = \frac{d\vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta},$$

jejíž řešení má tvar

$$\frac{1}{2} \ln r = \ln \sin \vartheta + \ln C.$$

Odtud plyne rovnice siločáry dipólu ve tvaru

$$\lambda = c_1, \quad r = c_2 \sin^2 \vartheta.$$

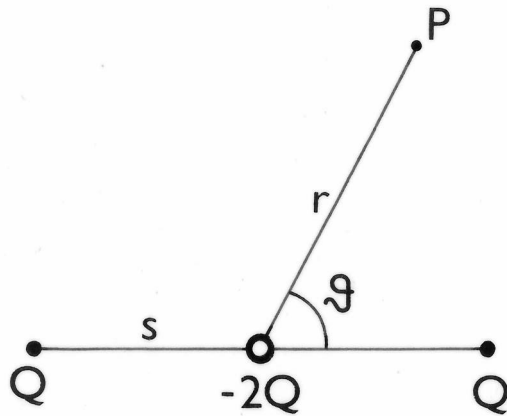


Obr. 12

4.3. Axiální kvadrupól

Vyšetřeme elektrický potenciál axiálního (lineárního) kvadrupólu, znázorněného na obr. 13, viz [3]. Kladné náboje přibližujeme k počátku a velikosti všech nábojů zvětšujeme tak, aby výraz

$$p_2 = 2Qs^2 = 2ps \quad (4.15)$$



Obr. 13

se neměnil. Veličinu p_2 nazýváme momentem axiálního kvadrupólu; $p = Qs$ je moment dipólů, ze kterých bychom mohli kvadrupól složit, viz dále. Obdobným postupem jako v předchozím paragrafu dostaneme po provedení příslušných limitních přechodů (proveděte!) následující výraz pro potenciál axiálního kvadrupólu

$$U(P) = \frac{p_2}{4\pi\epsilon} \left[\frac{3}{2} \cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{r^3} \quad (4.16)$$

Všimněte si, že potenciál kvadrupólu se mění se vzdáleností jako $1/r^3$.

Pro speciální případ, že osa axiálního kvadrupólu souhlasí se souřadnicovou osou z , odvodíme ještě jiné vyjádření pro potenciál (4.16). Jestliže osa dipólu souhlasila s osou z , pak potenciál dipólu obsahoval první derivaci funkce $1/r$ podle z . Ukážeme, že potenciál axiálního kvadrupólu bude obsahovat druhou derivaci. Ze vzorců (4.9) a (4.10) plyne

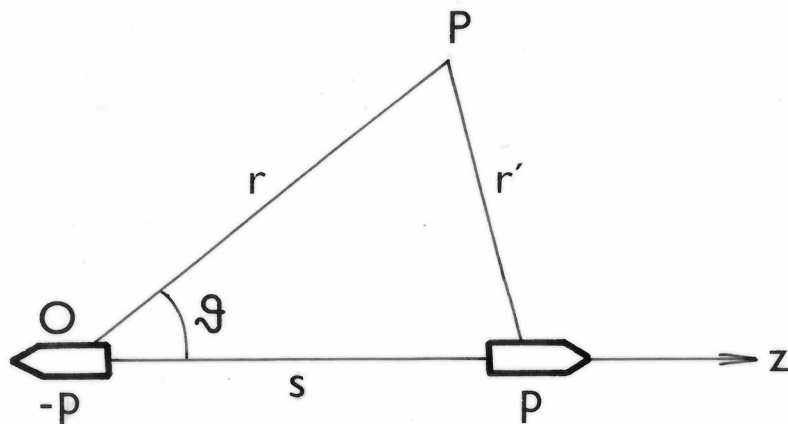
$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right) \frac{1}{r^3} = (3\cos^2\vartheta - 1) \frac{1}{r^3} \quad (4.17)$$

a pro potenciál (4.16) v tomto speciálním případě dostáváme

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p_2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) . \quad (4.18)$$

Tento vzorec nemůžeme bezprostředně použít k numerickým výpočtům (museli bychom nejprve provést derivování), ale má význam spíše teoretický, jak ihned ukážeme.

Výše jsme axiální kvadrupól vyjadřovali jako limitní případ soustavy čtyř nábojů na přímce, kde prostřední záporné náboje splývaly (obr. 13). Toto vyjádření mělo výhodu v tom, že potenciál soustavy bodových nábojů můžeme snadno určit. Častěji se však axiální kvadrupól zavádí jako limitní případ soustavy dvou opačně orientovaných dipólů, ležících na přímce (obr. 14). Potenciál těchto dvou dipólů v bodě P je podle



Obr. 14

(4.11) dán vztahem

$$U(P) = - \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{p}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{r'} \right) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) . \quad (4.19)$$

Výraz v poslední závorce rozvineme do řady podle s :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-s)^2}} = \\ &= -\frac{z-s}{r^3} s + \dots = s \left[-\frac{z-s}{r^3} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pro výraz v poslední hranaté závorce dostáváme přechodem k limitě a užitím (4.10)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{z-s}{r^3} + \dots \right] = -\frac{z}{r^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.21)$$

Z potenciálu pro soustavu dvou dipólů (4.19) dostaneme potenciál kvadrupólu přechodem k limitě:

$$U(P) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p_2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{z-s}{r^3} + \dots \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right),$$

což je již vzorec (4.18). Tedy soustava nábojů na obr. 13 a soustava dipólů na obr. 14 dávají v limitě stejné pole.

Výhoda právě uvedeného postupu spočívá v tom, že může být snadno použit i při výpočtu potenciálu axiálních multipólů vyššího řádu. Například axiální oktapól dostaneme tak, že v obr. 14 nahradíme dipóly kvadrupóly, tj. v počátku umístíme kvadrupól s momentem $(-p_2)$ a na ose z ve vzdálenosti s kvadrupól s momentem p_2 . Vzorec pro potenciál těchto dvou kvadrupólů je podobný vzorcí (4.19), jen místo p je třeba psát $(-p_2/2)$ a místo prvních derivací podle z psát derivaci druhou. Užitím vzorců (4.20) a (4.21), které i zde zůstávají v platnosti, a limitním přechodem dostáváme ihned potenciál axiálního oktapólu ve tvaru

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p_3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (4.22)$$

kde moment oktapólu p_3 byl zaveden vzorcem [39]

$$p_3 = 3p_2s. \quad (4.23)$$

Zde jsme se zabývali pouze axiálními multipóly. Potenciály pro obecné multipóly jsou popsány v [39], viz též [3].

Úlohy

1. Uvažujme axiální multipóly, které jsou umístěny v počátku a jejichž osa souhlasí se souřadnicovou osou z . Bodový náboj považujeme za multipól nultého stupně s momentem $p(0) = Q$, kde Q je velikost náboje. Dipólu, kvadrupólu, oktapólu atd. přiřaďme postupně indexy $n=1, 2, 3 \dots$. Zaveďme příslušné momenty multipólů vztahem

$$p_n = n p_{n-1} s \quad , \quad (4.24)$$

kde s je vzdálenost příslušných multipólů stupně $(n-1)$, viz obr. 12 a 14. Ukažte, že pak výše uvedené vzorce pro potenciály axiálních multipólů lze psát v jednotném tvaru

$$U_n(P) = \frac{p_n}{4\pi\epsilon} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right) , \quad (4.25)$$

kde $n=0, 1, 2 \dots$, přičemž pod nultou derivací rozumíme, že se nederivuje [39]. Ukažte, že potenciál multipólu s indexem n klesá se vzdáleností jako $1/r^{n+1}$.

2. Vyjádřete potenciál axiálního oktapólu (4.22) ve sférických souřadnicích.
3. Legendrův polynom stupně n , $P_n(x)$, lze zavést pomocí Rodriguesaova vztahu

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] .$$

Napište tvar několika nejnižších Legendrových polynomů.

Odpověď: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$,

$$P_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x .$$

4. Použitím indexování multipólů z příkladu 1 a výsledku z příkladu 3 ověřte pro několik nejnižších axiálních

multipólů, že jejich potenciál může být vyjádřen ve tvaru

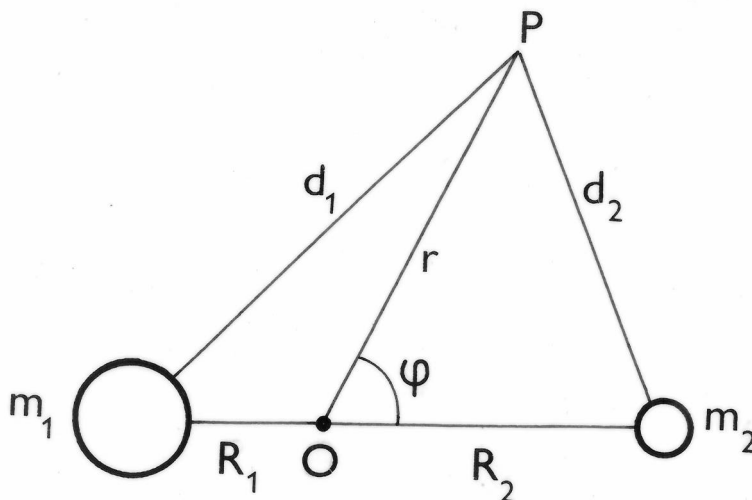
$$U_n(P) = \frac{p_n}{4\pi\epsilon} \frac{P_n(\cos \vartheta)}{r^{n+1}} .$$

Poznamenejme, že tento vzorec platí pro obecné n , důkaz by byl snadný, kdybychom vyšli z obecného vzorce (4.25) a použili tzv. vytvořující funkci pro Legendrovy polynomy, avšak v tomto dílu skriptu se těmito otázkami zabývat nebudeme.

4.4. Dva obíhající hmotné body

Vraťme se k případu dvou hmotných bodů ze začátku kapitoly, ovšem s tím rozdílem, že tyto hmotné body budeme považovat za volné a v důsledku vzájemné přitažlivosti obíhající kolem společného těžiště po kruhových drahách; důkaz, že dochází k oběhu právě kolem společného těžiště, se provádí v mechanice při vyšetřování problému dvou těles, viz též vzorce (4.26) a (4.27). Je zřejmé, že tento model bude lépe popisovat např. soustavu Slunce-planeta, než model dvou pevných hmotných bodů z paragrafu 4.1, protože bere v úvahu oběžný pohyb planety kolem Slunce.

Uvažujme tedy dva hmotné body m_1 a m_2 obíhající kolem společného těžiště O . Vzdálenost hmotných bodů považujeme za pevnou a označujeme ji R (obr. 15). Těžiště rozděluje vzdá-



Obr. 15. Pohled na rovinu dráhy hmotných bodů

lenost R na úseky R_1 a R_2 , $R = R_1 + R_2$. Budeme vyšetřovat vlastnosti silového pole pouze v rovině dráhy obou hmotných bodů, ale v soustavě souřadnic, která se otáčí kolem těžiště O s úhlovou rychlostí ω společně s oběma hmotnými body. Přitom budeme předpokládat, že zkušební hmotný bod umístěný v nějakém bodě P má zanedbatelnou hmotnost ve srovnání s m_1 a m_2 , takže nikterak zpětně nepůsobí na polohu a pohyb hmotných bodů m_1 a m_2 (naše úloha tedy patří do tzv. omezeného problému tří těles [2]). V předchozích úlohách jsme nemuseli dělat žádné předpoklady o hmotnosti zkušební hmotného bodu, protože jsme hmotné body, které působily silové pole, považovali za pevné, nepohyblivé. Vzdálenost bodu P od těžiště označme r , vzdálenosti od hmotných bodů m_1 a m_2 označme d_1 a d_2 .

