

POTENCIÁLOVA POLE

II.

Potenciál ve tvaru integrálu

RNDr. Oldřich Novotný, CSc.

UNIVERZITA KARLOVA PRAHA

Katedra geofyziky a meteorologie
matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy

Vedoucí katedry: doc. RNDr. Karel Pěč, DrSc.

C Oldřich Novotný, 1986

Skripta jsou určena k přednášce "Potenciálová pole" pro posluchače 3. ročníku specializace geofyzika. Protože se nepředpokládají žádné předběžné geofyzikální znalosti a nepoužívá se příliš složitý matematický aparát (jen základy diferenciálního a integrálního počtu a výpočet vícerozměrných integrálů), mohou být tato skripta použita jako doplňkový učební text také pro posluchače jiných specializací, včetně posluchačů nižších ročníků.

6. ÚVOD

Tato skripta jsou přímým pokračováním skript O. Novotný: Potenciálová pole I - Základy teorie, Universita Karlova, Praha 1982. Z toho důvodu i číslování kapitol v těchto skriptech navazuje na číslování kapitol v prvním dílu. Stejně jako v prvním dílu i zde při výkladu klademe důraz spíše na důkladnější rozbor základních problémů a souvislostí než na odvozování velkého množství nejrůznějších vzorců. Nesnažili jsme se o výklad za příliš obecných matematických předpokladů, které se při řešení konkrétních fyzikálních úloh stejně většinou nepotřebují, ale o vybudování metod, které by umožnily řešit z jednoho ^{trně} hlediska širokou třídu obdobných úloh, s nimiž se setkáváme v mechanice, elektrostatičce, magnetostatičce, geofyzice, fyzikální geodézii, astronomii i jinde. Protože pro posluchače 3. ročníku je text tohoto dílu do ^{jisté} značné míry opakováním látky probírané v matematice a fyzice, i když uspořádaným jiným způsobem, snažili jsme se o takový výklad, aby tito posluchači mohli podstatné části těchto skript nastudovat formou domácí četby. Kromě toho jsme se snažili přenést geofyzikální aplikace a některá matematická zobecnění spíše do příkladů.

V prvním dílu skript jsme se zabývali Newtonovým potenciálem bodového zdroje a soustavy bodových zdrojů. Vzorce pro potenciál a intenzitu pole byly vyjádřeny pomocí jednoduchých funkcí. V tomto dílu se budeme zabývat obecnějšími případy, kdy zdroje pole (hmoty, elektrické náboje, magnetické dipóly) jsou rozprostřeny po křivkách, plochách a objemech. ^Potenciál a intenzita pak budou v těchto případech obecně mnohem složitějšími funkcemi, které s výjimkou nejjednodušších případů nebude možno vyjádřit pomocí elementárních funkcí. K popisu složitých funkcí se v matematice používají zejména dvě vyjádření: vyjádření ve tvaru integrálu a vyjádření ve tvaru řady. V tomto a v ^{dalsím} ~~přípravovaném třetím~~ dílu skript pojednáme o vyjádřeních potenciálu a příbuzných veličin v integrálním tvaru; integrální vyjádření těchto veličin je v jistém smyslu fyzikálně nejpřirozenější, neboť se dostává bezprostředním zobecněním Newtonova gravitačního zákona, Coulombova zákona a principu superpozice. O vyjádřeních potenciálu a příbuzných veličin ve tvaru řad pojednáme až ~~ve zamýšleném~~ čtvrtém dílu těchto skript.

^{V tomto} ~~V podtitulu k tomuto dílu skript~~ ^{se} ~~(je uvedeno, že se zde~~
~~budeme zabývat určováním potenciálu při známém rozložení~~
~~zdrojů pole. V následujícím dílu~~ ^{Kromě toho později} ~~budeme vyšetřovat~~ ^{také} ~~případy,~~
kdy rozložení zdrojů pole sice neznáme, ale místo toho známe
některé doplňující údaje o studovaném poli. Ilustrujme toto
členění úloh teorie potenciálu na problému studia gravitač-
ního pole Země, Kdybychom znali přesně rozložení hmot uvnitř
Země, mohli bychom gravitační potenciál vně i uvnitř Země
počítat pomocí níže odvozeného integrálu (8.10), v jehož in-
tegrandu vystupuje hustota. Studium potenciálových polí pros-
třednictvím integrálů tohoto typu se budeme zabývat v tomto
dílu skript. Mezi úlohy tohoto typu patří také velké množství
důležitých fyzikálních úloh, jak bude patrné zejména ze cvi-
čení.

Rozložení hustoty uvnitř Země ovšem přesně neznáme. Lze
ukázat, že v této situaci nemůžeme přesně určit gravitač-
ní pole uvnitř Země. Ovšem gravitační pole vně Země budeme
moci i přesto určit, pokud neznalost rozložení hmot nahradíme
znalostmi o některých charakteristikách pole na zemském povrchu,
např. znalostí potenciálu nebo jeho derivací na povrchu (při-
tom musíme předpokládat, že tvar zemského povrchu je známý,
jinak se úloha stává ještě složitější). S obdobnou situací se
setkáváme v elektrostatických úlohách s vodiči. Rozložení ná-
boje na vodiči může být značně složité. Aniž bychom museli
toto rozložení náboje určit, můžeme příslušnou elektrostatic-
kou úlohu řešit, využijeme-li poznatku, že povrch vodiče vytvá-
ří ekvipotenciální plochu (známe tedy některou ekvipotenciální
plochu). Úlohami tohoto typu se ^{zde zabýváme} ~~nebudeme zabývat zde, ale až~~
~~v dalším dílu skript.~~

V těchto skriptech se zabýváme převážně výpočty potenciá-
lu a intenzity pole, které je působeno různými tělesy. Znamená
to, že se většinou omezujeme jen na působení tělesa na čás-
tici (hmotný bod, bodový náboj). Pro nedostatek místa se zde
obecnějšími případy příliš nezabýváme, pouze v kap. 9 je po-
jednáno o působení pole na dipól a o vzájemném působení dvou
tuhých těles; zájemce o hlubší studium této důležité proble-
matiky odkazujeme na citovanou literaturu.

Za cenné připomínky a náměty k různým partiím těchto skript
děkuji zejména RNDr. Z. Martinecovi, CSc., ^{Posluchářům specializace}
geofyzika, ~~kteří přepoč~~ děkuji za přepočítání ^{řádky} většiny příkladů, uvedených
ve cvičeních.

Praha, ^{květen 1986}
~~září 1985~~

Oldřich Novotný

7. VÝCHOZÍ VZORCE PRO INTENZITU POLE

7.1. Rozšířené znění Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona

Stejně jako v prvním dílu skript budeme i nyní vycházet při budování příslušných teorií ze dvou základních fyzikálních zákonů - Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona. Meze použitelnosti obou zákonů byly diskutovány v prvním dílu. Pojednejme nyní o některých zobecněních Newtonova gravitačního zákona, pro Coulombův zákon platí úvahy zcela obdobné.

Newtonův gravitační zákon udává, jakou silou na sebe působí dva hmotné body. Chceme-li popsat silové působení mezi třemi nebo více hmotnými body, musíme Newtonův gravitační zákon doplnit, musíme k němu připojit pravidlo o skládání sil - princip superpozice (viz první díl skript). Velice často však nevystačíme s představou hmotných bodů, ale musíme uvažovat spojitě rozprostřené hmoty, případně i některá složitější rozložení hmot. V tomto případě je přirozené použít metod integrálního počtu, tj. rozdělit těleso na malé části, vektorově sečíst síly působené jednotlivými částmi a přejít k limitě, jestliže se ^{rozměry jednotlivých částí} nejvíce "tětiva" blíží k nule. Chtěli bychom ovšem upozornit, že takový proces vyžaduje zavedení dodatečných předpokladů. Ať je totiž dělení tělesa jakkoliv jemné, části tělesa stále nejsou hmotnými body a, přesně řečeno, Newtonův gravitační zákon v původním znění není tedy použitelný. Nemáme tak vlastně žádný prostředek k určení sil, působených jednotlivými částmi tělesa / Kellogg /.

Musíme tedy formulovat nový fyzikální zákon. Přijmeme fyzikální zákon, který může být považován za rozšířené znění Newtonova gravitačního zákona, v následujícím tvaru / Kellogg /: "Nechť jsou dána dvě tělesa, nechť jsou rozdělena na elementy jako se to dělá v integrálním počtu a nechť hmotu každého elementu lze považovat za soustředěnou v nějakém bodě elementu. Potom přitažlivost, kterou jedno těleso působí na druhé, je limitou přitažlivosti, kterou odpovídající soustava částic působí na druhou soustavu částic, jestliže se maximální tětiva elementů blíží k nule". ("Tětivou" zde rozumíme množinu bodů,

obvykle úsečku, společnou uvažovanému elementu a libovolné přímce, která jej protíná; délku největší tětivy můžeme též nazývat průměrem elementu).

Chtěli bychom znovu upozornit, že právě formulovaný zákon bezprostředně neplyne z Newtonova zákona, nelze jej z Newtonova zákona odvodit (výše uvedené úvahy nebyly žádným odvozením, ale měly pouze pomoci k jeho formulování). Opačně však musí platit, že z rozšířeného Newtonova zákona vyplývá Newtonův zákon pro hmotné body jako speciální případ; příslušný důkaz je uveden v paragrafu 9.2. Kdyby tomu tak nebylo, museli bychom právě formulované rozšíření Newtonova gravitačního zákona ihned zamítnout. Ověření správnosti rozšířeného Newtonova gravitačního zákona musí spočívat v prověření, zdali důsledky z něj plynoucí souhlasí s pozorováními a experimenty.

Zcela obdobně, jako jsme dospěli k rozšířenému znění Newtonova gravitačního zákona, můžeme zavést i rozšířené znění Coulombova zákona. Slovní formulaci rozšířeného znění Coulombova zákona přenecháváme čtenáři za cvičení.

Úloha

1. Zdůvodněte, proč jsme ve formulaci rozšířeného Newtonova zákona nepoužili pojmu "přitažlivá síla", ale jen méně určitého slova "přitažlivost"?

Odpověď: Vzájemné působení mezi dvěma tělesy nelze obecně popsat jen pomocí sil. V případě tuhých těles je třeba uvažovat ještě momenty sil, jak je známo z mechaniky. V případě deformovatelných těles by byla situace ještě složitější.

7.2. Některé otázky matematické formulace, zavedení hustoty

"Pro libovolnou teorii je potřebná určitá hloubka, ale v rozumných mezích". (H. Bondi, viz první díl skript).

V tomto paragrafu si všimneme některých velmi obecných otázek týkajících se rozložení zdrojů pole a integrálního vyjádření pro intenzitu, speciálně si všimneme otázky, kdy je možné popsat rozložení zdrojů pole pomocí hustoty. Avšak ve všech fyzikálních úlohách, kterými se budeme v těchto skriptech zabývat, budeme předpokládat, že takováto funkce hustoty

číst, upravit na hustotu ()*

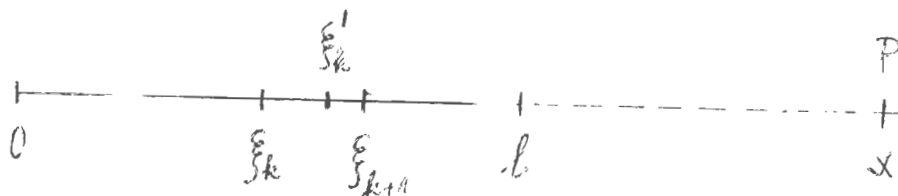
X

vždy existuje. Proto čtenář, kterého obecné problémy příliš nezajímají, může tento paragraf vynechat a bez újmy na srozumitelnosti pokračovat ve čtení následujícího paragrafu 7.3.

Jak jsme již uvedli výše, kromě kap. 9 se v těchto skriptech nebudeme zabývat vzájemným působením mezi dvěma tělesy, jak se o tom mluví v rozšířených zněních Newtonova a Coulombova zákona, ale budeme studovat jen speciální případy, kdy druhým "tělesem" je částice (hmotný bod, bodový náboj). Budeme tedy vyšetřovat ^{jen} síly, kterými těleso působí na částici.

Abychom ilustrovali postup, jakým dospíváme k integrálnímu vyjádření pro intenzitu a potenciál, vyšetřujme v tomto paragrafu pro jednoduchost gravitační pole, které je působené hmotami rozprostřenými podél nějaké úsečky délky l . Jedná se o idealizaci přímého drátu, přičemž tato aproximace je tím lepší, čím je průměr drátu tenčí vzhledem k jeho délce a vzhledem ke vzdálenosti přitahované částice. Pripouštíme, že hmota nemusí být rozprostřena podél úsečky rovnoměrně, o charakteru rozložení hustoty zatím nic nepředpokládáme.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby konce drátu ležely v bodech $(0,0,0)$ a $(l,0,0)$, viz obr. 1. Množství hmoty na různých částech úsečky můžeme popsat pomocí funkce $m(\xi)$, kterou budeme definovat jako množství hmoty mezi počátečním bodem úsečky a bodem $(\xi,0,0)$. Při tomto zavedení je zřejmé, že $m(0)=0$ a $m(l)$ je celková hmotnost uvažované úsečky. Protože při konstruování funkce $m(\xi)$ od počátku stále přičítáme hmotnosti dalších částí úsečky (přičítáme nezáporná čísla), plyne odtud, že $m(\xi)$ je neklesající funkcí souřadnice ξ . Ždáné další předpoklady o funkci $m(\xi)$ zatím nečiníme.



Obr. 1

Počítejme pro jednoduchost intenzitu gravitačního pole na přímce v prodloužení drátu v bodě P o souřadnicích $(x, 0, 0)$, kde $x > \ell$ / Kellogg /. Rozdělme drát na intervaly pomocí bodů $\xi_0=0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n=\ell$ (obr.1). Hmotu na intervalu (ξ_k, ξ_{k+1}) označme $\Delta m_k = m(\xi_{k+1}) - m(\xi_k)$ a podle našeho fyzikálního zákona ji považujme za soustředěnou v nějakém bodě ξ'_k uvažovaného intervalu. Intenzita gravitačního pole takto konstruovaného hmotného bodu má v bodě P nenulovou pouze složku ve směru drátu, označíme ji $(\Delta E_x)_k$, ostatní složky jsou nulové. Platí

$$(\Delta E_x)_k = -G \frac{\Delta m_k}{(x - \xi'_k)^2}, \quad (7.1)$$

kde G je gravitační konstanta. Intenzita \vec{E} působená celou úsečkou bude (podle zobecněného Newtonova zákona) limitou součtu intenzit působených částicemi, jestliže se norma dělení $\gamma = \max(\xi_k - \xi_{k-1})$ blíží k nule. Tuto limitu pro složku E_x označíme symbolem

$$E_x = \int_0^{\ell} \frac{-G}{(x - \xi)^2} dm(\xi) \quad (7.2)$$

a nazýváme ji Stieltjesovým integrálem funkce $[-G/(x-\xi)^2]$ podle funkce $m(\xi)$ na intervalu $\langle 0, \ell \rangle$, viz / Jarník II, Král, Rektorys /. Poznamenejme, že v důsledku známých vlastností limit jsme mohli v posledním vzorci napsat konstantu $(-G)$ před integrál. Je zřejmé, že zbývající dvě složky intenzity v bodě P jsou nulové.

V rozšířeném znění Newtonova gravitačního zákona se mluvilo o limitě, přičemž se automaticky předpokládalo, že taková limita musí existovat. To vyplývalo z fyzikální zkušenosti, že nějaké přitažlivé účinky libovolného tělesa vždy existují. Při matematické formulaci musíme však existenci příslušné

limity vždy dokázat, odnikud to a priori neplyne (i když by to bylo podivné, kdyby neexistovala, pak by něco nebylo v pořádku). Všimněme si existence limity v našem případě, tj. existenci integrálu (7.2). Integrand v (7.2) označme $F(\xi, x) = -G/(x-\xi)^2$. Předpokládejme stále, že pozorovatel P se nachází vně úsečky $\langle 0, l \rangle$, tedy např. $x > l$. Potom funkce F je spojitá. Předpokládejme dále, že funkce $m(\xi)$ je nejen monotonní, ale též omezená (drát má konečnou hmotnost). Potom existence integrálu (7.2) při pevně zvoleném x plyne z následující věty, jejíž důkaz lze nalézt v [Král I]:

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, funkce g monotonní a omezená na témže intervalu, pak $\int_a^b f(\xi) dg(\xi)$ existuje. Dokonce můžeme něco říci i o vlastnostech intenzity, ~~jak hned uvedeme~~. Vzhledem k tomu, že funkce $F(\xi, x)$ je spojitá na množině $\langle 0, l \rangle \cup x(l, \infty)$ a má zde i spojitě parciální derivace, z obecných vět plyne, že funkce $E_x(x)$, dle vzorcem (7.2) je spojitá funkce proměnné x a má spojitou derivaci, kterou dostaneme derivováním (7.2) za znaméním integrálu. Obecné věty zde dokazovat nebudeme, zájemne odkazujeme na / Král I /, kde jsou provedeny důkazy i za obecnějších předpokladů.

V bodech hmotné úsečky, ^{tj. pro} $x \in \langle 0, l \rangle$, integrál pro intenzitu (7.2) obecně neexistuje; u soustavy hmotných bodů měla intenzita obdobnou singularitu v místech hmotných bodů. Je to způsobeno idealizací úlohy, kdy jsme předpokládali, že průměr drátů při zachování jeho hmotnosti můžeme zmenšit k nule. Kdybychom drát uvažovali jako skutečné třírozměrné těleso, bude integrál pro intenzitu existovat i ve vnitřních bodech drátu, jak bude ukázáno později.

Řešení fyzikální úlohy není plnohodnotné, dokud příslušné veličiny neumíme číselně vyjádřit. Pro obecné Stieltjesovy integrály však vhodné metody výpočtu vypracovány nebyly. ~~Prakticky vždy jsme~~ odkázáni jen na možnost převedení Stieltjesova integrálu na obyčejný (Riemannův) integrál. Toto převedení není možné vždy, ale jen za některých předpokladů. Platí věta / Král I /:

Můžeme sice postupovat podle definice a počítat příslušnou limitu, ale v praxi tento způsob výpočtu integrálu příliš vhodný není. Pokud nechceme jít touto cestou, jsme...

Nechť f, g jsou reálné funkce definované na $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme, že g je na $\langle a, b \rangle$ spojitá a má tam všude až na konečně mnoho bodů (vlastní) derivaci. Potom

$$\int_a^b f(\xi) dg(\xi) = (R) \int_a^b f(\xi) g'(\xi) d\xi \quad (7.3)$$

za předpokladu, že existuje Stieltjesův integrál vlevo i Riemannův integrál vpravo.

P podmínky pro existenci zmíněných integrálů a platnost (7.3) budou splněny (postačující podmínky), jestliže např. funkce f a g budou spojitě na $\langle a, b \rangle$ a funkce g tam bude mít spojitou derivaci s výjimkou konečného počtu bodů.

Vraťme se k naší úloze o gravitačním poli hmotné úsečky. Derivaci funkce $m(\xi)$, pokud existuje, nazveme lineární hustotou a označíme

$$\lambda(\xi) = \frac{dm(\xi)}{d\xi} \quad (7.4)$$

Tato hustota udává velikost hmoty připadající na jednotkový infinitezimální interval. Vzorec (7.2) můžeme s užitím (7.4) a (7.3), jsou-li splněny předpoklady, přepsat ve tvaru

$$E_x(x) = -G \int_0^l \frac{\lambda(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi \quad (7.5)$$

Jestliže je lineární hustota λ spojitá a omezená na $\langle 0, l \rangle$ s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů a bod x neleží na této úsečce, pak z výše uvedených vět ihned plyne, že složku intenzity E_x můžeme vyjádřit pomocí Riemannova integrálu (7.5) a tento integrál existuje. Vidíme tedy, že předpoklad o spojitosti a omezenosti hustoty (postačí s výjimkou konečného počtu bodů) může podstatně přispět ke zjednodušení teorie. I v případě plošných a objemových zdrojů budeme proto

obvykle předpokládat, že příslušná plošná nebo objemová hustota je po částech spojitou a omezenou funkcí.

Uveďme jeden fyzikální příklad, kdy vzorec (7.3) pro převod Stieltjesova integrálu na Riemannův neplatí. Pro jednodušnost nejprve předpokládejme, že výše uvažovaná hmotná úsečka je homogenní, tj. lineární hustota λ je konstantní na $\langle 0, \ell \rangle$ a funkce m je tedy lineární rostoucí funkcí na tomto intervalu. V nějakém bodě $x_0 \in \langle 0, \ell \rangle$ ^{přidáme} ~~připojme~~ na hmotnou úsečku ještě hmotný bod o hmotnosti m_0 a počítejme gravitační pole výsledné soustavy. Samozřejmě bychom mohli odděleně počítat gravitační pole homogenní úsečky a gravitační pole hmotného bodu a výsledky sečíst, ale my bychom nyní chtěli pohlížet na výslednou soustavu pouze jako na novou (nehomogenní) úsečku. Funkce m zůstává v intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$ stejná jako v případě homogenní úsečky, v bodě x_0 je nespojitá (skok funkčních hodnot činí m_0) a dále v intervalu $\langle x_0, \ell \rangle$ je opět lineární. Funkce m zůstává monotonní a omezená, takže Stieltjesův integrál (7.2) existuje i pro případ nové úsečky. Protože tato funkce není spojitá, nemůžeme integrál (7.2) upravit pomocí vzorce (7.3), ale použijeme následující ^{obecnější} větu / Rektorys /:

Nechť $f(\xi)$ je spojitá v $\langle a, b \rangle$ a nechť $g(\xi)$ a $g'(\xi)$ jsou v $\langle a, b \rangle$ po částech spojité. Označme $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$ body nespojitosti funkce $g(\xi)$ v $\langle a, b \rangle$, s_k skok funkce $g(\xi)$ v bodě ξ_k . Pak níže uvedený Stieltjesův integrál existuje a platí

$$\int_a^b f(\xi) dg(\xi) = \int_a^b f(\xi) g'(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^n f(\xi_k) s_k, \quad (7.6)$$

tj. Stieltjesův integrál vypočteme snadno jako součet uvedeného Riemannova integrálu a skoků funkce $g(\xi)$ násobených funkčními hodnotami funkce $f(\xi)$ v bodech ξ_k .

Užitím (7.4) a (7.6) lze integrál pro intenzitu (7.2) v našem případě přepsat ve tvaru

$$E_x(x) = -G \lambda \int_0^l \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} - \frac{Gm_0}{(x-x_0)^2} .$$

První člen na pravé straně popisuje pole homogenní přímky, druhý člen popisuje pole hmotného bodu.

Dostali jsme zajímavý výsledek. Zatímco Stieltjesův integrál umožňoval popsat celé pole soustavy, přechodem k lineární ^{hustotě} ~~soustavě~~ už integrál obsahující hustotu nepopisuje pole celé, neboť nezahrnuje pole hmotného bodu. Nelze zkonstruovat ^{funkci} ~~pole~~ hustoty tak, aby umožňovala zahrnout i účinek hmotného bodu. I kdybychom lineární hustotu v bodě x_0 , kde není definována, definovali jako nekonečnou a přešli k Lebesguesovu integrálu, tento integrál nebude rovněž zahrnovat vliv hmotného bodu. Při výpočtu Lebesguesova integrálu můžeme totiž bod x_0 vynechat, protože se jedná o množinu míry nula. Popsaný problém se podaří překlenout teprve zavedením distribucí. S použitím teorie distribucí k řešení některých úloh teorie potenciálu se může čtenář seznámit např. v / Schwartz, Vladimirov /, zde se jimi zabývat nebudeme. Budeme muset sice důsledně oddělovat bodové, lineární, plošné a objemové zdroje, ale zato vystačíme s elementárnějšími matematickými prostředky.

Symbol $dm(\xi)$ ve Stieltjesových integrálech typu (7.2) můžeme chápat jako element hmoty v infinitezimálním okolí bodu ξ , jako přírůstek funkce $m(\xi)$ na tomto intervalu:

$$dm(\xi) = \frac{dm(\xi)}{d\xi} d\xi = \lambda(\xi) d\xi .$$

Tato představa umožňuje bezprostředně rozšířit naše úvahy i na plošné a objemové zdroje, jak bude provedeno v následujícím paragrafu.

Hlavní poznatky z tohoto paragrafu můžeme shrnout následujícím způsobem.

Zobecnění Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona vede bezprostředně k vyjádření intenzity pole ve tvaru integrálů Stieltjesova typu. Teprve za některých doplňujících předpokladů lze přejít k běžným integrálům, v nichž vystupuje hustota zdrojů (v námi vyšetřované úloze postačila spojitost

a omezenost hustoty s výjimkou konečného počtu bodů).

Úlohy

1. Užitím vzorce (7.5) vypočítejte intenzitu gravitačního pole homogenního tenkého drátu (hmotné úsečky) ve vnějším bodě P v prodloužení drátu. Intenzitu ^{interpretujte} výsledek pomocí pole hmotného bodu. Jak se mění poloha ekvivalentního hmotného bodu, jestliže se pozorovatel P vzdaluje od úsečky?
 / Kellogg /.

Odpověď:

$$E_x(x) = - \frac{G \lambda l}{x(x-l)} = - \frac{GM}{c^2},$$

kde $c = \sqrt{x(x-l)}$. Drát tedy přitahuje jednotkovou částici v bodě P stejně, jako kdyby hmota celého drátu byla soustředěna do jednoho bodu na drátu, jehož vzdálenost od bodu P je geometrickým průměrem vzdáleností bodu P od konců drátu. Při vzdalování bodu P se ekvivalentní hmotný bod posouvá ke středu drátu.

2. Intenzita gravitačního pole hmotné úsečky vedla na Stieltjesův integrál podle monotónní funkce m , resp. g . Uveďte jednoduchý fyzikální příklad, kdy příslušná funkce, podle níž integrujeme, nebude monotónní.

Odpověď: Nevodivá úsečka s lineárním rozložením kladných a záporných nábojů. (Nevodivá proto, aby se náboje opačného znaménka nevybily). V obecnější teorii Stieltjesova integrálu se proto místo monotónních funkcí obvykle uvažují funkce s konečnou variací / Král I /.

7.3. Obecné vzorce pro intenzitu pole

V tomto paragrafu odvodíme vzorce pro intenzitu pole objemově, plošně a lineárně rozložených zdrojů. Pokud čtenář tuto problematiku zná (alespoň zčásti) a nechce zacházet do podrobností níže diskutovaných, může i tento paragraf vynechat a přejít na čtení následující kapitoly, kde nejdůležitější vzorce zde odvozené budou ^{znovu} ~~opět~~ souhrnně uvedeny.

V prvním dílu skript jsme odvodili, že intenzita gravitačního pole soustavy ⁿ hmotných bodů je dána vzorcem, viz vzorce (3.9),

$$E_x = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i (x-x_i)}{R_i^3} ,$$

$$E_y = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i (y-y_i)}{R_i^3} , \quad (7.7)$$

$$E_z = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i (z-z_i)}{R_i^3} .$$

Jednotlivé symboly v těchto vzorcích mají následující význam: $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ je gravitační konstanta; m_i je hmotnost i -tého hmotného bodu, jehož kartézské souřadnice jsou x_i, y_i, z_i ; souřadnice x, y, z jsou souřadnicemi nějakého bodu P , v němž určujeme intenzitu pole; R_i je vzdálenost bodu P od i -tého hmotného bodu, tj. ~~$R_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$~~
 $R_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$. Pro bod P , v němž určujeme pole, budeme také někdy používat názvu "pozorovatel" nebo "pól" / Pick /. ~~Poznamenejme~~ Poznamenejme, že jsme v prvním dílu skript označovali vzdálenost i -tého hmotného bodu a pozorovatele P jako d_i . Avšak písmeno "d" nyní bude vystupovat také v integračních symbolech dm , dV apod., proto jsme pro vzdálenost raději zvolili R_i , což je v souhlase s označeními např. v učebnici / Votruba /.

Místo tří vzorců pro složky pole budeme často používat zápisu pomocí jednoho vzorce vektorového. Označme \vec{r} polohový vektor pozorovatele P, \vec{r}_i polohový vektor i-tého hmotného bodu, $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$ vektor, jehož počáteční bod je v i-tém hmotném bodu a koncovým bodem je bod P. Vzorec (7.7) můžeme pak zkráceně zapsat v následujících vektorových tvarech

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^n m_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{R_i^3} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i^3} \vec{R}_i \quad (7.8)$$

Intenzitu elektrostatického pole soustavy bodových nábojů ve vakuu dostaneme ihned ze vzorců (7.7) nebo (7.8), jestliže místo m_i píšeme velikost i-tého náboje q_i a místo konstanty $(-G)$ píšeme $1/(4\pi \epsilon_0)$, kde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$ je permitivita vakua (používáme soustavy SI):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \quad (7.9)$$

Uvedené vzorce zobecníme na případy, kdy zdroje pole (hmoty, elektrického náboje) jsou rozprostřeny po objemech, plochách nebo křivkách.

a) Objemově rozložené hmoty nebo náboje. Předpokládejme, že přitahující hmoty vytvářejí těleso o objemu V. Chceme určit intenzitu gravitačního pole působenou tímto tělesem v nějakém bodě P. Rozdělme těleso obvyklým způsobem (např. pomocí tří soustav na sebe kolmých rovin) na malé části.

Hmotnost k-té části označme Δm_k . Uvažujeme částici (hmotný bod) o této hmotnosti umístěný v nějakém bodě Q_k uvažované části. Kartézské souřadnice bodu Q_k označme

x_k, y_k, z_k , souřadnice bodu P označme jako x, y, z . Podle (7.7)

je příspěvek uvažovaného hmotného bodu k intenzitě v bodě P dán vzorcem:

$$\begin{aligned}
 (\Delta E_x)_k &= -G \frac{(x-x'_k) \Delta m_k}{R_k^3} , \\
 (\Delta E_y)_k &= -G \frac{(y-y'_k) \Delta m_k}{R_k^3} , \\
 (\Delta E_z)_k &= -G \frac{(z-z'_k) \Delta m_k}{R_k^3} ,
 \end{aligned}
 \tag{7.10}$$

kde R_k je vzdálenost bodů P a Q_k . Sečtème nyní příspěvky od všech částí a přejdème k limitě pro případ, že se dělení tělesa zjemňuje a rozměry všech částí se blíží k nule. Výsledkem budou složky intenzity v bodě P působené uvažovaným tělesem:

$$\begin{aligned}
 E_x(P) &= -G \iiint_V \frac{x-x'}{R^3} dm , \\
 E_y(P) &= -G \iiint_V \frac{y-y'}{R^3} dm , \\
 E_z(P) &= -G \iiint_V \frac{z-z'}{R^3} dm ,
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

kde, jak je zcela zřejmé, jsme souřadnice bodu Q tělesa označili x', y', z' , vzdálenost tohoto bodu od bodu P je $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ a dm značí element hmoty (zatím to ještě nemusí být diferenciál). Při integraci přes těleso jsou x', y', z' proměnné, složky intenzity jsou funkcemi souřadnic bodu P , tj. $E_x = E_x(x, y, z)$ atd.

Polohový vektor pozorovatele P označme $\vec{r} = (x, y, z)$, polohý vektor bodu tělesa Q , v němž se nachází hmotný element dm , označme $\vec{r}' = (x', y', z')$, vektor s počátečním bodem Q a koncovým bodem P označme $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x-x', y-y', z-z')$, viz obr. 2.

Potom vzorec (7.11) pro složky intenzity můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{R^3} dm = -G \iiint_V \frac{\vec{R}}{R^3} dm, \quad (7.12)$$

kde integraci provádíme přes čárkové ^{gnc'} souřadnice, $dm = dm(\vec{r}')$.

Poznamenejme, že jsme dosud vůbec nepředpokládali spojitě (ve smyslu hustoty) rozložení hmoty; v uvažovaném objemu mohou být rozloženy hmoty nejrůznějších vlastností. Předpokládejme však dále, že rozdělení hmot můžeme charakterizovat pomocí hustoty. Hustotou ρ (nebo objemovou hustotou) v bodě Q tělesa rozumíme limitu poměru hmotnosti elementu tělesa obsahujícího bod Q k objemu tohoto elementu, jestliže se rozměry elementu blíží k nule (jestliže se nejdelší "tětiva" blíží k nule):

$$\rho = \lim \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \longrightarrow \quad (7.13)$$

Přitom se požaduje, aby hodnota této limity ~~nezávisela na tvarech uvažovaných elementů; kdyby ^{na nich závisela,} tomu tak nebylo,~~ řekli bychom, že hustota ~~neexistuje~~. V dalším budeme předpokládat, že hustota existuje a je spojitá. Ve fyzikálně důležitých případech, v nichž jsou hustoty nespojitě, může být těleso obvykle rozděleno na několik dílčích těles, ve kterých jsou již hustoty spojitě. / Kellogg /.

Vraťme se k úvahám o dělení tělesa na části. Hmotnost k -té části Δm_k bude ležet mezi nejmenší a největší hodnotou hustoty v této části vynásobenou objemem této části ΔV_k . Je-li hustota spojitá, bude v uvažované části existovat takový bod Q_k , že

$$\Delta m_k = \rho(Q_k) \Delta V_k \quad \longrightarrow \quad (7.14)$$

Dosaďme tento výraz do vzorců (7.10) a provedme stejný postup jako výše. Místo obecných vzorců (7.11) dostaneme nyní vzorce pro intenzitu ve speciálnější tvaru

$$\begin{aligned}
 E_x(P) &= -G \iiint_V \rho \frac{x-x'}{R^3} dV, \\
 E_y(P) &= -G \iiint_V \rho \frac{y-y'}{R^3} dV, \\
 E_z(P) &= -G \iiint_V \rho \frac{z-z'}{R^3} dV,
 \end{aligned}
 \tag{7.15}$$

kde hustota ρ je obecně funkcí souřadnic x', y', z' . Tyto vzorce můžeme vektorově zapsat v následujícím tvaru, viz obr. 2,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV, \tag{7.16}$$

kde integrace se provádí přes čárkové souřadnice (v učebnici / Votruba / se připojuje čárka také k symbolu dV , aby se zdůraznilo integrování podle čárkovaných souřadnic, my to zavádět nebudeme, ale tuto situaci budeme mít stále na mysli).

