

Výzkum elektrické vodivosti v Zemi

Poměrně pomalá sekulární variace, přicházející ze zemského jádra, zanechává na hlavním geomagnetickém poli trvalý "otisk". Rychlejší změny, jež mají původ ve vnějších zdrojích, nevyvolávají stálý účinek (nebo jen zcela nepatrný a ještě k tomu sporný - viz jedenáctiletá perioda). Proto se anglicky nazývají *transient*.

Transientní změny vnějšího pole mají velký význam tím, že indukují ve vnějších vrstvách Země elektrické proudy. Rychle proměnné magnetické pole měřené na zemském povrchu obsahuje proto kromě primární (budící) složky variace složku sekundární (indukovanou), pocházející od proudů indukovaných v Zemi. Pro některé typy variací byly vytvořeny metody oddělení obou příspěvků. Poměry amplitud vnější a vnitřní součásti variace a u periodických variací také fázový rozdíl mezi nimi závisí na rozložení vodivosti v Zemi. Jejich znalost proto umožňuje získávat informace o vodivosti kůry a svrchního pláště Země. Do souboru informací o elektrické vodivosti v Zemi patří ovšem i výsledky přímých laboratorních měření elektrické vodivosti povrchových hornin.

Důležitým zdrojem poznání jsou rovněž měření zemních proudů v kombinaci s měřeními magnetických variací.

Zemní proudy

Přirozené zemní (telurické) proudy jsou známy od poloviny 19. století. V roce 1849 je poprvé popsal W.H.Barlow jako "spontánní elektrické proudy pozorované v telegrafních drátech". V následujících letech se přišlo na to, že výskyt těchto proudů souvisí s geomagnetickými variacemi. Britský astronom C.B.Airy roku 1860 navrhl experimentální postup: Ve dvou dlouhých, navzájem kolmých drátech měřit a fotograficky registrovat proudy a srovnávat je se současně snímanými křivkami geomagnetických variací. Toto zařízení bylo vybudováno v Greewichi (dráty dlouhé 15 km) v roce 1865 a později i na jiných evropských observatořích. Většina starších měření byla silně zatížena "umělými" proudy, unikajícími do země z množících se průmyslových elektrizovaných podniků. (Tzv. bludné proudy.) Záhy byly zjištěny i další nepříjemnosti, např. elektrochemické efekty na elektrodách. Teprve asi v polovině 20. století byly všechny druhy kontaminování přirozených zemních proudů technicky překonány a rozvinula se pravidelná detailní měření. Ukázalo se, že zemní proudy jsou obzvláště cenné při prudkých fluktuacích v průběhu geomagnetických poruch, neboť se v nich dá rozeznat i to, co není na magnetogramech. Měření proudů může také poskytnout určité informace o magnetosféře, a to porovnáním záznamů ze dvou geomagneticky konjugovaných bodů. (Body na obou koncích téže magnetické siločáry, jeden na severní a jeden na jižní polokouli.)

Separace vnější a vnitřní součásti transientních magnetických variací

Používá se výpočtů potenciálu obou součástí variace. Metoda bude popsána na případech variací D_{st} a S_q . Vzduch obklopující Zemi můžeme v případech těchto variací pokládat za

nevodivý, proto pro ně platí

$$\vec{H} = -\nabla\Omega, \quad (1)$$

kde Ω je nekonečný součet příspěvků

$$\Omega_n^p = [A_n^p(t, r) \cos p\lambda + B_n^p(t, r) \sin p\lambda] P_n^p(\cos\theta), \quad (2)$$

přičemž A_n^p a B_n^p jsou výrazy

$$A_n^p = a[e_n^{p,c}(t)\rho^n + i_n^{p,c}(t)\rho^{-n-1}], \quad (3)$$

a analogicky

$$B_n^p = a[e_n^{p,s}(t)\rho^n + i_n^{p,s}(t)\rho^{-n-1}].$$

Zde

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad (4)$$

kde a je poloměr Země chápané jako koule.

Příspěvky s koeficienty e_n^p vytvářejí potenciál vnějšího původu, příspěvky s koeficienty i_n^p vytvářejí potenciál vnitřního původu.