V otáčející se soustavě souřadnic je silové pole superpozicí přitažlivých gravitačních sil a odstředivé síly. Rovnost odstředivé a přitažlivé síly, působící na hmotné body m_1 a m_2 , vede k rovnicím

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 R_1 &= Gm_1 m_2 / R^2, \\ m_2 \omega^2 R_2 &= Gm_1 m_2 / R^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Protože pravé strany těchto rovnic se rovnají, musejí se rovnat i levé strany, tedy

$$m_1 R_1 = m_2 R_2. \quad (4.27)$$

Tento vztah je však definicí těžiště, takže jsme dokázali, že hmotné body m_1 a m_2 budou skutečně obíhat kolem společného těžiště. Vydělme první rovnici ve (4.26) hmotností m_1 , druhou hmotností m_2 a vzniklé rovnice sečtěme. Po vydělení vzdáleností R dostaneme

$$\omega^2 = G(m_1 + m_2) / R^3, \quad (4.28)$$

což je přesné znění třetího Keplerova zákona pro kruhové dráhy, které bere v úvahu oběh kolem společného těžiště (v pří-

kladech v předchozí kapitole jsme všude zjednodušeně předpokládali, že hmotnost obíhajícího tělesa je zanedbatelná ve srovnání s hmotností obíhaného tělesa, vzorec (4.28) je tedy obecnější, protože bere v úvahu hmotnosti obou těles).

Potenciál v bodě P v otáčející se soustavě souřadnic (obr. 15) je součtem potenciálů přitažlivých sil a odstředivé síly:

$$U(P) = - \frac{Gm_1}{d_1} - \frac{Gm_2}{d_2} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2, \quad (4.29)$$

kde

$$d_1 = \sqrt{r^2 + 2rR_1 \cos \varphi + R_1^2}, \quad d_2 = \sqrt{r^2 - 2rR_2 \cos \varphi + R_2^2},$$

$$\omega^2 = G(m_1 + m_2)/R^3, \quad (4.30)$$

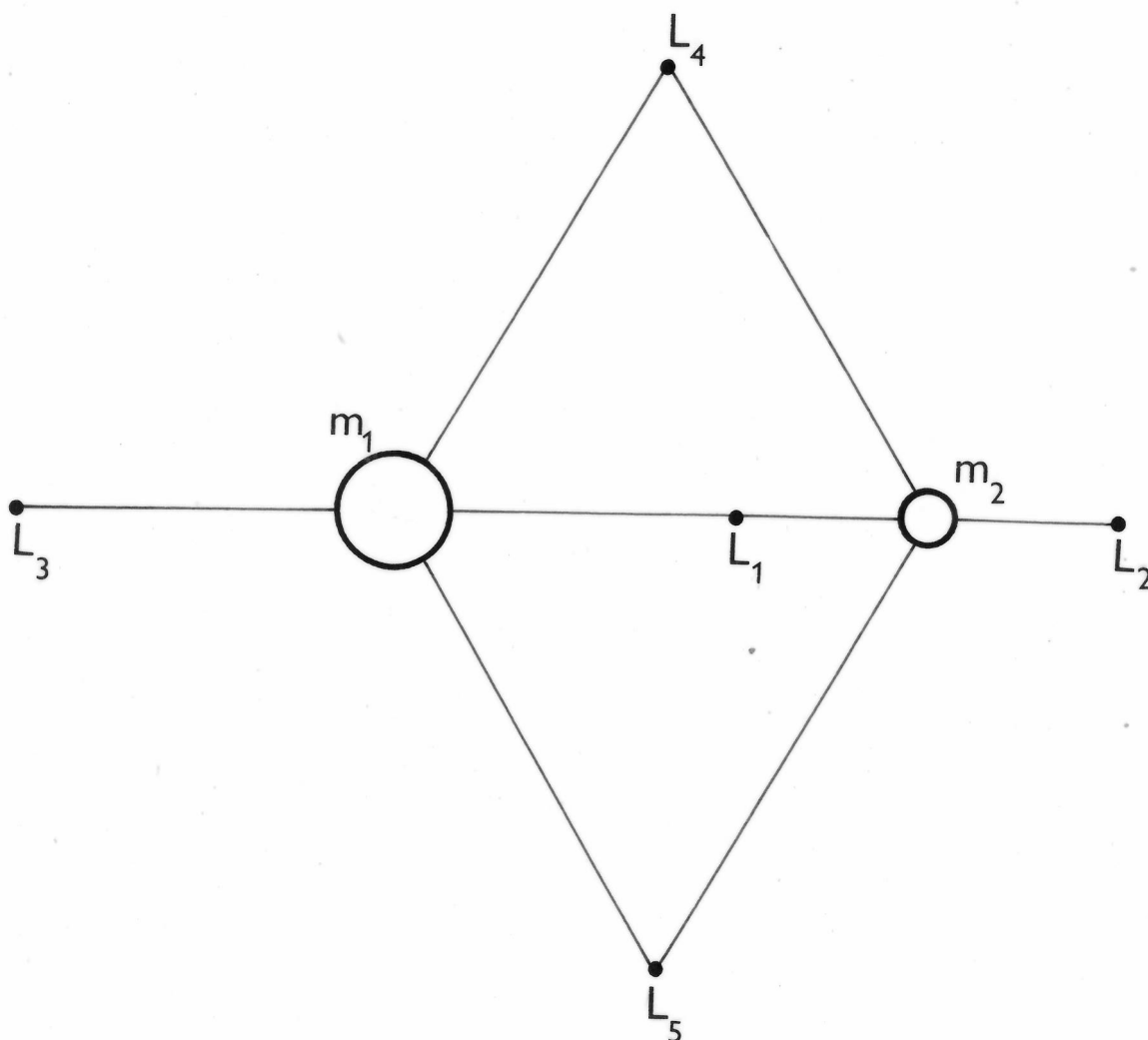
viz vzorec (4.28). Dosazením (4.30) do (4.29) vyjádříme potenciál v polárních souřadnicích r a φ , kde r je vzdálenost od těžiště a φ je úhel mezi průvodičem hmotného bodu m_2 a průvodičem bodu P. Pro složky intenzity v polárních souřadnicích platí

$$E_r = - \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{Gm_1}{d_1^3} (r + R_1 \cos \varphi) -$$

$$- \frac{Gm_2}{d_2^3} (r - R_2 \cos \varphi) + \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} r, \quad (4.31a)$$

$$E_\varphi = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Gm_1 R_1 r \sin \varphi \left(\frac{1}{d_1^3} - \frac{1}{d_2^3} \right). \quad (4.31b)$$

Omezíme se pouze na vyšetření rovnovážných bodů, kde obě složky intenzity jsou nulové. Na rozdíl od úlohy dvou pevných nepohyblivých bodů, kde existoval jen jeden rovnovážný bod (pokud neuvažujeme rovnovážné body v nekonečnu), v této úloze jich existuje pět. V souladu s terminologií, používanou v astronomii, tyto rovnovážné body budeme nazývat Lagrangeovými libračními body (obr. 16). Částice, která se nachází v libračním bodu a je v klidu vzhledem k otáčející se soustavě souřadnic, nebude svou polohu vzhledem k této soustavě s časem



Obr. 16. Lagrangeovy librační body

měnit, tj. poloha této částice vzhledem k hmotným bodům m_1 a m_2 se s časem měnit nebude.

Protože vzorec pro E_r je složitý, začneme s vyšetřováním, kdy je nulové E_φ . Podle (4.31b) je složka E_φ nulová v následujících dvou případech:

- a) $d_1 = d_2$, tj. na ose úsečky spojující body m_1 a m_2 ;
- b) $\sin \varphi = 0$, tj. na přímce proložené hmotnými body m_1 a m_2 . Kromě toho ze (4.31b) plyne, že E_φ je nulové také pro $r = 0$, tedy v těžišti, ale protože těžiště leží na spojnici hmotných bodů m_1 a m_2 , tento případ vlastně patří mezi případy b). Librační body se tedy mohou nacházet pouze na uvedených dvou na sebe kolmých přímkách.

Hledejme nejprve librační body na ose úsečky, spojující hmotné body m_1 a m_2 . Dosadíme-li $d_1 = d_2$ do vzorce pro E_r , viz (4.31a), v důsledku (4.27) vypadnou členy závislé na φ a součet čitateľů prvních dvou členů se až na znaménko bude rovnat čitateli posledního členu. Aby bylo E_r nulové, musejí být stejní jmenovatelé, tedy $d_1 = d_2 = R$. Takovýto librační bod tvoří spolu s hmotnými body m_1 a m_2 vrcholy rovnostranného trojúhelníka. Existují dva librační body tohoto typu, nazývají se trojúhelníkovými libračními body a označují se L_4 a L_5 .

Vyšetřeme nyní librační body na přímce, proložené hmotnými body m_1 a m_2 . Obvykle se nazývají kolineárními libračními body. Předpokládejme nejprve, že $\varphi = 0$. Užitím (4.30) vyplývá ze (4.31a) podmínka pro librační bod ve tvaru

$$E_r = - \frac{Gm_1}{(r+R_1)^2} - \frac{Gm_2}{(r-R_2)^2} + \frac{G(m_1+m_2)}{R^3} r = 0 .$$

Převedením na společného jmenovatele vede tato rovnice na rovnici pátého stupně pro neznámou r . Lze sice nalézt některé obecné vlastnosti kořenů této rovnice, viz např. [2], ale číselné hodnoty těchto kořenů se stejně musejí hledat nějakou numerickou metodou. Pro $\varphi = \pi$ je situace obdobná. Přitom je zřejmé, že fyzikální význam mají pro nás jen kořeny reálné a kladné. Omezme se proto jen na přibližný výpočet polohy libračních bodů. Pro zjednodušení předpokládejme, že m_1 je mnohem větší než m_2 ,

$$m_1 \gg m_2 , \quad (4.32)$$

což je u soustav Slunce-planeta-měsíc v naprosté většině případů velice dobře splněno.

Vyšetřeme nejdříve, zdali existuje librační bod za hmotným bodem m_2 , tj. hledáme librační bod označený na obr. 16 jako L_2 . Lze očekávat, že librační bod L_2 se bude nacházet v malé vzdálenosti od hmotného bodu m_2 ve srovnání se vzdáleností R . Lze to zdůvodnit následující úvahou. V místě hmotného bodu m_2 je v rovnováze přitažlivá síla, působená

hmotným bodem m_1 , a síla odstředivá. Kdyby hmotnost m_2 byla nulová, nacházel by se "librační bod" přímo v místě tohoto hmotného bodu. Je-li m_2 nenulové, ale malé, bude librační bod někde blízko. Počítejme tedy d_2 pro librační bod a předpokládejme, že $d_2 < R$. Podmínku $E_r = 0$ v libračním bodě L_2 můžeme zapsat ve tvaru

$$-\frac{Gm_1}{(R+d_2)^2} - \frac{Gm_2}{d_2^2} + \frac{G(m_1+m_2)}{R^3} (d_2 + R_2) = 0. \quad (4.33)$$

V dalším budeme potřebovat následující vyjádření R_1 a R_2 pomocí R :

$$R_1 = R \frac{m_2}{m_1+m_2}, \quad R_2 = R \frac{m_1}{m_1+m_2}. \quad (4.34)$$

Do (4.33) dosaďte za R_2 a dále tam dosaďte rozvoj

$$\frac{1}{(R+d_2)^2} = \frac{1}{R^2(1+d_2/R)^2} = \frac{1-2d_2/R + \dots}{R^2},$$

přičemž zanedbáme členy vyššího řádu. Po velmi jednoduché úpravě dostaneme přibližný vzorec pro vzdálenost libračního bodu L_2 od hmotného bodu m_2 ve tvaru

$$d_2 = R \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1+m_2}}. \quad (4.35)$$

Odvození bylo provedeno za předpokladu, že d_2 je malé ve srovnání se vzdáleností R , což vzorec (4.35) splňuje, protože jsme předpokládali $m_1 \gg m_2$. Za tohoto předpokladu lze proto vzorec (4.35) považovat za dosti přesný.

Hledejme nyní librační bod mezi těžištěm O a hmotným bodem m_2 , označme jej L_1 . Protože lze očekávat, že se bude rovněž nacházet v blízkosti hmotného bodu m_2 , počítejme opět jeho vzdálenost d_2 , abychom zase mohli psát rozvoj podle malého parametru d_2/R . Podmínka rovnováhy má v tomto případě tvar

$$-\frac{Gm_1}{(R-d_2)^2} + \frac{Gm_2}{d_2^2} + \frac{G(m_1+m_2)}{R^3} (R_2 - d_2) = 0 \quad (4.36)$$

Naprostu stejným postupem jako výše lze odvodit (provedte!), že vzdálenost libračního bodu L_1 od hmotného bodu m_2 je také dána přibližným vzorcem (4.35). Librační body L_1 a L_2 leží tedy přibližně ve stejných vzdálenostech od hmotného bodu m_2 (za předpokladu $m_1 \gg m_2$).