Vzorce (7.15) a (7.16) budeme považovat za výchozí vzorce na výpočet intenzity gravitačního pole objemově rozložených hmot; obecnějších vzorců (7.11) a (7.12) užívat nebudeme. Viděli jsme, že vzorce (7.15) a (7.16) plynou ze (7.11) a (7.12), pokud lze zavést hustotu, avšak sama existence hustoty ještě nestačí. Hustota musí splňovat ještě jisté podmínky, postačí např. spojitost hustoty (viz odvození vzorce (7.14)).

Vzorce (7.15) jsme mohli odvodit přímo ze (7.11) následujícím postupem. Předpokládejme, že element ΔV_k zmenšujeme tak, že stále obsahuje nějaký ^{pevný} bod Q . Užitím (7.14) a přechodem k limitě dostáváme, že pro hmotnost infinitezimálního elementu obsahujícího bod Q a polohovým vektorem \vec{r}' platí

$$dm(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') dV, \tag{7.17}$$

což po dosazení do (7.11) ihned dává vzorce (7.15).

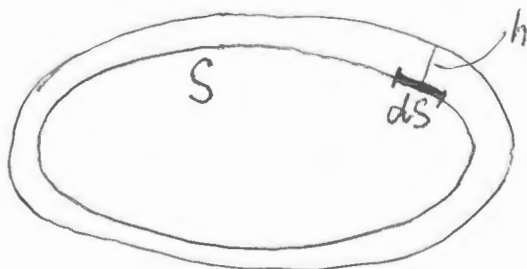
Vzorce pro intenzitu elektrostatického pole ve vakuu působeného objemově rozloženými náboji jsou zcela obdobné vzorcům (7.15), resp. (7.16), pouze místo konstanty $(-G)$ je třeba psát $1/(4\pi\epsilon_0)$ a hustotou ρ je třeba rozumět hustotu náboje.

Intenzita pole hmotného bodu je nekonečná v místě, kde se hmotný bod nachází. Integrandy ve vzorcích (7.15) jsou rovněž singulární, jestliže se pozorovatel P nachází uvnitř tělesa. Lze však ukázat, že hodnoty integrálů (7.15) zůstávají konečné i ve vnitřních bodech tělesa, viz odvození v ^{kap. 12.} ~~paragrafu 7.4.~~ Pro úplnost doplňme, že i v případech, kdy jsou zdroje pole rozloženy po plochách, je intenzita konečná ve všech bodech prostoru. Avšak v případě rozložení zdrojů na křivce je intenzita v bodech křivky singulární (obdoba hmotného bodu), ~~viz kap. 10 a další.~~ ^{např. paragraf 11.3.} Uvedené vlastnosti lze ilustrovat, např. na speciálních případech, které jsou vyšetřovány v kap. 11. ^{Obecné důkazy podáme v kap. 12 a 13.}

b) Plošně rozložené hmoty nebo náboje (jednoduchá vrstva).

Jak jsme již uvedli v prvním dílu skript, je místo reálných objemových zdrojů \longleftrightarrow často užitečné zavádět různé fikce, jako jsou zdroje bodové, plošné nebo lineární. Z hlediska formálně matematického spočívá užitečnost takových fikcí v tom, že místo trojných integrálů, které musíme počítat při určování pole objemových zdrojů, vystačíme u plošných zdrojů pouze s dvojnými integrály, u ~~1+2~~ lineárních zdrojů dokonce s jednorozměrnými integrály a v případě bodových zdrojů již vůbec integrovat nemusíme.

Všimněme si zde pole plošně rozložených hmot nebo nábojů. Předpokládejme, že hmoty jsou rozloženy na ploše S ve formě velmi tenké vrstvy o tloušťce h (obr. 3).



Obr. 3

Budeme-li zmenšováním h posunovat hmoty k ploše S (např. podél kolmic k ploše S), dospíváme k představě plošného rozložení hmot. Toto limitní uspořádání budeme nazývat jednoduchou vrstvou. Uvedený limitní přechod nemůžeme sice prakticky realizovat, je-li vrstva složena z nějaké látky, ale docela reálný smysl má v elektrostatiice, kde náboje leží na povrchu vodiče. Ovšem i v teorii gravitačního pole má představa plošných zdrojů oprávnění, pokud tloušťka vrstvy h je malá vzhledem k rozměrům plochy S a vzhledem ke vzdálenosti pozorovatele od této plochy. Kromě toho lze ukázat, že pole objemově rozložených hmot můžeme v některých případech formálně nahradit polem plošně rozložených hmot.

Aniž bychom opakovali úvahy uvedené výše, je zřejmé, že vzorce pro intenzitu pole plošně rozložených hmot dostaneme ihned ze vzorce (7.12), kde pouze místo integrace přes objem budeme integrovat přes plochu:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iint_S \frac{\vec{R}}{R^3} dm, \quad (7.18)$$

přítom stejně jako výše je \vec{r} polohový vektor bodu P , v němž intenzitu určujeme, \vec{r}' je polohový vektor bodu Q na ploše S (přes body plochy S integrujeme), $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ a dm je plošný element hmoty.

Budeme vždy předpokládat, že plocha S a rozložení hmot na ní mají takové vlastnosti, že existuje spojitá funkce σ definovaná na S vztahem

$$\sigma = \lim \frac{\Delta m}{\Delta S}, \quad (7.19)$$

kde Δm je element hmoty připadající na element plochy ΔS a v limitě zmenšujeme rozměry plošného elementu k nule. Funkci σ budeme nazývat plošnou hustotou (nebo jen hustotou, pokud nemůže dojít k nedorozumění). Pro infinitezimální hmotný element dm připadající na infinitezimální plošný element dS pak platí

$$dm(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') dS \quad (7.20)$$

a vzorec pro intenzitu (7.18) lze přepsat ve tvaru

$$E(\mathbf{r}) = -G \iint_S \rho(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dS \quad (7.21)$$

Z tohoto vzorce budeme vycházet při výpočtu intenzity gravitačního pole plošně rozložených hmot. Pro výpočet intenzity elektrostatického pole ve vakuu, působeného plošně rozloženými náboji s hustotou ρ , je ve vzorcích (7.21) pouze třeba nahradit konstantu $(-G)$ konstantou $1/(4\pi\epsilon_0)$.

Aby integrál v (7.21) existoval, musí splňovat jisté podmínky nejen hustota ρ , ale i plocha S . V těchto skriptech budeme o všech plochách předpokládat, že jsou hladké nebo se skládají z konečného počtu hladkých částí. To by však nestačilo, protože i některé hladké plochy mohou být velmi složité, mohou např. v některých místech nekonečněkrát "oscilovat". Takové složité plochy musíme z našich úvah vyloučit, musíme se omezit jen na "rozumné" hladké plochy. Takovými speciálními případy hladkých ploch jsou např. plochy Ljapunovovy, o nichž blíže pojednáme v kap. 13. Zatím se spokojíme s konstatováním, že všechny běžné plochy, se kterými se setkáváme ve fyzikálních úlohách, požadované vlastnosti mají.

Obdobně budeme předpokládat, že i všechny uvažované křivky se skládají z konečného počtu hladkých a "rozumných" úseků.

c) Křivkově (lineárně) rozložené hmoty nebo náboje.

Uvažujme drát např. kruhového průřezu, přičemž středy kružnic leží na nějaké křivce C . Budeme-li si představovat hmotu mezi libovolnou dvojicí rovin kolmých k C jakoby byla zkoncentrována na ^{křivce} C mezi těmito rovinami, dospíváme k představě hmotné křivky. Dělením křivky na úseky, zjemňováním tohoto dělení a limitním přechodem dospíváme ke vzorci pro intenzitu, který je stejný jako vzorec (7.12) a (7.18) až na to, že nyní integrujeme ~~kelem~~ ^{podél} křivky C :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \int_C \frac{\vec{R}}{R^3} dm \quad . \quad (7.22)$$

Význam jednotlivých symbolů v těchto vzorcích je stejný jako u vzorců (7.12) a (7.18).

Lineární hustota λ hmotné křivky v bodě $Q(x',y',z')$ budeme nazývat limitu poměru hmotnosti libovolného úseku křivky obsahujícího bod Q k délce tohoto úseku, jestliže se délka úseku blíží k nule. Budeme předpokládat, že křivka C a rozložení hmot na ní mají takové vlastnosti, že uvedená limita existuje ve všech bodech křivky a je na této křivce spojitá. Pro element hmoty dm připadající na element délky ds podél křivky nyní platí

$$dm(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') ds \quad (7.23)$$

a vzorec (7.22) nabývá tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \int_C \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} ds \quad . \quad (7.24)$$

V případě elektrostatického pole nabitě křivky ve vakuu je v těchto vzorcích opět třeba místo $(-G)$ psát $1/(4\pi\epsilon_0)$.

d) Objemově rozložené dipóly. Mohlo by se zdát, že výše zavedená objemová, plošná a lineární rozložení zdrojů nám umožní popsat všechny fyzikální situace, se kterými se setkáme při studiu gravitačního, elektrostatického, příp. i magnetostatického pole. Není tomu tak, příroda je složitější než zmíněné zjednodušené matematické modely. Příkladem může být polarizované dielektrikum. V tomto případě je v celém tělese i v jeho jednotlivých částech (ovšem v částech podstatně větších než jsou rozměry atomů) stejný počet kladných i záporných nábojů, takže výsledná prostorová hustota náboje je všude nulová. V důsledku systematického posunu kladných nábojů vzhledem k nábojům záporným v každé části tělesa však výsledné elektrické pole nebude nulové.

Vhodným modelem pro tuto fyzikální situaci bude těleso s objemovým rozložením elektrických dipólů. Naprosto obdobná situace je v magnetismu, kde zmagetované těleso si můžeme představit jako složené z elementárních magnetických dipólů.

V prvním dílu skript jsme vyšetřovali pole *dipólu* umístěného v počátku soustavy souřadnic. Tato úloha potřebuje nyní zobecnit, budeme předpokládat, že se dipól nachází v bodě o polohovém vektoru \vec{r}' . Označme \vec{r} polohový vektor pozorovatele a zaveďme opět $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Pro intenzitu pole elektrického dipólu s momentem \vec{p} ve vakuu pak platí vzo-
rec

$$\vec{E} = -\text{grad } U, \quad (7.25)$$

kde potenciál U je dán vzorcem (viz speciální vzorec (4.8) v prvním dílu skript)

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}. \quad (7.26)$$

Pro intenzitu magnetického pole \vec{H} buzeného magnetickým dipólem o momentu \vec{m} platí

$$\vec{H} = -\text{grad } U, \quad (7.27)$$

kde

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{R^3}. \quad (7.28)$$

Všimněme si blíže výpočtu intenzity pomocí uvedených vzorců. Polohové vektory vyjádříme pomocí jejich složek, tj. $\vec{r} = (x, y, z)$ a $\vec{r}' = (x', y', z')$. Platí $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x-x', y-y', z-z')$ a $R = |\vec{R}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$. Gradientem ve vzorcích (7.25) a (7.27) rozumíme vektor, jehož složky dostaneme derivováním podle nečárkovaných souřadnic x, y, z . Protože vektor \vec{p} závisí jen na čárkovaných souřadnicích, $\vec{p} = p(\vec{r}')$, platí

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\partial (\vec{p} \cdot \vec{R})}{\partial x} \frac{1}{R^3} + (\vec{p} \cdot \vec{R}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^3} \right) =$$

$$= \frac{p_x}{R^3} + (\vec{p} \cdot \vec{R}) \frac{-3}{R^4} \frac{x-x'}{R},$$

kde jsme při derivování skalárního součinu $\vec{p} \cdot \vec{R}$ použili zápisu

$$\vec{p} \cdot \vec{R} = p_x R_x + p_y R_y + p_z R_z = p_x(x-x') + p_y(y-y') + p_z(z-z') .$$

Odtud je zřejmé, že dosazením (7.26) do (7.25) dostaneme
/ Votruba /

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{p} \right\} . \quad (7.29)$$

Předpokládejme, že elektrické dipóly jsou spojitě rozloženy v nějakém objemu V . Označme \vec{P} dipólový moment, připadající na jednotku objemu. Vektor \vec{P} udává hustotu dipólových momentů a nazývá se vektorem polarizace. Dipólový moment v elementárním objemu dV je tedy roven $\vec{P} \cdot dV$. Ze vzorce (7.29) a principu superpozice plyne, že elektrické pole ve vakuu buzené polarizovaným tělesem je dáno vzorcem

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \text{grad} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{P} \right\} dV , \quad (7.30)$$

kde integrace se opět provádí přes čárkované souřadnice a vektor \vec{P} je funkcí těchto souřadnic, $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}')$.

Uvažujme nyní zmagnetované těleso. Hustotu magnetického momentu, tj. magnetický moment připadající na jednotku objemu, označme \vec{M} . Vektor \vec{M} budeme nazývat vektorem magnetizace (též hustotou magnetizace / Kellogg /). Výraz pro intenzitu magnetického pole \vec{H} buzeného uvažovaným tělesem dostaneme ihned formálním přepisem vzorce (7.30), využijeme-li podobnosti vzorců (7.26) a (7.28):

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{-1}{4\pi} \iiint_V \text{grad} \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{R^3} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{M} \right\} dV . \end{aligned} \quad (7.31)$$

e) Plošně rozdělené dipóly, dvojvrstva. Vzorec pro intenzitu pole plošně rozložených dipólů dostaneme ihned z výše uvedených vzorců pro objemově rozložené dipóly, jestliže v nich integraci přes objem nahradíme integrací přes plochu a objemové hustoty dipólů zaměníme plošnými hustotami dipólů. Uveďme jen vzorce pro pole plošně rozložených magnetických dipólů s plošnou hustotou $\vec{\mu}$, který má zřejmě tvar

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \text{grad} \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{R}}{R^3} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{\mu} \right\} dS. \quad (7.32)$$

V tomto vzorci může mít plošná magnetizace $\vec{\mu}$ zcela libovolný směr vzhledem k normále plochy S . Například magnetické pole tenké desky, zmagnetované šikmo vzhledem k povrchu, můžeme počítat pomocí vzorce (7.32).

Zvláštní význam má speciální případ, kdy dipólové momenty jsou v každém bodě plochy orientovány kolmo k této ploše. Tomuto modelu budeme říkat dvojvrstva. Zdůvodnění tohoto termínu ilustrujme na případu elektrické dvojvrstvy. V tomto případě jsou na ploše rozloženy elektrické dipóly orientované kolmo k této ploše. Kdybychom každý dipól uprostřed "rozřízli", dostaneme dvě vrstvy nábojů, dvě jednoduché vrstvy těsně u sebe. Odtud vyplývá označení "dvojvrstva".

Tyto dvě jednoduché vrstvy mají však tu speciální vlastnost, že je-li v nějakém místě jedné vrstvy náboj q , je v "sousedním" místě ve druhé vrstvě náboj $(-q)$.

Význam dvojvrstvy spočívá v tom, že se s tímto modelem setkáváme nejen v problémech magnetismu a polarizace dielektrik, ale i v elektrostatických úlohách s vodiči a dokonce

i v teorii gravitačního pole. Uvažujeme např. dvě stejné ~~xx~~ vodivé desky umístěné blízko sebe (kondenzátor), které jsou nabitě stejně velkými náboji, ale opačného znaménka. Elektrostatické pole této soustavy můžeme ve vzdálenostech větších, než je vzdálenost desek, považovat za pole dvojvrstvy. V teorii gravitačního pole může být pojem dvojvrstvy také zaveden, ovšem jen jako pojem fiktivní, protože záporné hmoty fyzikálně nepřipouštíme. Ovšem velmi často se studují různá poruchová gravitační pole, která jsou způsobena odchylkami v rozložení hmot od jistého průměru. Tyto rozdílné ^{ové} hmoty mohou již být jak kladné, tak i záporné (nadbytek či nedostatek hmot ve srovnání s průměrem), takže v teorii poruchového gravitačního pole se s ~~s~~ pojmem dvojvrstvy ~~se~~ můžeme setkat (~~viz další díl skriptu~~) a tento pojem má plné fyzikální oprávnění /Pisk/.

V případě dvojvrstvy můžeme výše uvedený obecný vzorec (7.32) přepsat ještě v jiných tvarech, jak bude ukázáno v následující kapitole.

Obdobně, jako jsme uvažovali rozložení hmot nebo nábojů na nějaké křivce, mohli bychom uvažovat rozložení dipólů na křivce. Například pole zmagnetizovaného ~~válcu~~ tenkého válce bychom mohli aproximovat polem úsečky s lineárním rozložením magnetických dipólů. Protože takovéto modely se potřebují jen zřídka, nebudeme se jimi zde zabývat.

Rovněž nebudeme vyšetřovat rozložení vyšších multipólů po objemech, plochách a křivkách, což by nyní logicky mělo následovat. Jistě by se našlo množství zajímavých aplikací takových modelů např. ve fyzice pevných látek, ale v makroskopických teoriích gravitačního, elektrostatického a magnetostatického pole se nepovažují (důvody se v učebnicích elektromagnetického pole neuvádějí, ale hlavní příčinou je pravděpodobně to, že pole takových soustav se obvykle uvažovat nemusejí, protože rychle klesají se vzdáleností, a kromě toho by byl matematický popis již značně složitý.

8. VÝCHOZÍ VZORCE PRO NEWTONŮV POTENCIÁL A PŘÍBUZNÉ VELIČINY

8.1. Obecné vzorce pro potenciál

Odvoďme vzorce na výpočet potenciálu pro pole, která jsme uvažovali v předchozí kapitole. V integrálech, které udávaly intenzitu pole, bude^{me} chtít integrand vyjádřit pomocí gradientu nějaké skalární funkce.

Zopakujme některá označení z předcházející kapitoly, viz obr. 2. Polohový vektor bodu P , v němž počítáme pole, jsme označili $\vec{r} = (x, y, z)$. Polohový vektor uvažovaného hmotného elementu dm (objemového, plošného nebo lineárního) jsme označili $\vec{r}' = (x', y', z')$. Vektor, který má počátek v hmotném elementu a koncový bod v bodě P , jsme označili \vec{R} , tj.

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x-x', y-y', z-z') \quad . \quad (8.1)$$

Pro velikost vektoru R platí

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad . \quad (8.2)$$

Ve vzorcích v předchozím paragrafu pravidelně vystupovala veličina \vec{R}/R^3 . Ukážeme, že ji lze vyjádřit pomocí gradientu funkce $1/R$.

Funkce R je funkcí nečárkovaných souřadnic x, y, z a čárkovaných souřadnic x', y', z' . Pokud budeme počítat gradient vzhledem k nečárkovaným souřadnicím, budeme jej značit obvyklým ~~zprůměrovaným~~ symbolem grad . Pokud budeme počítat gradient vzhledem k čárkovaným souřadnicím, budeme k symbolu gradientu též připojovat čárku, tj. grad' . Tedy

$$\text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial x}, \frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial y}, \frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial z} \right) \quad . \quad (8.3)$$

Počítejme první složku tohoto gradientu. Z (8.2) plyne

$$\frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial x} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{R^2} \frac{x-x'}{R} = -\frac{R_x}{R^3} \quad (8.4)$$

Obdobné vzorce platí i pro zbyvající složky gradientu. Odtud plyne

$$\vec{\frac{R}{R^3}} = -\text{grad}(\frac{1}{R}) \quad (8.5)$$

Tento vzorec patří vůbec k nejdůležitějším vzorcům teorie potenciálu, bez přehánění bychom jej mohli označit za základní vzorec teorie potenciálu. Svým významem se řadí hned za Newtonův a Coulombův zákon a princip superpozice. Umožňuje popsat výše studovaná geofyzikální pole pomocí jediné skalární funkce-potenciálu, jak hned ukážeme. Máme-li být zcela přesní, musíme však předeslat, že v některých speciálních případech nebude možné zavést potenciál užitím vzorce (8.5), ale ve většině případů to půjde.

a) Potenciál objemově, plošně a lineárně rozložených hmot nebo nábojů.

Vzorce, odvozené v přechozím paragrafu pro intenzitu gravitačního pole působeného objemovými, plošnými a lineárními zdroji, můžeme užitím (8.5) přepsat v následujících tvarech

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iiint_V \rho \frac{\vec{R}}{R^3} dV = G \iiint_V \rho \text{grad}(\frac{1}{R}) dV = \quad (8.6)$$

$$= G \iiint_V \text{grad}(\frac{\rho}{R}) dV \quad ,$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iint_S \sigma \frac{\vec{R}}{R^3} dS = G \iint_S \text{grad}(\frac{\sigma}{R}) dS \quad , \quad (8.7)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \int_C \lambda \frac{\vec{R}}{R^3} ds = G \int_C \text{grad}(\frac{\lambda}{R}) ds \quad , \quad (8.8)$$

kde ρ je objemová hustota, σ je plošná hustota, λ je lineární hustota; všechny tyto hustoty jsou funkcemi čárkovaných souřadnic, takže jsme je mohli zapsat až za znak gradientu, integrace se rovněž provádějí podle čárkovaných souřadnic.

Předpokládejme, že v uvedených vzorcích lze zaměnit pořadí integrace a derivace (gradientu). Pak bude možné vyjádřit intenzitu pomocí gradientu skalární funkce. Podle fyzikálních zvyklostí zavedeme tuto skalární funkci, kterou budeme nazývat potenciálem, takovým způsobem, aby se intenzita rovnala záporně vzatému gradientu potenciálu:

$$\vec{E} = -\text{grad } U . \quad (8.9)$$

Pro potenciály objemových, plošných a lineárních hmot pak postupně dostáváme

$$U(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho}{R} dV , \quad (8.10)$$

$$U(\vec{r}) = -G \iint_S \frac{\sigma}{R} dS , \quad (8.11)$$

$$U(\vec{r}) = -G \int_C \frac{\lambda}{R} ds . \quad (8.12)$$

Vzorce pro potenciály elektrostatického pole buzeného objemovými, plošnými a lineárními náboji ve vakuu dostaneme ihned ze vzorců (8.10) až (8.12), jestliže v nich nahradíme konstantu (-G) konstantou $1/(4\pi\epsilon_0)$ a pod hustotami ρ , σ , λ rozumíme příslušné hustoty náboje.

Potenciály typu (8.10) až (8.12), obsahující v integrandu funkci $1/R$, budeme nazývat Newtonovými potenciály. Uvidíme, že v některých případech nebude možné výsledné pole popsat pomocí Newtonova potenciálu, i když působení mezi jednotlivými částicemi se řídí Newtonovým gravitačním zákonem nebo Coulombovým zákonem. Takovým případem bude logaritmický nebo lineární potenciál (viz kap. 11) a samozřejmě, v obecném případě, i potenciál rozložených dipólů.

**) Potenciál objemově rozložených dipólů.*

Vzorec pro potenciál prostorově a plošně rozložených stacionárních dipólů byly v podstatě uvedeny už na konci předcházejícího paragrafu, postačí pouze opět připojit předpoklad o možnosti záměny integrálu a derivace. Např. ^{klad} intenzitu magnetostatického pole zmagnetovaného tělesa můžeme psát ve tvaru

$$\vec{H} = -\text{grad } U , \quad (8.13)$$

kde pro potenciál platí

$$U = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{R^3} dV, \quad (8.14)$$

vektor \vec{M} je vektor magnetizace (dipólový moment v jednotkovém objemu).

Poslední vzorec pro magnetický potenciál se často zapisuje i v jiných ekvivalentních tvarech. Předně můžeme výraz \vec{R}/R^3 v tomto vzorci opět přepsat pomocí základního vzorce (8.5):

$$U = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{M} \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) dV. \quad (8.15)$$

Zavedeme-li gradient podle čárkovaných souřadnic, označíme jej grad' , z (8.2) a (8.5) plyne

$$\text{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\frac{x-x'}{R^3}, \frac{y-y'}{R^3}, \frac{z-z'}{R^3}\right) = \frac{\vec{R}}{R^3} = -\text{grad}\left(\frac{1}{R}\right). \quad (8.16)$$

Přechodem ke gradientu podle čárkovaných souřadnic musíme ve vzorci (8.15) změnit jen znaménko:

$$U = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{M} \cdot \text{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) dV. \quad (8.17)$$

Některé další ^{vpravy} vzorců pro tento potenciál, budou odvozeny v kap. 12, viz též úlohu za tímto paragrafem. ^{vhodně zejména z hlediska praktických výpočtů}
v dalším dílu těchto skript.

Pro potenciál plošně rozložených magnetických dipólů obdobně dostáváme

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{w} \cdot \vec{R}}{R^3} dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{w} \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{w} \cdot \text{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) dS \quad (8.18)$$

kde \vec{w} je plošná hustota magnetického momentu, Rozpisem skalárního součinu

$$\vec{w} \cdot \vec{R} = |\vec{w}| \cdot |\vec{R}| \cdot \cos \alpha,$$

kde α je úhel sevřený vektory \vec{w} a \vec{R} , můžeme první ze vzorců (8.18) též zapsat ve tvaru

V teorii i při praktických výpočtech se často používají ještě dva důležité vzorce, které se dostanou dalšími úpravami vzorců (8.15) a (8.17). Přístupme nejprve k odvození obecného vzorce, který plyne ze vzorce (8.17).

Užitím známé identity pro divergenci

$$\operatorname{div}(\vec{b}\vec{A}) = b \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} b \quad (8.18)$$

lze vzorec (8.17) zapsat ve tvaru

$$U = - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\operatorname{div} \vec{M}}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div} \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) dV .$$

Upravíme-li poslední integrál pomocí Gaussovy věty, dostáváme

$$U = \iiint_V \frac{\rho}{R} dV + \iint_S \frac{\eta}{R} dS , \quad (8.19)$$

kde jsme označili

$$\rho = - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{M} , \quad \eta = \frac{M_n}{4\pi} , \quad (8.20)$$

S je povrch tělesa V a M_n je normálová složka magnetizace (složka magnetizace ve směru vnější normály k ploše S). Připomeňme, že pro použití Gaussovy věty postačí, bude-li funkce \vec{M}/R i se svými prvními parciálními derivacemi omezená a spojitá všude v tělese V a na jeho povrchu S . To bude např. splněno, pokud \vec{M} bude omezené a spojitě i se svými prvními parciálními derivacemi a pole vyšetřujeme jen vně tělesa, takže vzdálenost R se nikde nerovná nule. Příklad pole ve vnitřních bodech by vyžadoval hlubší rozbor, který zde provádět nebudeme, protože většinou se budeme zabývat jen vnějším polem, např. v úlohách užitých geofyziky.

Všimněme si, že členy na pravé straně ~~rovnice~~ ^{vzorce} (8.19) jsou formálně stejné, až na konstantu, jako potenciály pro objemově a plošně rozložené hmoty nebo elektrické náboje, viz (8.10) a (8.11). Můžeme tedy veličinu ρ , zavedenou v (8.20), považovat za jakousi objemovou hustotu "magnetických množství" a η za příslušnou plošnou hustotu. Magnetostatický potenciál zmagnetovaného tělesa (a obdobně potenciál polarizovaného dielektrika)

můžeme tedy vyjádřit jako součet dvou Newtonových potenciálů, jednoho objemového a jednoho plošného. Teoretický význam vzorců (8.19) a (8.20) tedy spočívá v tom, že umožňují začlenit vyšetřování magnetostatického pole do rámce teorie Newtonova potenciálu. S tím úzce souvisí i to, že také Gaussova a Schmidtova teorie zemského magnetického pole vycházejí ze vzorce (8.19), viz /Janovskij/.

Všimněme si ještě, jak se vzorec (8.19) zjednoduší v případě homogenně zmagnetovaného tělesa, kdy \vec{M} je konstantní vektor. Protože divergence konstantního vektoru je nulová, dostáváme $\rho = 0$ a ve vzorci (8.19) zůstane jen plošný integrál:

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{M_n}{R} dS \quad . \quad (8.21)$$

Fyzikální vysvětlení tohoto výsledku je zřejmé; účinky vzájemně posunutých kladných a záporných "magnetických množství", která mají nyní všude stejnou velikost, se uvnitř tělesa vzájemně ruší, nevyruší se pouze na povrchu tělesa.

Druhý důležitý vzorec, ovšem jen pro homogenně zmagnetované těleso, dostaneme ze vzorce (8.15). Předpokládáme-li, že vektor magnetizace \vec{M} je konstantní, můžeme jej psát před integrál. Zaměníme-li ještě pořadí integrace a gradientu (v operaci grad derivujeme podle souřadnic pozorovatele, jedná se tedy o derivování integrálu podle parametru), dostáváme

$$U = - \frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \text{grad} \iiint_V \frac{1}{R} dV \quad .$$

Poznamenejme, že o předpokladech, kdy je možno zaměnit integrál a gradient, se zmíníme v následujícím paragrafu 8.2, podrobněji pak v kap. 12. Integrál v posledním výrazu představuje, až na konstantu $(-G)$, gravitační potenciál homogenního tělesa, které má stejný objem a tvar jako uvažované zmagnetované těleso a jeho hustota hmoty je rovna jedné. Mezi magnetostatickým potenciálem homogenně zmagnetovaného tělesa a gravitačním potenciálem příslušného homogenního tělesa tedy platí vztah

$$U_{\text{mag}} = - \frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \text{grad} U_{\text{grav}} \quad , \quad (8.22)$$

přičemž ovšem při výpočtu "gravitačního" potenciálu U_{grav} klademe hustotu $\rho = 1$ a vynecháváme konstantu $(-G)$.
Tvrzení, že potenciál homogenně zmagnetovaného tělesa lze určit z gravitačního potenciálu příslušného homogenního tělesa pomocí vzorce (8.22), se nazývá Poissonova věta /Janovskij/.

K výpočtu potenciálu homogenně zmagnetovaného tělesa můžeme tedy použít vzorec (8.21) nebo (8.22). Kterému z nich dáme přednost, závisí na tvaru zmagnetovaného tělesa. Pro některá tělesa, např. hranol nebo válec, lze úlohu snadno vyřešit pomocí vzorce (8.21), pro jiná tělesa, jako koule nebo elipsoid, je výhodnější vyjít ze vzorců pro gravitační potenciál a použít (8.22), viz /Janovskij/. Obrovská praktická cena Poissonova vzorce (8.22) např. v užití geofyzice spočívá v tom, že vzorce pro gravitační potenciál homogenních těles, odvozené pro potřeby gravimetrického průzkumu, můžeme pomocí vzorce (8.22) poměrně snadno převést na vzorce, které se potřebují v magnetickém průzkumu.

c) Potenciál plošně rozložených dipólů, potenciál dvojvrstvy. Pro potenciál plošně rozložených magnetických dipólů obdobně dostáváme

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{R}}{R^3} dS = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{\mu} \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{\mu} \cdot \text{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) dS, \quad (8.23)$$

kde $\vec{\mu}$ je plošná hustota magnetického momentu. Rozpisem skalárního součinu

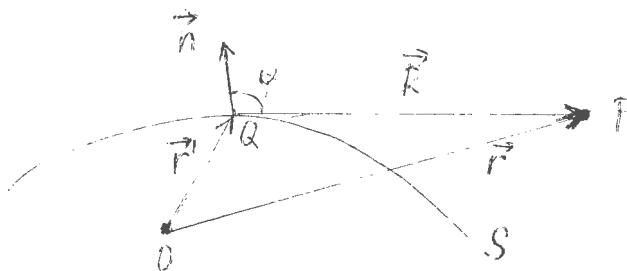
$$\vec{\mu} \cdot \vec{R} = |\vec{\mu}| \cdot |\vec{R}| \cdot \cos \alpha,$$

kde α je úhel sevřený vektory $\vec{\mu}$ a \vec{R} , můžeme první ze vzorců (8.23) též zapsat ve tvaru



$$U = \frac{1}{4\pi} \iint_S |\vec{w}| \frac{\cos \alpha}{R^2} dS \quad . \quad (8.24)$$

Uveďme speciálně několik úprav vzorců (8.23) pro případ magnetické dvojvrstvy, kdy je podle definice vektor \vec{w} všude kolmý k ploše S . Zvolme nějakým způsobem orientaci jednotkové normály \vec{n} k ploše S .



Obr. 4

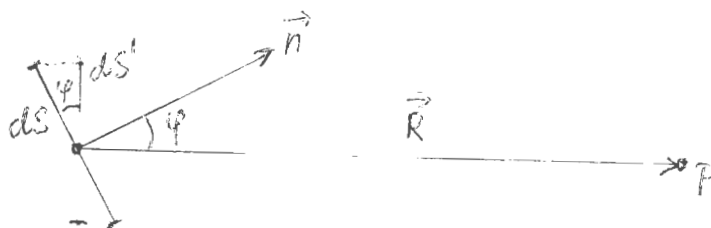
V případě dvojvrstvy můžeme psát $\vec{w} = \mu \vec{n}$, kde μ je kladné, pokud má vektor \vec{w} stejnou orientaci jako \vec{n} , záporné v opačném případě. Označme φ úhel mezi normálou v nějakém bodě Q plochy S a spojnici tohoto bodu s místem P , v němž potenciál počítáme (obr. 4). Pro skalární součin $\vec{w} \cdot \vec{R}$ pak platí

$$\vec{w} \cdot \vec{R} = \mu R \cos \varphi$$

a první ze vzorců (8.23) dává potenciál dvojvrstvy ve tvaru / Pick /

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\cos \varphi}{R^2} dS \quad . \quad (8.25)$$

Ponecháváme čtenáři, aby porovnal tento vzorec se vzorcem (8.24). Přepišme poslední vzorec ještě v jiném tvaru. Výraz $dS \cos \varphi$ představuje průmět elementu plochy dS do roviny, která je kolmá ke spojnici bodů Q a P , viz obr. 5.