Pro severní, východní a vertikální složku pole variací platí:

$$X = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{n,p} \Omega_n^p, \quad (5)$$

$$Y = -\frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\lambda} \sum_{n,p} \Omega_n^p, \quad (6)$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n,p} \Omega_n^p. \quad (7)$$

Předpokládejme, že známe časový průběh zvolené varice v určitém počtu stanic, pokud možno rovnoměrně rozložených po Zemi (což ovšem ve skutečnosti možné není). Dosadíme-li do levých stran rovnic (5), (6) a (7) hodnoty měřené v jednotlivých stanicích v určitých časových krocích a do pravých stran příslušné zeměpisné souřadnice stanic, získáme pro každou stanicí tři soustavy simultánních rovnic, jež obsahují neznámé časově proměnné koeficienty A_n^p a B_n^p z rovnice (2).

Musí se zvolit takový počet sčítanců, aby potenciál byl dobře aproximován. (Je třeba experimentovat.) Na tomto počtu pak závisí požadovaný počet stanic. (Musí být vyšší než počet hledaných koeficientů, tj. vyšší než $N(N+2)$.) Z rovnic (5) a (6) se metodou nejmenších čtverců spočítají pro každý časový krok a pro každou harmonickou koeficienty $A_n^p(t, a)$ a $B_n^p(t, a)$. Podle rovnic (3) se tím získají hodnoty výrazů

$$A_n^p = a(e_n^{p,c} + i_n^{p,c}), \quad B_n^p = a(e_n^{p,s} + i_n^{p,s}).$$

Z rovnice (7) se získají hodnoty výrazů

$$ne_n^{p,c} - (n+1)i_n^{p,c}, \quad ne_n^{p,s} - (n+1)i_n^{p,s}.$$

Tak se pro každou harmonickou získaly 4 rovnice pro 4 neznámé: $e_n^{p,c}$, $e_n^{p,s}$, $i_n^{p,c}$ a $i_n^{p,s}$. Všechny tyto koeficienty byly získány pro postupné časové kroky, tedy jako funkce času. Potenciál variací je tím rozdělen na část původu vnějšího a část původu vnitřního, obě jako funkce času.

Tak např. pro první zonální harmonickou platí rovnice:

$$\Omega = a[e_1(t)\rho + i_1(t)\rho^{-2}] \cos \theta \quad (8)$$

$$X = -[e_1(t) + i_1(t)] \sin \theta \quad (9)$$

$$Z = [e_1(t) - 2i_1(t)] \cos \theta. \quad (10)$$

Hodnoty složek $X(t)$ a $Z(t)$ se naměří naměří jako funkce času a spočítají se koeficienty $e_1(t)$, $i_1(t)$.

Variace D_{st}

Chapman a Price již roku 1930 uskutečnili výpočet pro varici D_{st} a zjistili jednak, že pro soubor stanic ze středních zeměpisných šířek je variace D_{st} dobře popsána prvními třemi zonálními harmonickými, přičemž 1. harmonická je daleko nejvýraznější. (Obr.1) Separaci první harmonické na vnější a vnitřní příspěvek se ukázalo, že velikost vnější části této variace více než dvakrát větší než příspěvek vnitřní (indukovaný). (Obr.2) Price později (1963) zjistil podobné vztahy pro necyklickou variaci během klidných dnů (návrat z bouře do normálního stavu).

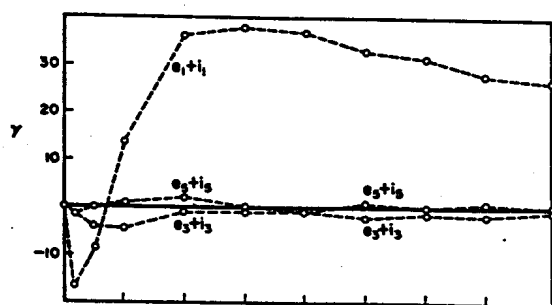


Fig. 1. The time variations of the coefficients $e_1 + i_1$, $e_3 + i_3$, $e_5 + i_5$ of the harmonics P_1 , P_3 , P_5 in the storm-time variations of average storms (after Chapman and Price).