Mezi těžištěm O a hmotným bodem m_1 , majícím větší hmotnost než m_2 , nemůže existovat žádný librační bod, protože všude na tomto úseku je přitažlivost hmotného bodu m_2 menší než přitažlivost hmotného bodu m_1 (dokažte!), k níž se ještě přičítá odstředivá síla.

Hledejme librační bod za hmotným bodem m_1 , vně úsečky spojující oba hmotné body. Budeme jej označovat L_3 . Protože nemáme žádnou předběžnou představu o jeho poloze, předpokládejme například, že je blízko u hmotného bodu m_1 , tj. že malou veličinou, podle níž budeme provádět potřebné rozvoje, je poměr d_1/R . Podmínku rovnováhy můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{Gm_1}{d_1^2} + \frac{Gm_2}{(R+d_1)^2} - \frac{G(m_1+m_2)}{R^3} (R_1 + d_1) = 0 \quad (4.37)$$

což je formálně stejná podmínka jako (4.33) pro librační bod L_2 , pouze s vyměněnými indexy 1 a 2. Proto i řešení můžeme ihned dostat ze (4.35) záměnou indexů:

$$d_1 = R \sqrt[3]{\frac{m_1}{3m_2+m_1}} \quad (4.38)$$

Tento vzorec udává přibližnou vzdálenost libračního bodu L_3 od hmotného bodu m_1 . Protože však předpokládáme, že m_1 je mnohem větší než m_2 , plyne odtud, že přibližně platí $d_1 = R$. Librační bod L_3 je tedy zhruba souměrný k bodu m_2 podle středu m_1 . Všimněme si ještě jedné důležité věci. Dostali jsme přibližný výsledek $d_1 = R$, avšak při odvozování jsme

předpokládali, že d_1/R je malé. Odtud vyplývá, že získaný výsledek může být zatížen značnou chybou, rozhodně musíme vzorec $d_1 = R$ i vzorec (4.38) považovat za méně přesné, než je vzorec (4.35) na výpočet vzdáleností libračních bodů L_1 a L_2 .

Hrubý odhad $d_1 = R$ pro vzdálenost libračního bodu L_3 můžeme však použít při hledání přesnějšího řešení, např. tak, že budeme přesnější řešení hledat ve tvaru

$$d_1 = R + s, \quad (4.39)$$

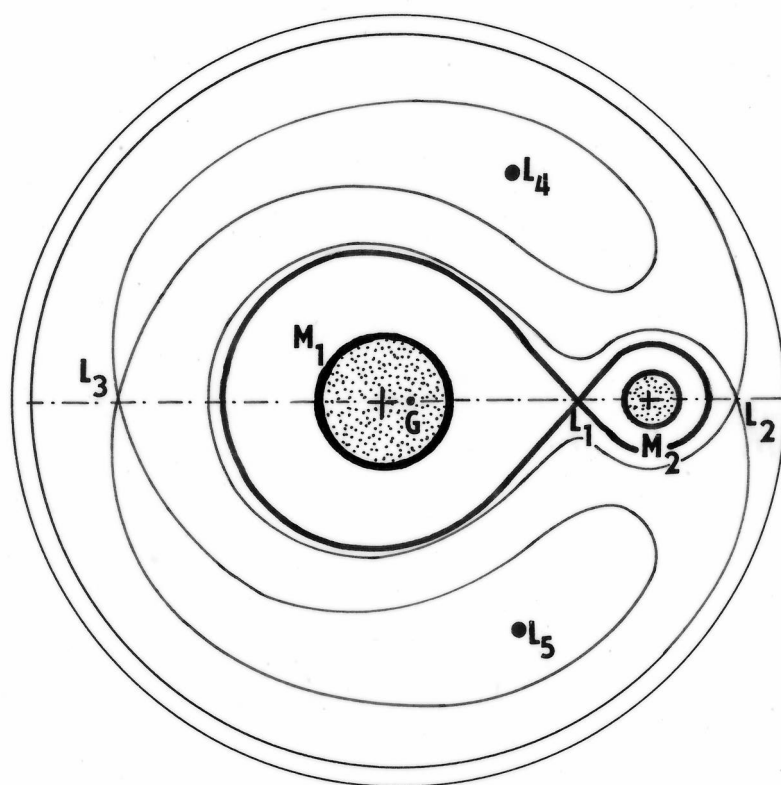
kde o veličině s předpokládáme, že je malá ve srovnání s R . Dosaďme tento výraz do podmínky rovnováhy (4.37), přičemž za R_1 dosaďme podle (4.34). Dvojčlen ve jmenovateli druhého členu podmínky (4.37) rozložme opět do řady, tentokrát podle malého parametru s/R , a ponechme zase jen první dva členy. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$s = -R \frac{7m_2}{12m_1 + 5m_2}. \quad (4.40)$$

Užitím vzorců (4.39) a (4.40) dostaneme vzdálenost libračního bodu L_3 od hmotného bodu m_1 mnohem přesněji, než pomocí vzorce (4.38). Jistým opakováním právě uvedeného postupu lze řešení stále zpřesňovat. V následujícím kroku bychom hledali vzdálenost libračního bodu ve tvaru $d_1 = R + s + \xi$ a počítali neznámou opravu ξ atd. Obdobným postupem lze také zpřesňovat polohy libračních bodů L_1 a L_2 .

Ještě přesnější vzorce na výpočet kolineárních libračních bodů, než jaké jsme odvodili, jsou uvedeny v [2], ale byly získány podstatně složitějším postupem. Provedený výpočet poloh libračních bodů má význam převážně astronomický. My jsme se tímto problémem podrobněji zabývali spíše proto, abychom ilustrovali některé možné postupy při řešení rovnic, pro něž neznáme analytická řešení. Při řešení složitějších fyzikálních úloh se s takovou situací setkáváme velice často.

Tvar ekvipotenciálních ploch pro naši úlohu je schematicky znázorněn na obr. 17. Všimněme si, že v kolineárních



Obr. 17. Schematický tvar ekvipotenciálních ploch (podle [45]).

libračních bodech se ekvipotenciální plochy protínají, kdežto v trojúhelníkových nikoliv. Tyto otázky jsou důležité z hlediska stability pohybu částice v okolí libračního bodu. Zatímco trojúhelníkové librační body jsou body stabilní rovnováhy (pokud $m_1 \gg m_2$), jsou kolineární librační body obecně nestabilními rovnovážnými polohami, protože v některých směrech i nepatrné posunutí z těchto libračních bodů způsobí, že se částice trvale vzdálí z jejich okolí. Těchto problémů se ještě dotkneme v paragrafu 4.8. Kdyby např. těleso reprezentované hmotným bodem m_2 byla plynová nebo kapalná koule o malé hustotě, takže by librační bod L_1 byl uvnitř této koule, bude část hmoty tělesa m_2 strhávána na hmotnější těleso m_1 . S touto situací se setkáváme u některých dvojhvězd. Přitom tato situace nastane tím spíše, čím bude vzdálenost obou těles menší, viz příklady za následujícím paragrafem 4.5.

Je známo, že v oblasti obou trojúhelníkových libračních bodů soustavy Slunce-Jupiter se nacházejí skupiny planetek,

zvaných Trojané [2, 45]. Existuje domněnka, že také v kolineárním libračním bodu L_2 soustavy Slunce-Země existuje shluk meteoritů, na němž se rozptyluje sluneční světlo, které potom pozorujeme jako protisvit [2].

Úlohy

1. Určete vzdálenost od Země libračních bodů L_1 a L_2 soustavy Slunce-Země.

Odpověď: $1,5 \cdot 10^6$ km .

2. Určete polohu kolineárních libračních bodů soustavy Země-Měsíc.

Odpověď: L_1 a L_2 ve vzdálenosti 61 400 km od středu Měsíce, L_3 ve vzdálenosti 381 700 km od středu Země.

3. Vypočtete polohu kolineárních libračních bodů pro případ, že hmotnosti obou těles jsou stejné.

4. Kosmická sonda ISEE-3 (International Sun Earth Explorer-3), určená k měření meziplanetárního magnetického pole a parametrů slunečního větru, byla uvedena na oběžnou dráhu kolem libračního bodu L_1 soustavy Slunce-Země. Rovina dráhy je kolmá na spojnici Slunce-Země a protíná tuto spojnici ve vzdálenosti $1,49 \cdot 10^6$ km od Země. Poloměr dráhy je $0,64 \cdot 10^6$ km. Určete oběžnou dobu sondy.

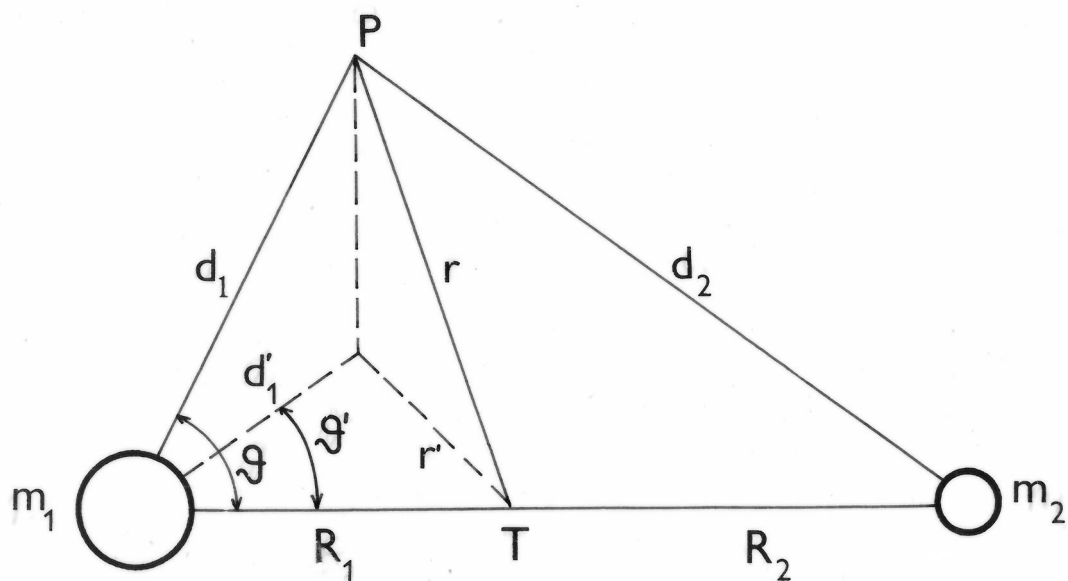
Odpověď: Skutečná oběžná doba je 178 dnů [41].

4.5. Slapový potenciál, příliv a odliv

Zůstaneme ještě u úlohy, kterou jsme vyšetřovali v předchozím paragrafu, ale speciálně se budeme zabývat podrobnějším vyšetřováním silového pole v blízkosti hmotných bodů. Vyšetřujme například silové pole v blízkosti hmotného bodu m_1 (obr. 15), tj. v takových vzdálenostech d_1 od hmotného bodu m_1 , které jsou mnohem menší než vzdálenost R obou hmotných bodů m_1 a m_2 . V těchto vzdálenostech bude převládat silový účinek hmotného bodu m_1 , účinek vzdáleného hmotného bodu m_2 bude podstatně menší. Kromě toho je důležité, že v různých

místech v malém okolí hmotného bodu m_1 je intenzita pole, buzeného hmotným bodem m_2 , přibližně stejná co do velikosti i do směru. Uvidíme, že jsou důležité pouze rozdíly těchto sil, popisujeme-li silové pole v souřadnicích, vztažených k hmotnému bodu m_1 . Protože tyto rozdílové síly budou malé a budou vyjádřeny pomocí rychle konvergující řady, bude možné je většinou popisovat jen pomocí prvního členu této řady. Přistupme již k příslušnému odvození.