Obr. 5

Velikost tohoto průmětu označme $dS' = dS \cos \varphi$. Označme $d\Omega$ prostorový úhel, pod kterým vidíme z bodu P plochu dS' (a tedy i plochu dS). Protože plocha dS' se nachází ve vzdálenosti R od bodu P , zřejmě platí

$$dS' = R^2 d\Omega .$$

Odtud plyne

$$d\Omega = \frac{dS'}{R^2} = \frac{\cos \varphi}{R^2} dS \quad (8.26)$$

a vzorec (8.25) nabývá jednoduchého tvaru / Votruba /

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S w d\Omega , \quad (8.27)$$

kde element $d\Omega$ bereme kladný, je-li úhel φ ostrý jako na obr. 5 (z bodu P vidíme "kladnou" stranu plochy dS); $d\Omega$ bereme záporné, je-li úhel φ tupý (z bodu P vidíme "zápornou" stranu plochy dS). Kdybychom zvolili opačnou volbu znamének, objevilo by se ve vzorci (8.27) záporné znaménko / Kellogg /. Vzorec (8.27) není sice příliš vhodný k numerickým výpočtům, ale má velký význam v teorii. Uveďme ještě jeden vzorec pro potenciál dvojvrstvy, který se vyskytuje nejčastěji. V případě dvojvrstvy můžeme poslední ze vzorců (8.23) zapsat ve tvaru

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \vec{n} \cdot \text{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) dS .$$

Skalární součin v tomto vzorci udává průmět gradientu do směru normály \vec{n} , tj. derivaci ve směru této normály. Odtud dostáváme vzorec pro potenciál magnetické dvojvrstvy ve tvaru

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R}\right) dS , \quad (8.28)$$

kde derivací podle normály rozumíme derivaci ve směru normály *podle* čárkovaných souřadnic, tj. při derivování reciproké vzdálenosti bodů Q a P ponecháváme bod P pevný a bod Q posouváme podél normály, viz obr. 4. Někteří autoři volí směr normály opačně, než jsme zde uvedli, pak se ve vzorci (8.28) objeví záporné znaménko / Pick /.

Můžeme tedy shrnout, že na výpočet potenciálu magnetické dvojvrstvy lze vešle obecných vzorců (8.23) použít kteréhokoliv ze vzorců (8.25), (8.27) nebo (8.28).

Diskusi o mezích použitelnosti zde odvozených vzorců pro gravitační, elektrostatický a magnetostatický potenciál provedeme v následujících paragrafech 8.2 a 8.3,

Úlohy

1. Je-li $\vec{r}=(x,y,z)$ polohový vektor nějakého bodu a $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ jeho velikost, dokažte, že platí / Rektorys /:
 - a) $\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru \vec{r} ;
 - b) $\text{grad } \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \text{grad } r = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Všimněte si, že vzorce (8.5) a (8.16) jsou zobecněním posledního vzorce, kde místo \vec{r} vystupuje $\vec{r}-\vec{r}'$.

2. Vyjádření magnetostatického potenciálu zmagnetovaného tělesa ve tvaru součtu objemového potenciálu a potenciálu jednoduché vrstvy. Užitím následující identity vztahené k souřadnicím tělesa, tj. k čárkovaným souřadnicím,

$$\text{div}'\left(\frac{\vec{M}}{R}\right) = \frac{\text{div}'\vec{M}}{R} + \vec{M} \cdot \text{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) , \quad (8.24)$$

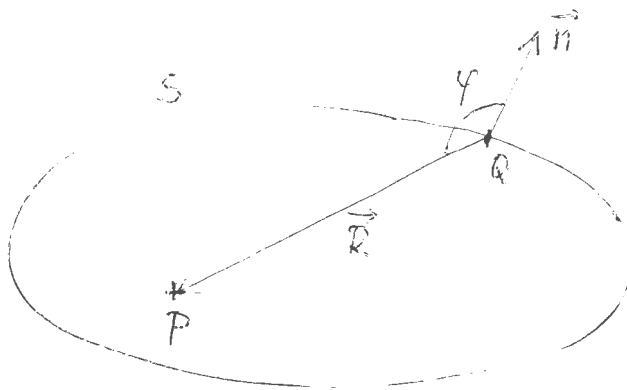
úpravě vzorce (8.17) a užitím Gaussovy věty ukažte, že magnetostatický potenciál lze vyjádřit ve tvaru

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{-\operatorname{div} \vec{M}}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{M_n}{R} dS, \quad (8.25)$$

kde M_n je normálová složka vektoru magnetizace ^{na} povrchu S uvažovaného tělesa. Interpretujte oba členy ve vzorci (8.25).

Odpověď: První člen na pravé straně (8.25) můžeme interpretovat jako objemový potenciál s "magnetickou" hustotou $\rho_M = -\operatorname{div} \vec{M}$, druhý člen jako potenciál jednoduché vrstvy s plošnou hustotou $\sigma = M_n$. Vzorec (8.25) má zásadní význam v teorii zemského magnetického pole, proto se k němu ještě vrátíme v kap. 12.

2. Gaussův integrál. Uvažujme uzavřenou hladkou plochu S , její vnější normálu označme \vec{n} , viz obr. 4 a 6. Označme φ úhel mezi normálou



Obr. 6

v bodě plochy S a spojnici tohoto bodu s pólem P . Dokažte, že platí

$$\iint_S \frac{\cos \varphi}{R^2} dS = \begin{cases} -4\pi, & \text{je-li pól } P \text{ uvnitř } S, \\ -2\pi, & \text{pól } P \text{ na } S, \\ 0, & \text{pól } P \text{ vně } S. \end{cases} \quad (8.29)$$

Poznamenejme, že častěji se místo úhlu φ uvažuje ve vzorci (8.29) jeho doplněk, pak na pravých stranách jsou opačná znaménka / Pick /.

Řešení: Vyplývá ihned ze vzorce (8.26). Jsme-li uvnitř, vidíme plochu S pod prostorovým úhlem 4π , ale vidíme její "zápornou" stranu (vnější normála vychází z druhé strany). Jsme-li na hranici, je vidět opět vnitřek plochy S , ale pod prostorovým úhlem 2π . Je-li P vně, pak části plochy S "viditelné" z P přísluší nějaký prostorový úhel Ω_0 , zbytku plochy přísluší prostorový úhel $(-1)\Omega_0$, dohromady tedy nula.

8.2. Vztah mezi vzorci pro intenzitu a pro potenciál

Hlavní obecné poznatky, získané dosud v předešlé a v této kapitole, lze stručně shrnout následujícím způsobem. Intenzitu gravitačního, ~~prů~~ elektrostatického nebo magnetostatického pole působeného objemově, plošně nebo lineárně rozloženými zdroji můžeme v nejobecnějším případě vyjádřit pomocí integrálů Stieltjesova typu (Lebesguesových integrálů podle míry). Jestliže lze zavést hustotu zdrojů a tato hustota splňuje některé předpoklady (postačí spojitost hustoty), lze intenzitu již vyjádřit pomocí obvyklých integrálů, viz např. vzorec (8.6) až (8.8) pro gravitační pole. Protože dále v těchto skriptech budeme vždy předpokládat, že hustota požadovaných vlastností lze zavést, budeme tyto vzorce pro intenzitu považovat za výchozí vzorce celé teorie. Teprve při splnění dalších předpokladů, které zajistí možnost záměny integrálu a derivace, je možné příslušná pole popsat pomocí potenciálů, které jsme výše uvedli. Tedy vzorce pro intenzitu budeme považovat za obecné, univerzálně platné, kdežto vzorce pro Newtonovy potenciály pouze za jejich speciální případ, použitelný jen za jistých předpokladů.

Samozřejmě, pokud to půjde, budeme dávat přednost popisu pole pomocí potenciálu, protože v tomto případě vystačíme jen s jednou skalární funkcí. Pouze v případech, kdy budou vznikat nějaké problémy s použitím Newtonových potenciálů, budeme se muset vrátit k obecnějším vzorcům pro intenzitu. V kap. 12

dokážeme, že Newtonův gravitační potenciál daný výše uvedenými vzorci správně popisuje pole prakticky ve všech případech, kdy uvažovaný integrační obor má konečné rozměry. Problémy však nastávají např. u pole nekonečného drátu nebo nekonečné desky. I v těchto případech se sice nakonec podaří nějaké potenciály nalézt (pole jsou konzervativní), ale tyto potenciály nejsou Newtonovy^{mi} potenciály. S obdobnou situací se setkáváme v elektrostatice, kde však navíc nelze vzorců pro Newtonův potenciál přímo použít i v některých úlohách s vodiči; např. uzemněná deska kondenzátoru představuje plochu nulového potenciálu v konečnu, zatímco při odvozování vzorců pro Newtonův potenciál se předpokládalo, že tato hladina je v nekonečnu. Blíže to uvidíme na konkrétních případech v kap. 10 a 11. Pro přehlednost posuďme zmíněné problémy ještě z hlediska budování fyzikální teorie.

V těchto skriptech jsme zvolili jistý postup při budování teorie, ale zatím jsme nediskutovali otázku, zdali nebylo možné postupovat jinak. V této souvislosti čtenář může právem namítnout, že např. vzorce (8.10) až (8.12) pro objemový, plošný a lineární potenciál byly jednoduše odvozeny již v prvním dílu skript (pouze s jiným označením) použitím principu superpozice pro potenciály. Proč jsme zde nevyšli rovnou z těchto vzorců a namísto toho se napřed věnovali zdlouhavým diskusím o intenzitách? Poskusme se dát odpověď na tyto otázky.

Při budování teorie gravitačního a elektrostatického pole buzeného soustavou bodových zdrojů (viz první díl skript) jsme vyšli z Newtonova a Coulombova zákona a postulovali jsme platnost principu superpozice pro intenzitu. Viděli jsme, že zcela ekvivalentně bylo možné vyjít také z potenciálu bodového zdroje a postulovat princip superpozice pro potenciál. Oba přístupy byly zcela ekvivalentní díky tomu, že derivace součtu konečného počtu členů je rovna součtu derivací. Při přechodu k polím objemovým, plošným a lineárním zdrojů jsme tedy měli dvě možnosti:

a) vyjít ze vzorců pro intenzitu bodového zdroje a postulovat platnost principu superpozice pro intenzitu i v případě objemových, plošných a lineárních zdrojů (tento postup jsme zvolili zde, stejně se postupuje např. v / Kellogg, Purcell /);

b) vyjít ze vzorce pro potenciál bodového zdroje a postulovat princip superpozice pro potenciál (takto se postupuje např. v / Dubošin, Idelson, Pick, ^{Kvářsinec} Votruba~~s~~/ a mnoha jiných učebnicích).

Na počátku neexistovaly žádné zásadní důvody, abychom dávali přednost některému z uvedených přístupů. Z důvodů formálních bychom dávali přednost spíše přístupu b), protože potenciál je skalární veličina. Samozřejmým požadavkem ovšem je, aby oba přístupy vedly ke stejným výsledkům. Nyní je však situace složitější, než v případě soustavy hmotných bodů, protože místo konečných sum vystupují v příslušných výrazech integrály a je známo, že pořadí integrování a derivování nelze vždy zaměňovat, ale pouze při splnění jistých podmínek. Je tedy možné očekávat, že se vyskytnou nějaké případy, kdy přístupy a) a b) nebudou dávat stejné výsledky. V těchto případech bude třeba jeden přístup odmítnout.

Naštěstí se ukazuje, že pro velice širokou třídu reálných zdrojů pole dávají oba přístupy stejné výsledky, viz kap. 12. Pokud bychom se omezili jen na takovéto zdroje, jsou oba přístupy ekvivalentní a přednost bychom dali patrně přístupu b), protože se v něm pracuje s jednoduššími vzorci. Avšak např. pro modely, které mají některé rozměry nekonečné, přístup b) selhává, integrály pro potenciál jsou divergentní (nekonečně velké), zatímco v přístupu a) žádné problémy nenastávají. Lze sice namítnout, že takové modely reálně neexistují, ale o užitečnosti takových modelů, jako je nekonečný drát nebo nekonečná deska, jistě není třeba pochybovat. Protože i takovéto modely chceme zahrnout do naší teorie, zvolili jsme přístup a). Rovněž v některých elektrostatických úlohách s vodiči, jak jsme již uvedli, je třeba dávat přednost tomuto přístupu.

Ve skutečnosti byly důvody pro přijetí postupu a) ještě hlubší. Intenzitu pole považujeme totiž za primární veličinu, která bezprostředně vystupuje v Newtonově a Coulombově zákonu, a těmto zákonům přisuzujeme velmi obecnou platnost, kdežto potenciál byl původně zaveden jako veličina pomocná. Podařilo se sice nalézt velmi důležitý fyzikální význam potenciálu jako práce, kterou musíme dodat jednotlivé částici, abychom ji přenesli s nekonečna do daného bodu, ale taková veličina si patrně

nemůže zachovat svůj původní fyzikální smysl, pokud se i těleso bude rozprostírat do nekonečna.

Uvedené úvahy je tedy možné shrnout tak, že pro popis gravitačního, elektrostatického a magnetostatického pole je třeba za základní vzorce považovat vzorce pro intenzitu. Tyto vzorce budeme tedy zde považovat za matematickou formulaci příslušných fyzikálních zákonů. (~~některé poznámky k tomuto problému budou uvedeny ještě v kap. 13~~). Vzorce pro potenciál je třeba považovat jen za vzorce odvozené. Nic na této situaci nemění ani skutečnost, že potenciál jako skalární veličina je velice užitečný pro popis uvedených polí, ani to, že rozdíly potenciálu udávají důležitou fyzikální veličinu - práci.

8.3. O spojitých rozloženích, rozdíl mezi matematikou a fyzikou

Představa o spojitém rozložení zdrojů pole je v rozporu s představou o atomové stavbě látek. Výše zavedené matematické modely hmotných těles, ploch či křivek se spojitou hustotou neodpovídají tedy fyzikální realitě. Vzniká tak otázka, zda-li je možné použít tyto zjednodušené modely k popisu reálných jevů, a v případě kladné odpovědi je třeba stanovit meze použitelnosti takových modelů.

Modely ve spojitém rozložení zdrojů nepopisují správně vlastnosti příliš malých oblastí, jejichž rozměry jsou souměřitelné či menší než vzdálenosti mezi částicemi, ale jsou dobrou aproximací k popisu středních vlastností oblastí, které obsahují mnoho částic. Ve smyslu středních hodnot je také třeba fyzikálně interpretovat hustotou jako střední množství hmoty (resp. náboje) rozložené v nějaké malé, ale konečné oblasti / Purcell /.

Vedle uvedených problémů matematického popisu se v předložených modelech setkáváme ještě s některými fyzikálními obtížemi. Tyto spočívají v tom, že pevná látka, která je celá složená s nepohyblivých částic, mezi kterými působí jen přitažlivé síly nepřímo úměrné vzdálenosti, by nebyla stabilní a kolabovala by do nulového objemu. Tento problém lze překonat

předpokladem o existenci dodatečných odpudivých sil, které se projevují jen v malých vzdálenostech, nebo předpokladem, že se částice nacházejí v rychlém oběžném pohybu / Jeffreys /.

Uvedené matematické a fyzikální obtíže obejdeme tím, že spojitě modely budeme používat ~~gmm~~ k výpočtům středních veličin. Teorie používající spjitá rozložení bude dávat dostatečně přesné hodnoty středních veličin uvnitř oblastí, jejichž lineární rozměry jsou podstatně větší než vzdálenosti mezi atomy, a za časy podstatně delší, než jsou periody pohybů v atomech (zhruba rozměry delší než 10^{-10} m a časové intervaly delší než 10^{-17} s, viz / Jeffreys /).

8.4. Potenciální energie soustavy

S pojmem potenciálu souvisejí, kromě intenzity, ještě dvě důležité veličiny: potenciální energie soustavy a kapacita. Tyto veličiny mají nejen velký význam fyzikální, ale ukázaly se jako velice užitečné i v matematické teorii potenciálu / Král III, Wermer /. Všimněme si v tomto ^apragrafu prvního z nich.

Potenciální energií příslušného rozložení zdrojů (potenciální energií soustavy, interakční energií soustavy, vlastní potenciální energií, energií příslušného pole) budeme rozumět práci, kterou musíme dodat všem elementům původně rozptýleným v nekonečných vzdálenostech od sebe, abychom z nich sestavili výsledné uspořádání. V případě soustavy n hmotných bodů byla tato potenciální energie dána vzorcem (4.69):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i U_i ,$$

kde m_i je hmotnost i -té částice a U_i je potenciál zbývajících $n-1$ částic v místě i -té částice. Zobecněním tohoto vzorce na případ objemových hmot ~~s hustotou~~ ρ dostaneme

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho U \, dV , \tag{8.30}$$

kde ρ je hustota a U je Newtonův potenciál působený celým tělesem v uvažovaném místě, jak hned zdůvodníme. Vzorec (8.30)

platí rovněž pro soustavu objemově rozložených nábojů, liší se pouze vzorec pro potenciál U .

Podle analogie se vzorcem pro soustavu hmotných bodů bychom měli potenciálem U ve vzorci (8.30) rozumět potenciál, který v místě objemového elementu dV působí všechny ostatní objemové elementy. Lze však ukázat, že příspěvek nekonečně malého objemového elementu k potenciálu v místě samotného elementu je nekonečně malý, viz kap. 12 (v případě hmotného bodu byl nekonečně velký). Tedy k potenciálu, který jsme měli správně uvažovat, jsme přidali nekonečně malou veličinu. Kromě toho element hmoty, analogická veličině m_i , je roven $\int dV$ a je také nekonečně malý. Do příspěvku dW k potenciální energii soustavy jsme tak přidali veličinu malou druhého řádu, a lze proto očekávat, že ani po zintegrování se tyto veličiny ve výsledku neprojeví. Přesnější odvození vzorce (8.30) bychom museli dělat pomocí postupů, používaných v kap. 12. Někteří autoři dokonce zastávají názor, že tento vzorec nelze odvozovat, ale je třeba jej postulovat jako nový fyzikální zákon, který podléhá ověřování pomocí pozorování a experimentů, viz / Kellogg /.

V učebnicích elektromagnetického pole, viz též níže uvedený příklad 3, se ještě odvozuje
~~V kap. 13 odvodíme ještě~~ vyjádření potenciální energie soustavy pomocí intenzity pole. Tím $\int \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E}$ odůvodněn název "energie pole". Pro stacionární úlohy, kterými se v těchto skriptech zabýváme, nemá však toto vyjádření zvláštní význam, vhodnější je vzorec (8.30).

Pro potenciální energii soustavy plošně a lineárně rozložených hmot nebo nábojů platí vzorce, analogické vzorci (8.30):

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma U dS, \quad W = \frac{1}{2} \int_C \lambda U ds. \quad (8.31)$$

Úlohy

1. Na výpočet potenciální energie soustavy hmotných bodů jsme v prvním dílu skript odvodili ještě vzorec (4.68),

$$W = - \frac{G}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{d_{ij}},$$

kde d_{ij} je vzdálenost i -tého a j -tého hmotného bodu a apostrofem označujeme, že při sčítání vynecháváme případy $i=j$.
Zobecněte tento vzorec na případ spojitě rozložených hmot / Kellogg /.

Odpověď:

$$W = - \frac{G}{2} \iiint_{(VV)} \frac{\rho(\vec{r}') \rho(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} d(VV) .$$

Tento vzorec je v důsledku šestirozměrného integrálu méně vhodný než vzorec (8.30).

2. Napište vzorec pro potenciální energii nabitého tělesa, v němž je rozložen objemový náboj s hustotou ρ a na jeho povrchu plošný náboj s hustotou σ / Brož, Votruba /.

Odpověď:

$$W = \frac{1}{2} \left[\iiint_V \rho U dV + \iint_S \sigma U dS \right] , \quad (8.32)$$

kde U je výsledný potenciál všech objemových a povrchových nábojů.

3. Předpokládejme, že elektrické náboje jsou rozloženy s prostorovou hustotou ρ v nějaké omezené části prostoru V . Použitím výše uvedených vzorců a vzorce $\text{div } \vec{D} = \rho$, známého z elektrostatiky, odvoďte vzorec pro energii elektrického pole

$$W = \frac{1}{2} \iiint \vec{E} \cdot \vec{D} dV , \quad (8.33)$$

kde \vec{E} je intenzita elektrického pole, \vec{D} je elektrická indukce a integrace se provádí přes celý prostor.

Řešení: Protože hustota ρ je nulová vně objemu V , můžeme ve výrazu (8.30) pro potenciální energii soustavy integrovat i přes větší objem, např. přes nějakou kouli K , která obsahuje celý objem V uvnitř:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_K \rho U \, dV = \frac{1}{2} \iiint_K U \operatorname{div} \vec{D} \, dV \quad .$$

Ze vzorce pro divergenci součinu, viz (8.18), plyne

$$U \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(U\vec{D}) - \vec{D} \cdot \operatorname{grad} U = \operatorname{div}(U\vec{D}) + \vec{D} \cdot \vec{E} \quad .$$

Odtud plyne, užijeme-li ještě Gaussovu větu,

$$W = \frac{1}{2} \iiint_K \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV + \frac{1}{2} \iint_{S_K} U\vec{D} \, dS \quad , \quad (8.34)$$

kde S_K je povrch koule K . Dostali jsme další vzorec pro potenciální energii nabitého tělesa. Zvětšujeme nyní poloměr koule K , který označíme r , do nekonečna. Ve velkých vzdálenostech se bude pole tělesa V blížit poli hmotného bodu (zde je důležitý předpoklad omezenosti objemu V , jinak by to obecně neplatilo, viz podrobnosti v kap. 12), takže $U \sim 1/r$, $D \sim 1/r^2$, tedy $UD \sim 1/r^3$. Protože velikost plochy roste jen jako r^2 , plošný integrál v (8.34) v limitě vymizí a objemový integrál dá (8.33).

4. Zobecněte úlohu z předchozího příkladu v tom smyslu, že vedle objemových nábojů v objemu V budete uvažovat i plošné náboje na ploše S , tj. vyjdete ze vzorce (8.32). Ukažte, že i v tomto případě je energie elektrického pole dána vzorcem (8.33), viz /Kvasnica, Votruba/.

Řešení: Začátek postupu je stejný jako v předchozí úloze. Protože však na nabitě ploše S je vektor \vec{D} nespojitý, nemůžeme v těchto místech použít Gaussovu větu, plochu S musíme z uvažovaného objemu "vyříznout" tím způsobem, že ji obklopíme nějakou plochou S' , která k S těsně přiléhá (protější strany plochy S' v limitě přejdou v S). Z elektrostatiky je známo, že v těsné blízkosti nabitě plochy je normálová složka elektrické indukce, ve směru od plochy, rovna polovině plošné hustoty náboje, tj. $D_n = \sigma/2$ (důkaz je snadný užitím Gaussovy věty z elektrostatiky, viz též kap. 11 a 13). Protože vnější normála k ploše S' míří ve směru k ploše S a velikost plochy S' je v limitě rovna dvojnásobku velikosti plochy S , dostáváme

$$\iint_{S'} \vec{D} \, dS' = \iint_{S'} U \left(-\frac{\vec{r}}{r^2}\right) \, dS' = - \iint_{S'} U \nabla \, dS \quad ,$$

což se zruší s plošným integrálem v (8.31). Dospíváme tak i v tomto případě ke vzorcům (8.34) a (8.33). Poznamenejme, že při odvozování vzorce (8.35) v předchozím a v tomto příkladu jsme potřebovali některé vzorce z elektrostatiky, o kterých podrobněji pojednáme teprve v dalších kapitolách. Těto jisté nelogičnosti jsme se dopustili záměrně proto, a bychom důležitý vzorec (8.33) uvedli pohromadě s ostatními vzorci pro potenciální energii soustavy.

8.5. Kapacita

Je-li fixována poloha bodového náboje a pozorovatele P , platí přímá úměrnost mezi potenciálem v bodě P a velikostí bodového náboje Q :

$$U(P) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R} Q \quad ,$$

kde koeficient úměrnosti závisí na vzdálenosti R pozorovatele a náboje, tedy závisí na jisté geometrické charakteristice uvažované soustavy. V případě složitějších rozložení zdrojů neexistuje obvykle jednoduchý vztah mezi potenciálem a celkovým nábojem. Avšak v případě vodičů platí, že potenciál na povrchu vodiče je rovněž přímo úměrný celkovému náboji, konstantu úměrnosti označme $1/C$:

$$U = \frac{1}{C} Q .$$

Častěji se tento vzorec zapisuje ve tvaru

$$Q = CU . \quad (8.35)$$

Veličina C se nazývá kapacita a je velmi důležitou charakteristikou elektrických vodičů. Kapacita vodiče závisí na tvaru a velikosti vodiče. Soustava vodičů, speciálně konstruovaná tak, aby měla velkou kapacitu, se nazývá kondenzátor. Kapacita kondenzátoru závisí též na vzájemné poloze vodičů a permitivitě prostředí mezi nimi.

Na tomto místě nemáme ještě teorii vybudovanou natolik, abychom mohli obecně dokázat uvedené tvrzení o úměrnosti potenciálu a náboje na vodiči. ~~Príslušný důkaz provedeme až v dalším dílu těchto skript.~~ Chtěli jsme však pojem kapacity zavést již zde, abychom jej mohli používat v konkrétních případech v následující kapitole^{ch}, jakmile zjistíme úměrnost mezi potenciálem a nábojem.

Je-li známa kapacita, můžeme snadno vyjádřit elektrostatickou energii nabitého vodiče. Protože na povrchu vodiče v ustáleném stavu je potenciál konstantní, lze vzorec (8.31) pro potenciální energii zapsat v jednoduchém tvaru

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma U dS = \frac{1}{2} U \iint_S \sigma dS = \frac{1}{2} UQ , \quad (8.36)$$

kde Q je celkový náboj na vodiči. Dosadíme-li za Q z (8.35), dostáváme odtud známý vzorec pro elektrostatickou energii nabitého vodiče ve tvaru

$$W = \frac{1}{2} CU^2 . \quad (8.37)$$

Tento vzorec udává také elektrostatickou energii nabitého kondenzátoru, jehož jedna deska se nachází na nulovém potenciálu (uzemněna) a na druhé je napětí U ; v tomto případě je sice plocha S tvořena dvěma deskami kondenzátoru, ale příspěvek uzeměné desky k integrálu (8.36) je nulový v důsledku $U=0$.

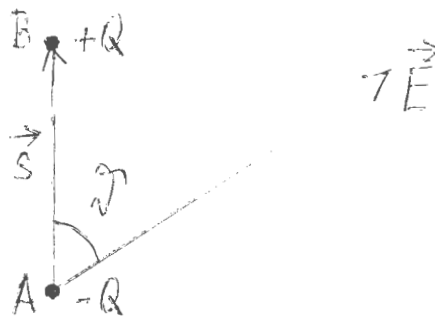
Všimněte si formální podobnosti vzorce (8.37) pro energii nabitého kondenzátoru a vzorce pro kinetickou energii pohybujícího se hmotného bodu $\frac{1}{2} mv^2$.

9. VÝCHOZÍ VZORCE PRO PŮSOBENÍ MEZI SLOŽITĚJŠÍMI OBJEKTY

9.1. Působení pole na dipól

Intenzitu pole, resp. potenciál, považujeme za veličinu, která příslušné pole plně popisuje. Intenzita je však síla, kterou pole působí na jednotkovou částici. Vzniká přirozeně otázka, jak pole působí na složitější objekty, než jsou částice, a do jaké míry je možné toto působení popsat pomocí intenzity. Vyšetříme nejprve působení pole na dipól, o obecnějším případě pojednáme v následujícím paragrafu. Na látku probíranou v tomto a v následujícím paragrafu nebudeme v dalším textu nikde navazovat. Čtenář, kterého tato problematika blíže nezajímá, může proto tuto kapitolu vynechat a přejít k další kapitole.

Uvažujme elektrický dipól o momentu \vec{p} ve vnějším, tj. cizím, elektrostatickém poli, jehož intenzita je $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$. Úhel mezi vektory \vec{p} a \vec{E} označme ϑ . Nahaďme nejprve dipól dvojicí stejně velikých bodových nábojů opačného znaménka. Nechť náboj $(-Q)$ ~~se~~ nachází v bodě A, náboj Q v bodě B,



Obr. 7

vektor s počátečním bodem v záporném náboji a koncovým bodem v kladném náboji označme \vec{s} , viz obr. 7. Moment dipólu se zavádí vztahem $\vec{p} = Q\vec{s}$. Souřadnice bodů podél osy dipólu, tj. podél přímky určené vektorem \vec{s} , označme l . Počátek této osy zvolme v bodě A a orientujme ji kladně směrem k bodu B, tedy $l(A) = 0$, $l(B) = s$. Výsledná síla působící na oba náboje je

$$\vec{F} = Q(\vec{E}(B) - \vec{E}(A)) = Q \frac{\partial \vec{E}(C)}{\partial l} s = p \frac{\partial \vec{E}(C)}{\partial l},$$

kde jsme použili větu o střední hodnotě, C je jistý bod na úsečce AB. V limitě, jestliže se \vec{s} zmenšuje k nule a Q současně roste do nekonečna tak, aby se vektor \vec{p} neměnil, dostaneme sílu působící na dipól ve tvaru

$$\vec{F}(A) = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} (A). \quad (9.1)$$

Tento vzorec ještě upravíme. Označme α, β, γ úhly, které s kartézskými souřadnicovými osami x, y, z svírá moment \vec{p} a tudíž i osa dipólu l . Pak platí

$$\begin{aligned} p \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} &= p \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} \right) = \\ &= p \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cos \gamma \right) = \quad (9.2) \\ &= p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}. \end{aligned}$$

Poslední vzorec jsme mohli dostat ihned z (9.1) použitím vlastnosti, která je zřejmá z názoru, že derivace libovolné skalární funkce (složky vektoru) v daném směru je rovna průmětu gradientu do tohoto směru; odvození v (9.2) není vlastně ničím jiným, než důkazem této vlastnosti. Vzorec (9.1) pro sílu působící na dipól můžeme tedy zapsat v ekvivalentním tvaru,

který se často používá / Votruba /,

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad})\vec{E} \quad (9.3)$$

Tedy
(vzorec (9.3)) můžeme ještě dále upravit užitím identity / Rektorys /

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \text{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + (\vec{a} \cdot \text{grad})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \text{grad})\vec{a} \quad .$$

Uvážíme-li, že \vec{p} je konstantní vektor nezávislý na souřadnicích x, y, z a pro elektrostatické pole platí $\text{rot} \vec{E} = 0$, vyplývá odtud jednoduchý vzorec / Stratton /:

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (9.4)$$

Odtud vidíme, že síla (9.4), kterou působí vnější elektrostatické pole na dipól, je rovněž konzervativní, protože ji lze vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F} = -\text{grad} V \quad , \quad (9.5)$$

kde V je potenciální energie dipólu ve vnějším elektrostatickém poli:

$$V = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad . \quad (9.6)$$

Kromě výsledné síly, označované též jako translační síla / Votruba /, působí na dipól ještě dvojice sil. Určeme její otáčivý moment \vec{T} . Nahaďme opět dipól dvojicí nábojů. Otáčivý moment vzhledem k pevnému bodu A (sídlu náboje $-Q$) je dán momentem síly, která působí na druhý náboj, tj. vektorovým součinem

$$\vec{T} = \vec{s} \times Q\vec{E}(B) = \vec{p} \times \vec{E}(B) \quad .$$

V limitě pro elementární dipól pak dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{T}(A) &= \vec{p} \times \vec{E}(A) \quad , \quad \text{čili zkráceně bez vypisování souřadnic} \\ \vec{T} &= \vec{p} \times \vec{E} \quad . \end{aligned} \quad (9.7)$$

Poznamenejme, že vzorce (9.1), (9.3) a (9.7) platí i v nestacionárním elektromagnetickém poli, avšak vzorce (9.4) a (9.6) nikoliv, protože v nestacionárním poli je obecně $\text{rot} \vec{E} \neq 0$.

Složitější vzorce, např. pro potenciální energii vyšších multipólů ve vnějším poli, zde odvozovat nebudeme, zájemce odkazujeme na učebnice elektřiny a magnetismu / Votruba /.

Úlohy

1. Dokažte, že homogenní pole (\vec{E} konstantní co do velikosti i směru) nepůsobí na dipól žádnou translační silou, pouze otáčivým momentem.

Řešení: Je-li \vec{E} konstantní vektor, ze vzorce (9.3) ihned plyne $\vec{F} = 0$.

2. Předpokládejme, že se dipól nemůže posunout z daného místa, ale může se v tomto místě libovolně otáčet. Vyšetřete, které z poloh dipólu vzhledem k vnějšímu poli jsou rovnovážné a která z nich je stabilní.

Řešení: Podle (9.6) je potenciální energie dipólu dána vzorcem

$$V = -pE \cos \vartheta,$$

kde ϑ je úhel mezi momentem dipólu \vec{p} a intenzitou \vec{E} . V rovnovážné poloze musí platit $\partial V / \partial \vartheta = 0$, tj. $pE \sin \vartheta = 0$. Rovnovážné polohy jsou tedy dvě, jedna pro $\vartheta = 0$ (moment dipólu má souhlasný směr se směrem pole) a druhá pro $\vartheta = \pi$ (moment dipólu má opačný směr než je směr pole). Poloha $\vartheta = 0$ je stabilní, protože v ní nabývá potenciální energie minimální hodnoty $V = -pE$. Poloha $\vartheta = \pi$ je labilní.

3. Na základě předchozí úlohy zdůvodněte, proč se magnetická střelka orientuje ve směru siločar magnetického pole.

Odpověď: V daném místě má při této orientaci minimální potenciální energii.

4. Odvoďte vzorce pro interakční energii dvou elektrických dipólů o momentech \vec{p} a \vec{p}' , nacházejících se ve vzdálenosti R od sebe / Votruba /.

Řešení: Ze vzorců (9.6), (7.25), (7.26) a (8.16) plyne

$$\begin{aligned} V &= \vec{p} \cdot \text{grad } U' = \vec{p} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{R}}{R^3} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \text{grad} (\vec{p}' \cdot \text{grad}' \frac{1}{R}) . \end{aligned}$$

9.2. Vzájemné působení dvou tuhých těles

Vzájemné působení mezi dvěma tělesy, která nejsou částicemi, může mít velmi složitý charakter. V první řadě je třeba si uvědomit, že jedno těleso nepůsobí na těleso druhé jedinou silou, ale působí silami na jednotlivé elementy druhého tělesa. V případě deformovatelného tělesa tyto síly obecně nemohou být skládány, obecně jejich účinek nelze dokonce vyjádřit ani konečným počtem sil. Omezme se proto pouze na tuhá tělesa / Kellog /.