Obr.1

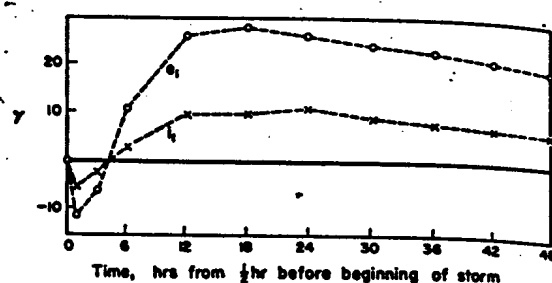


Fig. 2. The external (e_1) and internal (i_1) parts of the coefficients of the first harmonic (after Chapman and Price).

Obr.2

Denní klidná variace S_q

S_q ^{přibližně} je probíhá v bodech na téže rovnoběžce tak, že odchylka od pólnoční hodnoty je stejná ve stejných lokálních časech. Neplatí to pro úzký pás podél magnetického rovníku (jet-stream) a v blízkosti pólů (silné poruchy). Ve středních šířkách je tedy pohled ze Slunce na konfiguraci geomagnetického pole stále stejný. Pozemská denní klidná variace je působena tím, jak se Země vzhledem k tomuto obrazu otáčí. To je chápání variace v lokálním čase. Pole se však nepatrně mění i s časem univerzálním (greenwichským). Je to především tím, že Země není laterálně homogenní vodič, takže rozložení indukovaných proudů se v univerzálním čase mění.

V čistě lokálním čase bude potenciál varice S_q probíhat takto:

$$\Omega_n^p = a[e_n^p \rho^n \cos(p\lambda + \omega t + \varepsilon_n^p) + i_n^p \rho^{-n-1} \cos(p\lambda + \omega t + \iota_n^p)] P_n^p(\cos \theta), \quad (11)$$

kde $\omega = \frac{2\pi p}{86400}$. (Perioda $T = 2\pi/\omega$ se měří v sekundách.)

První analýzu tímto způsobem konal Chapman již v roce 1919 a zjistil, že v případě S_q jsou důležité tyto harmonické: $p = 1, 2, 3, 4$ a $n = p$ nebo $n = p + 1$. V tabulce jsou pro jednotlivé harmonické uvedeny poměry amplitud vnějších a vnitřních variací e/i a fázová zpoždění vnitřní variace za vnější $\varepsilon - \iota$.

Tabulka pro S_q

Amplitude ratios e/i and phase differences $\varepsilon - \iota$ of harmonics in the daily variations (after Chapman)

	1905 (sunspot maximum)		1902 (sunspot minimum)		mean
	mean equinox	mean solstice	mean equinox	mean solstice	
P_1^1	2.9, -5°	2.8, -3°	2.7, -23°	3.0, -20°	2.8, -13°
P_2^2	2.4, -18°	2.3, -19°	2.0, -17°	2.2, -18°	2.2, -18°
P_3^3	2.4, -21°	2.7, -20°	2.5, -21°	2.4, -21°	2.5, -21°
P_4^4	2.2, -23°	2.3, -15°	2.9, -30°	3.2, -24°	2.7, -23°

Seasonal harmonics (means of 1902 and 1905)

	$\frac{1}{2}$ (summer-winter)	$\frac{1}{2}$ (spring-autumn)	mean
P_1^1	2.5, -7°	2.1, -1°	2.3, -4°
P_2^2	2.3, -8°	2.6, $+2^\circ$	2.4, -3°
P_3^3	2.0, -32°	2.2, -13°	2.1, -22°
P_4^4	1.7, -30°	1.7, -19°	1.7, -24°

Skutečná denní variace S_q není přesně stejná ve všech bodech rovnoběžky, a to proto, že vodivost ionosféry je do značné míry ovlivněna geomagnetickým polem, a to není symetrické kolem rotační osy. Z tohoto důvodu zejména není vhodné *interpolovat* takto určené pole S_q na místech, kde se neměřilo.