Na rozdíl od předchozího paragrafu budeme vyšetřovat silové pole nejen v rovině oběžných drah hmotných bodů m_1 a m_2 , ale i mimo ni. Ponechme obdobné označení jako v obr. 15, ale označme ještě písmenem ϑ' úhel, který svírají spojnice uvažovaného bodu P a hmotného bodu m_2 s hmotným bodem m_1 (obr. 18). Průměty příslušných veličin do roviny oběžných



Obr. 18

drah označme čárkou. Protože chceme vyšetřovat pole v blízkosti hmotného bodu m_1 , bude vhodné vyjadřovat potenciál a intenzitu pole jako funkce proměnných, které se vztahují k tomuto hmotnému bodu, v našem případě jako funkce proměnných d_1 , ϑ' a d_1' .

Potenciál v bodě P je dán vzorcem, analogickým vzorcí (4.29), kde pouze místo r v odstředivém potenciálu je nyní

třeba psát vzdálenost od rotační osy r' :

$$U(P) = - \frac{Gm_1}{d_1} - \frac{Gm_2}{d_2} - \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 . \quad (4.41)$$

Dosaďme sem následující výrazy:

$$R = R_1 + R_2 ,$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{d_1^2 - 2d_1R \cos \vartheta' + R^2} = \\ &= R \sqrt{1 - 2(d_1/R) \cos \vartheta' + (d_1/R)^2} , \end{aligned}$$

$$r'^2 = d_1'^2 - 2R_1 d_1' \cos \vartheta' + R_1^2 , \quad (4.42)$$

$$d_1' \cos \vartheta' = d_1 \cos \vartheta ,$$

$$R_1 = R \frac{m_2}{m_1 + m_2} , \quad \omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} .$$

Dostaneme

$$U(P) = - \frac{Gm_1}{d_1} - \frac{1}{2} \omega^2 d_1'^2 + U_2 , \quad (4.43)$$

kde

$$U_2 = - \frac{1}{2} \omega^2 R_1^2 - \frac{Gm_2}{R} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2(d_1/R) \cos \vartheta' + (d_1/R)^2}} - \frac{d_1}{R} \cos \vartheta' \right] . \quad (4.44)$$

První člen na pravé straně (4.43) popisuje gravitační pole buzené hmotným bodem m_1 . Druhý člen je potenciál odstředivé síly, který charakterizuje otáčení bodu P kolem osy, procházející hmotným bodem m_1 kolmo na rovinu oběžných drah, s úhlovou rychlostí ω (důsledek otáčení celé soustavy kolem společného těžiště T se stejnou úhlovou rychlostí; podobně například Měsíc, přivrácený stále stejnou stranou k Zemi,

vykoná za dobu jednoho oběhu kolem Země také jednu otočku kolem vlastní osy). Člen U_2 je, jak dále ukážeme, až na konstantu roven "poruchovému" potenciálu, jehož prostřednictvím se projevuje vliv hmotného bodu m_2 na mechanické děje v blízkosti hmotného bodu m_1 . Vlastně bychom U_2 mohli rovnou považovat za poruchový potenciál, protože dva potenciály, lišící se konstantou, popisují tentýž fyzikální problém. Provedme nyní některé úpravy členu U_2 .

Předpokládejme, že vzdálenost pozorovatele P od hmotného bodu m_1 je mnohem menší než vzdálenost obou hmotných bodů, tj. předpokládejme

$$d_1 \ll R. \quad (4.45)$$

Užitím rozvoje pro malá x

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x \cos \vartheta + x^2}} = 1 + \frac{\cos \vartheta}{1!} x + \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2!} x^2 + \dots$$

ze (4.44) plyne přibližně

$$U_2 = -\frac{1}{2} \omega^2 R_1^2 - \frac{Gm_2}{R} - \frac{Gm_2 d_1^2}{2R^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad (4.46)$$

kde jsme zanedbali členy vyššího řádu. Všimněme si, že v tomto výrazu vypadl člen úměrný $1/R^2$.

První člen na pravé straně výrazu (4.46) je potenciál odstředivé síly v místě hmotného bodu m_1 (jako důsledek oběhu kolem těžiště T). Druhý člen je potenciál gravitační síly, kterou ve stejném místě působí hmotný bod m_2 . Tyto dvě síly se, v soustavě otáčející se kolem těžiště T, navzájem ruší; z podmínky rovnováhy jsme v předchozím paragrafu určovali ω , v důsledku vyrušení těchto sil hmotný bod m_1 vzhledem k této soustavě nemění svou polohu. Protože výsledné zrychlení je nulové, můžeme příslušné dva potenciály vynechat (třebaže součet těchto dvou potenciálů není nulový, což je důsledek různé volby místa nulového potenciálu u jednotlivých

členů). Uvedené dva členy potenciálu jsme také mohli ihned škrtnout v důsledku toho, že nezávisejí na souřadnicích d_1 , ϑ a d_1' bodu P, jsou to tedy, při popisu v těchto souřadnicích, konstanty nemající fyzikálního významu. Ve (4.46) tedy stačí uvažovat jen poslední člen, který označíme U_p :

$$U_p = - \frac{Gm_2 d_1^2}{2R^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) . \quad (4.47)$$

Tomuto výrazu budeme říkat poruchový potenciál působený hmotným bodem m_2 v blízkosti m_1 .

Potenciál (4.43), v bodech P blízkých hmotnému bodu m_1 , můžeme nyní přepsat v jednodušším tvaru

$$U(P) = U_g + U_o + U_p , \quad (4.48)$$

kde gravitační potenciál U_g a potenciál odstředivé síly U_o , příslušející rotaci kolem osy procházející hmotným bodem m_1 , jsou dány vztahy

$$U_g = - \frac{Gm_1}{d_1} , \quad U_o = - \frac{1}{2} \omega^2 d_1'^2 \quad (4.49)$$

a poruchový potenciál U_p je dán vztahem (4.47). Poznamenejme, že součtu gravitačního a odstředivého potenciálu říkáme tíhový potenciál a příslušné zrychlení, které je vektorovým součtem gravitačního a odstředivého zrychlení, nazýváme tíhovým zrychlením. V naší úloze je tedy tíhový potenciál U_t dán vztahem

$$U_t = U_g + U_o , \quad (4.50)$$

kde pro členy na pravé straně platí (4.49), a výsledný potenciál je součtem tíhového potenciálu a potenciálu poruchového:

$$U(P) = U_t + U_p . \quad (4.51)$$

Kdybychom hmotný bod m_2 neuvažovali, bylo by silové pole v blízkosti m_1 (v otáčející se soustavě) popsáno tíhovým potenciálem U_t . Existence hmotného bodu m_2 se v blízkosti m_1 projevuje existencí dodatečného potenciálu U_p , který se překládá přes U_t ("porušuje" U_t a "porušuje" i pozorované mechanické děje, odtud jeho název). Všimněme si ještě, že poruchový potenciál je přímo úměrný hmotnosti poruchového (rušícího) hmotného bodu m_2 a nepřímo úměrný třetí mocnině jeho vzdálenosti. Proto poruchové síly budou velmi rychle klesat se vzdáleností poruchového tělesa.

Poruchová tělesa Měsíc a Slunce, jako důsledek potenciálů typu (4.47), způsobují na mořích na Zemi příliv a odliv. K podobným efektům dochází i v pevných částech Země, ovšem tyto pohyby jsou podstatně menší, ale pomocí přístrojů je lze zaznamenat spolehlivě. Protože příliv a odliv souhrnně označujeme jako slapy, při výzkumu těchto jevů nazýváme poruchový potenciál (4.47) slapovým potenciálem a dále jej budeme označovat U_s . Přepišme (4.47) ještě s jiným označením. Označme nyní písmenem r vzdálenost uvažovaného místa od středu Země (pro zemský povrch je to poloměr Země), m_ζ hmotnost Měsíce, R_ζ vzdálenost středů Země a Měsíce, η_ζ úhel mezi průvodičem uvažovaného bodu a průvodičem Měsíce, přičemž za počátek soustavy souřadnic považujeme střed Země. Slapový potenciál Měsíce na zemském povrchu můžeme nyní zapsat ve tvaru

$$U_{s\zeta} = - \frac{Gm_\zeta r^2}{2R_\zeta^3} (3 \cos^2 \eta_\zeta - 1) . \quad (4.52)$$

Zavedením obdobných veličin pro Slunce dostáváme zcela analogicky pro slapový potenciál Slunce vyjádření

$$U_{s\odot} = - \frac{Gm_\odot r^2}{2R_\odot^3} (3 \cos^2 \eta_\odot - 1) . \quad (4.53)$$

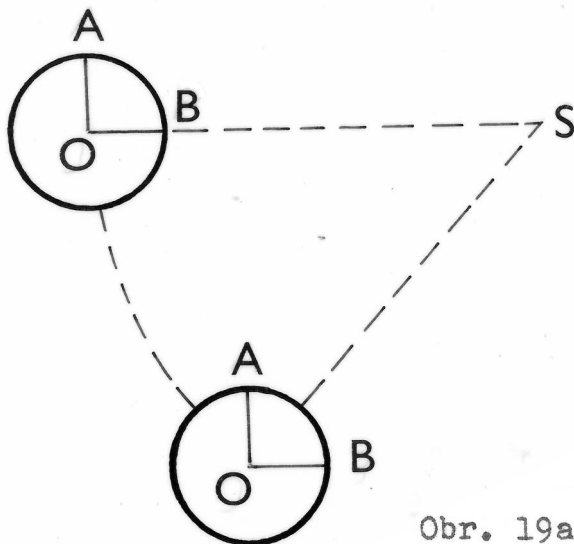
Slapy mají velký význam v mnohých astronomických a geofyzikálních dějích. Některé vlastnosti slapů vyšetříme v níže uvedených příkladech, dalšími podrobnostmi se však již zabývat

nemůžeme, ale odkazujeme čtenáře např. na [34, 45].

Uvedené odvození slapového potenciálu (4.47) vycházelo přesně z formulace úlohy, kterou jsme se zabývali v minulém paragrafu. Odstředivý potenciál oběžného pohybu kolem těžiště jsme poněkud formálně rozdělili mezi odstředivý potenciál rotačního pohybu a slapový potenciál. Tento postup nevyžadoval složité fyzikální uvažování, ale na druhé straně zase neposkytl dostatečně názorné fyzikální vysvětlení, co je vlastně příčinou vzniku slapových sil. Na základě popsaného postupu můžeme nejvýše říci, že slapy jsou důsledkem jisté neúplné kompenzace přitažlivosti poruchového tělesa a odstředivé síly. Poněkud názornější pohled na původ slapových sil je podán v níže uvedeném příkladu 1. Slapové zrychlení, např. v nějakém bodě Země, můžeme také chápat jako rozdíl zrychlení, kterým působí poruchové těleso v uvažovaném bodě a ve středu Země [34]. Všechny tyto přístupy jsou ekvivalentní v tom smyslu, že vedou ke stejnému výrazu pro slapový potenciál a slapovou sílu.

Úlohy

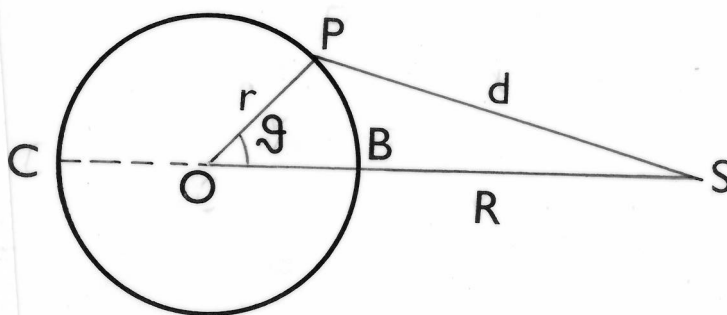
1. Předpokládejme, že Země je koule o poloměru r , která obíhá kolem Slunce po kruhové dráze o poloměru R . Předpokládejme pro jednoduchost, že Země nerotuje, tj. že osy pevně spojené se Zemí zachovávají stále stejný směr v interciální soustavě (obr. 19a). Odvoďte výraz pro slapový sluneční



Obr. 19a

potenciál a zdůvodněte, proč příliv nastává jak na přivrácené, tak i na odvrácené straně od Slunce.