V učebnicích mechaniky se dokazuje, že účinek všech sil působících na tuhé těleso lze nahradit jednou silou působící v libovolně zvoleném bodě O a silovou dvojicí. Tato síla je výslednicí všech sil působících na těleso. Silová dvojice závisí na poloze bodu O a její moment je ve vektorovém součtem momentů všech sil vzhledem k bodu O , které na těleso působí. Jestliže na tuhé těleso působí síly F_i v bodech o polohových vektorech \vec{r}_i ($i=1,2,\dots,n$), pak pro výslednou sílu platí

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i , \quad (9.8)$$

a je-li bod O , v němž předpokládáme působení výsledné síly, počátkem souřadnicové soustavy, dostáváme pro moment silové dvojice vyjádření

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i . \quad (9.9)$$

Jestliže síly působící na tuhé těleso jsou rozloženy spojitě, sumační znaménka musí být nahrazena integrály.

Uvažujme dvě tuhá tělesa, těleso T_1 zaujímající oblast prostoru V_1 a těleso T_2 zaujímající oblast V_2 . Vyšetřujme

gravitační přitažlivost, kterou těleso T_2 působí na těleso T_1 . Prvním krokem je opět rozdělení těles na elementy, soustředění hmoty každého elementu do jednoho jeho bodu a vyšetření přitažlivosti takto vzniklých soustav částic. Nechť ΔV_1 označuje nějaký element objemu V_1 , který obsahuje bod P o polohovém vektoru $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, a ΔV_2 je nějaký element objemu V_2 , který obsahuje bod Q o polohovém vektoru $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, viz obr. 8. Zavedeme-li vektor $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, je $R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ vzdálenost bodů P a Q . Nechť ρ_1 a ρ_2 jsou střední hodnoty hustot v elementech ΔV_1 a ΔV_2 . Potom částice v bodě Q v elementu ΔV_2 působí na částici v bodě P v elementu ΔV_1 silou, jejíž x-ová složka je

$$\Delta F_x^{(12)} = -G \rho_1 \rho_2 \Delta V_1 \Delta V_2 \frac{x_1 - x_2}{R^3},$$

kde R je vzdálenost bodů P a Q . Moment této síly vzhledem k počátku má x-ovou složku

$$\begin{aligned} \Delta M_x^{(12)} &= -G \rho_1 \rho_2 \Delta V_1 \Delta V_2 \left[y_1 \frac{z_1 - z_2}{R^3} - z_1 \frac{y_1 - y_2}{R^3} \right] = \\ &= G \rho_1 \rho_2 \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{R^3} \Delta V_1 \Delta V_2. \end{aligned}$$



Obr. 8

Tyto složky, působené dvojicemi částic, musíme nyní sečíst přes všechny dvojice a provést limitu, jestliže se ~~maximální~~^{průměrná} tětiva elementů blíží k nule. Dospíváme k následujícímu výsledku / Kellogg /:

V soulase s rozšířeným zněním Newtonova gravitačního zákona lze přitažlivost, kterou tuhé těleso T_2 působí na tuhé těleso T_1 , vyjádřit pomocí síly

$$\vec{F}^{(12)} = -G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \rho_1 \rho_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{R^3} dV_1 dV_2, \quad (9.10)$$

která působí v počátku soustavy souřadnic, a pomocí dvojice sil, jejíž moment je

$$\vec{M}^{(12)} = G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \rho_1 \rho_2 \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{R^3} dV_1 dV_2; \quad (9.11)$$

tuto přitažlivost lze popsat ovšem i jakoukoliv jinou ekvivalentní dvojicí vektorů - síly a silové dvojice. Povšimněme si, že z těchto vzorců ihned plyne zákon akce a reakce

$$\vec{F}^{(21)} = -\vec{F}^{(12)}, \quad \vec{M}^{(21)} = -\vec{M}^{(12)}.$$

Vzorce (9.10) a (9.11) představují analytickou formulaci Newtonova gravitačního zákona v jeho rozšířeném znění pro případ tuhých těles. Jsou to nejobecnější vzorce pro popis gravitačního působení, které v těchto skriptech uvádíme.

Nyní bychom měli vyšetřit, zdali uvedené tvrzení o působení mezi dvěma tělesy je ve shodě s Newtonovým gravitačním zákonem pro hmotné body. /Kellogg /. Nechť se tedy ~~maximální~~^{průměrná} tětiva obou těles zmenšuje k nule, přičemž těleso T_1 stále obsahuje počátek souřadnic O a těleso T_2 stále obsahuje nějaký pevný bod Q_0 , jehož polohový vektor označíme \vec{r}_{20} . Vyšetřeme nejprve moment silové dvojice. Užitím věty o střední hodnotě integrálního počtu a vlastnosti, že hustoty nejsou nikdy záporné, můžeme psát

$$\vec{M}(12) = G \frac{\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_2}{R'^3} \int_{V_1} \int_{V_2} \int_1 \int_2 dV_1 dV_2 = G \frac{\vec{r}'_1 \times \vec{r}'_2}{R'^3} m_1 m_2 ,$$

kde \vec{r}'_1 je polohový vektor nějakého bodu ve V_1 a \vec{r}'_2 polohový vektor nějakého bodu ve V_2 , R' je vzdálenost těchto bodů, m_1 a m_2 jsou hmotnosti těles. Jakmile se rozměry těles blíží k nule (postačí dokonce, aby se blížily k nule jen rozměry tělesa T_1), vektor \vec{r}'_1 se blíží k nule a tedy i momenty silové dvojice se blíží k nule. Protože je moment nulový, plyne odtud, že silové působení tělesa na částici se redukuje na jednu výslednou sílu, která působí na tuto částici. Obdobně budeme postupovat při úpravě vzorce (9.10) pro sílu. Jestliže se tělesa stahují do hmotných bodů, jeden v počátku a druhý v bodě Q_0 , síla se blíží veličině

$$\vec{F}(12) = G \frac{\vec{r}_{20}}{r_{20}^3} m_1 m_2 ,$$

což souhlasí s Newtonovým zákonem pro hmotné body. Tedy souhlas rozšířeného gravitačního zákona se zákonem pro hmotné body je ověřen.

Pohled na šestirozměrné integrály ve vzorcích (9.10) a (9.11) a představa, že bychom takové integrály měli počítat v uvedené formě, působí nepochybně skličujícím dojmem. Ukážeme však, že uvedené šestirozměrné integrály lze převést na postupný výpočet dvou trojných integrálů. Kromě toho v řadě úloh vymizí moment silové dvojice nebo jej nepotřebujeme počítat / Kellogg /.

Uvažujme malou část tělesa T_1 obsaženou v objemu ΔV_1 a obsahující pevný bod $P_0(\vec{r}_{10})$. Počítejme sílu $\Delta \vec{F}$, kterou na tuto část působí těleso T_2 . Tato síla je dána vzorcem (9.10), v němž je třeba integrační obor V_1 nahradit oborem ΔV_1 . Budeme předpokládat spojitě hustoty a jednoduché oblasti integrace, takže šestirozměrný integrál může být nahrazen dvojnásobným výpočtem trojného integrálu:

$$\Delta \vec{F} = -G \int_{\Delta V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1 \rho_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{R^3} dV_2 \Big] dV_1 .$$

Vnitřní integrál je pouze funkcí \vec{r}_1 a pokud ρ_1 nemění znaménko, může být tento integrál zapsán před vnější integrál užitím věty o střední hodnotě integrálního počtu:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta F} &= -G \iiint_{V_2} \frac{\rho_2(\vec{r}'_1 - \vec{r}_2)}{R'^3} dV_2 \iiint_{\Delta V_1} \rho_1 dV_1 = \\ &= -G \iiint_{V_2} \frac{\rho_2(\vec{r}'_1 - \vec{r}_2)}{R'^3} dV_2 \cdot \Delta m, \end{aligned}$$

kde $P'(\vec{r}'_1)$ je nějaký bod v elementu ΔV_1 , R' je jeho vzdálenost od proměnného bodu $Q(\vec{r}_2)$ ve V_2 a Δm je hmotnost elementu ΔV_1 . Vydělíme-li nyní tuto sílu veličinou Δm a budeme zmenšovat ~~průměr elementu~~ maximální tětívu v ΔV_1 k nule, ~~abychom~~ aby bod P_0 stále zůstává uvnitř ΔV_1 , dospíváme k limitě

$$\vec{E}(\vec{r}_{10}) = \lim \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta m} = -G \iiint_{V_2} \frac{\rho_2(\vec{r}_{10} - \vec{r}_2)}{R_0^3} dV_2,$$

kde $R_0 = \overline{P_0 Q}$. Vektor $\vec{E}(\vec{r}_{10})$ udává specifickou sílu, tj. sílu na jednotku hmotnosti, v bodě P_0 působenou tělesem T_2 . Porovnáním posledního vzorce se vzorcí z paragrafu 7.3 však zjistíme, že $\vec{E}(\vec{r}_{10})$ je také síla působená tělesem T_2 na jednotkovou částici v bodě P_0 (intenzita v bodě P_0). Odtud vidíme, že pojmy specifické síly a intenzity jsou totožné.

Význam specifické síly spočívá v tom, že umožňuje nalézt sílu působící na celé těleso T_1 násobením specifické síly v bodě $P(\vec{r}_1)$ hustotou ρ_1 a integrací přes objem V_1 :

$$\vec{F}(12) = \iiint_{V_1} \rho_1 \vec{E}(\vec{r}_1) dV_1. \quad (9.12)$$

Tím dostáváme jiné vyjádření integrálu (9.10). I když možnost vyjádření celkové síly v tomto tvaru jsme mohli očekávat, uvedený postup blíže ukázal na vazbu mezi posledním vzorcem a výchozím vzorcem (9.10). Obdobně bychom mohli konstruovat vzorec pro moment silové dvojice (9.11). Odtud je vidět, proč je znalost intenzity pole, jako síly působící na jednotkovou částici, tolik důležitý / Kellogg /.

Závěrem tohoto paragrafu se ještě pokusme o nalezení jistého potenciálu, kterým by bylo možné popsat vzájemné gravitační působení dvou tuhých těles. Tvar integrandu ve vzorci (9.10) ukazuje na to, že i zde bude možné zavést gradient nějaké skalární funkce. Podle analogie se vzorci (8.16) ihned dostáváme

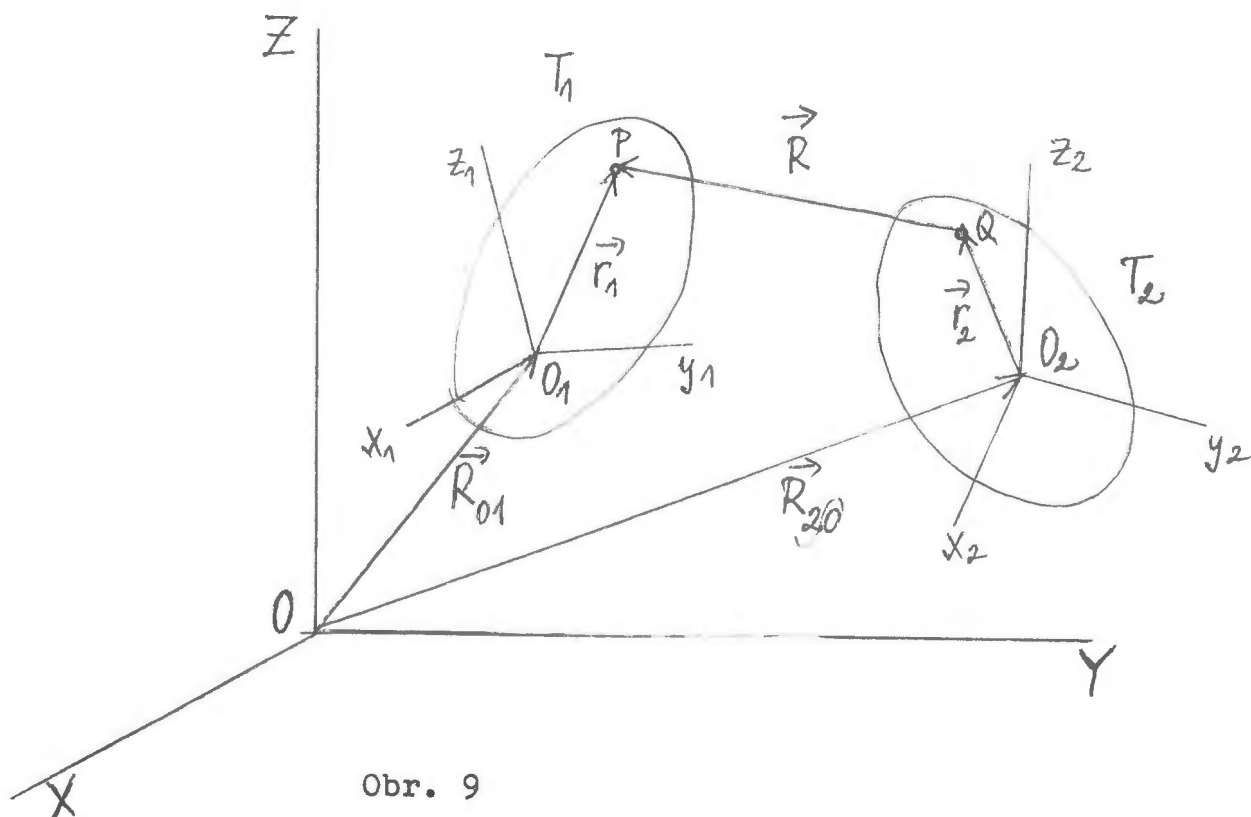
$$\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{R^3} = \frac{\vec{R}}{R^3} = -\text{grad}_1\left(\frac{1}{R}\right) = \text{grad}_2\left(\frac{1}{R}\right) ,$$

kde indexy 1 a 2 u gradientů označují, zdali se derivuje podle souřadnic bodů prvního nebo druhého tělesa. Vzorec (9.10) lze tak vyjádřit např. ve tvaru

$$\vec{F}(12) = G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \rho_1 \rho_2 \text{grad}_1\left(\frac{1}{R}\right) dV_1 dV_2 .$$

Tento zápis svádí k tomu, abychom gradient napsali ihned před všechny integrály, jak jsme to dělali v paragrafu 8.1. Zatím to však provést nemůžeme a to hned ze dvou důvodů; jednak v integrandu ještě vystupuje hustota ρ_1 , která rovněž závisí na souřadnicích s indexy 1, a kromě toho se přes tyto souřadnice integruje, takže grad_1 nepředstavuje typickou derivaci podle parametru. Posledně uvedený vzorec je zajímavý, ale k dalším úvahám se příliš nehodí. Ukázal však, v čem je problém, že totiž je třeba oddělit skutečné parametry od proměnných, přes které se integruje.

Hustota ρ_1 v bodě P závisí pouze na poloze tohoto bodu v tělese T_1 , rovněž ρ_2 závisí pouze na poloze bodu Q v tělese T_2 . Avšak vzdálenost R bodů P, Q závisí nejen na poloze těchto bodů v příslušných tělesech, ale též na vzájemné poloze obou těles. Vzájemnou polohu těles T_1 a T_2 můžeme např. popsat pomocí vzájemné polohy dvou kartézských souřadnicových soustav, pevně spojených s jednotlivými tělesy (obr. 9). Označme S_1 souřadnicovou soustavu s počátkem O_1 a osami x_1, y_1, z_1 , která je pevně spojena s tělesem T_1 , soustavu S_2 s počátkem O_2 a osami x_2, y_2, z_2 spojenou s T_2 a ještě další soustavu S, referenční, s počátkem O a osami X, Y, Z; poznamenejme, že některá označení v obr. 9 se liší od obr. 8. Polohové vektory $\vec{R}_{O_1} = (X_{O_1}, Y_{O_1}, Z_{O_1})$ a $\vec{R}_{O_2} = (X_{O_2}, Y_{O_2}, Z_{O_2})$ udávající polohu počátků soustav S_1 a S_2 vzhledem k S.



Obr. 9

Polohový vektor bodu \$P\$ v soustavě \$S_1\$ označme \$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)\$, polohový vektor téhož bodu v soustavě \$S\$ označme \$\vec{R}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)\$, tj. \$\vec{R}_1 = \vec{R}_{01} + \vec{r}_1\$. Polohové vektory bodu \$Q\$ v soustavách \$S_2\$ a \$S\$ obdobně označme

$$\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad \text{a} \quad \vec{R}_2 = (X_2, Y_2, Z_2), \quad \text{kde} \quad \vec{R}_2 = \vec{R}_{02} + \vec{r}_2.$$

Mezi souřadnicemi bodu \$P\$ v soustavách \$S\$ a \$S_1\$ musí platit lineární vztahy, protože obě soustavy jsou kartézské (jen navzájem posunuté a otočené / Rektorys /):

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{01} + a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \\ Y_1 &= Y_{01} + a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1, \\ Z_1 &= Z_{01} + a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1, \end{aligned} \quad (9.13)$$

kde \$a_{ij}\$ jsou směrové kosiny udávající vzájemnou orientaci os obou soustav / Rektorys /. Obdobné vztahy platí pro souřadnice bodu \$Q\$:

$$X_2 = X_{02} + b_{11}x_2 + b_{12}y_2 + b_{13}z_2 \quad ,$$

$$Y_2 = Y_{02} + b_{21}x_2 + b_{22}y_2 + b_{23}z_2 \quad , \quad (9.14)$$

$$Z_2 = Z_{02} + b_{31}x_2 + b_{32}y_2 + b_{33}z_2 \quad .$$

Vektor \vec{R} , určený počátečním bodem Q a koncovým bodem P , lze vyjádřit jako

$$\vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2 = (X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2) \quad . \quad (9.15)$$

Jeho velikost je

$$R = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} \quad . \quad (9.16)$$

Zapišeme-li integrál (9.10) ve tvaru

$$\vec{F}^{(12)} = -G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_2}{R^3} dV_1 dV_2 \quad (9.17)$$

a dosadíme sem za \vec{R} užitím vzorců (9.13) až (9.16), po integraci přes objem V_1 vymizí závislost na x_1, y_1, z_1 a po integraci přes V_2 vymizí závislost na x_2, y_2, z_2 . Při daných tělesech T_1 a T_2 je pak integrál (9.17) funkcí zbývajících veličin vystupujících v (9.13) a (9.14), tj. závisí na parametrech $X_{01}, Y_{01}, Z_{01}, X_{02}, Y_{02}, Z_{02}, a_{ij}, b_{ij}$, ($i, j=1, 2, 3$) , které charakterizují polohy obou těles (lze ukázat, že z devíti koeficientů a_{ij} , resp. b_{ij} , jsou pouze tři nezávislé a bývají často nahrazovány třemi Eulerovými úhly).

Složky vektoru \vec{R}/R^3 v (9.17) bude nyní chtít vyjádřit jako derivace funkce $1/R$ podle některých výše uvedených parametrů. Užitím (9.16) a první z rovnic (9.13) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial X_{01}} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial X_1}{\partial X_{01}} = - \frac{X_1 - X_2}{R^3} \quad .$$

Odtud plyne, že vzorec (9.17) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F}^{(12)} = G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) \text{grad}_{01} \left(\frac{1}{R} \right) dV_1 dV_2 \quad , \quad (9.18)$$

kde symbolem grad_{O_1} rozumíme vektor, jehož složky se dostanou derivováním podle parametrů X_{O_1} , Y_{O_1} a Z_{O_1} . Protože tyto parametry vystupují v integrandu pouze ve funkci $1/R$, můžeme příslušné derivování považovat za derivování integrálu podle parametru. Jsou-li splněny potřebné podmínky pro záměnu derivace a integrálu, můžeme (9.18) vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F}^{(12)} = -\text{grad}_{O_1} U^{(12)}, \quad (9.19)$$

kde

$$U^{(12)} = -G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \frac{\rho_1 \rho_2}{R} dV_1 dV_2. \quad (9.20)$$

Skalární funkce $U^{(12)}$ se obvykle nazývá vzájemným potenciálem dvou těles. Závisí obecně na 12 nezávislých parametrech, které určují polohu obou těles, tedy např. na parametrech X_{O_1} , Y_{O_1} , Z_{O_1} , X_{O_2} , Y_{O_2} , Z_{O_2} a po třech nezávislých z parametrů a_{ij} a b_{ij} . Zopakujme ještě, jak bylo uvedeno na začátku paragrafu, že $\vec{F}^{(12)}$ je výsledná gravitační síla vztahovaná k bodu $O_1(X_{O_1}, Y_{O_1}, Z_{O_1})$ pevného tělesa, kterou na první těleso T_1 působí těleso T_2 (příslušný bod je označen jako O_1 na obr. 9, ale na obr. 8 jako O).

Vyjadřováním momentu silové dvojice pomocí vzájemného potenciálu se zde již zabývat nebudeme, ale odkazujeme zájemce např. na knihy / Dubošin I, Dubošin II /.

10. GRAVITAČNÍ A ELEKTROSTATICKÉ POLE SFÉRICKY SYMETRICKÝCH TĚLES

" ... já si vážně myslím, ... že hlavní oprávnění matematikovy existence je v řešení problémů, a že tedy skutečným jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení."

(P.R. Halmos [1])

Dříve než přistoupíme ke studiu obecných vlastností potenciálů, vyšetříme v kapitole 10 a 11 ~~gravitační, elektrostatické a magnetostatické~~ pole speciálních těles. Často se v učebnicích postupuje v opačném pořadí. Zde však chceme začít s konkrétními příklady, protože některé speciální výsledky mohou být použity i v obecné teorii, vlastnosti speciálních polí rovněž ilustrují některé obecné vlastnosti a zejména pak uvedené modely nacházejí četné aplikace ve fyzice, geofyzice a astronomii, ~~A Kellogg /~~.

Vlastnosti objemového potenciálu budeme ilustrovat zejména na potenciálu koule (tato kap. 10), vlastnosti dalších typů potenciálů na modelech vyšetřovaných v následující kapitole.

Omezíme se převážně jen na vyšetřování gravitačních polí příslušných těles, přenos výsledků na elektrostatická pole není obtížný, viz předchozí kapitolu; místo konstanty $(-G)$ je třeba psát $1/(4\pi\epsilon)$, kde ϵ je permitivita příslušného prostředí, v případě vakua bude $\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Intenzita pro

10.1. sféricky symetrickou (Newtonovu) kouli

Uvažujme kouli, ve které je hustota ρ pouze funkcí vzdálenosti od středu r' , tj. $\rho = \rho(r')$. Tomuto kulově symetrickému tělesu se někdy říká Newtonova koule / Idelson /. Speciálním případem je např. homogenní koule, kterou se zde rovněž budeme zabývat. Newtonova koule je velmi často používaným modelem ve fyzice, astronomii, geofyzice a geodézii.

Poloměr koule označme a . Počítejme gravitační pole v nějakém bodě P ve vzdálenosti r od středu koule (obr. 10). Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby měla počátek ve středu koule a osa z procházela bodem P . Označme r' , ϑ' a φ' sférické souřadnice elementů koule. Výpočet intenzity gravitačního pole provedeme ve sférických souřadnicích / Kellogg, Neumann /. Pro element objemu ve sférických souřadnicích platí známý vztah

$$dV = r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi' \quad (10.1)$$

a pro vzdálenost R bodu P a elementu koule platí podle kosinové věty

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'. \quad (10.2)$$

Vzhledem k symetrii úlohy bude mít intenzita nenulovou pouze radiální složku intenzity $E_r(P)$, která při naší volbě souřadnic souhlasí se složkou ^{intenzity} $E_z(P)$. Kromě toho v bodě P platí $z = r$. Užitím (7.15) dostáváme

$$\begin{aligned} E_r(P) = E_z(P) &= -G \iiint_V \rho \frac{z-z'}{R^3} dV = \\ &= -G \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho (r-r' \cos \vartheta') \frac{r'^2 \sin \vartheta'}{(r^2+r'^2-2rr' \cos \vartheta')^{3/2}} dr' d\vartheta' d\varphi' = \\ &= -2\pi G \int_0^a \rho \left[\int_0^\pi f(\vartheta') \frac{dg(\vartheta')}{d\vartheta'} d\vartheta' \right] dr', \end{aligned}$$

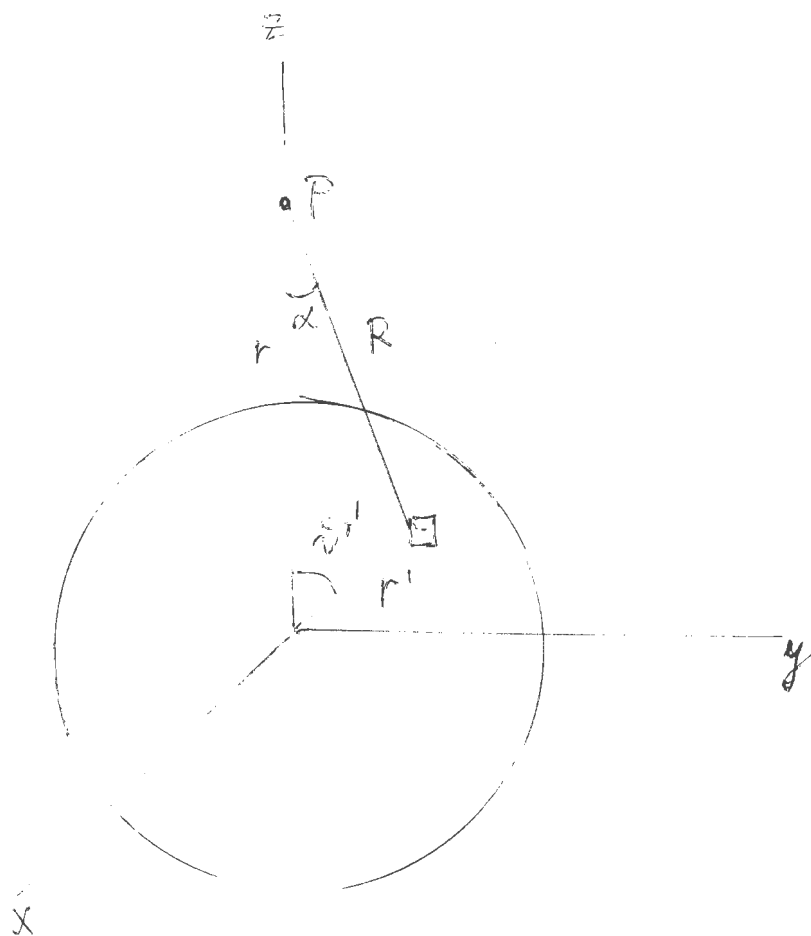
kde

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(r'), \\ f(\vartheta') &= r-r' \cos \vartheta', \end{aligned}$$

$$g(\vartheta') = \frac{-r'}{r \sqrt{r^2+r'^2-2rr' \cos \vartheta'}}.$$

Integrací per partes podle ϑ' dostaneme

66
- ~~66~~ -



Obv. 10

$$E_r(r) = -2\pi G \int_0^a \rho \frac{r'}{r} \left[-1 + \frac{r-r'}{|r-r'|} + \frac{r+r'-|r-r'|}{r} \right] dr' \quad (10.3)$$

Výraz v hranaté závorce v integrandu je roven $2r'/r$ pro $r \geq r'$ a je nulový pro $r < r'$.

Jestliže bod P leží vně koule, je r větší než jakékoliv r' . Z posledního vzorce pak pro pole vně koule plyne

$$E_{r,e}(r) = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^a \rho(r') r'^2 dr' \quad (10.4)$$

kde index e označuje, že se jedná o vnější pole (externí). Zaveďme do tohoto vzorce celkovou hmotnost koule M , pro níž zřejmě platí

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \rho dV = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r') r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi' = \\ &= 4\pi \int_0^a \rho(r') r'^2 dr' \quad (10.5) \end{aligned}$$

Intenzitu gravitačního pole vně a na povrchu koule lze tedy psát v jednoduchém tvaru

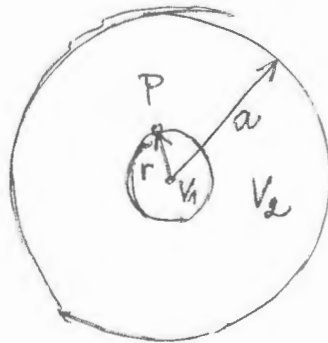
$$E_{r,e}(r) = -\frac{GM}{r^2} \quad , \quad (r \geq a) \quad (10.6)$$

Tento vzorec je stejný jako vzorec pro intenzitu gravitačního pole hmotného bodu o hmotnosti M umístěného v počátku. Dostali jsme tak známý výsledek, že gravitačního pole vně a na povrchu kulově symetrického tělesa je stejné jako gravitační pole hmotného bodu, který se nachází ve středu koule a v němž je soustředěna veškerá hmota koule. Tento výsledek také např. zdůvodňuje, proč lze při výpočtech drah planet považovat planety i Slunce s dostatečnou přesností za hmotné body. Na druhé straně má tento výsledek, tj. nezávislost vnějšího pole na konkrétním tvaru funkce $\rho(r')$, velmi nepříznivé důsledky pro řešení některých jiných úloh. Např. ^{klad} odtud vyplývají velmi

pesimistické závěry o možnosti gravimetrického výzkumu zemského nitra. Ze vzorce (10.6) plyne, že kdyby Země byla kulově symetrická, nebylo by možné žádným měřením gravitačního pole vně Země nebo na jejím povrchu určit nic více než celkovou hmotnost Země.

Z gravimetrických dat nelze tedy určovat radiální průběh hustoty v Zemi; bez doplňkových údajů každá taková snaha představuje nejednoznačnou úlohu, mluvíme o nejednoznačnosti interpretace gravimetrických dat. Při určování průběhu hustoty s hloubkou se proto využívají ještě jiné údaje, zejména seismické a astronomické. Z měření gravitačního pole můžeme určovat jen odchylky v rozložení hmot od kulové symetrie. Zásadní význam gravimetrických údajů při studiu tvaru Země je poněkud jiná otázka, kterou se budeme stručně zabývat ve třetí části těchto skript. K některým z těchto otázek se ještě vrátíme na konci této kapitoly.

Je-li bod P vnitřním bodem koule, musíme integrál v (10.3) rozdělit na dva, první přes interval $(0, r)$ a druhý přes interval (r, a) , viz obr. 11.



Obr. 11

Druhý integrál je nulový, protože je $r < r'$ a integrand v (10.3) je nulový. Odtud plyne vzorec pro intenzitu gravitačního pole ve vnitřním (interním) bodě koule ve tvaru

$$E_{r,i}(r) = - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = - \frac{Gm(r)}{r^2}, \quad (10.7)$$

kde

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (10.8)$$

je hmotnost koule V_1 o poloměru r (obr.11). Tedy ve vnitřním bodě P přispívají k intenzitě pouze hmoty koule V_1 , jejíž povrch prochází bodem P . Příspěvek hmot z kulové vrstvy V_2 , které se nacházejí ve větších vzdálenostech od středu koule než bod P , je nulový. Konkrétní závislost intenzity na vzdálenosti r závisí na tvaru funkce ρ . Několik konkrétních speciálních případů budeme vyšetřovat až dále.

Přes některé podobnosti pole Newtonovy koule s polem hmotného bodu existují i zásadní rozdíly. V místě hmotného bodu je intenzita nekonečná, kdežto uvnitř Newtonovy koule je intenzita všude konečná, jak hned ukážeme. Označme ρ_{\max} maximální hodnotu hustoty v kouli a předpokládejme, že ρ_{\max} je konečné číslo. Z (10.8) pak plyne

$$m \leq \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\max}$$

a dosazením do (10.7) dostáváme

$$|E_{r,i}(r)| \leq \frac{4}{3} \pi G r \rho_{\max}. \quad (10.9)$$

Intenzita pole je tedy všude konečná, ve středu koule je dokonce nulová. ^{ke zoll od pole hmotného bodu} Souvisí s tím, že v místě hmotného bodu je hustota nekonečná, ale zde uvažujeme jen konečné hustoty. Dokážeme ještě více, že za daných předpokladů je intenzita všude spojitá. Spojitost vnějšího pole je zřejmá ze vzorce (10.6), spojitost na povrchu $r=a$ z toho, že vzorce (10.6) a (10.7) zde dávají stejné hodnoty. Pro vnitřní pole uvažujeme rozdíl

$$|E_{r,i}(r+\Delta r) - E_{r,i}(r)| = \frac{4\pi G}{r^2} \int_r^{r+\Delta r} \rho(r') r'^2 dr' \leq (10.10)$$

$$\leq \frac{4}{3} \pi G \rho_{\max} \frac{3r^2 \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3}{r^2} \leq 4\pi G \rho_{\max} \Delta r .$$

Uvedený rozdíl intenzit lze udělat libovolně malý, zvolíme-li dostatečně malé Δr . To znamená, že intenzita je spojitá. Poznamenejme, že intenzita je spojitá i v místech, kde se hustota mění skokem, tj. na povrchu koule a na případných rozhraních uvnitř koule.

Pro první derivace intenzity již uvedená vlastnost spojitosti obecně neplatí. Ukážeme, že první derivace intenzity pro Newtonovu kouli jsou nespojité ve všech místech, kde je nespojitá hustota, tj. na povrchu koule a na hustotních rozhraních uvnitř koule.