Základní odhad průběhu elektrické vodivosti v zemském plášti.

(Prostředí v plášti je bez rozhraní. Využívá se denní variace S_q .)

B.N.Lahiri, A.T.Price, práce z let 1950–1960.

Elektrická vodivost minerálů s teplotou roste, teplota v Zemi vzrůstá s hloubkou. Vzrůst vodivosti s hloubkou však nemůžeme předem přesně předpovědět. Lahiri a Price vytvořili první hrubý odhad při velmi zjednodušujících předpokladech:

1) Rozložení elektrické vodivosti je středově symetrické, v žádné hloubce neexistují laterální nehomogenity:

$$\sigma = \sigma(\vec{r}), \quad \sigma = \sigma(r) \quad (12)$$

kde \vec{r} je polohový vektor s počátkem ve středu Země.

2) Uvnitř Země je průběh vodivosti v tomto modelu hladký, bez rozhraní, skokem se vodivost mění jen na povrchu zemském.

3) Bude zanedbána závislost lokálního průběhu variace na zeměpisné délce. (Je to totéž, jako kdybychom směr dipólového momentu ztotožnili s osou Země.) Těmito předpoklady odpadla ve vzorci (11) závislost na λ . Fázové zpoždění amplitudy variace za půlnoční hodnotou je v daném místě přímo úměrné $-\lambda$, pro p -tou harmonickou je

$$\varepsilon_n^p = -p\lambda.$$

Rovnici (11) můžeme psát ve tvaru

$$\Omega_n = \Omega_n(\theta, t).$$

(Protože odpadla závislost na p , pozůstává potenciál pouze ze zonálních harmonických.) Totéž bude platit pro vektory \vec{B} a \vec{E} , příslušné variaci S_q i uvnitř Země.

Další předpoklady:

dielektrická konstanta a magnetická permeabilita jsou uvnitř celého pláště konstantní,

$$\varepsilon = \text{konst.}, \mu = \mu_0.$$

Prostorový náboj je trvale nulový (neexistují rozhraní). Proto platí

$$\nabla \cdot \vec{i} = 0 \quad (13)$$

a

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (14)$$

Z (13) plyne

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = 0$$

a tedy

$$\sigma \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla \sigma = 0. \quad (15)$$

Protože platí (14) a $\varepsilon = konst.$, plyne z rovnice (15)

$$\vec{E} \perp \nabla \sigma$$

a odtud s uvážením (12)

$$\vec{E} \perp \vec{r}. \quad (16)$$

Siločáry \vec{E} musí být uzavřené čáry na sférických plochách, nesmějí obsahovat radiální složku. To je podmínka pro průběh elektrického pole uvnitř Země. Vektory tohoto typu se nazývají *vektory sféroidální*. Magnetické pole je s polem \vec{E} vázáno Maxwellovou rovnicí, která při *periodickém ději* o frekvenci ω má tvar

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \vec{B}_{int}. \quad (17)$$

\vec{B}_{int} je označení pro vektor magnetické indukce uvnitř Země.

Magnetické pole vně Země je popsáno potenciálem $\Omega = \sum_n \Omega_n$, kde

$$\Omega_n = a \left[e_n \left(\frac{r}{a} \right)^n + i_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] P_n(\cos \theta) e^{i\omega t}, \quad (18)$$

a je střední poloměr Země. Magnetická indukce vně Země \vec{B}_{ext} je

$$\vec{B}_{ext} = -\nabla \Omega$$

a má pouze složky X a Z . Až najdeme vyjádření pole \vec{E} uvnitř Země, vypočítáme z něho pomocí (17) magnetickou indukci \vec{B}_{int} a budeme moci kontrolovat hraniční podmínku při $r = a$. (Model průběhu elektrické vodivosti bude obsažen ve tvaru funkce $\vec{B}_{int}(\vec{r})$.)

Operace $\nabla \times$ provedená na (17) dává spolu s rovnicí

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E}$$

rovnici

$$\Delta \vec{E} = i\mu_0 \sigma \omega \vec{E} \quad (19)$$

(i je imaginární jednotka). Zavedeme

$$f(r) = i\mu_0 \omega \sigma.$$

(μ_0 je permeabilita v Zemi, μ je permeabilita nad zemským povrchem.)