Řešení: Je zřejmé, že za uvedených předpokladů opisují všechny body Země kružnice sice o různých středech, ale stejných poloměrech, a v důsledku toho má odstředivé zrychlení ve všech bodech Země stejnou velikost a v daný časový okamžik i stejný směr. Přitom odstředivá síla má stejnou velikost jako přitažlivá síla ve středu Země. V daný časový okamžik jsou ekvipotenciální plochy odstředivého potenciálu roviny kolmé na spojnici středů Země - Slunce, viz obr. 19b. Protože odstředivá síla míří směrem



Obr. 19b

od Slunce, odstředivý potenciál roste směrem ke Slunci; nulový odstředivý potenciál zvolme v bodě O. Pro odstředivý potenciál tedy máme

$$U_0(P) = \frac{Gm}{R^2} r \cos \varphi .$$

Slapový potenciál je součtem přitažlivého potenciálu Slunce a odstředivého potenciálu (slapové zrychlení je vektorovým součtem příslušných zrychlení)

$$U_s(P) = - \frac{Gm}{d} + \frac{Gm}{R^2} r \cos \varphi ,$$

kde m je hmotnost Slunce. Rozkladem $1/d$ do řady

a vynecháním konstantního členu a členů vyššího řádu dostaneme výsledný vzorec (4.53).

Zdůvodnění přílivu v okolí osy OS na přivrácené i odvrácené straně: odstředivá síla je ve všech bodech stejná a je v rovnováze s přitažlivou silou v těžišti Země O ; přitažlivá síla je největší v bodě B (obr. 19b) a nejmenší v bodě C , takže v bodě B převládá přitažlivá síla nad odstředivou a v bodě C je tomu naopak, výslednice obou sil tedy v obou bodech B i C míří ven ze Země.

V předchozím paragrafu jsme uvedli, že slapové síly vznikají v důsledku jisté neúplné kompenzace mezi přitažlivou a odstředivou silou. Právě vyřešený příklad umožňuje tuto představu blíže konkretizovat. V uvedeném modelu, v daném časovém okamžiku, odstředivé síly vytvářejí v Zemi homogenní silové pole (ve všech bodech stejný směr a velikost), kdežto přitažlivé síly jsou centrální. Protože se homogenní pole a pole centrální nemohou zcela vyrušit, zůstávají zbytkové síly - síly slapové. (Slapová síla je nulová pouze v těžišti Země, viz následující příklad).

Nechme nyní Zemi rotovat kolem její osy. Vzniklá síla odstředivá se skládá s přitažlivou gravitační silou Země a vzniká síla tíhová. Lze rozmyslet, že výrazy pro slapovou sílu se nezmění, pouze úhel ϑ , pro bod pevně spojený se Zemí, se stane složitější funkcí času.

2. Zavedením kosinu pro dvojnásobný úhel ukažte, že slapový potenciál, viz vzorce (4.52) a (4.53), lze psát ve tvaru

$$U_s = - \frac{Gmr^2}{4R^3} (3 \cos 2\vartheta + 1) , \quad (4.54)$$

kde G je gravitační konstanta, r vzdálenost od středu Země (nebo jiného uvažovaného tělesa), m je hmotnost poruchového tělesa, R jeho vzdálenost, ϑ úhel mezi průvodiči uvažovaného bodu a poruchového tělesa, přičemž počátek soustavy souřadnic volíme ve středu Země.

3. Radiální složka slapového zrychlení (kladná ve směru ven ze Země), je dána následujícím vzorcem, který ihned plyne ze (4.54):

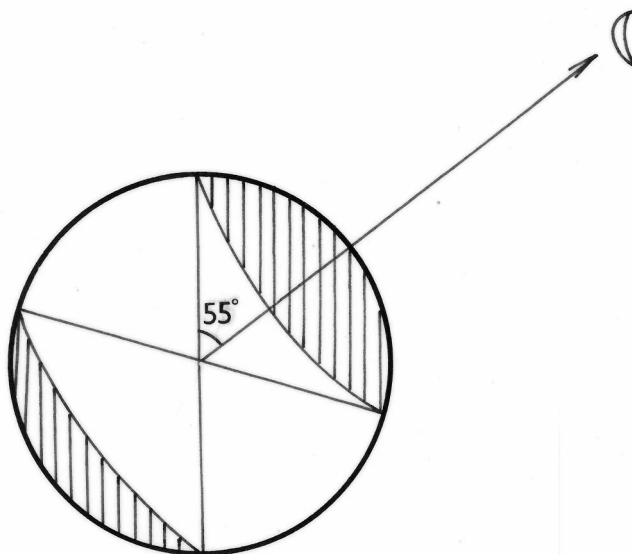
$$E_r = - \frac{\partial U_s}{\partial r} = \frac{Gmr}{2R^3} (3 \cos 2\vartheta + 1) \quad (4.55)$$

Odpovězte odtud na následující otázky:

- Proč nastává dvakrát za den příliv a dvakrát odliv?
- Jsou slapy symetrické na přivrácené a odvrácené straně vzhledem k poruchovému tělesu?
- Pro jaké hodnoty ϑ nastává příliv, pro které odliv? Nakreslete!
- Ukažte, že na Zemi jsou slapové síly působené Měsícem přibližně dvakrát větší než slapové síly působené Sluncem. Proč má Měsíc tak velký vliv?
- Lze na Zemi změřit slapové zrychlení působené Měsícem pomocí gravimetru, který měří s přesností $0,1 \mu\text{m/s}^2$?

Odpovědi:

- Úhel ϑ obsahuje složku, která má v důsledku zemské rotace periodu jeden den. Ve (4.55) však vystupuje kosinus dvojnásobného úhlu, takže příliv a odliv se opakují dvakrát za den.
- Pokud uvažujeme pouze první člen ve slapovém potenciálu, pak symetrické jsou. Kdybychom však přibrali další člen řady pro slapový potenciál, který jsme výše zanedbávali, už symetrické nebudou.
- Radiální složka slapového zrychlení je nulová pro $3 \cos 2\vartheta + 1 = 0$, čemuž vyhovuje přibližně $\vartheta = 55^\circ$, Tedy pro $0 \leq \vartheta < 55^\circ$ je příliv, pro $55^\circ < \vartheta \leq 90^\circ$ odliv a na odvrácené straně symetrické (obr. 20).
- Stačí ukázat, že m_M/R_M^3 je přibližně dvakrát větší než m_S/R_S^3 , přesnější poměr je 11:5. Přes malou hmotnost Měsíce ve srovnání se Sluncem je zde podstatná malá vzdálenost Měsíce, protože slapová síla klesá se třetí mocninou vzdálenosti poruchového tělesa.
- Naprosto spolehlivě, protože maximální slapové zrychlení působené Měsícem dosahuje v absolutní hodnotě



Obr. 20

přibližně $1,1 \mu\text{m}/\text{s}^2$. Poznamenejme, že ještě snadněji lze slapy pevné Země sledovat měřením náklonů svislice [34], viz též následující příklad.

4. Horizontální složka slapového zrychlení (braná kladně ve směru k rušícímu tělesu, tj. ve směru klesajícího ϑ), je dána vzorcem

$$E_{\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_s}{\partial \vartheta} = \frac{3Gmr}{2R^3} \sin 2\vartheta .$$

Odpovězte odtud na následující otázky:

- Kde je horizontální složka slapového zrychlení v Zemi nulová?
- Kde je slapová síla nulová, tj, kde jsou nulové současně obě složky E_r a E_{ϑ} ?
- Jaká je maximální hodnota horizontálního slapového zrychlení na zemském povrchu, působeného Měsícem? Pro jaký úhel ϑ nastává?

Odpovědi:

- Na přímce procházející těžištěm Země a rušícím tělesem ($\vartheta = 0^\circ$ a 180°) a v rovině $\vartheta = 90^\circ$.
- Pouze v počátku $r = 0$ (těžišti Země).

c) $0,8 \mu\text{m/s}^2$ pro $\vartheta_q = 45^\circ$ a 135° .

5. V důsledku horizontálních slapových zrychlení dochází k náklonům svislého směru. Svislice se nakloní o úhel η , pro který platí (zdůvodněte náčrtkem)

$$\eta \doteq \text{tg } \eta = E_p/g,$$

kde g je tíhové zrychlení. Kolik činí největší náklon na zemském povrchu působený Měsícem, Sluncem a oběma tělesy dohromady? Předpokládejte přitom, že zemský povrch se ne-deformuje, tj. Země je tuhá, a položte $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Odpověď: $0,017''$; $0,008''$; dohromady tedy maximálně $0,025''$. Tyto náklony musí být brány v úvahu při přesných geodetických a astronomických měřeních.

6. Zvednutí ekvipotenciální plochy tíhového potenciálu v důsledku slapů, za předpokladu tuhé Země, může být přibližně počítáno pomocí vzorce

$$\xi = - U_s/g, \quad (4.56)$$

kde g je tíhové zrychlení (protože práce U_s se rovná síle $(-g)$ krát dráze ξ). Odtud určete:

- Jak se nejvýše zvedne ekvipotenciální plocha u zemského povrchu v důsledku slapů působených Měsícem a Sluncem dohromady? Volte $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- Proč výšky přílivu a odlivu nejsou stejné, tj. proč vzhledem ke střední hladině se při přílivu zvedá hladina o větší hodnotu, než o jakou klesá za odlivu?
- Zdůvodněte, proč ve vnitřních mořích (Baltické, Černé) dosahuje výška přílivu obvykle jen několika centimetrů, zatímco jinde mnoha metrů (největší rozdíl mezi výškou přílivu a odlivu činí asi 15 m na východním pobřeží Kanady v Bay of Fundy).

Odpovědi:

- Zvednutí ekvipotenciální plochy (výška statického přílivu) působené Měsícem činí maximálně 36 cm, Sluncem 16cm, dohromady tedy 52 cm.

- b) Výška přílivu je větší než odlivu, protože ve (4.54) může výraz v závorce nabývat největší kladné hodnoty +4 a nejmenší záporné hodnoty -2.
- c) Na mořích jsou důležité dynamické efekty, úzkým průli-
vem nemůže z oceánu do vnitřního moře nebo naopak přeté-
ci dostatečné množství vody; v zálivech sousedících
s oceánem jsou naopak možné výrazné rezonanční jevy.
7. Ve kterých dnech v měsíci jsou přílivy a odlivy největší?
Odpověď: Při úplňku a novu, kdy se účinky Měsíce a Slunce
sčítají ve fázi.
8. Rocheova mez [45]. Jestliže se těleso s malou hmotností,
např. měsíc některé planety, přiblíží blízko k tělesu
s velkou hmotností, např. k mateřské planetě, může se men-
ší těleso účinkem slapových sil rozpadnout (zejména pokud
drží pohromadě jen vlastní gravitací jako tělesa tekutá ne-
bo složená ze sypkých materiálů). Předpokládejme, že menší
těleso je tuhá koule o poloměru r a hmotnosti m , velké
těleso má hmotnost M , vzdálenost středů obou těles je R .
- a) Při jaké vzdálenosti R je na povrchu menšího tělesa
slapové zrychlení stejně velké jako gravitační zrychle-
ní vlastního tělesa?
- b) Při jaké vzdálenosti R je na povrchu menšího tělesa
slapové zrychlení stejné jako tíhové zrychlení, předpo-
kládáme-li, že malé těleso rotuje kolem vlastní osy tak,
že je natočeno k velkému tělesu stále stejnou stranou?
Tato vázaná (synchronizovaná) rotace se u blízko obíha-
jících těles často vyskytuje, je důsledkem tzv. slapové-
ho tření; kromě Měsíce takto např. obíhají galileovské
měsíce Jupitera. Uvedená vzdálenost R se nazývá Roche-
ovou mezní vzdáleností.
- c) V jaké vzdálenosti od středu Země se nachází Rocheova
mez pro Měsíc?