Derivaci intenzity ve vnějším bodě podle průvodiče r dostaneme snadno derivováním vzorce (10.6):

$$\frac{dE_{r,e}(r)}{dr} = \frac{2GM}{r^3} = - \frac{2E_{r,e}(r)}{r} \quad \text{pro } r \geq a. \quad (10.11)$$

Toto je funkce spojitá všude vně koule. Pro derivaci intenzity ve vnitřním bodě koule plyne z (10.7):

$$\frac{dE_{r,i}(r)}{dr} = \frac{2Gm(r)}{r^3} - \frac{G}{r^2} \frac{dm(r)}{dr} . \quad (10.12)$$

K výpočtu derivace $dm(r)/dr$ je třeba použít větu o derivování integrálu podle parametru při proměnných mezích [Rektorys, Jarník IV]:

Jsou-li $\alpha(r)$ a $\beta(r)$ funkce se spojitou derivací v intervalu $\langle r_1, r_2 \rangle$ a jsou-li $f(r,s)$ a $\partial f / \partial r$ spojitě v obrazci

$r_1 \leq r \leq r_2, \alpha(r) \leq s \leq \beta(r)$, pak platí

$$\frac{d}{dr} \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r,s) ds = \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} \frac{\partial f(r,s)}{\partial r} ds +$$

$$+ \beta'(r) \cdot f(r, \beta(r)) - \alpha'(r) \cdot f(r, \alpha(r)). \quad (10.13)$$

Protože ^{ve} funkci $m(r)$, dané vzorcem (10.8), vystupuje proměnná r pouze v horní mezi integrálu, plyne odtud

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2. \quad (10.14)$$

Dosazením do (10.12) dostaneme výsledný vzorec

$$\frac{dE_{r,i}(r)}{dr} = \frac{2E_{r,i}(r)}{r} - 4\pi G \rho(r). \quad (10.15)$$

Protože $E_{r,i}$ je funkce spojitá (jak jsme výše dokázali) a na povrchu koule přechází spojitě na $E_{r,e}$, plyne odtud, že derivace intenzity (10.15) je nespojitá pro všechna r , pro něž je nespojitá hustota ρ .

Vzorec (10.15) je speciálním případem tzv. Brunsova vzorce, který má velký význam v teorii tíhových redukci a v teorii tvaru rovnovážných kapalin / Idelson/.

Počítejme ještě divergenci intenzity. V kartézských souřadnicích se divergence vektoru $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ definuje známým vzorcem

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (10.16)$$

Odvoďme nejprve vzorec pro divergenci ve sférických souřadnicích ve speciálním případě, kdy \vec{E} vytváří centrální pole, jako je tomu v našem případě.

Je-li

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad (10.17)$$

kde $\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor, zřejmě platí

$$E_x = E_r(r) \frac{x}{r} \quad , \quad E_y = E_r(r) \frac{y}{r} \quad , \quad E_z = E_r(r) \frac{z}{r} \quad .$$

Protože je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, plyne odtud $\partial r / \partial x = x/r$
a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial E_r(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r} + E_r(r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \\ &= \frac{dE_r(r)}{dr} \frac{x^2}{r^2} + \frac{E_r(r)}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) . \end{aligned}$$

Obdobně lze vyjádřit i další dva členy ve výrazu pro divergenci. Sečtením pak dostaneme vzorec pro divergenci centrálního pole ve tvaru

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE_r(r)}{dr} + \frac{2E_r(r)}{r} \quad . \quad (10.18)$$

Dosadíme-li sem vzorce (10.11) a (10.15) pro derivace intenzity Newtonovy koule, dostáváme pro vnější pole

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (10.19)$$

a pro vnitřní pole

$$\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi G \rho, \quad (10.20)$$

kde ρ je hustota v tom místě, v kterém určujeme divergenci.

~~Ověřili jsme tak platnost obecných rovnic pro divergenci, které byly uvedeny v paragrafu 7.5, na případě Newtonovy koule.~~

~~Čtenář může právem namítnout, že jsme vzorce pro intenzitu Newtonovy koule (10.6) a (10.7) mohli, v důsledku symetrie úlohy, mnohem snadněji určit užitím Gaussova zákona (7.34), uvedeného~~

Užitím Gaussovy věty integrálního počtu dostáváme z posledních dvou rovnic Gaussův zákon:

$$\iint_S E_n \, dS = - 4\pi GM \quad , \quad (10.21)$$

kde S je libovolná uzavřená plocha, E_n je složka intenzity ve směru vnější normály k ploše S a M je celková hmota uzavřená plochou S . V kap. 12 ukážeme, že vzorce (10.19) až (10.21), zde odvozené jen pro Newtonovu kouli, mají mnohem obecnější platnost.

Úlohy

1. Vyjděte z platnosti Gaussova zákona (10.21) a ukažte, že z něj ihned plynou vzorce (10.6) a (10.7) pro intenzitu gravitačního pole Newtonovy koule.
2. Tentokrát za výchozí rovnice zvolte diferenciální rovnice (10.19) a (10.20). Odvoďte z nich vzorce pro intenzitu gravitačního pole Newtonovy koule (10.6) a (10.7).

Řešení: Nejprve řešme rovnici pro vnější pole. Vzhledem k symetrii úlohy vede rovnice (10.19) na obyčejnou homogenní diferenciální rovnici (index r pro označení radiální složky vynecháváme):

$$\frac{dE(r)}{dr} + \frac{2E(r)}{r} = 0 \quad . \quad (10.22)$$

Toto je Eulerova diferenciální rovnice, kterou lze substitucí $r=e^t$ převést na rovnici s konstantními koeficienty a tu snadno vyřešit. Vyjde

$$E(r) = \frac{C}{r^2} \quad , \quad (10.23)$$

kde C je nějaká konstanta. Pro vnitřní pole máme nehomogenní rovnici

$$\frac{dE(r)}{dr} + \frac{2E(r)}{r} = - 4\pi G \rho(r) \quad . \quad (10.24)$$

Její obecné řešení je součtem partikulárního řešení této rovnice a obecného řešení homogenní rovnice (10.22). Partikulární řešení určíme metodou variace konstant, tj. v řešení

(10.23) homogenní rovnice zaměníme konstantu C funkcí $C(r)$. Dosazením do (10.24) dostáváme rovnici

$$\frac{dC(r)}{dr} = -4\pi G r^2 \rho(r) \quad ,$$

jejíž řešení, až na aditivní konstantu, lze zapsat ve tvaru

$$C(r) = -4\pi G \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' \quad .$$

Obečné řešení rovnice (10.24) má tedy tvar

$$E(r) = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' + \frac{D}{r^2} \quad , \quad (10.25)$$

kde D je nějaká konstanta. Protože ve středu koule ($r=0$) je intenzita nulová (z důvodů symetrie úlohy), musíme položit $D=0$ a tím dostáváme vzorec pro vnitřní pole (10.7). Zbývá určit konstantu C ve vzorci (10.23) pro vnější pole; použijeme požadavku, aby na povrchu koule byla intenzita spojitá.

Úlohy

1. Vyjděte z platnosti Gaussova zákona (10.21) a ukažte, že z něj ihned plynou vzorce pro intenzitu (10.6) a (10.7).

3. Vyjádření intenzity vnitřního pole pomocí střední hustoty / Idelson/. Místo $m(r)$ je možné zavést střední hustotu v kouli o poloměru r . Označíme-li ji jako $D(r)$, lze ji zřejmě definovat vztahem

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 D(r) \quad . \quad (10.26)$$

Vyjádřete intenzitu vnitřního pole pomocí $D(r)$.

Odpověď:

$$E_{r,i}(r) = -\frac{4}{3} \pi G r D(r) \quad . \quad (10.27)$$

4. Tisserandův parametr / Idelson /. Funkce $D(r)$, zavedená v (10.26), má velký význam v teorii tvaru Země a jiných nebeských těles. Výraz rD'/D se nazývá Tisserandův parametr. V jakých mezích mohou ležet hodnoty tohoto parametru při libovolném rozložení hustoty uvnitř Newtonovy koule a speciálně v případě kapalně Newtonovy koule?

Řešení: Porovnáním (10.8) a (10.26) dostáváme

$$r^3 D(r) = 3 \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad .$$

Derivováním podle r odtud plyne

$$3r^2 D(r) + r^3 D'(r) = 3 \rho(r) r^2 \quad ,$$

neboli

$$r \frac{D'}{D} = \frac{3\rho}{D} - 3 \quad .$$

Protože hustota může nabývat nejmenší hodnoty nulové, plyne odtud minimální hodnota $r \frac{D'}{D} = -3$. Naopak v případě kulové slupky, viz níže, roste hustota ρ v místě slupky nade všechny meze a přitom D zůstává omezené. V tomto případě dostáváme

horní mez $r \frac{D'}{D} = +\infty$. Jedná-li se o kapalinu v ustáleném stavu, nesmí hustota směrem od středu koule růst, jinak by nastala nestabilní situace a hustší kapalina by klesla směrem ke středu a vytlačila by řidčí kapalinu. Mezní případ, kdy je kapalina ještě stabilní, je případ homogenní kapaliny. V tomto případě je $\rho = D$ a $r \frac{D'}{D} = 0$. V případě kapalně Newtonovy koule leží tedy hodnota Tisserandova parametru v intervalu $\langle -3,0 \rangle$.

5. Odvoďte, že Brunsův vzorec (10.15) pro vnitřní pole lze vyjádřit ve tvaru / Idelson /

$$\frac{dE_r(r)}{dr} = -4\pi G \left[\rho(r) - \frac{2}{3} D(r) \right], \quad (10.28)$$

kde D bylo zavedeno v ~~první úloze~~ (10.26). Zavedeme-li gravitační zrychlení g kladně ve směru ke středu Země, $g = -E_r$, lze tento vzorec zapsat ve tvaru

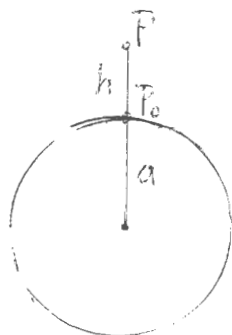
$$\frac{dg(r)}{dr} = 4\pi G \left[\rho(r) - \frac{2}{3} D(r) \right]. \quad (10.29)$$

Návod: Použijte (10.22). Vzorec (10.27) dosadíte do výrazu na pravé straně (10.15).

6. Saigeyho teorém / Idelson, Pick /. Gravitační zrychlení působené Zemí není největší na zemském povrchu, ale v jisté hloubce pod povrchem. Tento závěr odvodil Saigey (čti: seže). Dokažte toto tvrzení, jestliže víte, že střední hustota Země je $5,52 \text{ g/cm}^3$ a hustota na povrchu Země je asi $2,7 \text{ g/cm}^3$.

Řešení: Ve středu Země je $\rho(0) = D(0)$ a z (10.29) plyne $\frac{dg(0)}{dr} = \frac{4}{3}\pi G \rho(0) > 0$. V blízkosti středu Země tedy gravitační zrychlení roste při vzdalování od středu. U zemského povrchu naopak klesá se vzdáleností od středu, neboť $\rho = 2,7$, ale $\frac{2}{3} D = 3,68$. Derivace dg/dr musí být tedy nulová někde pod povrchem a tam nabývá g maxima. Abychom určili místo, kde k tomu dochází, museli bychom znát zákon, jakým se mění hustota uvnitř Země. Známé hustotní modely Země dávají $g_{\max} = 10,68 \text{ m/s}^2$ na hranici zemského pláště a jádra v hloubce přibližně 2900 km / Jacobs /.

7. Fayeova redukce. Abychom mohli hodnoty gravitačního zrychlení urč^{ené} v různých místech na zemském povrchu mezi sebou porovnávat, musíme je přepočítat (redukovat) na jednu hladinu, obvykle hladinu moře. Poznamenejme, že s velmi obdobnou situací se setkáváme v meteorologii při přepočtech tlaku vzduchu na hladinu moře. Nejjednodušší redukcí pro přepočet gravitačního zrychlení je tzv. redukce ve volném vzduchu, neboli redukce Fayeova, která je založena na předpokladu, že mezi hladinou moře a pozorovatelem v nadmořské výšce h neexistují žádné hmoty (obr. 12).



Obr. 12

Odvoďte, že mezi gravitačním zrychlením na hladině moře g_0 a gravitačním zrychlením g_h v nadmořské výšce h platí přibližně vzorec

$$g_0 = g_h + \Delta g_F, \quad (10.30)$$

kde

$$\Delta g_F = \frac{2g_0}{a} h \quad (10.31)$$

se nazývá Fayeovou redukci, a je poloměr Země. Protože (10.24) představuje jen opravný člen, můžeme v něm místo neznámé hodnoty g_0 dosadit nějakou střední (normální) hodnotu na hladině moře, např. $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$. Ukažte, že pak přibližně platí

$$\Delta g_F = 3,08 \cdot h \quad , \quad \text{---(10.27)---}$$

kde Δg_F je udáno v $\mu\text{m/s}^2$ a výška h v metrech. Poznamenejme, že v gravimetrii neměříme samotné gravitační zrychlení, ale tzv. tíhové zrychlení, což je výslednice gravitačního zrychlení a odstředivého zrychlení, působeného rotací Země. Protože však odstředivé zrychlení tvoří nejvyšší jen asi 1/300 gravitačního zrychlení, můžeme ^{ovládáme} vzorce pro Δg_F (10.26) a (10.27) používat i pro tíhové zrychlení. Přesnější vzorce pro Fayeovu redukci tíhových měření, uvažující odstředivé zrychlení a zploštění Země, jsou uvedeny např. v / Pick /.

Řešení: Pro vnější pole sféricky symetrického tělesa platí:

$$g_0 = \frac{GM}{a^2} \quad ,$$

$$g_h = \frac{GM}{(a+h)^2} = \frac{GM}{a^2(1+h/a)^2} \approx g_0(1-2\frac{h}{a}) \quad .$$

Odtud plyne (10.30) a (10.31). Vzorec (10.24) rovněž ihned plyne z prvních vzorců (10.18) a (10.19).

8. Elektrické pole v atomu vodíku / Purcell /. Neutrální atom vodíku v normálním stavu se v jistém smyslu chová jako soustava nábojů, skládající se z bodového náboje velikosti $+e$, obklopeného prostorově rozloženým záporným nábojem, jehož hustota je dána výrazem $\rho(r) = C \exp(-2r/a_0)$. Zde a_0 označuje Bohrov poloměr, rovný $5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, a C je konstanta, jejíž hodnota se bere tak, aby celkový záporný náboj byl přesně roven $-e$. Čemu se říká celkový elektrický náboj uvnitř koule o poloměru a_0 ? Jaká je intenzita elektrického pole v této vzdálenosti od jádra?

Odpověď: $C = e/(\pi a_0^3)$.

Celkový náboj v kouli o poloměru a_0 je kladný o velikosti $q = 5e/\tilde{e}^2 \approx 0,68 e$, kde $\tilde{e} \approx 2,718$ je základ přirozených logaritmů. Intenzita v této vzdálenosti je

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{a_0^2} = 2,7 \cdot 10^{13} \text{ V/m} ,$$

kde jsme použili $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$,
 $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

10.2. Potenciál pro Newtonovu kouli

Přistupme k výpočtu gravitačního potenciálu Newtonovy koule. Uvidíme, že tento výpočet je podstatně jednodušší než výpočet intenzity. Z obecného vzorce (8.10) a vzorců (10.1) a (10.2) dostáváme pro potenciál vyjádření

$$\begin{aligned} U(P) &= -G \iiint_V \frac{\rho}{R} dV = & (10.22) \\ &= -G \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho r'^2 \sin \vartheta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}} dr' d\vartheta' d\varphi' = \\ &= -2\pi G \int_0^a \rho r' \left[\frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}}{r} \right]_{\vartheta'=0}^{\vartheta'=\pi} dr' = \\ &= -\frac{2\pi G}{r} \int_0^a \rho r' (r+r' - |r-r'|) dr' . \end{aligned}$$

Jestliže se bod P nechází vně koule, je $|r-r'| = r-r'$ a pro potenciál dostáváme

$$U_e(r) = -\frac{GM}{r} . \quad (10.33)$$

Poslední výraz je také potenciál hmotného bodu, který se nachází ve středu koule a v němž je soustředěna veškerá hmota koule. Je-li bod P vnitřním bodem koule, musíme integraci

pro r'

v (10.32) rozdělit na dvě části: v intervalu $(0, r)$ je $|r-r'| = r-r'$ a v intervalu (r, a) je $|r-r'| = -(r-r')$. Vzorec pro vnitřní potenciál má tedy tvar

$$U_i(r) = -\frac{2\pi G}{r} \left[\int_0^r 2\rho r'^2 dr' + \int_r^a 2\rho r r' dr' \right] = \quad (10.34)$$

$$= -\frac{Gm}{r} - 4\pi G \int_r^a \rho(r') r' dr' \quad (0 \leq r \leq a),$$

kde m je hmotnost koule o poloměru r , viz (10.8).

Lze se ~~tedy~~ přesvědčit, že radiální složky intenzity (10.6) a (10.7) lze dostat jako záporně vzaté derivace příslušných potenciálů (10.33) a (10.34) podle r ; pro vnější pole je důkaz elementární, pro vnitřní pole dostáváme derivováním (10.34) vzorec

$$\frac{dU_i}{dr} = \frac{Gm}{r^2} - \frac{G}{r} \frac{dm}{dr} - 4\pi G \frac{d}{dr} \int_r^a \rho(r') r' dr'. \quad \text{--- (10.1) ---}$$

K výpočtům derivací ve druhém a třetím členu na pravé straně tohoto výrazu je třeba použít větu o derivování integrálu podle parametru při proměnných mezích, viz vzorec (10.13) a (10.14). Dostaneme tak

$$\frac{dU_i}{dr} = \frac{Gm}{r^2} - 4\pi G \rho(r) r + 4\pi G \rho(r) r = \frac{Gm}{r^2} = -E_{r,i}$$

Gravitační pole Newtonovy koule můžeme tedy popsat pomocí potenciálu U , daného vzorcí (10.33) a (10.34), pro intenzitu pak platí $\vec{E} = -\text{grad } U$.

Kdybychom měli napřed zaručeno, že intenzitu lze v tomto případě vyjádřit jako záporně vzatý gradient příslušného Newtonova potenciálu, mohli jsme odvozování intenzity v předcházejícím paragrafu vynechat. Stačilo by počítat jen příslušný integrál pro Newtonův potenciál, který toto pole plně popisuje;

poznamenejme, že takto se postupuje ve většině učebnic. Příslušná obecná věta, zajišťující možnost výpočtu intenzity z Newtonova potenciálu bude s příslušnými předpoklady sice uvedena až v kap. 12, ale nic nebránilo, abychom ji zatím použili bez důkazu. Důvod, proč jsme tak neučinili a odvozovali nezávisle vzorce pro intenzitu a pro potenciál, spočíval v tom, že jsme chtěli porovnat složitost obou postupů.

Ukázalo se, že z matematického hlediska je v tomto případě jednodušší počítat potenciál než intenzitu. Protože však (na rozdíl od některých jiných autorů) za základní vzorce popisující příslušné fyzikální zákony považujeme vzorce pro intenzitu, a nikoliv vzorce pro potenciál, začali jsme vyšetřování pole Newtonovy koule odvozováním vzorců pro intenzitu.

Zapišme ještě vzorec pro divergenci intenzity pomocí potenciálu. Protože divergence gradientu dává Laplaceův operátor Δ ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (-\operatorname{grad} U) = -\Delta U,$$

pro potenciál vně Newtonovy koule z rovnice (10.19) vyplývá Laplaceova rovnice, viz paragraf 7.5,

$$\Delta U = 0 \quad (10.35)$$

Pro vnitřní potenciál dostáváme z (10.20) rovnici Poissonovu

$$\Delta U = 4\pi G \rho \quad (10.36)$$

Poznamenejme, že Poissonova rovnice pro Newtonovu kouli platí v místech, kde je hustota spojitá; plyne to z věty o derivování integrálu podle parametru, uvedené v předchozím paragrafu.

Jestliže nějaká funkce má spojitě derivace až do druhého řádu a splňuje Laplaceovu rovnici, nazýváme ji funkcí harmonickou. Gravitační potenciál vně Newtonovy koule je tedy harmonickou funkcí.

V dalším textu, zejména pak v kap. 12, uvidíme, že odvozené vlastnosti a mnohé vzorce mají mnohem obecnější platnost, než jen pro Newtonovu kouli. V případě objemového potenciálu tím máme na mysli zejména spojitost potenciálu a jeho prvních derivací v celém prostoru, nespojitost některých druhých derivací potenciálu v místech nespojitosti hustoty, platnost Laplaceovy rovnice pro vnější pole a Poissonovy rovnice pro vnitřní pole. Samozřejmě uvedené vlastnosti neplatí naprosto univerzálně, ale při splnění jistých, ale dosti obecných předpokladů.

Vzorce odvozené v tomto a předchozím paragrafu nacházejí četné aplikace při studiu gravitačního pole a tvaru Země a v gravimetrickém průzkumu. Některých z těchto otázek si ještě všimneme na konci kapitoly. Dříve však odvodíme vzorce pro speciální případy závislosti hustoty na vzdálenosti od středu *koule*. Protože vnější pole bude ve všech případech popsáno stejnými vzorci, které byly odvozeny výše, nebudeme tyto vzorce opakovat a budeme v následujících třech paragrafech vyšetřovat pouze vnitřní pole.

10.3. Homogenní koule

Je-li koule homogenní, tj. $\rho = \text{konst.}$, pro intenzitu gravitačního pole uvnitř koule dostáváme z (10.7) vzorec

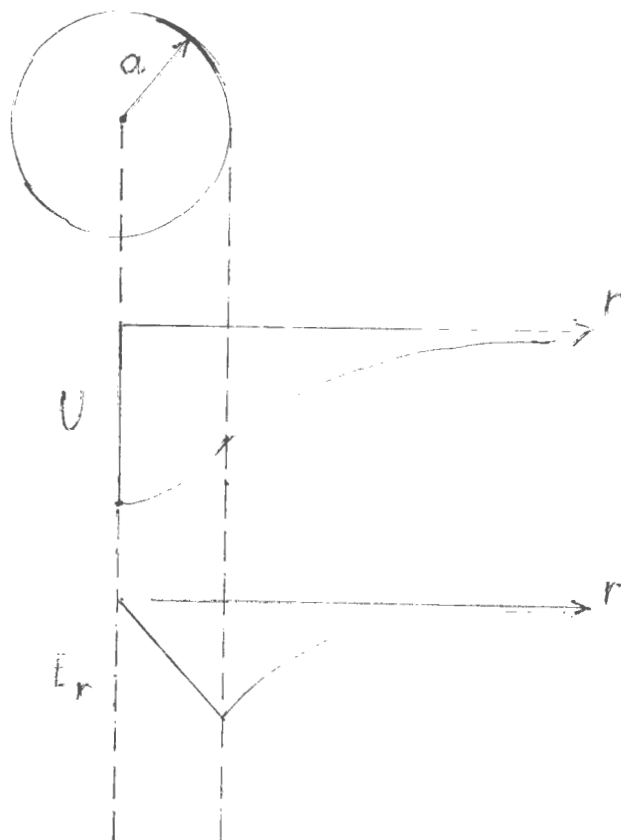
$$E_{r,i}(r) = - \frac{Gm(r)}{r^2} = - \frac{4}{3} \pi G \rho r \quad (10.37)$$

Pole uvnitř homogenní koule je centrální a má velmi zajímavou vlastnost, jeho intenzita totiž roste lineárně od středu koule, s takovou závislostí síly na vzdálenosti se setkáváme u harmonického oscilátoru (pružina, malé kmity matematického kyvadla aj.). Gravitační pole uvnitř homogenní koule působí tedy jako kvasielastická síla / Idelson /. Kdyby se mohl nějaký hmotný bod uvnitř homogenní koule pohybovat (viz příklad 2 uvedený níže), mohli bychom jeho pohyb popsat užitím teorie harmonického oscilátoru.

Vzorec (10.37) pro vnitřní potenciál nabývá v případě homogenní koule tvaru

$$U_i(r) = -2\pi G \rho \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (10.38)$$

Průběh gravitačního potenciálu a intenzity pro homogenní kouli je znázorněn na obr. 13, viz / Kittel /. Mezi potenciály ve středu a na povrchu koule platí podle (10.38) vztah $U(0) = \frac{3}{2} U(a)$.



Obr. 13

Všimněme si následující důležité vlastnosti / Idelson /. Vnější potenciál homogenní koule, v důsledku (10.33) je vyjádřen lomenou a přitom iracionální funkcí souřadnic

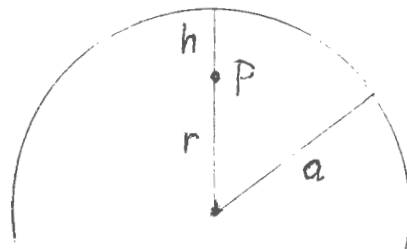
$$U(x,y,z) = - \frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} ,$$

avšak uvnitř homogenní koule je potenciál U kvadratickým polynomem souřadnic, viz (10.38). Potenciál homogenní koule je tedy příkladem funkce, která zůstává spojitá při přechodu přes hranici hmot, ale mění svůj analytický charakter, v tomto případě se z kvadratického polynomu mění na lomenou iracionální funkci. Tato vlastnost se zachovává i v obecnějších případech. Například ^{v následujícím dílu skript} ~~níže~~ ukážeme, že potenciál uvnitř homogenního elipsoidu je kvadratickou funkcí souřadnic,

$$U(x,y,z) = G \rho (K+Ax^2+By^2+Cz^2) ,$$

kde K, A, B, C jsou konstanty, závislé pouze na po měru poloos; naproti tomu potenciál vně homogenního elipsoidu je transcendentní funkcí souřadnic. Uvedená vlastnost se tedy u homogenního elipsoidu projevuje dokonce ještě výrazněji než u homogenní koule.

S uvedenou vlastností souvisí otázka analytického prodloužení potenciálu z vnější oblasti do oblasti vnitřní. Tuto otázku postavil Poincaré do těsné souvislosti s teorií tíhových redukci / Idelson /. Objasněme, co zde rozumíme analytickým prodloužením. Nechť se bod P nachází v malé hloubce h pod povrchem homogenní koule o poloměru a (obr. 14), takže



Obr. 14

pro průvodič tohoto bodu platí $r = a - h$. Potenciál v tomto bodě je podle (10.38) roven

$$U(P) = -2\pi G \rho a^2 + \frac{2}{3}\pi G \rho (a-h)^2 \quad (10.39)$$

Vypočítejme nyní potenciál v tomto bodě užitím vzorce (10.33), tj. jakoby bod P byl bodem vnějším. Jinými slovy, prodlužme vnější potenciál do hloubky h pod povrch při zachování jeho analytických vlastností. Označíme-li prodloužený potenciál znakem U' , v bodě P platí

$$U'(P) = -\frac{GM}{r} = -\frac{4}{3}\pi G \rho \frac{a^3}{a-h} \quad (10.40)$$

Předpokládejme, že $h \ll a$.

Nyní nás zajímá rozdíl dvou potenciálů. Rozložíme (10.40) užitím následujícího rozvoje v mocninách malé veličiny $u=h/a$:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots$$

Po jednoduchých úpravách a zanedbání malých členů vyššího řádu dostáváme

$$U(P) - U'(P) = 2\pi G \rho h^2 . \quad (10.41)$$

Pro příslušná gravitační zrychlení g a g' , brána kladně směrem ke středu koule, ~~platí~~ *odtud plyne*

$$g(P) - g'(P) = \boxed{-\frac{U}{h} + \frac{U'}{h}} = -4\pi G \rho h . \quad (10.42)$$

Skutečné gravitační zrychlení v bodě pod povrchem je tedy menší přibližně o hodnotu $4\pi G \rho h$ než hodnota, kterou dostaneme prodloužením vnějšího pole do stejného bodu; viz změnu v průběhu intenzity na povrchu koule v obr. 13. Vzorci (10.41) a (10.42) odvodil prvně Poincaré. Ze vzorce (10.42) plyne, že derivace dg/dh pro vnitřní a vnější pole se liší přibližně o hodnotu $-4\pi G \rho$, což bylo možné očekávat také již na základě vzorců (10.11) a (10.15).

Vlastní gravitační energii homogenní koule dostaneme ze vzorců (8.30) a (10.38):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho U dV = & (10.43) \\ &= -\pi G \rho^2 \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right) r^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi' = \\ &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{a} , \end{aligned}$$

kde M je hmotnost koule.

Píšeme-li v uvedených vzorcích $1/(4\pi \epsilon_0)$ místo konstanty $(-G)$ a náboj Q místo M , dostaneme výrazy pro elektrostatické pole homogenní koule (předpokládáme, že se jedná o rozložení prostorového náboje ve vakuu s permitivitou ϵ_0). Z (10.43) tak dostaneme vlastní elektrostatickou energii rovnoměrně nabitě koule ve tvaru

$$W_{el} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{a} \quad (10.44)$$

Abychom mohli vypočítat vlastní elektrostatickou energii elektronu, je třeba znát jeho poloměr / Kittel /. Protože obecná teorie elektronu neexistuje, můžeme postupovat opačně, určit jeho poloměr na základě energie. Celkovou energii elektronu můžeme určit pomocí Einsteinova vztahu $E = mc^2$, kde m je hmotnost a c je rychlost světla. Kdyby veškerá energie elektronu byla elektrostatickou energií homogenní koule, platilo by

$$m_e c^2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{e^2}{a} \quad ,$$

kde m_e je hmotnost a e náboj elektronu. Z tohoto vzorce by bylo možné určit poloměr elektronu a . Avšak stavba elektronu není známa. Model ve formě homogenní koule není možné považovat za plně vyhovující, protože není jasné, čím se drží náboj elektronu pohromadě. Proč se elektron nerozletí pod vlivem coulombovského odpuzování jednotlivých elementů tohoto náboje? V současné době neexistuje teorie, která by objasňovala stavbu elektronu. Protože nemáme přesné údaje o stavbě elektronu, je použití koeficientu $3/5$ v posledním vzorci velice problematické, proto jej vynecháme. Použijeme-li číselných hodnot $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$, viz / Valouch /, dostáváme pak jakýsi poloměr

$$a = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad .$$

Tato veličina se nazývá klasickým poloměrem elektronu. Má nějaký vztah k elektronu, ale nevíme přesně jaký. Nicméně se tato délka nazývá charakteristickou délkou.

Úlohy

1. Odhad hmotnosti Galaxie. Uvažujte Galaxii jako kouli s rovnoměrným rozložením hmoty. Slunce obíhá kolem středu Galaxie ve vzdálenosti $10,0 \pm 0,8$ kiloparseků (1 parsek = $3,086 \cdot 10^{16}$ m) rychlostí přibližně 250 km/s / Allen, Valouch /.

- a) Určete oběžnou dobu Slunce kolem středu Galaxie, zvanou galaktický rok.
- b) Určete hmotnost části Galaxie uvnitř koule, jejíž střed se nachází ve středu Galaxie a povrch prochází Sluncem.

Odpovědi: a) Asi 250 milionů let. Je zajímavé, že se tato doba zhruba rovná periodě některých geologických cyklů na Zemi. Někteří autoři to nepovažují za náhodné, ale hledají v tom hlubší souvislosti.

- b) Na kruhové dráze se odstředivé zrychlení rovná přitažlivému zrychlení, tedy

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}, \quad (10.4b)$$

kde v je rychlost oběžného pohybu, r je poloměr dráhy, M hmotnost části Galaxie. Odtud $M = 2,9 \cdot 10^{41}$ kg = $1,5 \cdot 10^{11} M_{\odot}$, kde $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg je hmotnost Slunce. Celková hmotnost Galaxie se udává $1,4 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ / Allen, Valouch /. Vzácná shoda naší hodnoty s hodnotou skutečnou je trochu náhodná, vznikla kompenzací dvou efektů, které jsme neuvažovali: zploštění Galaxie a hmoty vně sluneční dráhy.

2. Pohyby uvnitř Galaxií / Kittel /. Uvažujme opět model galaxie ve tvaru koule s rovnoměrným rozložením hvězd, charakterizovaným hustotou ρ . Uvažujme pohyby hvězd jen uvnitř galaxie.
- Jaká síla působí ve vzdálenosti r od středu galaxie?
 - Jaká je oběžná rychlost hvězdy, obíhající kolem středu galaxie po kruhové dráze?
 - Jaká je perioda oběhu po kruhové dráze? Platí zde třetí Keplerův zákon?

Odovědi: a) Intenzitu gravitačního pole udává vzorec (10.37).

b) Rychlost v závisí lineárně na poloměru dráhy r , $v = r \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}}$.

c) Perioda $T = \sqrt{3\pi / (G \rho)}$ je pro všechny kruhové dráhy stejná, nezávislá na poloměru dráhy r . Třetí Keplerův zákon zde proto neplatí. Nezávislost T na r bylo možné též očekávat na základě teorie harmonického oscilátoru; perioda malých kmitů matematického kyvadla nezávisí na velikosti výchylky. Ve skutečné galaxii obíhají hvězdy blíže ke středu rychleji, protože ke středu galaxie jsou hmoty více zkoncentrovány.

3. Průběh tlaku v homogenní Zemi / Kittel /. Uvažujte homogenní kouli o hustotě ρ a poloměru a , která je v hydrostatické rovnováze.

- Určete průběh tlaku, působeného vlastní gravitací, v závislosti na vzdálenosti r od středu koule.
- Určete velikost tlaku se středu takové koule, která má poloměr rovný střednímu poloměru Země $a = 6371$ km a hustotu rovnou střední hustotě Země $\rho = 5,52$ g/cm³.

Řešení: a) Přírůstek tlaku dp při zvětšení hloubky o dh je dán známým vzorcem

$$dp = \rho g dh,$$

kde $g = |E_{r,i}(r)|$ je zrychlení, dané vztahem (10.32),
 r je vzdálenost od středu Země, $dh = -dr$.

Bereme-li tlak kladně ve směru ke středu Země, je

$$p(r) = \int_r^a \rho \frac{4\pi G}{3} \rho r dr = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 (a^2 - r^2) .$$

b) $1,7 \cdot 10^5$ MPa. Ve skutečnosti je ve středu Země tlak větší, $3,6 \cdot 10^5$ MPa, v důsledku růstu hustoty směrem ke středu Země / Jacobs /.

4. Určete vlastní gravitační energii Slunce, které považujte za homogenní kouli s hmotností přibližně $2 \cdot 10^{30}$ kg a poloměrem 700 000 km / Kittel /.

Odpověď: $W = -2 \cdot 10^{41}$ J. Je to obrovská energie. V této souvislosti si lze učinit představu o tom, jak obrovská energie se uvolní, až se Slunce na konci svého vývoje změní na bílého trpaslíka, který bude mít poloměr menší než 1/10 současného poloměru / Kittel /.