Průběh vodivosti je středově symetrický, avšak hledaná funkce \vec{E} uvnitř Země bude závislá na dvou proměnných, r a θ , a to z toho důvodu, že potenciál primárních variací je funkcí r , θ . Variace elektromagnetického pole indukované uvnitř Země musí vykazovat touž závislost.

Hledání funkce $\vec{E}(r, \theta)$.

Převědeme úkol na hledání skalární funkce $u(r, \theta)$, která splňuje stejnou rovnici jako jednotlivé složky vektorové funkce \vec{E} . Jestliže ji najdeme, budeme hledat takovou vektorovou operaci, která by ze skalární funkce u vytvořila vektorovou funkci, jež by splňovala rovnici (19) a podmínku (16).

Na rovnici

$$\Delta u = f(r)u(r, \theta) \quad (20)$$

použijeme postupně tyto operace:

- 1) $\nabla_{\mathbf{a}}$,
- 2) $\vec{r} \times \nabla_{\mathbf{a}} = -\nabla \times (u\vec{r})$,
- 3) $\nabla \times \nabla \times (u\vec{r})$.

Ve všech třech případech je výsledek operace totožný s rovnicí (19) pro vektor \vec{E} . Přesto je nemůžeme použít všechny:

1. možnost nevyhovuje z fyzikálního důvodu: Platilo by totiž $\nabla \times \vec{E} = 0$, my však potřebujeme, aby vektor \vec{E} splňoval rovnici (17).

2. možnost vyhovuje fyzikálně a splňuje podmínku (16), neboť neobsahuje radiální složku.

3. možnost nevyhovuje, neboť obsahuje radiální složku.

Požadované sféroidální pole se tedy najde operací 2) a má tvar

$$\vec{E} = -\nabla \times (u\vec{r}).$$

Rovnice pro vytvořující skalární funkci ve sférických souřadnicích:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = f(r)u(r, \theta). \quad (21)$$

Separace proměnných:

$$u(r, \theta) = aR(r)S(\theta).$$

Po dosazení do (21) a úpravě:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{S \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) - f(r) \cdot r^2 = 0. \quad (22)$$

Odtud

$$\frac{1}{S \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) = -K, \quad (23)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - f(r) \cdot r^2 = K. \quad (24)$$

Rovnice (23) je Legendreova rovnice. Jejím řešením jsou při $K = n(n+1)$ (n ...celé číslo) zonální Legendreovy polynomy:

$$S_n(\theta) = P_n(\cos \theta). \quad (25)$$

Řešení rovnice (24) závisí na tom, jaký model $\sigma(r)$ je dosazen do funkce $f(r)$. Pokud by platilo $\sigma = konst.$, byly by řešením této rovnice Besselovy funkce. To připadá v úvahu v modelu, v němž se vodivost mění po vrstvách. Nyní však hledáme spojitou změnu s hloubkou.

Price dosazoval za σ různé modely spojitého průběhu, přičemž se zaměřil hlavně na model typu

$$\sigma(r) = k \left(\frac{a}{r} \right)^m. \quad (26)$$

K tomuto typu závislosti vodivosti na hloubce v zemském plášti vede znalost vzrůstu elektrické vodivosti minerálů s teplotou. Pro čisté minerály platí idealizovaný vzorec

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{2kT}}.$$

Zde T je absolutní teplota, k je Boltzmannova konstanta, E je úroveň energie nutná pro nastartování mechanismu vodivosti (aktivační energie), σ_0 je limitní hodnota vodivosti pro velmi vysoké teploty. Hodnota E závisí na minerálu a jeho fázi, při změně fáze se mění skokem. Pohybuje se kolem 3 eV. Rovněž hodnota σ_0 je různá pro různé minerály a je většinou v oboru $100 \div 500(\Omega m)^{-1}$. Hledá se tedy hodnota konstanty m ze vztahu (26). Bude vhodná tehdy, jestliže po dosazení $\sigma(r)$ do funkce $f(r)$ bude rovnice (24) mít řešení, jež umožní splnění okrajových podmínek na rozhraní Země - atmosféra. Řešení musí

být stabilní, to znamená, že musí splňovat hraniční podmínky pro měření denní variace z různých časových úseků.