Řešení:

- a) Podmínka, že maximální slapové zrychlení je rovno gravi-
tačnímu zrychlení má, užitím (4.55), tvar

$$\frac{2GMr}{R^3} = \frac{Gm}{r^2} .$$

Odtud plyne

$$R = r \sqrt[3]{2M/m} .$$

- b) Ve výše uvedené podmínce na pravé straně je třeba ještě odečíst odstředivé zrychlení $\omega^2 r$, kde za ω^2 je třeba dosadit podle (4.42):

$$\frac{2GMr}{R^3} = \frac{Gm}{r^2} - \frac{G(M+m)}{R^3} r .$$

Odtud, zanedbáme-li m ve srovnání s M , dostáváme vzorec pro Rocheovu mez

$$R = r \sqrt[3]{3M/m} . \quad (4.57)$$

- c) 10 860 km . Při této vzdálenosti středu Měsíce od středu Země se začnou z povrchu Měsíce oddělovat volné částice. Poznamenejme, že kdyby byl Měsíc tekutý, začne se rozpadat už ve větších vzdálenostech (18 500 km), viz [45]. Patrně takovýmto rozpadem vznikly Saturnovy prstence.
9. Ukažte, že Rocheovu mezní vzdálenost (4.57) lze interpretovat také jako vzdálenost středů těles, při níž se librační bod L_1 dotkne povrchu menšího tělesa, viz vzorec (4.35).

4.6. Laplaceova rovnice

Vraťme se k vyšetřování obecných vlastností pole soustavy bodových zdrojů v inerciálních souřadnicových soustavách.

Vyšetřujeme výraz

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (4.58)$$

pro soustavu hmotných bodů. Ze (3.9) a (3.10) plynou vzorce (v bodech, kde žádné d_i není nulové)

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} &= -G \sum_{i=1}^n m_i \left[-3 \frac{(x-x_i)^2}{d_i^5} + \frac{1}{d_i^3} \right], \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -G \sum_{i=1}^n m_i \left[-3 \frac{(y-y_i)^2}{d_i^5} + \frac{1}{d_i^3} \right], \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= -G \sum_{i=1}^n m_i \left[-3 \frac{(z-z_i)^2}{d_i^5} + \frac{1}{d_i^3} \right].\end{aligned}\tag{4.59}$$

Odtud plyne

$$\operatorname{div} \vec{E} = -G \sum_{i=1}^n m_i \left[-3 \frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}{d_i^5} + \frac{3}{d_i^3} \right] = 0\tag{4.60}$$

Dostali jsme výsledek, že v místech, kde nesídlí hmotné body, je $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Budeme říkat, že pole je v těchto místech nezřídlové nebo solenoidální (divergence charakterizuje velikost zdrojů, "vydatnost zříděl" pole v daném bodě). O tom, že je toto pole také nevírové, tj. $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, mohli bychom se přesvědčit přímým použitím vzorců (3.9), ale vlastně to již víme, protože se jedná o obecnou vlastnost konzervativních polí. V místech, kde se nacházejí hmotné body, má divergence intenzity singularitu, ale $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$; mohli bychom se o tom přesvědčit užitím integrálních definicí operací divergence a rotace [7, 48].

Zaveďme Laplaceův operátor Δ na skalár φ známým vztahem

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.\tag{4.61}$$

Vyjádřeme vzorec (4.60) pomocí potenciálu. Ze (3.11) a (4.60) plyne tato důležitá věta: V místech, kde nesídlí hmotné body, splňuje potenciál rovnici

$$\Delta U = 0.\tag{4.62}$$

Tuto rovnici nazýváme Laplaceovou.

Laplaceova rovnice (4.62) má ovšem mnohem obecnější platnost, než jen pro soustavu hmotných bodů. Může proto sloužit, jsou-li ještě dány okrajové podmínky, jako velmi důležitá výchozí rovnice při řešení mnohých úloh teorie potenciálu. Pro soustavu hmotných bodů velký význam nemá, protože výpočet potenciálu nebo intenzity můžeme snadno provést pomocí vzorců, uvedených v kapitole 3.

4.7. Gaussův zákon

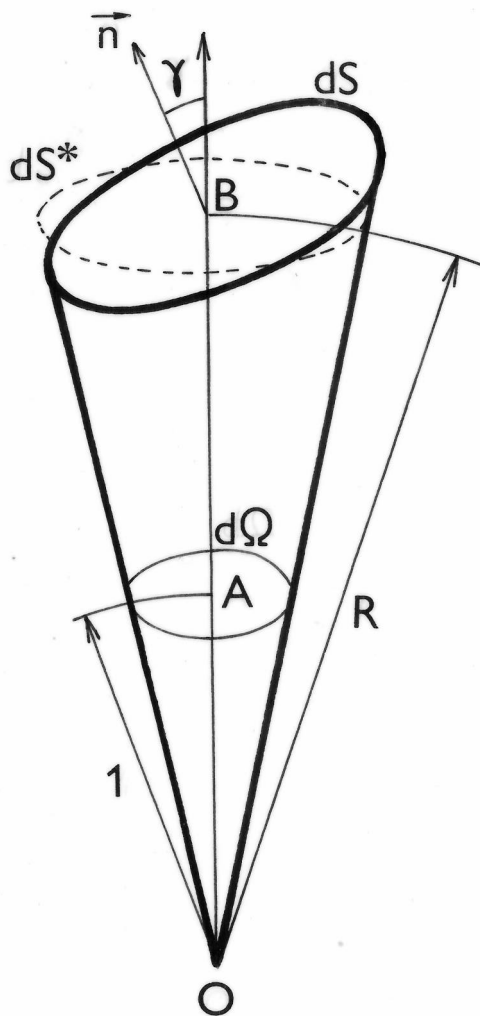
Laplaceova rovnice vyplynula z rovnice (4.60), která obsahuje derivace intenzity pole. Nyní naopak budeme hledat vlastnosti některých integrálů z intenzity pole.

Uvažujme nějaký plošný element dS . Jednotkový vektor, udávající směr a smysl orientované normály k elementu dS , značme \vec{n} . Pro vektorové pole \vec{E} bude výraz $\vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_n dS$ vyjadřovat tzv. tok intenzity pole \vec{E} plošným elementem dS . Tento termín je převzat z hydromechaniky.

Uvažujme gravitační pole buzené jedním hmotným bodem o hmotnosti m . Sestrojíme kulovou plochu K o poloměru r se středem v uvažovaném hmotném bodu. Tok intenzity \vec{E} ve směru vnější normály ke kulové ploše je podle (3.4)

$$\iint_K E_n dS = \iint_K -\frac{Gm}{r^2} dS = -\frac{Gm}{r^2} \iint_K dS = -4\pi Gm \quad . \quad (4.63)$$

Vidíme, že úhrnný tok nezávisí na poloměru kulové plochy. Zdá se tedy, že bude tentýž i pro libovolnou uzavřenou plochu S , která uvnitř obsahuje uvažovaný hmotný bod. Abychom to dokázali, zvolme na ploše S nějaký bod B a kolem něho element plochy dS (obr. 21, viz též [42]). Označme R vzdálenost bodu B od hmotného bodu O . Nechť dS^* je průmět elementu dS na kulovou plochu o středu O procházející bodem B . Nechť A a $d\Omega$ jsou průměty bodu B a elementu dS na jednotkovou kulovou plochu o středu O . Je zřejmé, že tok intenzity plochou dS je roven toku plochou $d\Omega$, neboť platí:



Obr. 21. K odvození Gaussova zákona [42]. Nechť v bodě O se nachází hmotný bod nebo bodový náboj. Pak tok intenzity plošnými elementy dS , dS^* a $d\Omega$ je stejný (dS^* je průmět dS na kouli o poloměru R , $d\Omega$ je průmět dS na jednotkovou kouli).

tok plochou dS je $\vec{E}(B) \cdot \vec{n} dS = E(B) \cos \gamma dS = E(B) dS^*$;
 tok plochou $d\Omega$ je $E(A) d\Omega = \frac{E(A)}{R^2} R^2 d\Omega = E(B) dS^*$.

Pro tok intenzity uzavřenou plochou S , která obklopuje hmotný bod o hmotnosti m , odtud dostáváme

$$\iint_S E_n dS = - 4\pi Gm \quad . \quad (4.64)$$

Jestliže se uvnitř uzavřené plochy S nenachází žádný hmotný bod, bude tok intenzity touto plochou nulový. Důkaz lze provést obdobným způsobem jako výše, viz [42], nebo užitím Gaussovy věty integrálního počtu

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \iint_S E_n dS \quad , \quad (4.65)$$

kde V je objem uzavřený plochou S . Protože podle předpokladu se v objemu V nenacházejí žádné hmotné body, je $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ všude v tomto objemu a tedy $\iint_S E_n dS = 0$.

Nechť uvnitř uzavřené plochy S je uzavřeno k hmotných bodů o hmotnostech m_i ($i = 1, \dots, k$) . Protože sčítání vektorů znamená algebraické sčítání složek, bude výsledná normálová složka E_n v každém místě plochy S součtem příspěvků od jednotlivých hmotných bodů:

$$E_n = \sum_{i=1}^k E_{n,i} \quad ,$$

kde $E_{n,i}$ je normálová složka intenzity, kterou by působil samotný bod m_i . Odtud plyne s použitím (4.64)

$$\iint_S E_n dS = \iint_S \sum_{i=1}^k E_{n,i} dS = \sum_{i=1}^k \iint_S E_{n,i} dS = \sum_{i=1}^k (- 4\pi Gm_i) \quad .$$

Dostáváme tento výsledek: Pro úhrnný tok intenzity uzavřenou plochou S (tok z vnitřku plochy ven) platí

$$\iint_S \mathbf{E}_n dS = - 4\pi GM \quad , \quad (4.66)$$

kde M je součet hmotností všech hmotných bodů, které se nacházejí uvnitř plochy S . Příspěvek k toku od hmot, které se nacházejí vně plochy, je nulový. Tvrzení (4.66) se nazývá Gaussův zákon (Gaussova věta, Gaussův vzorec).

V případě elektrostatického pole soustavy bodových nábojů ze (4.66) analogicky plyne

$$\iint_S \mathbf{E}_n dS = Q/\epsilon \quad , \quad (4.67)$$

kde Q je součet všech nábojů uzavřených uvnitř plochy S . Tomuto vztahu se říká Gaussova věta elektrostatiky.

Lze ukázat, že Gaussův zákon má rovněž obecnější platnost, než jen pro soustavu bodových zdrojů. Známe-li intenzitu na nějaké uzavřené ploše, může být použit k výpočtu celkové hmotnosti nebo náboje uvnitř této plochy. Naopak, známe-li celkovou hmotnost či náboj, můžeme v některých jednoduchých úlohách počítat intenzitu pole; je-li např. intenzita konstantní na S a kolmá k této ploše, takže integrál na levé straně (4.66) lze vyjádřit jako součin intenzity a velikosti plochy.

V případech soustavy bodových zdrojů nemá Gaussův zákon, obdobně jako Laplaceova rovnice, příliš velký význam. O použití tohoto zákona při řešení některých složitějších úloh pojednáme v dalším dílu tohoto skriptu.

4.8. O bodech rovnováhy

Laplaceova rovnice a Gaussův zákon umožňují snadno vyšetřit některé vlastnosti gravitačního nebo elektrostatického pole v okolí bodů rovnováhy (v inerciální soustavě souřadnic, viz paragraf 4.1).

V bodě rovnováhy jsou všechny tři složky intenzity nulové

takže pro potenciál U v tomto bodě platí

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad .$$

Tyto vztahy ovšem znamenají, že funkce $U(x, y, z)$ nabývá v bodě rovnováhy maxima, minima nebo tento bod je stacionárním bodem vzhledem ke změnám souřadnic. Kdyby však v bodě rovnováhy nabýval potenciál maximální nebo minimální hodnoty, musely by být derivace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

všechny záporné nebo všechny kladné. Jejich součet by tedy musel být nenulový, což odporuje Laplaceově rovnici (pokud se v bodě rovnováhy nenacházejí žádné zdroje pole). Bod rovnováhy tedy není ani bodem lokálního maxima, ani minima potenciálu, v některých směrech procházejících tímto bodem potenciál roste, v jiných klesá [26].