5. Počáteční teplo Země.

- a) Určete vlastní gravitační energii Země, jejíž hmotnost je $5,97 \cdot 10^{24}$ kg a střední poloměr 6371 km.
- b) Předpokládejme, že Země vznikla gravitační koncentrací chladných částic, původně rozptýlených ve velkých vzdálenostech od sebe. Dále předpokládejme, že tato koncentrace proběhla rychle (bez ztrát energie na záření). Je uvolněná gravitační energie dostatečná k tomu, aby se celá Země roztavila? / Min / . Pro jednoduchost volte měrné teplo v Zemi konstantní a rovné měrnému teplu hornin $0,8 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$ / Goguel / (pro vodu je $4,2 \text{ J g}^{-1}\text{K}^{-1}$).

Odpověď: a) $W = -2 \cdot 10^{32}$ J .

b) Zvýšení teploty asi o 47 000 K, tedy ~~celá~~ Země by se roztavila.

6. Počítejte obdobnou úlohu jako v předchozím příkladu pro Měsíc, který má poloměr 1736 km a hmotnost 81,3 krát menší, než je hmotnost Země.

Odpovědi: a) $W = -1 \cdot 10^{29} \text{ J}$.

- b) Zvýšení teploty asi o 2100 K, což by teoreticky mohlo stačit na roztavení celého Měsíce. Skutečné zvýšení teploty bude zřejmě podstatně menší v důsledku vyzařování a v důsledku toho, že částice nepadají z nekonečna. Podrobnější rozbor však ukazuje, že přesto ve svrchních vrstvách Měsíce došlo k ohřevu na teploty větší než je bod tání křemičitanů / Horedt /.

7. Zdroje energie hvězd. Solární konstanta, tj. tok energie plochou kolmo ke slunečním paprskům ve vzdálenosti Země, činí 1326 W/m^2 / Valouch /.

- a) Vypočítejte celkový výkon vyzařovaný Sluncem, je-li střední vzdálenost Slunce a Země (1 AU) rovna $149,598 \cdot 10^6 \text{ km}$.
- b) Na jak dlouho by při takovém výkonu stačila celková gravitační energie Slunce? Může být gravitační energie hlavním zdrojem energie Slunce?

Odpovědi: a) $3,7 \cdot 10^{26} \text{ W}$. $\frac{b}{2} \cdot 10^7$ let, což je málo ve srovnání se stářím Slunce $5 \cdot 10^9$ let, mohutnějším zdrojem ~~energie~~ záření Slunce je energie jaderná, nikoliv gravitační / Kittel /.

8. Zdroj vnitřní energie Jupitera. V infračervené oblasti spektra vyzařuje planeta Jupiter ze svého povrchu asi 14 W/m^2 , což je zhruba dvojnásobek toku energie, která je slunečního původu (uvádí se poměr 1,9 - 2,5, viz / Gehrels /). Jupiter tedy musí mít nějaký vnitřní zdroj tepla. Předpokládejme, že toto teplo vzniká z gravitační energie v důsledku smršťování Jupitera. Jakou rychlostí by se musel Jupiter smršťovat, aby se uvolňoval tepelný tok zhruba 7 W/m^2 ? Považujte Jupitera za homogenní kouli o hmotnosti $1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ a poloměru 69 800 km.

Odpověď: 0,5 mm/rok. Potřebné smršťování je tak pomalé, že tento mechanismus získávání tepla z vnitřní gravitační energie můžeme považovat za zcela přijatelný. Přesnější teorie samozřejmě uvažují hustotu závislou na hloubce i jiné jevy, viz / Gehrels /. Poznamenejme, že obdobné vyzařování bylo zjištěno i u dalších obřích planet (Saturn, Uran, Neptun), ovšem potřebná rychlost kontrakce by byla větší než v případě Jupitera, takže se hledají jiná vysvětlení; např. u Saturnu vystupování vodíku z centrálních částí planety k povrchu a naopak klesání helia.

9. Kulový blesk. Jedná se o dosti ojedinělý jev, který dosud neumíme ani teoreticky vysvětlit, ani experimentálně připravit. Dokonce se i pozorování často neshodují, odhady některých parametrů se liší až o několik řádů. Zdá se, že nejsou v rozporu s pozorováními tyto možné parametry kulového blesku: koule o poloměru 10 cm, vnitřní energie 10 kJ / Stachanov /. Považujte kulový blesk za homogenně elektrostaticky nabitou kouli s nábojem jednoho znaménka a určete celkový náboj, potenciál na povrchu a intenzitu pole na povrchu, koule. Tento model je evidentně chybný (nevysvětluje, co drží kulový blesk pohromadě aj.), ale snad poskytuje jistou představu o tom, s jak extrémními hodnotami některých fyzikálních parametrů se může potýkat teorie kulového blesku.

Odpovědi: $4 \cdot 10^{-4}$ C; $4 \cdot 10^7$ V; $4 \cdot 10^8$ V/m .

10. Homogenně zmagnetovaná koule. Využijte vzorců pro gravitační pole homogenní koule k odvození vzorců pro magnetostatické pole homogenně zmagnetované koule. Řešení: Zvolme počátek souřadnicové soustavy ve středu koule. Užitím Poissonovy věty (8.22) a vzorců pro gravitační pole (10.33) a (10.38) dostáváme pro vnější magnetický potenciál U_e a vnitřní magnetický potenciál U_i homogenně zmagnetované koule následující vzorce:

$$U_e(\vec{r}) = - \frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \text{grad} \frac{V}{r} ,$$

$$U_i(\vec{r}) = - \frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \text{grad} \left[2\pi \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \right] ,$$

kde \vec{M} je vektor magnetizace, V je objem a a poloměr koule, \vec{r} je polohový vektor bodu pozorování, $r = |\vec{r}|$. Označme \vec{M}_c celkový magnetický moment koule, $\vec{M}_c = \vec{M}V$. Užijeme-li vztah $\text{grad} (1/r) = - \vec{r}/r^3$, který plyne z (8.16), dostáváme známý vzorec

$$U_e(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{M}_c \cdot \vec{r}}{r^3} , \quad (10.46)$$

který je stejný jako vzorec pro magnetický dipól, viz (7.28) a (4.13). Dostali jsme tak výsledek, že magnetické pole vně homogenně zmagetované koule je stejné jako magnetické pole dipólu o stejném magnetickém momentu. Pro intenzitu vnějšího magnetického pole, např. z analogie se vzorci (7.29) nebo (7.31), ihned plyne

$$\vec{H}_e(\vec{r}) = - \text{grad} U_e(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r^3} \left[3 \frac{\vec{M}_c \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{M}_c \right] . \quad (10.47)$$

Pro vnitřní pole dostáváme

$$U_i(\vec{r}) = \frac{1}{6} \vec{M} \cdot \text{grad} r^2 = \frac{1}{3} \vec{M} \cdot \vec{r} , \quad (10.48)$$

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = - \text{grad} U_i(\vec{r}) = - \frac{1}{3} \vec{M} . \quad (10.49)$$

Vidíme, že \vec{H}_i je úměrné magnetizaci \vec{M} , ale má opačný směr. Koeficient úměrnosti $N = 1/3$ se nazývá demagnetizačním koeficientem (demagnetizačním faktorem). Poznamenejme, že v soustavě CGSM je $N = 4\pi/3$, viz /Janovskij/.

11. Popište tvar magnetických siločar pro homogenně zmagetovanou kouli; využijte k tomu výsledků z předcházející úlohy. Odpověď: Vně koule jsou magnetické siločáry stejné jako u dipólu. Uvnitř jsou všechny přímkové, rovnoběžné se směrem magnetizace.

12. Fridmanova rovnice. Za teoretický základ se v moderní kosmologii berou relativistické teorie, nejčastěji obecná teorie relativity. Až po nalezení relativistických kosmologických rovnic bylo shledáno, že mnohé z nich mohou být odvozeny též z Newtonovy teorie, užijeme-li vhodných analogií. V tomto příkladu se budeme zabývat některými z těchto otázek /Silk/. Podle Hubbleova zákona je rychlost vzdalování galaxií v úměrná jejich vzdálenosti r :

$$v = Hr \quad ,$$

kde H je tzv. Hubbleova konstanta (není to vlastně konstanta, protože závisí na čase t , $H=H(t)$). Současnou hodnotu této konstanty přesně neznáme, ale zřejmě leží mezi $50-100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ($\text{Mpc} = \text{megaparsek}$). Uvažujme část vesmíru ve tvaru rozpínající se koule, která je dostatečně veliká, abychom ji mohli považovat za homogenní. Poloměr koule označme $R=R(t)$. Hmoty vně koule ^(jakoby koule tvořila celý vesmír) neuvažujme. Ze zákona zachování mechanické energie pro částice na povrchu koule odvoďte rovnici

$$H^2 - \frac{8\pi}{3} G \rho = - \frac{k}{R^2} \quad , \quad (10.50)$$

kde $\rho = \rho(t)$ je hustota koule a mechanickou energii na povrchu koule jsme označili jako $(-k/2)$. Rovnice (10.50) je totožná s Fridmanovou rovnicí, známou z relativistické kosmologie, která je základní rovnicí v modelu velkého třesku. Při přechodu k relativistické teorii je rozdíl pouze v interpretaci veličin R a k . Veličina R není již poloměrem kulového vesmíru v newtonské kosmologii, ale univerzálním měřítkovým faktorem (položíme-li $R(t_0)=1$ v nějakém čase t_0 , kdy vzdálenost nějakých dvou galaxií je r_0 , pak v čase t bude vzdálenost těchto galaxií $r=R(t)r_0$; za t_0 se obvykle volí současnost). V relativistické teorii se konstanta k nazývá křivostí prostoru a připisují se jí tři možné hodnoty: $+1$ (uzavřený prostor), 0 (otevřený euklidovský prostor) nebo -1 (otevřený hyperbolický prostor).

Řešení: Pro element o jednotkové hmotnosti na povrchu koule je součet kinetické a potenciální energie roven

$$\frac{1}{2}v^2 - G \frac{M}{R} = \text{konst.} ,$$

kde podle ^{Hubbleova zákona} ~~(10.50)~~ pro rychlost na povrchu koule ($r=R$) platí $v=HR$. Dosadíme-li ještě za hmotnost koule M a konstantu píšeme ve tvaru $(-k/2)$, dostáváme ihned Fridmanovu rovnici (10.50).

13. Einsteinův - de Sitterův vesmír. Položíme-li ve Fridmanově rovnici $k=0$, ^{pak} tato rovnice popisuje tzv. Einsteinův - de Sitterův vesmír. V tomto vesmíru pro hustotu platí

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G} .$$

Určete přibližnou současnou hodnotu této hustoty, nazývané kritickou hustotou ρ_{krit} ; volte $H = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Položme současnou hodnotu měřítkového faktoru rovnu jedné. Pak ze zákona zachování hmoty plyne, že součin hustoty a poloměru koule (úměrný R^3) je konstantní, tj.

$$\rho R^3 = \rho_{\text{krit}} .$$

Zřejmě též platí

$$H(t) = v/r = (dr/dt)/r = (dR/dt)/R ,$$

neboť $r=R(t)r_0$, viz předchozí příklad. Sestavte příslušnou diferenciální rovnici a jejím vyřešením určete R a ρ jako funkce času. Určete stáří vesmíru pro tento model, tj. čas, který uplynul od velkého třesku.

Řešení: $H = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$; $\rho_{\text{krit}} = 4,7 \cdot 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$.
Diferenciální rovnice, ~~má tvar~~ plynoucí z (10.50), má tvar

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{8}{3} \pi G \rho_{\text{krit}} \right)^{1/2} R^{-1/2} .$$

Odtud

$$dt = \left(\frac{8}{3} \pi G \rho_{\text{krit}} \right)^{-1/2} R^{1/2} dR .$$

Přepíšeme tuto rovnici pro převrácenou hodnotu dt/dR , viz [Rektorys]. Předpokládáme-li, že $R=0$ pro $t=0$, dostáváme řešení ve tvaru

$$t = \frac{2}{3} \left(\frac{8}{3} \pi G \rho_{\text{krit}} \right)^{-1/2} R^{3/2} ,$$

čili

$$R(t) = \left(6 \pi G \rho_{\text{krit}} \right)^{1/3} t^{2/3}$$

a

$$\rho(t) = \rho_{\text{krit}} / R^3 = \frac{1}{6 \pi G t^2} .$$

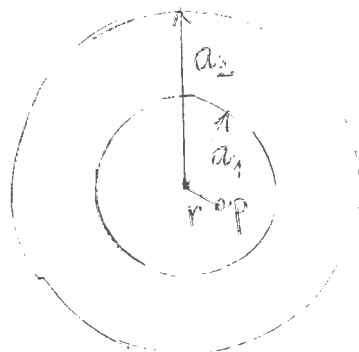
Porovnáme-li poslední vzorec s prvním vzorcem v tomto příkladu, dostaneme

$$t = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H} .$$

Dosazením výše uvedené číselné hodnoty pro Hubbleovu konstantu vyjde stáří vesmíru asi 13 miliard let. Poznamenejme, že řešení Friedmannovy rovnice pro $k \neq 0$ lze nalézt v /silk/ a v mnoha dalších učebnicích. rovněž

10.4. Homogenní dutá koule

Přistupme k výpočtu pole duté koule s vnitřním poloměrem a_1 a vnějším poloměrem a_2 , viz obr. 15.



Obr. 15

(Toto těleso, vymezené dvěma soustřednými kulovými plochami, se také nazývá kulovou vrstvou / Sretenskij /; upozorníme však, že v geometrii se pod kulovou vrstvou obvykle rozumí těleso, které vznikne seříznutím koule dvěma rovnoběžnými rovinami / Rektorys /, V / Trkal / je toto těleso též označováno jako mezikoulí.)

Jak jsme již uváděli, vzorce (10.6) a (10.33) pro intenzitu a potenciál vně koule platí i pro případ homogenní kulové vrstvy. Ve vzorci (10.3) pro intenzitu pole je nyní třeba pouze místo integračních mezí 0, a psát integrační meze a_1, a_2 . Uvnitř kulové vrstvy ($a_1 \leq r \leq a_2$) dostaneme vzorec pro intenzitu obdobný vzorci (10.7) ve tvaru

$$E_r(r) = -\frac{4}{3}\pi G \int \frac{r^3 - a_1^3}{r^2} ; \quad (10.51)$$

uvnitř dutiny ($r \leq a_1$) je pole nulové,

$$E_r(r) = 0 . \quad (10.52)$$

Všimněme si, že pole uvnitř kulové vrstvy se již, na rozdíl od pole uvnitř plné homogenní koule, nemění lineárně se vzdáleností r . Poznamenejme, že vzorec (10.51) jsme mohli napsat rovnou bez jakéhokoliv počítání, jestliže bychom ve vzorci (10.37) z minulého odstavce odečetli účinek vyjmuté homogenní koule o poloměru a_1 , který je roven $-Gm_1/r^2$, kde $m_1 = \frac{4}{3}\pi \rho a_1^3$ je hmotnost vyjmuté koule.

Vzorec (10.52) je vyjádřením Newtonovy věty / Idelson /: koncentrická homogenní kulová vrstva nepřitahuje body ležící v její dutině a na její hranici. Přitažlivé síly se zde vzájemně ruší.

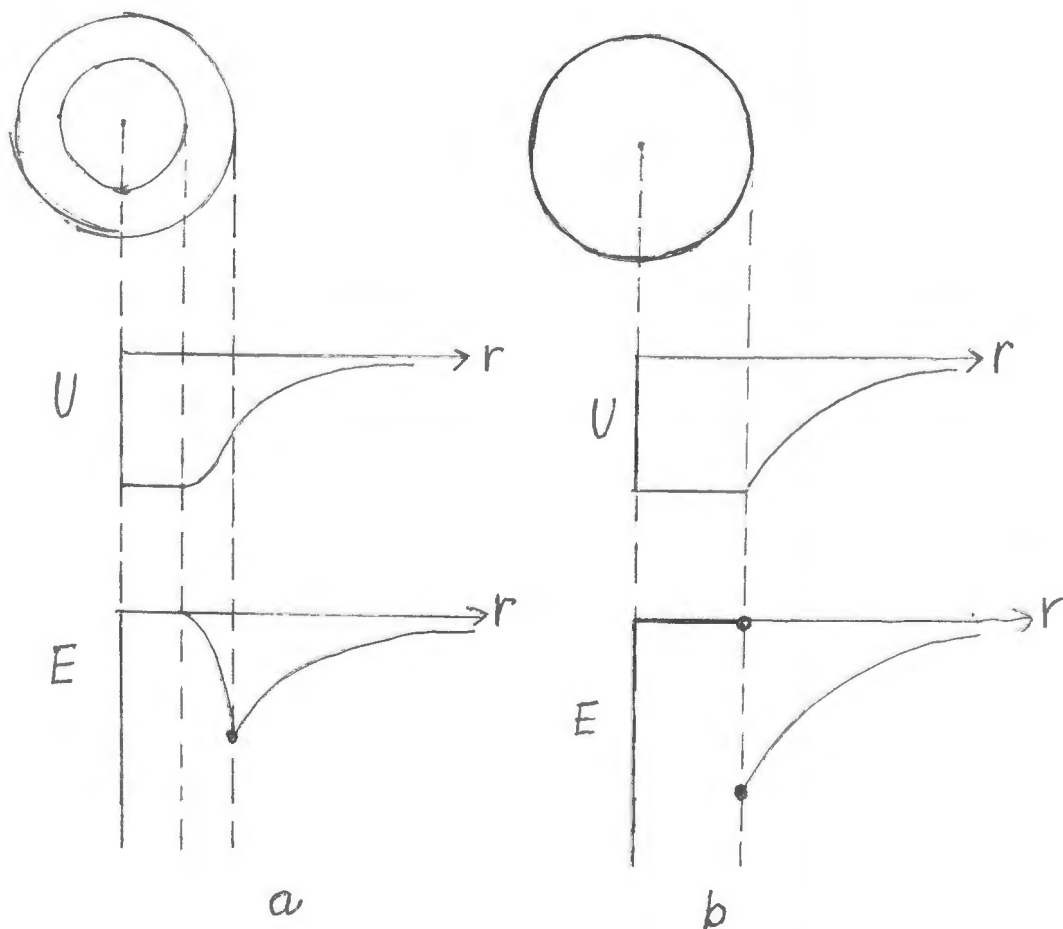
Vzorce pro gravitační potenciál duté koule dostaneme rovněž úpravou vzorce (10.32) nebo přímo ze vzorce (10.38) pro plnou kouli odečtením příspěvku vyjmuté koule, na jejímž místě je nyní dutina. Uvnitř vrstvy ($a_1 \leq r \leq a_2$) dostaneme

$$U(r) = -2\pi G \rho \left(a_2^2 - \frac{r^2}{3} \right) + \frac{4}{3}\pi G \rho \int \frac{a_1^3}{r} ; \quad (10.53)$$

uvnitř dutiny ($r \leq a_1$) vyjde potenciál konstantní,

$$U(r) = -2\pi G \rho (a_2^2 - a_1^2) \quad (10.54)$$

Přenecháme čtenáři, aby i zde ověřil, že záporně vzatý gradient potenciálu dává intenzitu, potenciál a intenzita jsou všude spojité a v místech hmot platí Poissonova rovnice, mimo hmoty platí Laplaceova rovnice. Průběh potenciálu a intenzity duté homogenní koule je znázorněn na obr. 16a.



Obr. 16. Potenciál a intenzita gravitačního pole duté homogenní koule (a) a homogenní kulové slupky (b).

Úlohy

1. Odvodili jsme, že gravitační a elektrostatické pole duté homogenní koule se soustřednými plochami je uvnitř dutiny nulové. Ukažte, že pokud v homogenní kouli vytvoříme kulovou dutinu nesoustřednou, nebude již pole uvnitř dutiny nulové, ale bude mít ve všech bodech dutiny konstantní směr a velikost, tj. bude homogenní / Kellogg /. Jaká je intenzita pole v dutině?

Návod: Kouli s dutinou můžeme považovat za superpozici původní plné koule a malé plné koule o velikosti dutiny s hmotou opačného znaménka. Příspěvky od obou koulí popisují vzorce typu (10.37). Intenzita v dutině vyjde stejná jako intenzita v původní plné kouli v místě, kde je nyní střed dutiny (ve středu dutiny se tedy pole nezměnilo).

2. Vlastní elektrostatická energie homogenní kulové vrstvy. Určete tuto energii, je-li náboj rozložen s konstantní hustotou ρ mezi soustřednými kulovými plochami o poloměrech a_1, a_2 , kde $a_1 < a_2$. Permittivitu prostředí položte všude rovnou permitivitě vakua ϵ_0 .

Řešení: Elektrostatický potenciál uvnitř vrstvy dostaneme ze vzorce (10.53) záměnou $(-G)$ za $1/(4\pi\epsilon_0)$:

$$U(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[a_2^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{a_1^3}{r} \right]. \quad (10.55)$$

Pro vlastní energii platí podle (8.30)

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho U dV = \frac{\pi \rho^2}{15 \epsilon_0} \left[\frac{4a_2^5}{5} - 10a_1^3 a_2^2 \right]. \quad (10.56)$$

Speciálně, dosadíme-li $a_1 = 0$, dostaneme vzorec (10.44) pro homogenní kouli.

3. Vlastní elektrostatická energie tenké kulové vrstvy.

V předchozím příkladu předpokládejte, že $a_2 = a_1 + h$, kde h je malé ve srovnání s a_1 . Ukažte, že přibližně platí

$$W = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{a_1}, \quad (10.57)$$

kde Q je celkový náboj a zanedbali jsme členy řádu h^3 a vyšší. Tento vzorec platí přesně v limitě pro $h \rightarrow 0$, jiné jeho odvození bude uvedeno v následujícím paragrafu.

10.5. Homogenní kulová slupka

Velice významná je homogenní kulová slupka, která vznikne z duté koule limitním přechodem tak, že vnější a vnitřní kulovcu plochu k sobě přibližujeme až na nulovou vzdálenost, přičemž se celková hmotnost zachovává. Předpokládejme, že se poloměr vnější plochy a_2 nemění a pouze poloměr a_1 se zvětšuje k a_2 při zachování celkové hmotnosti. Protože intenzita vnějšího pole se nemění a intenzita uvnitř dutiny je nulová, v limitě odtud dostáváme, že intenzita pole uvnitř kulové slupky je v místě slupky nespojitá.

Označíme-li $a = a_2$ poloměr homogenní kulové slupky a M její hmotnost, pro radiální složku intenzity gravitačního pole dostáváme, viz vzorce (10.6) a (10.52),

$$E_r(r) = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{pro } r > a, \quad (10.58)$$

$$E_r(r) = 0 \quad \text{pro } 0 \leq r < a.$$

Skok v radiální složce intenzity činí $-GM/a^2$ při pohybu ve směru průvodiče. Zavedeme-li plošnou hustotu σ užitím vztahu $M = 4\pi a^2 \sigma$, můžeme skok v radiální složce intenzity vyjádřit ve tvaru

$$E_r(a+) - E_r(a-) = -4\pi G \sigma. \quad (10.59)$$

V tomto vzorci již nevystupuje poloměr slupky. Obdobný vzorec pro skok intenzity elektrostatického pole na homogenní

kulové slupce s plošnou hustotou náboje σ dostaneme záměnou konstanty $(-G)$ konstantou $1/(4\pi\epsilon_0)$:

$$E_r(a+) - E_r(a-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (10.60)$$

Uvidíme, že vzorce (10.59) a (10.60) mají mnohem obecnější platnost; zůstávají v platnosti i v případě obecné jednoduché vrstvy (kap. 13). Kromě toho, protože uvnitř vodičů je pole nulové, bude na povrchu vodiče platit mezi normálovou složkou intenzity a hustotou náboje jednoduchý vztah $E = \sigma/\epsilon_0$.

Vyšetřeme potenciál kulové slupky. Vnější potenciál duté koule se při uvedeném limitním přechodu rovněž nemění. Vzorec (10.54) pro vnitřní potenciál však bezprostředně použít nemůžeme, protože $a_2 - a_1$ se blíží k nule, ale hustota ρ roste do nekonečna. Dosaďme proto do (10.54) za ρ ze vzorce $M = \frac{4}{3}\pi\rho(a_2^3 - a_1^3)$:

$$U(r) = - \frac{2\pi GM(a_2 - a_1)(a_2 + a_1)}{\frac{4}{3}\pi(a_2 - a_1)(a_2^2 + a_2a_1 + a_1^2)} \quad .$$

Po zkrácení členu $a_2 - a_1$ v limitě pro $a_1 \rightarrow a_2$ dostaneme, že potenciál uvnitř kulové slupky je roven konstantě $-GM/a_2$, což je hodnota vnějšího potenciálu na povrchu slupky. Pro potenciál homogenní kulové slupky tedy platí (označíme-li poloměr slupky opět $a = a_2$)

$$U(r) = - \frac{GM}{r} \quad \text{pro } r \geq a \quad , \quad (10.61)$$

$$U(r) = - \frac{GM}{a} \quad \text{pro } 0 \leq r \leq a \quad .$$

Potenciál se při průchodu kulovou slupkou mění spojitě, zatímco intenzita se mění nespojitě (obr. 16b). Uvidíme, že také tato vlastnost je obecnou vlastností polí jednoduchých vrstev.

V případě elektrostatického pole homogenní kulové slupky nabývají vzorce pro potenciál tvaru

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{pro } r \geq a, \quad (10.62)$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{a} \quad \text{pro } 0 \leq r \leq a.$$

Upozorňujeme ještě, že v dalším textu budeme pojmem "vrstva" obvykle rozumět vrstvu nekonečně tenkou. Místo o kulové slupce budeme pak mluvit o kulové vrstvě. Pokud se bude jednat o vrstvu konečné tloušťky, bude to výslovně řečeno, případně budeme používat označení jako dutá koule, deska aj.

Poznamenejme, že za tímto paragrafem opět předkládáme čtenáři k řešení několik fyzikálních úloh. Z hlediska obecných otázek matematické teorie bychom chtěli upozornit zejména na úlohu č. 6 o kulovém kondenzátoru, kde se naráží na otázku mezi použitelnosti Newtonova potenciálu; zatímco vzorec pro intenzitu dává správný výsledek, bezprostřední použití běžných vzorců pro Newtonův potenciál vede k chybě.

Úlohy

1. Ověření Coulombova zákona. Nepřímou úměrnost mezi silou, kterou na sebe působí dva bodové náboje, a čtvercem vzdálenosti můžeme přímo experimentálně ověřovat, ale je zřejmé, že takové měření nemůže být příliš přesné. Na základě výsledků z tohoto paragrafu navrhněte jiný, přesnější, test nepřímé úměrnosti mezi silou a čtvercem vzdálenosti / Maxwell /.

Odpověď: Ověřovat, že uvnitř nabité kulové slupky je intenzita pole nulová, viz následující příklad. V průběhu historie byla provedena řada velmi přesných měření tohoto druhu. Historicky významná jsou měření Cavendishova a Maxwellova. Dosud nejpresnější jsou měření Plimptona a Lawtona z r. 1936. Jejich aparatura se skládala ze dvou kovových soustředných koulí o poloměrech 1,5 a 1,2 m, navzájem odizolovaných. Vnější koule byla nabíjena až na

potenciál 3000 V, avšak mezi koulemi nebyly zjištěny žádné rozdíly v potenciálu, třebaže bylo možné detekovat rozdíly 10^{-6} V. Na základě těchto měření bylo určeno, že exponent ve jmenovateli Coulombova zákona je roven dvěma s absolutní přesností $2 \cdot 10^{-9}$ / Sedlák /.

2. Předpokládejme, že v Newtonově gravitačním zákonu klesá síla se vzdáleností jako $1/R^{2+\varepsilon}$, kde ε je malé číslo.

Vypočítejte gravitační potenciál uvnitř homogenní kulové slupky o plošné hustotě σ a poloměru a .

Odpověď:

$$U(r) = - \frac{2\pi G \sigma a}{(1-\varepsilon^2)r} \left[(a+r)^{1-\varepsilon} - (a-r)^{1-\varepsilon} \right].$$

Pro $\varepsilon = 0$ je $U(r) = -4\pi G \sigma a = \text{konst.}$ Je-li $\varepsilon \neq 0$, nemůže již být potenciál uvnitř slupky konstantní, o čemž se lze přesvědčit např. rozvojem $U(r)$ do Maclaurinovy řady podle r .

3. Vypočítejte potenciální energii koule o poloměru a , která je nabitá nábojem Q : a) je-li koule z nevodivého materiálu a předpokládáme-li, že náboj je rovnoměrně rozložen po celém objemu koule; b) je-li koule vodivá, tj. je-li náboj rovnoměrně rozložen po povrchu koule / Brož, Idelson /:

Řešení: a) Potenciální energie je dána vzorcem (10.44).

b) Podle (8.31) a (10.62) je

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma U dS = \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{a} \iint_S \sigma dS = \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \frac{Q^2}{a} \quad ; \quad (10.63)$$

viz vzorec (10.57) odvozený jiným způsobem.

V případě a) je energie o 20 % větší ve srovnání s případem b).

4. Zdůvodněte, proč v případě nabitě vodivé koule se elektrické náboje ustálí na jejím povrchu.

Odpověď: V důsledku odpuzivých sil se náboj rozmístí kulově symetricky s hustotou, která bude u povrchu koule větší než u středu koule. Abychom však zdůvodnili, že se náboj rozloží na samém povrchu koule (vytvoří kulovou slupku), musíme vyšetřovat vlastní potenciální energii. Jak je známo z mechaniky, stav stabilní rovnováhy je charakterizován minimální hodnotou potenciální energie. V předchozím příkladu jsme například viděli, že pro homogenně nabitou kouli je vlastní potenciální energie větší než pro kulovou slupku o stejném náboji. Obdobně předpokládejme, že náboje jsou rozloženy v tenké kulové vrstvě o vnitřním poloměru a_1 , který je menší, než poloměr koule a . Příslušná vlastní potenciální energie je dána vzorcem (10.57). Jestliže náboje z této vrstvy přesuneme na povrch koule, vlastní potenciální energie se zmenší. Lze proto očekávat, že minima potenciální energie dosáhneme tehdy, jestliže všechny náboje z vnitřku koule přeneseme na její povrch; matematický důkaz vyžaduje řešení příslušné variační úlohy / Idelson /. Ještě obtížnější je matematický důkaz, že elektrické náboje se rozloží na povrchu vodiče i v případě vodiče obecného tvaru, viz další díl skript.

5. Kapacita koule. Odvoďte vzorec pro kapacitu vodivé koule o poloměru a . Zjistěte, jakou kapacitu by měla koule o velikosti Země.

Řešení: Elektrostatický potenciál na povrchu kulové slupky je dán vzorcem (10.62), v nichž je třeba dosadit $r = a$. Vidíme, že pro danou kouli platí úměrnost mezi U a Q . Porovnáním se vzorcem $Q = CU$, jímž se zavádí kapacita, dostáváme pro kapacitu koule vzorec

$$C = 4\pi \epsilon_0 a \quad (10.64)$$

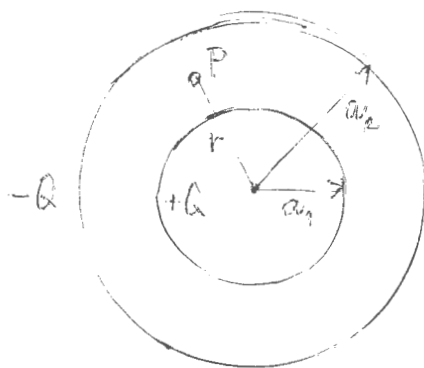
Dosadíme-li $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m a $a = 6371$ km, dostáváme $C = 709 \mu\text{F}$. Ani koule o velikosti Země nemá příliš velkou kapacitu. Samotná koule je tedy špatný kondenzátor.

6. Kapacita kulového kondenzátoru. Kulový kondenzátor se skládá ze dvou soustředných vodivých kulových ploch. Plochy nabijeme tím způsobem, že na jednu z nich přivedeme náboj $+Q$; elektrostatickou indukcí vznikne na druhé ploše náboj $-Q$ (z této původně elektricky nenabitě plochy se uzemněním odvede náboj $+Q$ do země). Pro kondenzátor definujeme vzájemnou kapacitu vztahem

$$C = \frac{Q}{U_1 - U_2}, \quad (10.65)$$

vyjadřující poměr náboje Q na vodiči kladně nabitém k rozdílu potenciálů $U_1 - U_2$ mezi vodiči, přičemž $U_1 > U_2$. Určete kapacitu kulového kondenzátoru, jehož plochy mají poloměry a_1 , a_2 , kde $a_1 < a_2$, mezi plochami je vakuum / Brož /.