Price řešil rovnici (24) při různých m Laplaceovou transformací. Předpokládejme, že funkce $R(r)$ byla nalezena. Dalším úkolem bude

formulace okrajových podmínek:

Dosazením zvoleného modelu vodivosti $\sigma(r)$ přejde rovnice (24) na tvar

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \left[i\omega\mu_0 k \left(\frac{a}{r} \right)^m \cdot r^2 + K \right] R.$$

Tato rovnice je konstantou $K = n(n+1)$ vázána s rovnicí (23), jejímž řešením jsou Legendreovy polynomy $P_n(\cos\theta)$. Obecným řešením (21) bude

$$u(r, \theta) = a \sum_n R_n(r) P_n(\cos\theta).$$

Pro pohodlí dalších výpočtů může být za konstantu a dosazen střední poloměr Země.

Vztah mezi vektory \vec{E} , \vec{B} a \vec{H} uvnitř Země:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}.$$

Přitom

$$\vec{E} = -\nabla \times [u(r, \theta) \vec{r}].$$

Spojitosť tečné složky vektoru \vec{H} při $r = a$.

Vně Země se intenzita magnetického pole spočítá jako gradient skalárního potenciálu variací Ω . Označme ji tam proto \vec{H}_Ω . Uvnitř Země se \vec{H} odvozuje ze skalární funkce $u(r, \theta)$.

Označíme ji tam \vec{H}_u . Platí tedy:

$$\vec{H}_\Omega = -\nabla\Omega, \quad \vec{H}_u = \frac{i}{\mu_0\omega} \nabla \times \vec{E}.$$

Na zemském povrchu musí v každém čase t platit rovnost

$$H_{\Omega_{tang}} = H_{u_{tang}} \Big|_{r=a}.$$

Proto platí také

$$\frac{\partial H_{\Omega_{tang}}(a)}{\partial t} = \frac{\partial H_{u_{tang}}(a)}{\partial t}. \quad (27)$$

Přitom

$$\frac{\partial \vec{H}_u}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{E}.$$

Z rovnice (27) plyne

$$-\frac{1}{\mu_0} \text{rot}_{tang} \vec{E} = -\text{grad}_{tang} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_{r=a}$$

a po dosazení za \vec{E} dostaneme podmínku na rozhraní

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot}_{\text{tang}}[\text{rot}(u\vec{r})] = -\text{grad}_{\text{tang}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_{r=a} \quad (28)$$

Spojitost normálové složky \vec{B} při $r = a$. Uvnitř Země platí

$$\frac{\partial B_{\text{norm}}}{\partial t} = -\text{rot}_{\text{norm}} \vec{E}$$

a druhá hraniční podmínka tedy zní

$$\text{rot}_{\text{norm}}[\text{rot}(u\vec{r})] = -\mu_0 \text{grad}_{\text{norm}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_{r=a} \quad (29)$$

Operátor $\nabla \times$ ve sférických souřadnicích:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} = & \vec{e}_r \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\phi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right] + \\ & + \vec{e}_\phi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] + \\ & + \vec{e}_{\text{theta}} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi) \right]. \end{aligned}$$

Protože funkce $u(r, \theta)$ nezávisí na ϕ , je

$$\nabla \times (u\vec{r}) = -\vec{e}_\phi \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Další použití operátoru rotace poskytne výraz o dvou členech:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times (u\vec{r}) = \\ = -\vec{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

První člen pravé strany je záporně vzatá normálová složka vektoru $\text{rot} \vec{E}$. druhý člen je tečná složka $\text{rot} \vec{E}$.

Dosaďme tento výsledek nejprve do rovnice (28) pro *tečnou složku*. Potenciál pole magnetických variací nad zemským povrchem se dá psát takto:

$$\Omega = a \sum_n \left[\epsilon_n(t) \left(\frac{r}{a} \right)^n + i_n(t) \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] P_n(\cos \theta).$$

Zde a je opět střední poloměr zemský. Schmidty koeficienty e_n a Gaussovy koeficienty i_n jsou funkce času, při analýze jedné určité frekvence ω obsahují faktor $e^{i\omega t}$.