Stejný výsledek lze získat užitím Gaussova zákona. Jestliže se v oblasti bodu rovnováhy nenacházejí žádné zdroje, je tok intenzity pole libovolnou uzavřenou plochou, obklopující bod rovnováhy, nulový:

$$\iint_S \mathbf{E}_n \, dS = 0 \quad .$$

Odtud plyne, že v některých částech plochy S musí intenzita mířit dovnitř této plochy, v jiných vně. Bod rovnováhy je tedy pro některá posunutí bodem stabilní rovnováhy, pro jiná posunutí bodem labilní rovnováhy.

Vyšetřování stability pohybu v oblasti libračních bodů (paragraf 4.4) je složitější, protože se jedná o popis v otáčející se souřadnicové soustavě. V této soustavě musíme kromě gravitačních sil uvažovat i sílu odstředivou, jejíž potenciál nespĺňuje Laplaceovu rovnici (dokažte, že pro potenciál odstředivé síly U_0 platí $\Delta U_0 = -2\omega^2$). V důsledku toho intenzita tíhového pole také nespĺňuje výše uvedenou Laplaceovu

rovnici a Gaussův zákon. Podrobné vyšetření stability pohybu v blízkosti libračních bodů je podáno ve [2].

4.9. Potenciální energie soustavy hmotných bodů

V dosavadních úlohách jsme vždy předpokládali, že máme danou určitou soustavu hmotných bodů, a vyšetřovali jsme, jakou energii musíme dodat dalšímu hmotnému bodu, abychom jej přenesli z nekonečna do zvoleného místa soustavy. Nezabývali jsme se zatím otázkou, jakou energii bylo třeba vynaložit na sestavení původní soustavy hmotných bodů, tj. k jejich přenesení z nekonečna do výsledného uspořádání. Touto otázkou se budeme zabývat nyní [9].

Přenesme z nekonečna první hmotný bod o hmotnosti m_1 . Protože na něj ostatní hmotné body nepůsobí, bude vykonaná práce nulová. Předpokládejme nyní, že poloha prvního hmotného bodu byla fixována. Dále přenášejme druhý hmotný bod o hmotnosti m_2 v gravitačním poli prvního hmotného bodu. K tomuto přemístění musí vnější síly dodat energii (zápornou), která je součinem hmotnosti m_2 a potenciálu hmotného bodu m_1 v příslušné vzdálenosti

$$W_2 = - m_2 \frac{Gm_1}{d_{12}} ,$$

kde d_{ij} označuje vzdálenost i -tého a j -tého hmotného bodu. Třetímu hmotnému bodu bude třeba v gravitačním poli předchozích dvou dodat potenciální energii

$$W_3 = - m_3 G \left[\frac{m_1}{d_{13}} + \frac{m_2}{d_{23}} \right] ,$$

takže celková práce potřebná k přemístění tří hmotných bodů bude

$$W = W_2 + W_3 = - G \left[\frac{m_1 m_2}{d_{12}} + \frac{m_1 m_3}{d_{13}} + \frac{m_2 m_3}{d_{23}} \right] .$$

Další postup je zřejmý. K sestavení soustavy z n hmotných bodů bude třeba vykonat práci

$$W = -G \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \frac{m_i m_j}{d_{ij}} = -\frac{G}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ' \frac{m_i m_j}{d_{ij}}, \quad (4.68)$$

kde apostrofem u poslední sumy jsme vyznačili, že při sčítání vynecháváme členy $j=i$.

Výsledný vzorec (4.68) pro potenciální energii soustavy n hmotných bodů můžeme také přepsat ve tvaru

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i U_i, \quad (4.69)$$

kde U_i je potenciál soustavy $n-1$ hmotných bodů $m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_n$ v místě i -tého hmotného bodu:

$$U_i = -G \sum_{j=1}^n ' \frac{m_j}{d_{ij}}. \quad (4.70)$$

Potenciál soustavy n bodových nábojů ve vakuu dostaneme ihned ze (4.68) tak, že místo hmotností píšeme náboje a místo $(-G)$ píšeme $(1/4\pi\epsilon_0)$:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ' \frac{Q_i Q_j}{d_{ij}}. \quad (4.71)$$

Rovněž tento vzorec můžeme přepsat ve tvaru, který je obdobou vzorců (4.69) a (4.70).

5. O PŘÍSTUPECH K ŘEŠENÍ ÚLOH TEORIE POTENCIÁLU

Dříve než čtenář přistoupí ke studiu dalších partií teorie potenciálu, považujeme za účelné pro lepší orientaci zde uvést krátký, i když značně schematický přehled nejdůležitějších přístupů, používaných při řešení úloh teorie Newtonova potenciálu. Zmíníme se jednak o hlavních výchozích vzorcích a rovnicích, kterých můžeme použít při matematické formulaci úlohy, jednak o matematických tvarech řešení, v jakých potenciál nejčastěji vyjadřujeme.

5.1. O výchozích vzorcích

Newtonův gravitační zákon (spolu s principem superpozice) vyjadřuje přímý vztah mezi intenzitou gravitačního pole a rozložením hmot. Pro řešení mnohých úloh je však vhodné mít k dispozici i jiné, ekvivalentní, vzorce či rovnice. Jistým integrálním ekvivalentem Newtonova gravitačního zákona je Gaussov zákon. Diferenciálním ekvivalentem, připojíme-li ještě okrajové podmínky, je Laplaceova rovnice, resp. obecnější rovnice Poissonova (zde jsme se touto rovnicí nezabývali). Obdobná situace je v příslušných partiích elektřiny a magnetismu.

Známe-li rozložení hmot, můžeme k výpočtu potenciálu použít vzorců z kapitoly 3, které bezprostředně vyplývají z Newtonova gravitačního zákona a principu superpozice. Mohli bychom také vyjít z příslušné parciální diferenciální rovnice (Poissonovy) a hledat její řešení při odpovídajících okrajových podmínkách, ale tento postup je obvykle složitější. Možnost postupovat touto cestou je zajištěna tím, že při jistých okrajových podmínkách je řešení příslušné parciální diferenciální rovnice jednoznačné. Jestliže např. potenciály U_1 a U_2 vyhovují Laplaceově rovnici uvnitř nějaké uzavřené plochy S (která splňuje předpoklady pro použití Gaussovy věty) a na ploše S platí $U_1 = U_2$, jsou potenciály stejné i uvnitř S . Obdobně, mají-li na S oba potenciály stejné normálové derivace, $\partial U_1 / \partial n = \partial U_2 / \partial n$, mohou se lišit jen o konstantu [32].

Velice časté jsou úlohy, kdy máme určit potenciál a přitom rozložení zdrojů pole vůbec neznáme nebo je obtížné toto rozložení určit. Ukazuje se, že i mnohé z těchto úloh lze řešit, že neznalost zdrojů můžeme někdy nahradit i jinými informacemi o studovaném poli. Sem patří například elektrostatické úlohy s vodiči; soustava bodového náboje a vodiče vytváří pole, které je superpozicí pole tohoto náboje a nábojů indukovaných ve vodiči, jejichž rozložení neznáme. Neznalost indukovaných nábojů můžeme obejít poznatkem, že povrch vodiče v ustáleném stavu vytváří ekvipotenciální plochu, a úlohu lze pak formulovat jako okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici. Obdobná je situace při studiu gravitačního a hlavního magnetického pole Země. Protože neznáme přesné rozložení zdrojů těchto polí uvnitř Země, nemůžeme určit potenciál uvnitř Země. Pole vně Země ovšem můžeme počítat opět řešením Laplaceovy rovnice při daných podmínkách na zemském povrchu a v nekonečnu. Poznamenejme však, že řešení Laplaceovy rovnice často není třeba ve skutečnosti provádět; objemové integrály pro potenciál, obsahující v integrandu neznámou hustotu nebo magnetizaci, lze například přímo rozložit do řady a hledat nějaké jiné metody určení koeficientů této řady (touto cestou se obvykle postupuje při studiu vnějšího gravitačního pole pomocí umělých družic).

Ze vzorců v kapitole 3, založených bezprostředně na Newtonově gravitačním zákonu a Coulombově zákonu, jsme v kapitole 4 formálně matematickou cestou odvodili Gaussův zákon a příslušnou parciální diferenciální rovnici (pro soustavu hmotných bodů, obdobně lze postupovat i u objemových potenciálů aj.). Z tohoto hlediska můžeme uvedené vztahy považovat za ekvivalentní. Přesto možná čtenář pociťuje jistý rozdíl mezi popisem gravitačního, elektrického a magnetického působení na jedné straně pomocí vzorců z kap. 3 a na druhé straně pomocí Gaussova zákona a Laplaceovy (Poissonovy) rovnice. Například ve vzorcích kap. 3 se příspěvek každého elementárního zdroje uplatňuje prostřednictvím jeho velikosti (hustoty) a vzdálenosti od uvažovaného místa, při řešení Laplaceovy rovnice se zdroje projevují prostřednictvím okrajových

podmínek. Nechceme tyto přístupy od sebe oddělovat, to by bylo nesprávné, ale chtěli bychom ještě upozornit, že je možné v nich vidět dva pohledy na studované problémy, jak je známe z historie fyziky. Všimněme si těchto otázek blíže.

Je známo, že newtonovská teorie gravitačního působení i teorie elektrického a magnetického působení vznikly jako teorie přímého působení na dálku. Tato koncepce byla podrobně rozpracována v pracích předních matematiků na začátku 19. století. Faraday zvolil jiný přístup, který slouží jako základní pojetí v teorii pole [5]. Podle Faradaye, ale i Maxwella a dalších tvůrců elektromagnetické teorie v minulém století, představovalo elektromagnetické pole skutečná napětí v reálném mechanickém prostředí (éteru), schopném např. přenášet elektromagnetické vlny apod. V současné době se éteru nepřipisuje existence, elektromagnetické pole je však pokládáno za stejně reálnou veličinu jako částice. Toto pole existuje v prostoru mezi částicemi, čemuž odpovídá matematický popis pomocí veličin, definovaných v každém bodě prostoru v každém čase; tyto veličiny splňují určitou diferenciální rovnici.

Poslechněme si, jaké stanovisko zaujímá k těmto otázkám Maxwell v předmluvě ke své monografii [26]. Nejprve uvádí, že se nejdříve rozhodl důkladně se seznámit s Faradayovými výsledky, shrnutými v knize "Experimentální výzkumy o elektřině". Poznává, že si byl vědom jistého rozdílu mezi Faradayovým chápáním jevů a koncepcí matematiků, což způsobovalo, že ani Faraday ani matematikové nebyli ochotni přijmout jazyk toho druhého. Maxwell byl však přesvědčen (za toto přesvědčení vděčil Thomsonovi), že tento rozpor nepochází z toho, že by se některá strana mýlila. Dále Maxwell píše:

"Když jsem pokračoval se studiem Faradaye, pochopil jsem, že jeho metoda chápání jevů je také matematická, ačkoliv není vyjádřena v obvyklé formě matematických symbolů. Shledal jsem, že tyto metody mohou být vyjádřeny v obvyklých matematických tvarech a tedy i porovnány s metodami profesionálních matematiků.

Například Faraday ve své představě viděl siločáry probí-

hající celým prostorem, kde matematikové viděli centra sil, působících na dálku: Faraday viděl prostředí tam, kde oni neviděli nic jiného, než vzdálenost: Faraday hledal původ jevů v reálných dějích, které probíhají v prostředí, matematikové byli spokojeni, že tento původ shledali ve schopnosti působit na dálku a tato schopnost se přenáší na elektrickou substanci.

Když jsem přeložil, co jsem považoval za Faradayovy myšlenky, do matematické řeči, zjistil jsem, že výsledky obou těchto metod obecně souhlasí, že pomocí obou metod lze vysvětlit stejné jevy a odvodit stejné zákony působení. Ovšem Faradayovy metody se podobají těm metodám, v nichž začínáme s celkem a dospíváme k částem pomocí analýzy, kdežto obvyklé matematické metody jsou založeny na principu, že začínáme s částmi a konstruuje celek pomocí syntézy.