Řešení: Nechť náboj Q sídlí na vnitřní ploše, náboj $-Q$ na vnější ploše (obr. 17). K určení potenciálu U_1 na vnitřní ploše a U_2 na vnější ploše se bezprostředně nabízí použití vzorce (10.62):



Obr. 17

$$U_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{a_1}, \quad U_2 = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{a_2}.$$

Po dosazení do (10.65) bychom dostali

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} .$$

Tento vzorec je v rozporu s pozorováními, která ukazují, že kapacita kondenzátoru je tím větší, čím je menší vzdálenost mezi plochami kondenzátoru; ve vzorci pro kapacitu bychom měli spíše očekávat rozdíl poloměrů, nikoliv jejich součet. Někde jsme udělali chybu. Zřejmě v tom, že jsme při výpočtu nevzali v úvahu uzemnění jedné desky. Tímto uzemněním se hladina nulového potenciálu posouvá do konečna, v důsledku toho uvedená vzorce pro potenciály neplatí, neboť byly odvozeny za předpokladu o nulovém potenciálu pouze v nekonečnu. Jinými slovy, při přenášení nábojů na jednu plochu kondenzátoru se na druhé ploše indukují náboje opačného znaménka, které vzorce typu (10.62) uvažují chybně, jakoby tyto náboje byly rovněž přineseny z nekonečna. Situaci nelze zachránit ani tím, že bychom k potenciálům přičetli stejnou konstantu, v rozdílech potenciálů by se stejně odečetla. Setkáváme se tak v těchto skriptech s prvním konkrétním případem selhání vzorců pro Newtonův potenciál, jak jsme na to upozorňovali v paragrafu 8.2. Musíme se proto vrátit ke vzorcům pro intenzitu. V prostoru mezi kulovými plochami je intenzita pole působená vnějšími náboji nulová, vnitřní náboje dávají intenzitu s radiální složkou (viz vzorec (10.53) pro gravitační pole)

$$E_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} , \quad (a_1 < r < a_2) . \quad (10.66)$$

Protože intenzita míří od vnitřní plochy ke vnější, bude větší potenciál na vnitřní ploše. Rozdíl potenciálů $U_1 - U_2$ je podle definice potenciálu roven práci, kterou musíme dodat jednotkovému kladnému náboji, abychom jej přenesli z druhé plochy na plochu první; pole vykonává práci opačného znaménka. Tedy

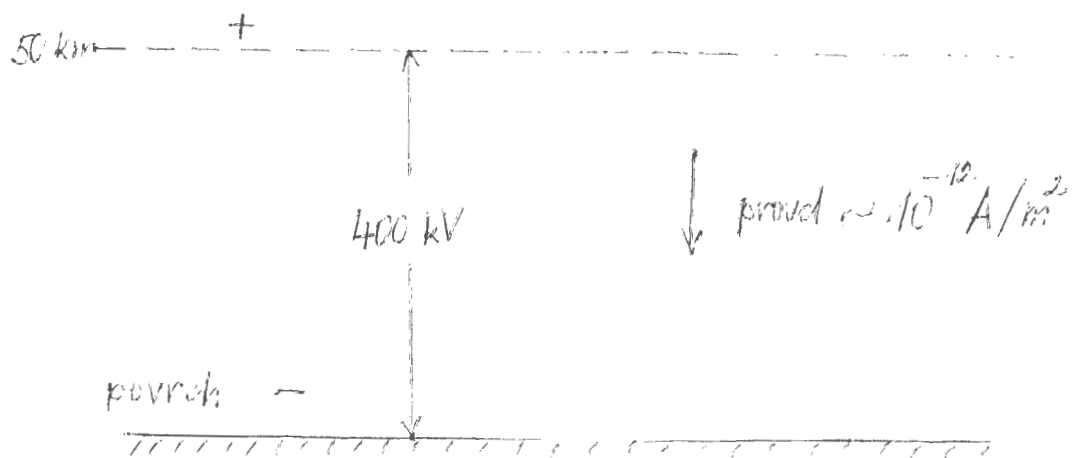
$$U_1 - U_2 = - \int_{a_2}^{a_1} E_r dr = \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) . \quad (10.67)$$

Dosazením do (10.65) dostáváme správný vzorec pro kapacitu kulového kondenzátoru

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \quad (10.68)$$

Tímto příkladem jsme se podrobněji zabývali proto, abychom ilustrovali, že ve všech problematických situacích je třeba dávat přednost výpočtům intenzity před nekritickým použitím vzorců pro Newtonův potenciál; vzorce pro intenzitu je třeba považovat za obecněji platné, než vzorce pro Newtonův potenciál.

7. Elektrické pole v atmosféře. Nad zemským povrchem existuje stálé vertikální elektrické pole, jehož intenzita míří směrem z atmosféry k zemskému povrchu (atmosféra nabitá kladně, zemský povrch záporně). V rovinnatém terénu za jasného dne má intenzita velikost kolem 100 V/m; intenzita kolísá v průběhu dne přibližně o $\pm 15\%$, závisí též na znečištění ovzduší, vlhkosti aj. / Feynman /. Domníváme se, že "plochou" nabitou kladně je vrstva atmosféry ve výškách kolem 50 km, která má již dostatečně vysokou elektrickou vodivost (obr. 18). S výškou intenzita pole klesá, ve výšce 50 km je již velice slabá. Celkový rozdíl



Obr. 18. Typické charakteristiky elektrických vlastností čisté atmosféry / Feynman / .

potenciálu mezi touto výškou a zemským povrchem je téměř 400 kV. V důsledku malé, ale nenulové, vodivosti atmosféry, teče z atmosféry do země proud, jehož celková intenzita je asi 1800 A. Jedná se tedy o složitější kondenzátor, než jaký jsme uvažovali v předchozím příkladu, mezi deskami kondenzátoru se zde nachází částečně vodivá látka. Určete:

- celkový elektrický výkon, celkový odpor a hustotu proudu;
- velikost záporného náboje Země;
- kapacitu příslušného kondenzátoru;
- přibližnou dobu, za kterou by se uvedený kondenzátor vybil, kdyby nebyl nějakým mechanismem stále dobíjen.

Odpovědi: a) 700 MW, 200Ω , $3,5 \cdot 10^{-12} \text{ A/m}^2$.

b) Z (10.66) plyne $Q = 4,5 \cdot 10^5 \text{ C}$.

c) Z (10.65) plyne $C = 1 \text{ F}$ (vzorec (10.68) dává hodnotu o řád menší, ale tento vzorec není zde použitelný, protože pole klesá s výškou rychleji, než udává vzorec (10.66)).

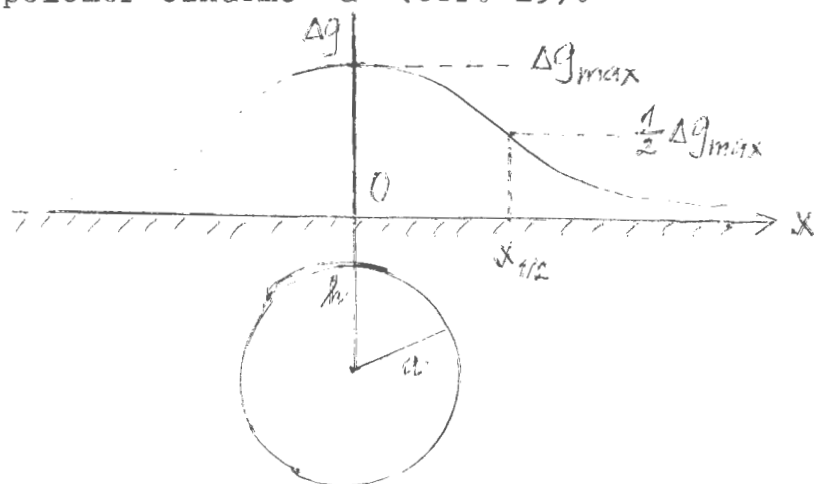
d) Za čas $t = RC$, kde R je odpor a C kapacita, klesne náboj e -krát ($e \approx 2,72$ je základ přirozených algoritmů). Vychází $t = 4$ minuty. Náboj by klesl na tisícinu původní hodnoty, tedy prakticky by vymizel, asi za půl hodiny. Tento kondenzátor tedy musí být neustále dobíjen. Předpokládá se, že toto dobíjení obstarávají bouřky, zejména v tropických oblastech; jeden blesk přináší na zemský povrch záporný náboj o velikosti asi 20-30 C, podrobný mechanismus však není znám / Feynman /.

10.6. Přímá a obrácená gravimetrická úloha pro kouli

Úkolem gravimetrického průzkumu je výzkum rozložení hmot pod zemským povrchem na základě měření jejich gravitačních účinků na zemském povrchu. Pro gravimetrický výzkum jsou vhodná zejména taková geologická tělesa, která se svou hustotou

výrazně liší od okolních hornin. Průměrná hustota hornin v povrchových částech zemské kůry činí asi $2,7 \text{ g/cm}^3$ (průměrná hustota žul). Větší hustoty mají např. hlubinné vyvřeliny a ložiska rud, naopak menší hustotu mají mnohé usazené horniny, ložiska kamenné soli, uhlí, nafty, zemního plynu aj.

Všimněme si zde otázky gravimetrického určení parametrů geologického tělesa ve tvaru koule, jejíž hustota se liší od hustoty okolí o konstantní hodnotu $\Delta\rho$. Předpokládejme, že tato koule má střed v hloubce h pod zemským povrchem, její poloměr označme a (obr. 19).



Obr. 19

Předpokládejme, že zemský povrch, na kterém provádíme měření gravitačního pole, je rovinný. Nás nyní zajímá jen ta část gravitačního pole, která je působena rozdílovými (anomálními) hmotami; toto pole budeme nazývat gravitační anomálií. Protože se nejčastěji měří vertikální složka gravitačního pole, omezme se na vyšetřování anomálie jen pro tuto složku; tj. na anomálii zrychlení volného pádu g . Tuto anomálii budeme označovat Δg .

Poznamenejme, že při měřeních na rotující Zemi se ke gravitační síle přičítá ještě síla odstředivá. Výslednému poli, složenému z gravitačního pole a pole odstředivé síly, se říká pole tíhové. Proto se v geofyzice mluví o tíhových měřeních a tíhových anomáliích. My si budeme dále všimnout jen gravitačního pole, protože gravitační a tíhové anomálie jsou stejné (pokud tzv. normální pole, od něhož odměřujeme anomálie,

plně zahrnuje pole odstředivé síly).

Zaveďme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby se její počátek O nacházel na zemském povrchu nad středem koule, osy x a y ležely na zemském povrchu a osa z byla orientována směrem dolů. Vzhledem k symetrii úlohy se omezme jen na popis v rovině (x, z) , viz obr. 19. Naším úkolem je určit vertikální složku intenzity Δg gravitačního pole na zemském povrchu, které je působeno homogenní koulí o hustotě $\Delta \rho$, jejíž střed se nachází v hloubce h pod povrchem a jejíž poloměr je a . Zřejmě platí

$$\Delta g(x) = \frac{GM}{2} \frac{h}{r^3},$$

kde M je celková hmotnost koule (rozdílová hmotnost) a $r = \sqrt{x^2 + h^2}$ je vzdálenost příslušného bodu na zemském povrchu od středu koule. Dosazením dostáváme hledaný vzorec

$$\Delta g(x) = \frac{GMh}{(x^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (10.69)$$

~~Schematický~~ Průběh této funkce je znázorněn v horní části obr. 19 (pro kladnou rozdílovou hmotnost M).

Jsou-li dány parametry uvažované koule, umožňuje vzorec (10.69) počítat gravitační anomálii na zemském povrchu. Tomuto postupu, kdy pro daný model určujeme příslušné fyzikální pole, říkáme přímá úloha. Opačný postup, kdy z naměřeného fyzikálního pole se snažíme určit parametry modelu, nazýváme obrácenou úlohou. S obrácenými úlohami se setkáváme v mnoha fyzikálních oborech, ale velice typické jsou v geofyzice, kdy z měření různých fyzikálních veličin na zemském povrchu se snažíme určit stavbu prostředí pod povrchem.

Odvoďme vzorec pro obrácenou úlohu v našem případě. Z naměřené gravitační anomálie chceme určit polohu středu koule a její rozdílovou hmotnost M . Poloměr koule nebo rozdílovou hustotu nelze určit pouze z gravimetrických měření, protože tyto veličiny nevystupují ve vztahu (10.69).

Určit bod na zemském povrchu, pod nímž se nachází střed koule, není obtížné. Je zřejmé, že tímto bodem je místo na zemském povrchu, kde gravitační anomálie nabývá největší hod-

noty (zde jsme zvolili počátek souřadné soustavy). Zbývá určit hloubku h a hmotnost M . K určení těchto dvou neznámých v principu stačí určit nějaké dva nezávislé údaje z křivky gravitační anomálie, např. hodnoty $\Delta g(x)$ pro dvě různé hodnoty souřadnice x . Jinou možností, která se často používá, je určení největší hodnoty anomálie

$\Delta g_{\max} = \Delta g(0)$ a vzdálenosti $x_{1/2}$ podél zemského povrchu, v níž hodnota anomálie klesne na poloviční hodnotu. Ze vzorce (10.69) plyne

$$\Delta g_{\max} = \frac{GM}{h^2}, \quad (10.70)$$

$$\frac{1}{2} \Delta g_{\max} = \frac{GMh}{(x_{1/2}^2 + h^2)^{3/2}}$$

Vydělíme-li levé a pravé strany těchto rovnic, po krátké úpravě dostaneme

$$h = \frac{x_{1/2}}{\sqrt{2^{2/3} - 1}} \doteq 1,305 x_{1/2}. \quad (10.71)$$

Dosadíme-li takto určenou hodnotu h do ^{některé} kterékoli z rovnic (10.70), můžeme již snadno určit i rozdílovou hmotnost M .

Některé další vzorce na řešení obrácené úlohy pro kouli jsou uvedeny např. v / Dehlinger, Mareš, Pick /, viz též následující úlohy.

Úlohy

1. Odvoďte vzorce na řešení obrácené gravimetrické úlohy pro kouli, které využívají hodnotu Δg_{\max} a polohu inflexního bodu na křivce $\Delta g(x)$.

Řešení: Pro Δg_{\max} použijeme první ze vzorců (10.70).

V inflexním bodě x_i je druhá derivace $d^2 g(x)/dx^2$ nulová, užitím (10.69) dostaneme

$$h = 2x_i. \quad (10.72)$$

2. Jak klesne hodnota gravitační anomálie pro kouli ve vzdálenosti $x = h$ od bodu maximální anomálie, kde h je hloubka středu koule?

Odpověď: $\Delta g(h) = \Delta g_{\max} / \sqrt{8} \approx 0,35 \Delta g_{\max}$.

10.7. Obecné poznámky k obráceným úlohám v gravimetrii

Už jednoduchá obrácená úloha pro kouli ukázala na některé problémy, které se vyskytují při řešení obrácených gravimetrických úloh obecně. V první řadě je to principiální nejednoznačnost řešení obrácených gravimetrických úloh (mohli jsme určit hmotnost koule, ale nikoliv její poloměr). K dalším problémům patří i sama otázka vydělení gravitační anomálie z měření v nerovném terénu a možnost složitého tvaru hledaných těles a jejich nehomogenita. K řešení složitých obrácených úloh se mohlo přistoupit až tehdy, když byly k dispozici počítače. Bylo třeba hledat nové teoretické přístupy, jejich výzkum není ve většině případů dosud zakončen. Teorie obrácených úloh, nejen gravimetrických, se tak v současné době stala předmětem velmi intenzivního studia, viz. např. přehled v /Janovskaja/. Bylo publikováno velké množství prací, přičemž však předkládané postupy se mezi sebou často velice liší. Čtenáři topak může působit potíže, aby si udělal potřebný přehled a z navrhovaných postupů si vybral ty nejvhodnější. Cílem níže uvedených poznámek je pomoci v této situaci čtenáři, který má hlubší zájem o obrácené gravimetrické úlohy. Budeme si všimnout obrácených úloh obecně, nikoliv jen speciálního problému hledání Newtonovy koule.

Ještě asi před dvěma desetiletími se při obecném řešení obrácené gravimetrické úlohy důsledně rozlišovaly dvě etapy: kvalitativní interpretace a kvantitativní interpretace. Pod kvalitativní interpretací se, zhruba řečeno, rozumělo vydělení typu rušícího tělesa, které by mohlo působit danou anomálii. Výběr tělesa se zejména řídil tvarem izočar na mapě gravitačních anomálií (protáhlým izočarám se přiřadilo protáhlé těleso atd.). Na správném výběru typu rušícího tělesa velice závisela správnost celé interpretace, důležitou roli v tomto stádiu řešení úlohy hrály zkušenosti

interpretátora. V další etapě, kvantitativní interpretaci, se určovaly číselné parametry zvoleného tělesa (hloubka, hmotnost, sklon aj.). Současným potřebám již tento dvojstupňový postup nevyhovuje, zejména nevyhovuje příliš subjektivní první etapa. Podle názorů v /Strachov/ by současná metoda interpretace gravimetrických měření, opět při jisté schematizaci, měla obsahovat etapy tři: zjištění, ^{lokali zaci} ~~identifikaci~~ a zpřesnění. Zjištěním rozumíme zjištění existence gravitační anomálie v měřených datech, což pak znamená i zjištění existence anomálního tělesa. Jedná se hlavně o ověření, zdali měřené rozdíly nejsou způsobeny jen nerovnostmi terénu či jinými hmotami, o jejichž existenci víme (výplň sedimentární pánve aj.). V této etapě se provádějí zejména různé redukce, naměřených dat a konstrukce map příslušných anomálií. ^{Lokali zaci} ~~Identifikací~~ se rozumí hlavně identifikace počtu rušících těles (zdali pozorovaná anomálie je způsobena jedním či více tělesy) a určení některých obecných charakteristik těchto těles (kulovitost či protáhlost těles, přibližná poloha těžiště, celková hmotnost aj.). Tato etapa se realizuje pomocí různých transformací potenciálových polí, jako je analytické prodloužení pole pod povrch (singularity prodlouženého pole přibližně vymezují polohu rušících těles) nebo výpočet některých integrálních charakteristik rušících těles. ~~o těchto postupech blíže pojednáme v dalším dílu skript.~~ Tato etapa interpretace by již měla poskytnout dosti dobrý počáteční model, který se v etapě zpřesnění dále vylepšuje.

Řešení výše uvedené obrácené úlohy pro kouli bylo sice mnohoznačné (nešlo určit poloměr), ale hloubku středu koule a hmotnost bylo možné určit jednoznačně. Vlastně se jednalo o jednoznačné určení parametrů ekvivalentního hmotného bodu, který vně koule vytváří stejné pole. S obdobnou situací se setkáváme i ve složitějších úlohách. Řešení obrácené úlohy tak můžeme ^{z tohoto hlediska} rozdělit na dva kroky, první jednoznačný a druhý mnohoznačný. V prvním kroku se určují takové ekvivalentní elementární zdroje (např. soustava hmotných bodů), které dávají stejné vnější pole a lze je určit jednoznačně. Ve druhém kroku se k těmto jednoznačně určeným "náhradním" zdrojům hledají reálná tělesa, tj. obecně tělesa třírozměrná, která

dávají stejné vnější pole. K omezení *mnohoznačnosti* tohoto kroku se musí využít některých dodatečných informací, např. znalostí geologických, seismických aj. V tomto druhém kroku se hmoty soustředěné v bodových či jiných elementárních zdrojích "vymetají" do prostoru tak, aby se vnější pole nezměnilo. Tento pojem "vymetání" zavedl Poincaré, ¹⁹¹² /Idel'son/. Otázkám vymetání bylo v geofyzikální literatuře věnováno v posledních letech velké množství prací. Takovéto postupy jsou jistě zajímavé z hlediska matematického, jejich oprávnění z hlediska praktického je do jisté míry odůvodněno tím, že se snažíme udělat řešení obrácené úlohy jednoznačným co nejdále, dokud to je jen možné.

Z uvedených poznámek vzniká pravděpodobně dojem, že hlavním současným trendem v metodách řešení obrácených gravimetrických úloh je snaha o rozdělení úloh na celou řadu dílčích, často jen pomocných operací. Je však třeba poznamenat, že existují i tendence právě opačné, snažíci se o řešení obrácené úlohy vcelku (s uvážením různých dodatečných podmínek pro zjištění jednoznačnosti), bez jakéhokoliv členění do různých dílčích operací. /Kobrunov/. Jedná se o současné hledání velkého počtu neznámých parametrů, což např. působí větší problémy se stabilitou řešení a zvyšuje i nároky na výpočetní časy paměť počítače, ale na druhé straně odstraňuje mnohé nepodstatné a často nepřesné mezikroky. Podaří-li se rozvinout tyto metody tak, aby vyhovovaly všem požadavkům praxe, bude to znamenat, že mnohé i velmi důmyslné dílčí postupy, jako je např. analytické prodlužování nebo metoda vymetání, ztratí v budoucnosti mnoho ze svého současného významu. Z hlediska těchto postupů lze bez velkého přehánění říci, že např. intenzivní rozvíjení metod vymetání v poslední době představuje vývojovou etapu, která je již vlastně překonána, aniž byla završena.

v geofyzice

11. GRAVITAČNÍ A ELEKTROSTATICKÉ POLE NEKONEČNÉ ROVINNÉ HOMOGENNÍ DESKY

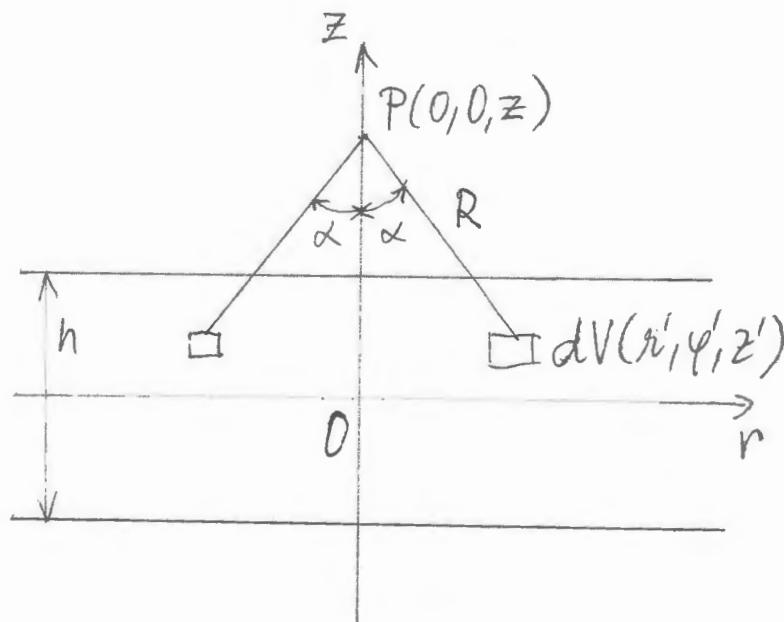
Většina látky probírané v této kapitole a v dalším díle těchto skript ~~kapitole~~ nepředstavuje z matematického hlediska nic jiného, než příklady na výpočet různých vícerozměrných integrálů. Z tohoto hlediska může být tato látka též využita v matematických cvičeních. Jednotlivými příklady se přesto budeme zabývat podrobněji z toho důvodu, že nacházejí mnohé aplikace zejména v geofyzice a budou ilustrovat některé obecné vlastnosti potenciálových polí.

11.1. Nekonečná rovinná deska

Uvažujme nekonečnou rovinnou desku všude stejné tloušťky h s konstantní hustotou ρ /Novotný/. Zvolme válcovou soustavu souřadnic r, φ, z tak, aby osa z byla kolmá na desku a procházela bodem P , v němž počítáme gravitační pole, počátek O souřadnicové soustavy zvolme ve středu desky (obr. 20). Nechť válcový element objemu dV má souřadnice r', φ', z' a nechť R je jeho vzdálenost od bodu $P(0, 0, z)$. Platí

$$dV = r' dr' d\varphi' dz' ,$$

$$R^2 = r'^2 + (z - z')^2 . \quad (11.1)$$



Obr. 20

Počítejme nejdříve intenzitu gravitačního pole desky. Z geometrie úlohy je zřejmé, že intenzita \vec{E} bude rovnoběžná s osou z . Ke každému elementu dV lze totiž nalézt stejný element symetrický vzhledem k ose z (obr. 20); výsledná intenzita od těchto dvou elementů má nenulovou jen ~~z -ovou~~ složku, složky rovnoběžné s deskou se vzájemně ruší. Z obecných vzorců (7.15) užitím (11.1) plyne pro intenzitu v bodě P nad deskou (souřadnice z ^{větší} než libovolné z') vzorec

$$\begin{aligned}
 E_z(P) &= -G \iiint_V \rho \frac{z - z'}{R^3} dV = \\
 &= -G \rho \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z - z') r' dr' d\varphi' dz'}{[r'^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \\
 &= +2\pi G \rho \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{z - z'}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}} \right]_{r'=0}^{r'=\infty} dz' = -2\pi G \rho h.
 \end{aligned}
 \tag{11.2}$$

Je zřejmé, že v bodech pod deskou změní E_z pouze znaménko. Pro velikost intenzity pole $|\vec{E}(P)| = |E_z(P)|$ v bodech mimo desku odtud dostáváme

$$|\vec{E}(P)| = 2\pi G \rho h. \tag{11.3}$$

Tento vzorec udává přitažlivost nekonečné homogenní desky v bodech mimo desku. V gravimetrii je znám pod pojmem "Bouguerova redukce" nebo "Bouguerův člen". Používá se, vedle Fayeovy redukce i jiných redukcí, při přepočtu gravitačního zrychlení naměřeného v nadmořské výšce h na hladinu moře.

Všimněme si, že velikost intenzit, je stejná ve všech bodech mimo desku, že je nezávislá na vzdálenosti od desky. V každém z poloprostorů, vydělených deskou, se tedy vytváří homogenní silové pole. (Pokuste se názorně vysvětlit, jak je možné, že v tomto případě intenzita neklesá, jestliže se ~~v~~ vzdalujeme od desky).

Tento model je opět zajímavý z hlediska gravimetrického průzkumu. Nedí se v zemi nachází vrstva zvýšené nebo snížené hustoty, rovnoběžná se zemským povrchem. Předpokládejme nyní, že je vrstva sice konečná, ale dostatečně rozlehlá v horizontálním směru. Z gravimetrických měření na zemském povrchu kdesi nad středem vrstvy, tj. daleko od okrajů vrstvy, můžeme určit jen součin tloušťky vrstvy ρ a rozdílu hustot, nemůžeme však určit, v jaké hloubce se vrstva nachází.

Protože výše uvedená nekonečná homogenní ^{deska} vytváří ve vnějších bodech homogenní pole, bude existovat potenciál, který bude lineární funkcí souřadnice z . Užitím (11.2) a symetrie úlohy vzhledem k rovině $z = 0$ dostáváme následující vzorec pro potenciál v bodech vně desky:

$$U(z) = 2\pi G \rho h |z| + C \quad \text{pro } |z| \geq h/2 \quad . \quad (11.4)$$

Pro jednoduchost bychom mohli položit $C = 0$. Při konstrukci obr. 21 však používáme ještě jinou volbu.

Intenzitu a potenciál uvnitř desky snadno dostaneme rozdělením desky na dvě části rovinou, která je rovnoběžná se stěnami desky a prochází uvažovaným bodem, a sečtením příslušných příspěvků. Vyjde

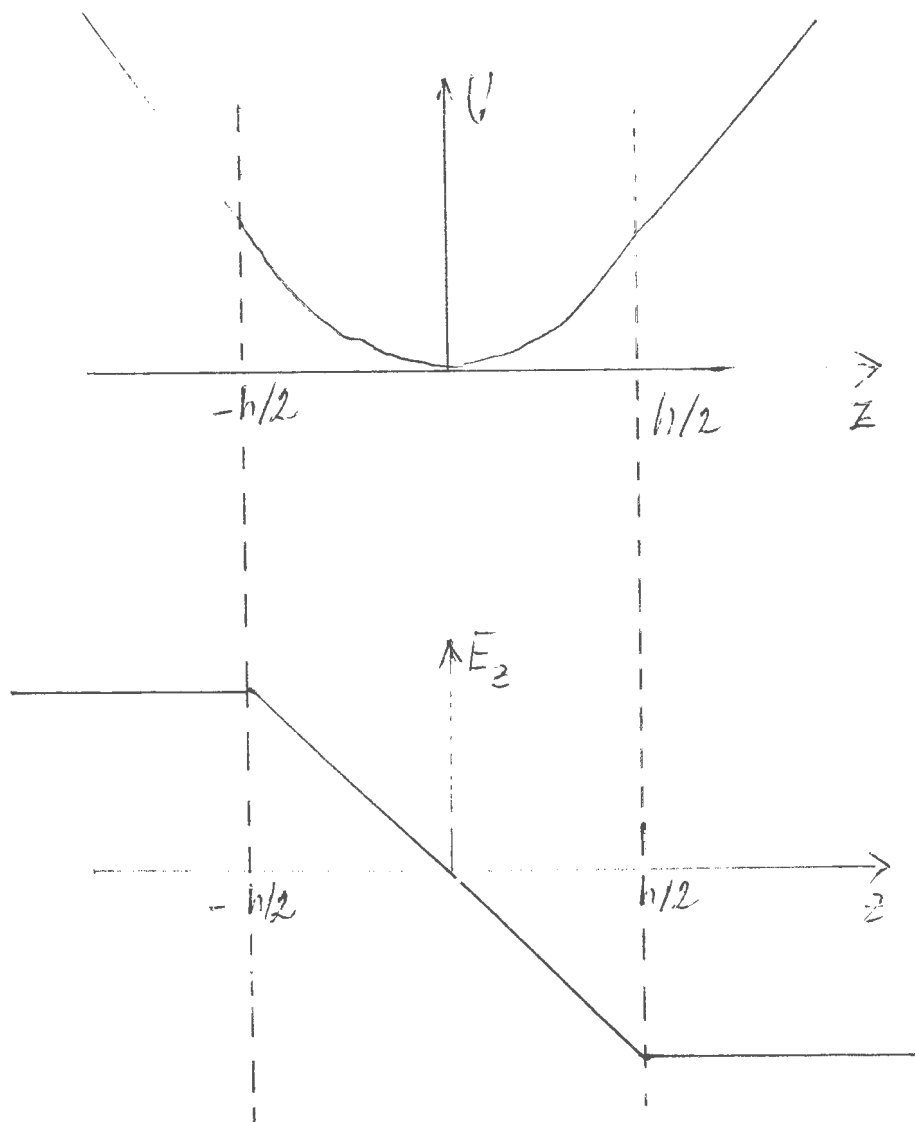
$$E_z(z) = -4\pi G \rho z \quad \text{pro } |z| \leq h/2 \quad . \quad (11.5)$$

Pro potenciál uvnitř desky, až na aditivní konstantu, kterou položíme rovnou nule, zřejmě platí

$$U(z) = 2\pi G \rho z^2 \quad \text{pro } |z| \leq h/2 \quad . \quad (11.6)$$

Průběh potenciálu a intenzity je schematicky znázorněn na obr. 21, přičemž jsme konstantu C v (11.4) zvolili tak, aby potenciál byl spojitý. Lze snadno ověřit, že nalezený potenciál splňuje ~~také obecné diferenciální rovnice uvedené v paragrafu 7.5, tj. Laplaceovu rovnici vně desky a Poissonovu rovnici ve vnitřních bodech desky.~~ Tím je úloha vyřešena. Ve zbývajících částech tohoto ^{(viz (10.35), (10.36) a následující kapitoly.)}

paragrafu a v následujícím paragrafu pojednáme o možnosti či nemožnosti použití některých jiných postupů k řešení dané úlohy.



Obr. 21. Působení gravitačního potenciálu a intenzity pro nekonečnou desku ve směru kolmém k desce.

V uvažovaném případě lze provést výpočet intenzity pole velice jednoduše také užitím Gausseva zákona, ^{viz (10.21)} viz ~~paragraf 7.5~~. Stačí ~~zkontrolovat~~ ^{stručně} válecek, jehož plášť je rovnoběžný s osou z a podstavy jsou na tuto osu kolmé, přičemž jedna podstava prochází bodem P, druhá prochází bodem souměrným podle počátku. Na tvaru a velikosti podstavy nezáleží. K toku intezity povrchem válce přispívá pouze tok podstavami, protože tok pláštěm je nulový. Další postup je snadný, odvoďte tímto způsobem vzorce (11.2) a (11.5). Výše uvedené složitější odvození, vycházející z obecných vzorců pro intenzitu (.15), jsme zde dělali ze stejných důvodů, které byly uvedeny v paragrafu 10.1, tj. z důvodů ucelenosti teorie a proto, že vzorce pro intenzitu považujeme za základní.

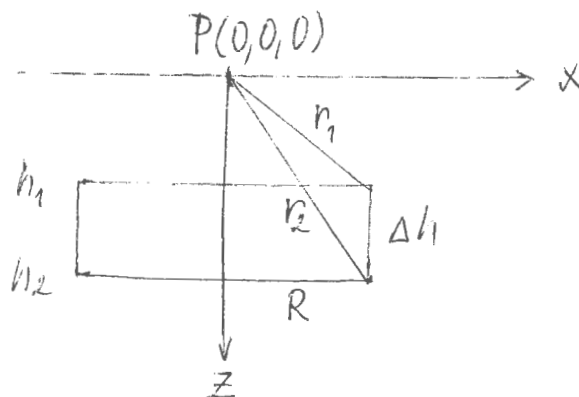
Úlohy

V úlohách 1 a 2 se má určit vertikální složka intenzity gravitačního pole působeného některými tělesy, které vzniknou "vyříznutím" z nekonečné desky. Tato tělesa nacházejí četné aplikace v gravimetrii a gravimetrickém průzkumu, některé další příklady uvedeme níže. Použijeme některé označení podle /Mareš/, viz připojené otázky.

1. Kruhový válecek se svislou osou (obr. 22). Nechť válecek má poloměr R a podstavy v hloubkách h_1 a h_2 . Dokažte, že na ose válce na zemském povrchu platí

$$E_z(0,0,0) = 2\pi G \rho (r_1 + \Delta h - r_2) \quad , \quad (11.7)$$

$$\text{kde } \Delta h = h_2 - h_1 \quad , \quad r_i = \sqrt{R^2 + h_i^2} \quad , \quad i = 1, 2 \quad .$$



Obr. 22

2. Sektor kruhového válce se svislou osou (obr. 23). Uvažujme těleso, které je ohraničené vodorovnými rovinami v houbkách h_1 a h_2 , válcovými plochami s osou z o poloměrech R_1 a R_3 a dvěma rovinami proloženými osou z , které spolu svírají úhel α . Odvoďte vzorec

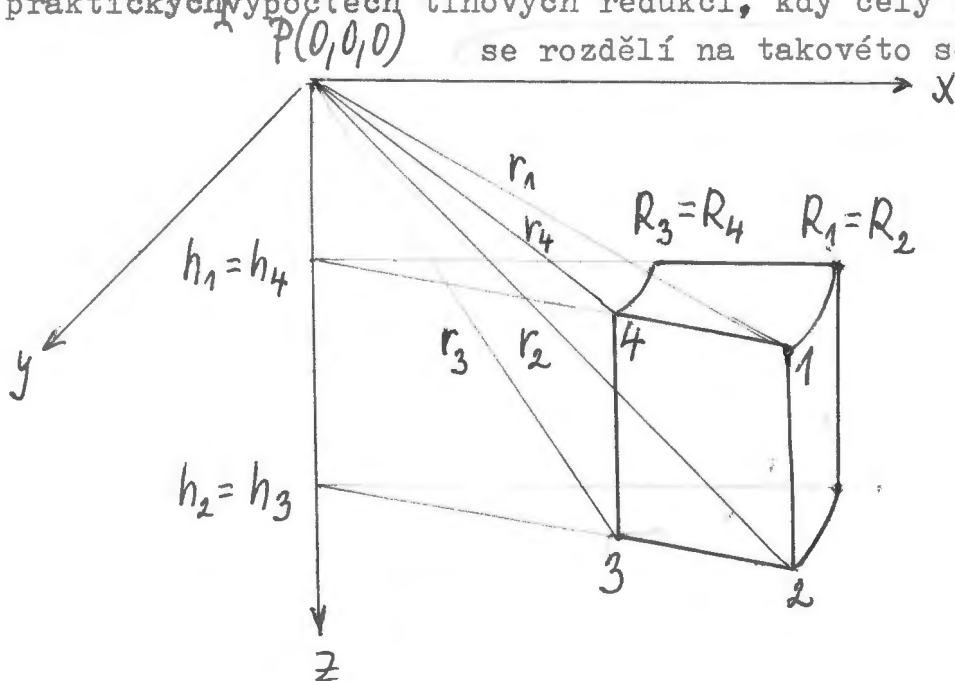
$$E_z(0,0,0) = G \rho \alpha (r_1 - r_2 + r_3 - r_4) ,$$

kde číslování bodů udává obr. 23,

$$R_1 = R_2 , R_3 = R_4 , h_1 = h_4 , h_2 = h_3 ,$$

$$r_i = \sqrt{R_i^2 + h_i^2} , i = 1 \text{ až } 4 .$$

Poznamenejme, že tělesa tohoto tvaru jsou často používána při praktických výpočtech tíhových redukci, kdy celý integrační obor se rozdělí na takovéto segmenty.