Dosažením do rovnice (28) obdržíme:

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(a \sum_n R_n P_n \right) \right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{a}{r} \sum_n \left[\epsilon_n \left(\frac{r}{a}\right)^n + i_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \Big|_{r=a}$$

Po provedení derivací podle času a podle θ dostaneme:

$$\frac{1}{\mu_0} \sum_n \frac{dP_n}{d\theta} \left(R_n + r \frac{dR_n}{dr} \right) = - \sum_n i\omega (\epsilon_n + i_n) \frac{dP_n}{d\theta} \Big|_{r=a}$$

Koeficienty při $\frac{dP_n}{d\theta}$ si musí být rovny pro každé n . Odtud plyne konečný tvar 1. hraniční podmínky při $r = a$:

$$\mu_0 (\epsilon_n + i_n) = \frac{i}{\omega} \left(R_n(a) + a \frac{dR_n(a)}{dr} \right). \quad (30)$$

Spojitost normálové složky: Dosazením normálové složky vektoru $\text{rot} \vec{E}$ do rovnice (19) vznikne rovnice

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_n a R_n P_n \right) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \sum_n \left[\epsilon_n \left(\frac{r}{a}\right)^n + i_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right] P_n \Big|_{r=a}$$

Z Legendreovy rovnice plyne:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n}{d\theta} \right) = n(n+1) P_n(\cos \theta) \sin \theta.$$

To dosadíme do předchozího vztahu a obdržíme rovnici

$$-n(n+1) R_n(r) P_n(\cos \theta) = i\omega \mu_0 [n\epsilon_n - (n+1)i_n] P_n(\cos \theta) \Big|_{r=a}.$$

Odtud plyne 2. hraniční podmínka při $r = a$:

$$\frac{\epsilon_n}{n+1} - \frac{i_n}{n} = \frac{i}{\omega \mu_0} R_n(a). \quad (31)$$

Rovnice (30) a (31) se dají řešit, byla-li vykonána sférická harmonická analýza potenciálu variací. Pro ni musí být k dispozici soustava spojitých měření složek magnetické indukce na observatořích. Ukázalo se, že pro sluneční denní variaci S_q zcela stačí potenciálový rozvoj do stupně $n = 1$. (Totéž platí i pro všechny delší periody až po půl roku.)

Rovnice pro $R_n(r)$ je druhého stupně a jsou k dispozici dvě hraniční podmínky, ale přesto se bez dalších předpokladů nepodařilo nalézt správný model $\sigma(r)$. Spolehlivý výsledek by totiž musel být stejný jednak při volbě různých soustav observatoří, jednak pro různá období měření. To se po řadě pokusů ukázalo jako nespůsobilé. Exponent m z rovnice (16) tedy nebyl nalezen. Důvodem bylo zanedbání silné vodivostní nehomogenity nejsvrchnější vrstvy zemské kůry. Tam se totiž silně projevuje vliv oceánů, jejichž voda má elektrickou vodivost o několik řádů vyšší než horniny povrchu kontinentů. Když se tato okolnost vřadila do výpočtů zavedením extrémně silně vodivé vrstvičky, pokrývající celý zemský povrch, výpočet se stabilizoval a byl nalezen exponent m v blízkosti čísla 37.