Také jsem shledal, že některé z nejvíce nosných výzkumných metod, objevených matematiky, mohou být mnohem lépe vyjádřeny v pojetí odvozeném Faradayem, než ve své původní formě.

Celá teorie, např. pro potenciál, který je považován za veličinu splňující jistou parciální diferenciální rovnici, náleží v podstatě k metodě, kterou jsem nazval metodou Faradayovou. Podle druhé metody musí být potenciál (má-li být vůbec uvažován) považován za výsledek sumace elektrických nábojů dělených vzdáleností od daného bodu. Tedy mnohé z matematických objevů Laplaceových, Poissonových, Greenových a Gaussových nacházejí v této knize své pravé místo a odpovídající vyjádření ve smyslu koncepcí, odvozených hlavně od Faradaye".

5.2. Různá vyjádření pro potenciál

V jednoduchých úlohách můžeme potenciál často vyjádřit ve formě jednoduchých analytických vzorců. Příkladem může sloužit vzorec (3.4) pro potenciál jednoho hmotného bodu nebo vzorec (3.12) pro potenciál soustavy hmotných bodů. Ve složitějších případech ovšem takováto jednoduchá vyjádření nalézt nelze; např. potenciál homogenního elipsoidu, na první pohled úloha jednoduchá, patří už mezi tyto komplikované případy [34].

Ve složitějších úlohách musíme tedy hledat jiné formy vyjádření potenciálu. V matematické analýze se pro popis složitých funkcí používají zejména dva způsoby, a to vyjádření pomocí integrálů a vyjádření pomocí řad (jiné vyjádření je pomocí nekonečných součinů apod.). Odvozují se vlastnosti těchto vyjádření, jako je konvergence, spojitost, možnost derivování za znamením integrálu nebo sumy, chování v nekonečnu aj. Se všemi těmito situacemi se setkáváme i v teorii potenciálu. Abychom lépe vystihli rozmanitost metod teorie potenciálu, rozdělíme způsoby vyjádření potenciálu do tří skupin:

- a) vyjádření potenciálu ve tvaru integrálu;
- b) vyjádření potenciálu ve tvaru řady;
- c) určení potenciálu numerickým řešením Laplaceovy (resp. Poissonovy) rovnice.

Každé vyjádření potenciálu má své charakteristické vlastnosti, své přednosti i nedostatky. Podařme stručnou charakteristiku jednotlivých vyjádření.

Vyjádření potenciálu ve tvaru integrálu je nejbližší k obvyklé fyzikální formulaci úlohy, nejbližší Newtonovu gravitačnímu zákonu nebo Coulombovu zákonu. Je vhodné k teoretickému vyšetřování vlastností potenciálu (existence, spojitost, diferencovatelnost) za různých předpokladů o rozložení hustoty. Je vhodné k výpočtu potenciálu v jednoduchých úlohách, kdy lze integrály analyticky počítat. Ve složitějších úlohách bývá toto vyjádření nevhodné a dokonce často zcela nepoužitelné.

Představme si, že rozložení hustoty nebo tvar tělesa jsou takové, že příslušný integrál pro potenciál nelze analyticky vyjádřit. Počítání potenciálu numerickou integrací může být velmi nepraktické, protože pro každý bod, v němž potenciál hledáme, musíme celou integraci znovu od počátku provést. V této situaci bývá výhodné vyjádřit integrand ve tvaru řady, integrovat řadu člen po členu a dostat tak řadu pro potenciál. Lze nalézt řady, v nichž se rozložení hustoty objevuje pouze při výpočtu koeficientů této řady. Potom stačí pro danou úlohu vypočítat všechny potřebné koeficienty na

začátku jednou pro vždy a potenciál v libovolném místě pak počítat jako součet řady s těmito známými koeficienty. Tento postup je obecně mnohonásobně rychlejší než numerické integrování. (Vyjádření potenciálu ve tvaru řady má proti vyjádření pomocí integrálu, zmíněnému výše, ještě jednu ohromnou přednost, že totiž bezpodmínečně nevyžaduje znalost rozložení hustoty, jak jsme o tom mluvili v předchozím paragrafu). Můžeme přibližně říci, že řady pro potenciál jsou konvergentní vně hmot, ale obecně divergentní v místech, kde se nacházejí hmoty. Právě divergence řad je jednou z nevýhod tohoto vyjádření potenciálu.

Výpočet potenciálu numerickým řešením příslušné parciální diferenciální rovnice se používá v situacích, kdy ostatní metody selhávají, např. v úlohách se složitou geometrií. Tento postup však vyžaduje provádět velký počet numerických operací, takže může být prakticky realizován obvykle jen s použitím počítačů.

LITERATURA

- [1] C.W. Allen: Astrophysical Quantities. University of London, The Athlone Press 1973 (ruský překlad: Mir, Moskva 1977).
- [2] P. Andrlé: Základy nebeské mechaniky. Academia, Praha 1971.
- [3] G. Arfken: Mathematical Methods for Physicists. Academic Press, New York (ruský překlad: Atomizdat, Moskva 1970).
- [4] M.B. Balk, V.G. Demin, A.L. Kunicyn: Sborník zadač po nebesnoj mechanike i kosmodinamike. Nauka, Moskva 1972.
- [5] V. Bezvoda, J. Langer: Teorie pole v užité geofyzice. SPN, Praha 1979 (skriptum).
- [6] H. Bondi: Assumption and Myth in Physical Theory. Cambridge University Press, Cambridge 1967 (ruský překlad: Mir, Moskva 1972).
- [7] M. Brdička: Mechanika kontinua. NČSAV, Praha 1959.
- [8] J. Brož: Elektřina a magnetismus I, II. SPN, Praha 1974, 1976 (skripta).
- [9] G.N. Dubošin: Teorija pritjaženija. GIFML, Moskva 1961.
- [10] A.J. Ferrari, B.G. Bills: Planetary Geodesy. Rev. Geophys. Space Phys., 17 (1979), 1663-1677.
- [11] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1. Addison-Wesley Publ. Company, Reading, Mass. 1963 (ruský překlad: Mir, Moskva 1976).
- [12] The Feynman Lectures on Physics, Exercises. Addison-Wesley Publ. Company, Reading, Mass. 1964-1965 (ruský překlad: Mir, Moskva 1967).

- [13] T. Gehrels (Ed.): Jupiter. The University of Arizona Press, Tucson, Arizona 1976 (ruský překlad: Mir, Moskva 1978).
- [14] H. Goldstein: Classical Mechanics. Addison-Wesley Publ. Company, Reading, Mass. 1950 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1975).
- [15] N.P. Grušinskij, A.N. Grušinskij: V mire sil tjažite-nija. Nedra, Moskva 1971.
- [16] A. Hahn: Die Einheiten des internationalen Systems in der Geomagnetik. J. Geophys. 44 (1978), 189-202.
- [17] A. Hladík: Teoretická mechanika. SPN, Praha 1972 (skriptum).
- [18] O.D. Kellogg: Foundations of Potential Theory. Springer-Verlag, Berlin 1967 (prvně vydáno 1929).
- [19] Ch. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman: Mechanics. Berkeley Physics Course, Vol. 1. McGraw-Hill, 1965 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1971).
- [20] N.E. Kočin: Vektornoje isčislenije i načala tenzornogo isčislenija. Nauka, Moskva 1965.
- [21] J. Kopáček: Matematika pro fyziky IV. SPN, Praha 1979 (skriptum).
- [22] L.D. Landau, E.M. Lifšic: Teorija polja. Nauka, Moskva 1967.
- [23] J. Langer: Elektromagnetické pole. Skripta postgraduál-ního kursu "Zpracování geofyzikálních dat a číslicová seismika". MFF UK, Praha 1976.
- [24] M. v. Laue: Dějiny fyziky. Orbis, Praha 1959.
- [25] J.W. Leech: Klasická mechanika. SNTL, Praha 1970.

- [26] J.C. Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. I. Clarendon Press, Oxford 1881.
- [27] J. Mída: Padesát let od objevení planety Pluto. Rozhledy matematicko-fyzikální 58 (1979-1980), 429.
- [28] Min Chen: Physics Problems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (ruský překlad: Mir, Moskva 1978).
- [29] K. Mišoň, Z. Pírko: Základy astronautiky. Academia, Praha 1974.
- [30] O. Novotný: Teorie potenciálu. Skriptum postgraduálního kursu "Zpracování geofyzikálních dat a číslicová seismika". MFF UK, Praha 1977.
- [31] Ju.S. Očan: Metody matematické fyziky. Vysšaja škola, Moskva 1965.
- [32] W.K.H. Panofsky, M. Phillips: Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley Publ. Company, Cambridge, Mass. (ruský překlad: GIFML, Moskva 1963).
- [33] L.A. Pars: A Treatise on Analytical Dynamics. W. Heine-
mann, London 1965 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1971).
- [34] M. Pick, J. Pícha, V. Vyskočil: Úvod ke studiu tíhového pole Země. Academia, Praha 1973.
- [35] E.M. Purcell: Electricity and Magnetism. Berkeley Physics Course, Vol. 2. McGraw-Hill, 1965 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1971).
- [36] K. Rektorys a spol.: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha 1963.
- [37] M.U. Sagitov: Postojannaja tjažotenija i massa Zemli. Nauka, Moskva 1969.
- [38] L. Stegena, M. Sagitov (Ed.): The Constant of Gravitation. Akadémiai Kiadó, Budapest 1979.

- [39] J.A. Stratton: Teorie elektromagnetického pole. SNTL, Praha 1961.
- [40] M.F. Subbotin: Vvedeni je v teoretičeskiju astronomiju. Nauka, Moskva 1968.
- [41] Substorm Warning: An ISEE-3 Real Time Data System. Trans. Am. Geophys. Union 60 (1979), 702-703.
- [42] I.E. Tamm: Osnovy teorii električestva. GITTL, Moskva 1954.
- [43] P. Toufar: Cesty ke hvězdám. Albatros, Praha 1976.
- [44] V. Trkal: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. NČSAV, Praha 1956.
- [45] V. Vanýsek: Základy astronomie a astrofyziky. Academia, Praha 1980.
- [46] Veličiny a jednotky ve vědě a technické praxi, ČSN 01 1301. Vydavatelství ÚNM, Praha 1977.
- [47] B.A. Voroncov-Vel'jaminov: Sbornik zadač i praktičeskich upražnenij po astronomii. Nauka, Moskva 1974.
- [48] V. Votruba, Č. Muzikář: Teorie elektromagnetického pole. NČSAV, Praha 1955.
- [49] D.V. Zagrebin: Vvedeni je v teoretičeskiju gravimetriju. Nauka, Leningrad 1976.
- [50] Resolution 2, The International Association of Geodesy. XVII General Assembly of the IUGG, Canberra 1979.

O B S A H

	Str.
1. ÚVOD	4
2. FYZIKÁLNÍ ZÁKLADY TEORIE POTENCIÁLU	8
2.1. Síly působící na hmotný bod	8
2.2. Konzervativní síly	10
2.3. Vlastnosti konzervativních sil	14
2.4. Intenzita pole a potenciál	33
2.5. Siločáry a ekvipotenciální plochy	35
2.6. Speciální případy konzervativních sil. Centrální síly	39
3. NEWTONŮV POTENCIÁL	44
3.1. Newtonův zákon všeobecné gravitace. Coulombův zákon	44
3.2. Princip superpozice	46
3.3. Singularity pole	49
3.4. Meze použitelnosti Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona	50
4. POTENCIÁL SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ	60
4.1. Dva pevné hmotné body	61
4.2. Dipól	66
4.3. Axiální kvadrupól	72
4.4. Dva obíhající hmotné body	77
4.5. Slapový potenciál, příliv a odliv	86
4.6. Laplaceova rovnice	99
4.7. Gaussův zákon	101
4.8. O bodech rovnováhy	104
4.9. Potenciální energie soustavy hmotných bodů	106
5. O PŘÍSTUPECH K ŘEŠENÍ ÚLOH TEORIE POTENCIÁLU	108
5.1. O výchozích vzorcích	108
5.2. Různá vyjádření pro potenciál	111
LITERATURA	114