Obr. 23

3. Odvoďte potenciál homogenní nekonečné desky užitím Laplaceovy a Poissonovy rovnice.

Řešení: Vzhledem k symetrii úlohy bude potenciál funkcí pouze jedné souřadnice z kolmé k desce, $U = U(z)$, viz obr. 20. Laplaceova rovnice, která platí v bodech mimo desku, bude mít v tomto případě jednoduchý tvar

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 .$$

Integrací odtud plyne

$$\frac{\partial U}{\partial z} = C_1 \quad , \quad U = C_1 z + C_2 .$$

Poissonova rovnice v bodech uvnitř desky nabývá obdobně tvaru

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi G \rho .$$

Její obecné řešení má tvar

$$U = 2\pi G \rho z^2 + C_3 z + C_4 .$$

Položíme-li hladinu nulového potenciálu do roviny $z = 0$, dostaneme $C_4 = 0$. V důsledku symetrie úlohy podle roviny $z = 0$ musí být též $C_3 = 0$. Tím dostáváme vzorec (11.6) pro vnitřní potenciál. Uvažujme dále jen poloprostor $z > 0$. Konstanty C_1 a C_2 ve výrazu pro vnější potenciál určíme z požadavku, aby potenciál a jeho první derivace byly spojité na hranici desky $z = h/2$. Vyjde

vyjde

$$U = 2\pi G \rho h (z - h/4) \quad \text{pro } z \geq h/2,$$

což souhlasí se vzorcem (11.4). Stojí ještě za povšimnutí, že Laplaceova a Poissonova rovnice samotné nepopisují studované pole plně, jejich řešení obsahují některé konstanty, které mohly být určeny až přijetím dodatečných předpokladů o spojitosti. Museli jsme odněkud jinud vědět či tušit, že těmi správnými dodatečnými (okrajovými) ^{předpoklady} je právě spojitost potenciálu a jeho první derivace. Na druhé straně vzorce pro intenzitu (7.15) vedly jednoznačně k řešení úlohy, příslušné spojitosti se nemuseli předpokládat, ale naopak ^{přímě} z těchto vzorců ^pvylývaly.

11.2. O nemožnosti zavedení Newtonova potenciálu pro nekonečnou desku

Potenciál jsme pro nekonečnou desku v předešlém paragrafu odvodili přímo z nalezených jednoduchých výrazů pro intenzitu. Obdobně jako v případě Newtonovy koule by: om měli ukázat, že stejné vzorce pro potenciál nekonečné desky dostaneme i z obecného vzorce pro Newtonův potenciál (8.10). Bohužel, v tomto případě nic takového ukázat nelze! Bezprostřední výpočet Newtonova potenciálu pro uvažovanou desku vede totiž na divergentní integrál (integrál je v tomto případě v absolutní hodnotě nekonečně velký), jak hned odvodíme.

Hledejme nejprve Newtonův potenciál pro homogenní kruhový válec, jehož ^{osou je} osa z procházející uvažovaným bodem P . ^{výšku} válec označme h , jeho ^{válcem} který má výšku h a poloměr r^* . Z tohoto válce dostaneme nekonečnou desku limitním přechodem pro $r^* \rightarrow \infty$. Pro potenciál na ose válce platí:

$$U(P) = -G \iiint_V \frac{\rho}{R} dV = -G \rho \int_0^{r^*} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{r' dr' d\varphi' dz'}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}} =$$

$$= -2\pi G \rho \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sqrt{r'^2 + (z - z')^2} \right]_{r'=0}^{r'=r^*} dz' \quad (11.8)$$

Kdybychom mohli provést limitní přechod za ~~známením~~ integrálu, je divergence posledního integrálu ihned zřejmá, neboť integrál roste do nekonečna pro $r^* \rightarrow \infty$. Postupuj me však přesněji. Uvažuj me pro jednoduchost jen body nad deskou, tj. $z > h/2$. Užitím vzorce pro neurčitý integrál (viz /Rektorys/ a příklady ~~za~~ tímto paragrafem)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right] + C \quad (11.9)$$

lze potenciál na ose válce vyjádřit ve tvaru

$$U(P) = \pi G \rho r^* \left[d \cdot u - (d + h)w + r^* \ln(w/u) \right], \quad (11.10)$$

kde $d = z - h/2$ je vzdálenost pozorovatele P od horní podstavy válce a

$$u = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{r^*}\right)^2} - \frac{d}{r^*},$$

$$w = \sqrt{1 + \left(\frac{d + h}{r^*}\right)^2} - \frac{d + h}{r^*}. \quad (11.11)$$

Pro velká r^* dostáváme užitím příslušných Maclaurinových rozvoju vyjádření

$$U(P) = - 2 \pi G \rho h r^* + 2 \pi G \rho h (d + h/2) + \frac{1}{r^*} (\dots) \quad (11.12)$$

Toto je Newtonův potenciál na ose kruhového válce, který má velký poloměr. Přechodem k nekonečné desce, tj. pro $r^* \rightarrow \infty$, dostaneme $U(P) = -\infty$ v důsledku prvního členu na pravé straně.

Vidíme, že pokud je teorie gravitačního nebo elektrostatického pole založena na obecných vzorcích pro Newtonův potenciál, což je běžné ve většině učebnic, tato teorie ztroskotává v případě nekonečné desky. V učebnicích se o tomto selhání raději mlčí, protože jeho příčiny při zvoleném přístupu obvykle zůstávají zahaleny tajemstvím. Běžně se ^{totož} příslušných výkladech vychází z obecných vzorců pro Newtonův potenciál. Jakmile se však přistoupí

k nekonečné desce nebo k jinému nekonečnému modelu (např. nekonečný válec nebo drát), ~~viz níže~~, započne se výklad výpočtem intenzity a teprve z ní se určí potenciál, jak jsme to dělali na začátku tohoto paragrafu. Případně se o potenciálu pro nekonečnou desku nemluví.

Z hlediska přístupu, který používáme v těchto skriptech, je výklad uvedeného selhání teorie Newtonova potenciálu velice snadný. Za základ totiž bereme popis pole pomocí intenzity. Pouze v případech, kdy lze zaměnit pořadí integrace a derivace (gradientu) v příslušných vzorcích, lze zavést popis pomocí Newtonova potenciálu. V případě nekonečné desky tedy zřejmě nejsou potřebné předpoklady pro záměnu splněny, protože Newtonův potenciál nelze zavést (blíže viz kap. 12.). Potenciál, který se nám výše přesto podařilo nalézt, je tedy jiným typem potenciálu, nikoliv potenciálem Newtonovým.

pro nekonečnou desku (11.4)

Pokusme se vyjasnit, má-li nalezený potenciál vůbec nějaký vztah k Newtonovým potenciálům. Všimněme si blíže vzorce (11.12) pro Newtonův potenciál kruhového válce o velkém poloměru. Poloha uvažovaného bodu P na ose válce je charakterizována vzdáleností d od horní podstavy, tedy $U(P) = U(d)$. První člen na pravé straně tohoto vzorce neobsahuje d , pro daný válec je to tedy konstanta, kterou vlastně nemusíme uvažovat. Potíž spočívá jen v tom, že při přechodu k nekonečné desce roste hodnota této konstanty nade všechny meze. Kdybychom však tuto konstantu neuvažovali a přešli k limitě pro $r^* \rightarrow \infty$, zůstane na pravé straně vzorce (11.12) jen druhý člen. Tento člen není ničím jiným, než vzorcem (11.4), který byl pro potenciál odvozen výše (pro bod nad deskou, tj. pro $z > h/2$). Zcela formálně, kdybychom nekonečno mohli rovnoprávně přiřadit k reálným číslům, mohli bychom výsledek formulovat následujícími slovy. Potenciály pro nekonečnou desku, odvozené v předchozím paragrafu, se od příslušných divergentních Newtonových potenciálů liší "jenom" o jistou nekonečnou konstantu. To blíže vysvětluje i situaci, proč Newtonův potenciál existuje pro válec o konečné výšce h a o libovolně velkém, ale konečném, poloměru, a proč už neexistuje pro nekonečnou desku. Vysvětlení můžeme tedy formulovat tak, že Newtonův potenciál pro válec v sobě

zahrnuje jistou konstantu úměrnou poloměru, která nevádí, pokud poloměr zůstává konečný, avšak znehodnocuje výsledek při přechodu k nekonečné desce.

Abychom dostali správný potenciál pro nekonečnou desku, postačilo by divergentní Newtonův potenciál "překalibrovat", tj. odstranit z něj nekonečný člen. Takovéto kalibrační transformace, tj. vyškrtávání nepohodlných singulárních členů, jsou hojně používány v mnohých fyzikálních teoriích. Nicméně z matematického hlediska nemají takovéto transformace náležité oprávnění; v matematice zanedbáváme vždy jen členy nekonečně malé, nikoliv členy nekonečně velké.

Když už jsme se pustili v tomto paragrafu do "kritiky" Newtonova potenciálu, pojďme ještě dále. Z předchozího rozboru by se mohlo zdát, že všechny problémy s Newtonovým potenciálem zmizí, pokud budeme uvažovat jenom omezená tělesa. Avšak ani to není docela pravda, máme-li na mysli výpočetní stránku problému. Vraťme se k výpočtu gravitačního pole na ose kruhového válce, který má konečné rozměry. Výpočet intenzity (příklad 1 v předcházejícím paragrafu 11.1, vzorec (11.7)) byl velice snadný, protože při integraci bylo možné všechny primitivní funkce vyjádřit pomocí odmocnin. Naproti tomu výpočet potenciálu vedl na podstatně složitější integrál (11.9). Tato situace, kdy výpočet potenciálu je podstatně složitější než výpočet intenzity, je velice častá, mnoho příkladů bude uvedeno v následujícím dílu skript. Dospíváme tak k poněkud neočekávanému a paradoxnímu zjištění, že výpočet formálně jednoduchého integrálu (8.10) pro potenciál bývá obtížnější než výpočet složitější vyhlížejících integrálů (7.15) pro intenzitu. Jednou z mála výjimek, které potvrzují toto pravidlo, je případ koule (kap. 10), kdy výpočet potenciálu byl jednodušší než výpočet intenzity.

Uvedené diskuse naznačují, že potenciál bychom měli spíše považovat za velice užitečnou matematickou pomůcku, než za pojem s příliš hlubokým fyzikálním významem. Měli bychom na něj pohlížet spíše jako na veličinu odvozenou, nesnažit se z něj vycházet při budování fyzikálních teorií, jak se o to úporně pokoušejí autoři mnohých učebnic ve snaze o maximální zjednodušení matematické stránky problému. Zjednodušování jakékoliv

teorie je zajištěné chválné, ale nesmějí se překročit jisté meze. Výstižně tento problém vyjádřil A. Einstein slovy: "make everything as simple as possible but not simpler" (Udělej všechno tak jednoduché, jak jen je možné, ale ne jednodušší). Snaha, s níž se často setkáváme, o vybudování celé gravimetrie, elektrostatiky a magnetostatiky pouze na základě Newtonova potenciálu je tím překročením povolených mezí.

Úlohy

1. Odvoďte vzorec (11.9) pro neurčitý integrál

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx \quad .$$

Řešení: Nejprve integrací per partes dostaneme /Smirnov/

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = x \sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx \quad .$$

V posledním integrálu přičteme a odečteme v čitateli číslo a^2 . Předchozí rovnost pak nabývá tvaru

$$2 \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad .$$

K výpočtu posledního integrálu použijeme Eulerovu substituci

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t - x \quad , \quad t = x + \sqrt{a^2 + x^2} \quad . \quad (11.13)$$

Umocněním první rovnosti po úpravě dostaneme

$$x = \frac{t^2 - a^2}{2t} \quad .$$

Odtud

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t - x = \frac{t^2 + a^2}{2t} \quad ,$$

$$dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} \, dt \quad .$$

Protože je $t = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ kladné pro libovolné reálné x (pokud $a \neq 0$), pro poslední integrál dostáváme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C \quad .$$

Platnost vzorce (11.9) je nyní již zřejmá.

2. Odvoďte vzorec (11.9) tím způsobem, že Eulerovu substituci provedete na samém začátku.

3. Odvoďte následující vzorce pro hyperbolické a hyperbolometrické funkce /Rektorys/:

$$(\cosh x)' = \sinh x \quad , \quad (\sinh x)' = \cosh x \quad ,$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad ,$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x \quad ,$$

$$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2} \quad , \quad (11.14)$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad ,$$

$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad ,$$

$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x^2 \geq 1) \quad .$$

4. Odvoďte vzorec (11.9) užitím vzorců (11.14) z předchozího příkladu.

Důvod: Použijte substituci $x = a \sinh t$.

11.3. Nekonečná rovinná vrstva a dvojvrstva

Uvažujeme opět nekonečnou rovinnou homogenní desku, kterou jsme se zabývali v předešlých paragrafech (obr. 20). Zmenšujeme nyní tloušťku desky h a současně zvětšujeme hustotu tak, aby se součin těchto hodnot $\sigma = \rho h$ nezměnil (v tomto případě se hmota libovolné části desky při "stlačování" zachovává). V limitě pro $h \rightarrow 0$ přechází deska v jednoduchou vrstvu s plošnou hustotou σ . Užitím (11.4) dostáváme potenciál této rovinné jednoduché vrstvy ve tvaru

$$U(z) = 2\pi G \sigma |z|, \quad -\infty < z < \infty. \quad (11.15)$$

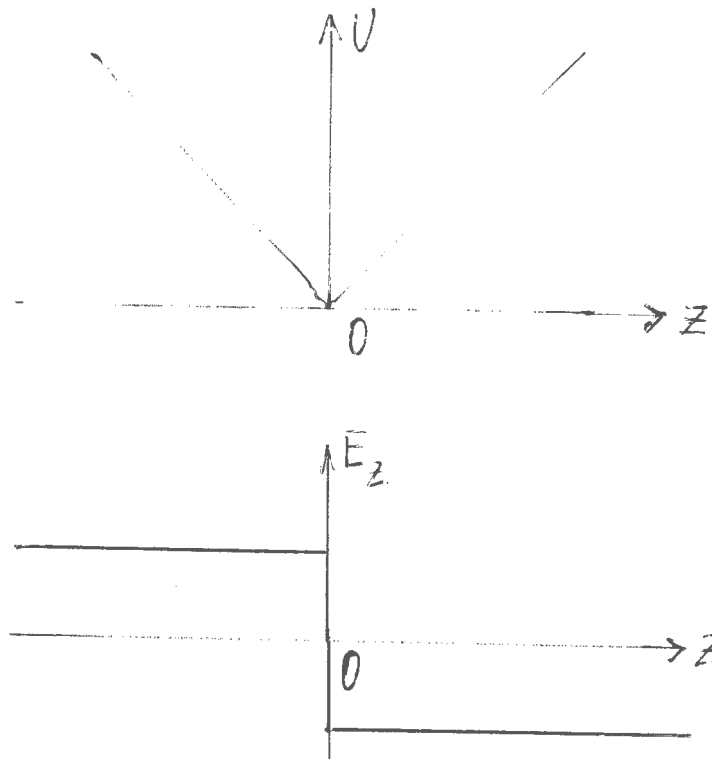
Pro tuto speciální jednoduchou vrstvu odtud ihned plyne (viz též změny v obr. 21 při $h \rightarrow 0$):

- a) Potenciál jednoduché vrstvy je všude ^{spojitý.} ~~stejný~~.
- b) První derivace potenciálu ve směru normály k ploše je na této ploše nespojitá, tj. intenzita $\vec{E} = -\text{grad } U$ má na ploše nespojitou normálovou složku:

$$E_z(0+) - E_z(0-) = -4\pi G \sigma, \quad (11.16)$$

Zde je rozdíl od objemového potenciálu, který má první derivace všude spojitě.

V učebnicích se dokazuje, že vlastnosti a), b) jsou obecnými vlastnostmi potenciálu jednoduché vrstvy, platnými pro velmi obecné nerovinné plochy a pro proměnnou plošnou hustotu / Gjunter, Pick, Sretenskij, Tichonov + Samarskij/, viz kap. 13. V předcházející kapitole jsme stejné vlastnosti zjistili u pole kulové slupky, vzorec (11.16) je shodný s (10.59). Průběh gravitačního potenciálu a intenzity v závislosti na souřadnici z je schematicky znázorněn na obr. 24.



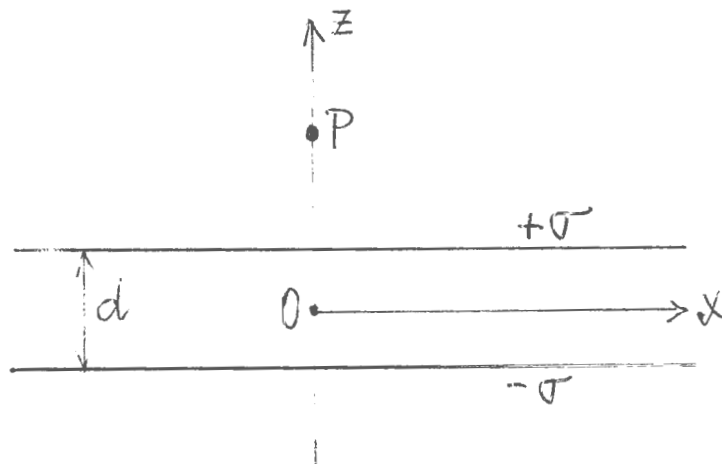
Obr. 24. Průběh gravitačního potenciálu a intenzity pro nekonečnou hmotnou rovinu ve směru kolmém k této rovině.

Pro případ elektricky nabitě roviny s plošnou hustotou náboje σ dostaneme zřejmě namísto (11.15) a (11.16) následující vzorce:

$$U(z) = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|, \quad -\infty < z < \infty, \quad (11.17)$$

$$E_z(0+) - E_z(0-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (11.18)$$

Uvažujeme nyní dvě rovnoběžné roviny nabitě rovnoměrně se stejně velkými plošnými hustotami, ale opačného znaménka (obr.25).



Obv. 25

Označme d vzdálenost desek, σ plošnou hustotu náboje na jedné z nich, ($-\sigma$) na druhé. Osou z kartézské soustavy zvolme kolmo k rovinám, počátek zvolme uprostřed mezi rovinami. Potenciály pro jednotlivé roviny dostaneme jednoduchou úpravou vzorce (11.17). Pro výsledný potenciál dvojice opačně nabitých rovin dostáváme

$$U(z) = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\left| z - \frac{d}{2} \right| - \left| z + \frac{d}{2} \right| \right] .$$

Odtud plyne

$$U(z) = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \quad \text{pro} \quad z \geq \frac{d}{2} ,$$

$$U(z) = \frac{\sigma z}{\epsilon_0} \quad \text{pro} \quad |z| \leq \frac{d}{2} , \quad (11.19)$$

$$U(z) = - \frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \quad \text{pro} \quad z \leq -\frac{d}{2} .$$

Obdobně, jako jsme výše přešli od desky k jednoduché vrstvě, přejdeme nyní od dvojice jednoduchých vrstev ke dvojvrstvě. Zmenšujeme vzdálenost d mezi nabitými rovinami a současně zvětšujeme plošné hustoty tak, aby se součin těchto hodnot

$\gamma = \sigma d$ nezměnil. V limitě pro $d \rightarrow 0$ přechází soustava dvou rovin ve dvojvrstvu s plošnou hustotou elektrického dipólového momentu γ .

Pro potenciál dvojvrstvy plyne z (11.19):

$$U(z) = \frac{\gamma}{2 \epsilon_0} \quad \text{pro } z > 0, \quad (11.20)$$

$$U(z) = -\frac{\gamma}{2 \epsilon_0} \quad \text{pro } z < 0.$$

Vidíme, že při průchodu dvojvrstvou se mění nespojitě už sám potenciál:

$$U(0+) - U(0-) = \frac{\gamma}{\epsilon_0}. \quad (11.21)$$

Lze opět ukázat, že vzorec (11.21) platí mnohem obecněji, i pro nerovinné a nehomogenní dvojvrstvy.

Úloha

- Kapacita deskového kondenzátoru. Uvažujme deskový kondenzátor, jehož každá deska má plochu S a vzdálenost mezi deskami je d . Předpokládejme, že rozměry desek jsou mnohem větší než jejich vzdálenost d (abychom při výpočtu mohli zanedbat efekty na okrajích kondenzátoru). Odvoďte vzorec pro kapacitu kondenzátoru, je-li mezi deskami
 - vakuum;
 - látka o permitivitě ϵ .

Řešení: Jsou-li rozměry desek mnohem větší než jejich vzdálenost, pak se náboj Q přenesený na neuzemněnou desku rozloží po této desce přibližně s konstantní plošnou hustotou σ , pro níž platí $Q = S\sigma$. Na uzemněné desce se indukuje náboj s plošnou hustotou $(-\sigma)$. Potenciály na deskách, je-li mezi nimi vakuum, udává první a třetí ze vzorců (11.19). Užitím vzorce $C = Q/(U_1 - U_2)$, viz (10.65), dostáváme pro kapacitu deskového kondenzátoru vzorec

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}. \quad (11.22)$$

Je-li mezi deskami kondenzátoru látka o permitivitě ϵ , dostaneme obdobně

$$C = \epsilon \frac{S}{d}. \quad (11.23)$$

2. Švitkový kondenzátor TC 182 je váleček o průměru a výšce . Jeho rozebráním bylo zjištěno, že šířka polepů je cm, jejich délka je asi cm a tloušťka izolačního papíru je přibližně . Určete jeho kapacitu, je-li relativní permitivita kondenzátorového papíru $\epsilon_r = 4,5$ (Valouch/, tj. $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.

Odpověď : Výrobce udaná kapacita činí 0,33 μF .

11.4. Některá zobecnění, na něž ukazují řešené příklady

Dosud vyšetřované modely v předešlé a v této kapitole, vedle konkrétních aplikací, posloužily i k ilustraci některých obecných vlastností potenciálových polí. Tak vlastnosti objemového potenciálu jsme ilustrovali na případě ^{ma}Newto~~ny~~ koule a rovinné desky, vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy na kulové slupce a rovinné vrstvě, vlastnosti potenciálu dvojvrstvy na rovinné dvojvrstvě.

Ve všech vyšetřovaných případech jsme zjistili, že lze nalézt potenciál, který je omezený v celém prostoru (tj. vně i uvnitř zdrojů). Lze očekávat, že zjištěná omezenost je obecnou vlastností objemového potenciálu a potenciálů jednoduché vrstvy a dvojvrstvy. Obecnými důkazy se budeme zabývat v ^{kap. 12 a 13.} ~~kapitole 15 a 16.~~

Kromě toho lze z jednoduchých vyšetřovaných modelů například usoudit, že by pro spojitost potenciálu a jeho derivací měly obecně platit ~~vlastnosti~~, uvedené přehledně v ~~tab. 1.~~ Z této tabulky je vidět, jak se ^zšoršuje spojitost po~~ž~~ na hranici tělesa při přechodu od objemových zdrojů k jednoduché vrstvě a dále ke dvojvrstvě. Tvrzení o nespojitostech jsme dokázali tím, že jsme našli konkrétní příklady, kdy k takovým nespojitostem dochází. Zbývá tedy provést obecné důkazy spojitosti pro veličiny uvedené v tab. 1, viz kap. 12 a 13.

Tabulka 1. Chování potenciálu U a jeho prvních a druhých derivací ve směru normály při přechodu z vnějšího prostoru do míst, kde se nacházejí zdroje pole.

	U	$\partial U / \partial n$	$\partial^2 U / \partial n^2$
Objemové zdroje	spojité	spojité	nespojité
Jednoduchá vrstva	spojité	nespojité	
Dvojvrstva	nespojité		

LITERATURA

- [1] C.W. Allen: Astrophysical Quantities. University of London, The Athlone Press 1973 (ruský překlad: Mir, Moskva 1977).
- [2] H. Bondi: Assu^mption and Myth in Physical Theory. Cambridge University Press, Cambridge 1967 (ruský překlad: Mir, Moskva 1972).
- [3] J. Brož: Elektřina a magnetismus I. SPN, Praha 1974 (skripta).
- [4] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky. SNTL, Praha 1980.
- [5] P. Dehlinger: Marine Gravity. Elsevier, Amsterdam 1978 (ruský překlad: Nedra, Moskva 1982).
- [6] G.N. Dubošin: Teorija pritjaženija. GIFML, Moskva 1961.
- [7] G.N. Dubošin: Nebesnaja mechanika (Osnovnyje zadači i metody). Nauka, Moskva 1975.
- [8] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2. Addison-Wesley Publ. Company, Reading 1964 (ruský překlad: T. 5, Mir, Moskva 1966).
- [9] T. Gehrels (Ed.): Jupiter. The University of Arizona Press, Tucson, Arizona 1976 (ruský překlad: Mir, Moskva 1978).
- [10] N.M. Gjunter: Teorija potenciala i jeje primenenije k osnovnym zadačam matematičeskoj fiziki. GITTL, Moskva 1953.
- [11] J. Goguel: Geothermics. McGraw-Hill, New York 1976.
- [12] P.R. Halmos: Jádno matematiky. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, XXVII (1982), 273-281.
- [13] G.P. Horedt: Gravitational heating of planets. Phys. Earth Planet. Inter., 21 (1980), 22-30.
- [14] N. Idel'son: Teorija potenciala s priloženijami k teo-

- rii figury Zemli i geofizike. ONTI, Leningrad 1936.
- [15] J.A. Jacobs: The Earth's Core. Academic Press, London 1975 (ruský překlad: Mir, Moskva 1979).
- [16] T.B. Janovskaja, L.N. Porochova: Obratnyje zadači geofiziki. Izd. Leningradskogo universiteta, Leningrad 1983.
- [17] B.M. Janovskij: Zemnoj magnetizm I. Izd. Leningradskogo universiteta, Leningrad 1964.
- [18] V. Jarník: Diferenciální počet II. NČSAV, Praha 1956.
- [19] V. Jarník: Integrální počet II. NČSAV, Praha 1955.
- [20] H. Jeffreys, B. Swirles: Methods of Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge 1966 (ruský překlad: Mir, Moskva 1969).
- [21] O.D. Kellogg: Foundations of Potential Theory. Springer-Verlag, Berlin 1967 (prvně vydáno 1929).
- [22] Ch. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman: Mechanics. Berkeley Physics Course, Vol. 1. McGraw-Hill, 1965 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1971).
- [23] N.S. Košljakov, E.B. Gliner, M.M. Smirnov: Uravnenija v častnych proizvodnych matematičeskoj fiziki. Vysšaja škola, Moskva 1970.
- [24] J. Král: Teorie potenciálu I. SPN, Praha 1965 (skripta).
- [25] J. Král, I. Netuka, J. Veselý: Teorie potenciálu II. SPN, Praha 1972 (skripta).
- [26] J. Král, I. Netuka, J. Veselý: Teorie potenciálu III. SPN, Praha 1976 (skripta).
- [27] J. Král, I. Netuka, J. Veselý: Teorie potenciálu IV. SPN, Praha 1977 (skripta).
- [28] J. Kvasnica: Teorie elektromagnetického pole. Academia, Praha 1985.
- [29] S. Mareš a kol.: Úvod do užité geofyziky. SNTL, Praha

1979.

- [30] J.C. Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. I. Clarendon Press, Oxford 1881.
- [31] Min Chen: Physics Problems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (ruský překlad: Mir, Moskva 1978).
- [32] F. Neumann: Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen. B.G. Teubner, Leipzig 1887.
- [33] O. Novotný: Teorie potenciálu. Skriptum postgraduálního kursu "Zpracování geofyzikálních dat a číslicová seismika". MFF KU, Praha 1977.
- [34] M. Pick, J. Pícha, V. Vyskočil: Úvod ke studiu tíhového pole Země. Academia, Praha 1973.
- [35] H. Poincaré: Théorie du potentiel Newtonien. G. Carré et C. Naud, Paris 1899.
- [36] E.M. Purcell: Electricity and Magnetism. Berkeley Physics Course, Vol. 2. McGraw-Hill, 1965 (ruský překlad: Nauka, Moskva 1971).
- [37] K. Rektorys a spol.: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha 1963.
- [38] B. Sedlák, R. Bakule: Elektřina a magnetismus. SPN, Praha 1980 (skripta).
- [39] L. Schwartz: Matematické metody ve fyzice. SNTL, Praha 1972.
- [40] J. Silk: The Big Bang. W.H. Freeman and Company, San Francisco 1980 (ruský překlad: Mir, Moskva 1982).
- [41] M.M. Smirnov: Differencial'nyje uravnenija. Izd. BGU, Minsk 1974.
- [42] V.I. Smirnov: Kurs vysšej matematiki, Tom I. GIFML, Moskva 1961.
- [43] L.N. Sretenskij: Teorija n'jutonovskogo potenciala. OGIZ - Gostechizdat, Moskva 1946.

- [44] I.P. Stachanov: Fizičeskaja priroda šarovoju molnii. Atomizdat, Moskva 1979.
- [45] V.N. Strachov: O prepodavanii gravi- i magnitorazvedki v vyššich učebnyh zavedenijach. Izv. AN SSSR, ser. Fizika Zemli, 1982, No 2, 52-66.
- [46] V.N. Strachov: O "Kurse gravirazvedki" V.S. Mironova. Geofiz. ž., 4 (1982), No 3, 86-96.
- [47] J.A. Stratton: Teorie elektromagnetického pole. SNTL, Praha 1961.
- [48] A.N. Tichonov, A.A. Samarskij: Rovnice matematické fyziky. NČSAV, Praha 1955.
- [49] V. Trkal: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. NČSAV, Praha 1956.
- [50] V.S. Vladimirov: Obobščennyje funkciony v matematičeskoj fizike. Nauka, Moskva 1979.
- [51] V. Votruba, Č. Muzikář: Teorie elektromagnetického pole. NČSAV, Praha 1955.
- [52] J. Wermer: Potential Theory. Springer-Verlag, Berlin 1974 (ruský překlad: Mir, Moskva 1980).
- [53] E.T. Whittaker, G.N. Watson: A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, Cambridge 1927 (ruský překlad: GIFML, Moskva 1963).

O B S A H

	Str.
6.	ÚVOD
7.	VÝCHOZÍ VZORCE PRO INTENZITU POLE
7.1.	Rozšířené znění Newtonova gravitačního zákona a Couloubova zákona
7.2.	Některé otázky matematické formulace
7.3.	Obecné vzorce pro intenzitu pole
	a) Objemově rozložené hmoty nebo náboje
	b) Plošně rozložené hmoty nebo náboje (jednoduchá vrstva)
	c) Křivkově (lineárně) rozložené hmoty nebo náboje .
	d) Objemově rozložené dipóly
	e) Plošně rozložené dipóly, dvojvrstva ::.....
7.4.	Konečnost intenzity objemových zdrojů ve vnějších a vnitřních bodech
7.5.	Jiné výchozí vzorce obsahující intenzitu pole
8.	VÝCHOZÍ VZORCE PRO NEWTONUV POTENCIÁL A PŘÍBUZNÉ VELIČINY
8.1.	Obecné vzorce pro potenciál
8.2.	Vztah mezi vzorci pro intenzitu a pro potenciál
8.3.	O spojitých rozloženích, rozdíl mezi matematikou a fyzikou
8.4.	Potenciální energie soustavy
8.5.	Kapacita
9.	VÝCHOZÍ VZORCE PRO PUSOBENÍ MEZI SLOŽITĚJŠÍMI OBJEKTY
9.1.	Působení pole na dipól
9.2.	Vzájemné působení dvou tuhých těles
10.	GRAVITAČNÍ A ELEKTROSTATICKÉ POLE SFÉRICKY SYMETRICKÝCH TĚLES
10.1.	Intenzita pro sféricky symetrickou (Newtonovu) kouli

10.2.	Potenciál pro Newtonovu kouli
10.3.	Homogenní koule
10.4.	Homogenní dutá koule
10.5.	Homogenní kulová slupka
10.6.	Přímá a obrácená gravimetrická úloha pro kouli
10.7.	Obecné poznámky k obráceným úlohám v gravimetrii ...
11.	GRAVITAČNÍ A ELEKTROSTATICKÉ POLE NEKONEČNÉ ROVINNÉ HOMOGENNÍ DESKY.....
11.1.	Nekonečná rovinná deska
11.2.	O nemožnosti zavedení Newtonova potenciálu pro nekonečnou desku
11.3.	Nekonečná rovinná vrstva a dvojvrstva
11.4.	Některá zobecnění, na něž ukazují řešené příklady