Účinek povrchové silně vodivé vrstvy

Představme si stejné uspořádání jako dříve: Koule, elektrická vodivost je v ní rozložena středově symetricky a roste s hloubkou. Nyní je však na povrchu S koule rozprostřena vrstva o tloušťce d a vysoké elektrické vodivosti σ . (Obecně jsou d i σ prostorově proměnné.) Ve vyšetřovaném prostoru je elektromagnetické pole o intenzitách $\vec{E}(\vec{r})$ a $\vec{B}(\vec{r})$. Předpokládá se $\mu = \mu_0$. Vodivou vrstvou tekou elektrické proudy odpovídající elektrické intenzitě \vec{E} :

$$\vec{i} = \sigma \vec{E},$$

\vec{i} je prostorová hustota proudu. Zavedme integrovanou vodivost K :

$$K = \int_0^d \sigma(\zeta) d\zeta. \quad (1)$$

Nechť $d \rightarrow 0$, a to tak, že integrovaná vodivost K zůstává konečná. Znamená to, že $\sigma \rightarrow \infty$ a $\vec{i} \rightarrow \infty$. Vektory \vec{E} a \vec{B} zůstávají konečné. Tečná složka \vec{E} se při průchodu vrstvou mění spojitě. (Budeme ji nazývat \vec{E}_S .) Zavedeme integrovanou proudovou hustotu (plošný proud) \vec{I} :

$$\vec{I} = \int_0^d \vec{i} d\zeta. \quad (2)$$

Platí

$$\vec{I} = \int_0^d \sigma \vec{E}_S d\zeta = \vec{E}_{S_m} \int_0^d \sigma d\zeta,$$

takže bude

$$\vec{I} = K \vec{E}_{S_m} \quad (3)$$

\vec{E}_{S_m} je integrální střední hodnota \vec{E}_S z oboru $(0, d)$. (Veličiny \vec{I} a \vec{E}_S jsou vektory, protože mohou mít v rovině tečné k ploše S různé směry.)

V každém bodě plochy S je jednoznačně dán plošný proud \vec{I} . V určitém bodě na ploše zvolíme plošku $\Sigma_\theta = d \cdot ds_\theta$. Je to obdélníček kolmý na plochu S , strany ds_θ jsou rovnoběžné s rovinou tečnou k S , směr strany ds_θ svírá se směrem vektoru \vec{I} úhel θ . Množství proudu, tekoucího ploškou Σ_θ je $ds_\theta I \sin \theta$. Úhel θ ležící v rovině tečné k ploše S jsme zvolili libovolně.

Ve zvoleném bodě na S aplikujeme Maxwellovu rovnici

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0:$$

\mathcal{L} in norm. \mathcal{L} .

$$\nabla \times \vec{E}_S = \vec{n} \frac{\partial B_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n \partial t}. \quad (4)$$

Zavedme integrovaný odpor R vztahem

$$\vec{E}_S = R \vec{I}.$$

Potom z rovnice (4) plyne

$$R \nabla \times \vec{I} + \nabla R \times \vec{I} = \vec{n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n \partial t}. \quad (5)$$

Maxwellovu rovnici

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i}$$

integrujme po obvodu plošky $\Sigma_\theta = d \cdot ds_\theta$. Vektor \vec{H} na vnější straně vrstvy označme \vec{H}_+ , na vnitřní straně pak \vec{H}_- . Integrací dostaneme

$$H_{S_\theta} \quad \text{~~leží v~~} \quad (H_{S_{\theta+}} ds_\theta - H_{S_{\theta-}} ds_\theta) = \int_{\Sigma_\theta} i \sin \theta d\Sigma_\theta. \quad (6)$$

a dále

projikci H do směru $d\Sigma_\theta$

$$\int_{\Sigma_\theta} \vec{i} \cdot d\vec{\Sigma}_\theta = ds_\theta \sin \theta \int_0^d E_{S_\theta}(\zeta) d\zeta. \quad (7)$$

Konečně

$$\approx (H_{S_{\theta+}} - H_{S_{\theta-}}) ds_\theta = I \sin \theta ds_\theta. \quad \text{pro } \forall \theta \quad (8)$$

Na levé straně je složka $\text{rot } \vec{H}$ do směru ds_θ , na pravé straně je složka plošného proudu \vec{I} do směru ds_θ . To platí pro každou volbu úhlu θ , tedy

$\perp \vec{I}$

$$(\vec{H}_{S_+} - \vec{H}_{S_-}) \perp \vec{I},$$

$$(\Delta H \cos(\varphi + \theta)) ds = I \sin \theta ds$$

takže

$$(\vec{H}_+ - \vec{H}_-) \times \vec{n} = \vec{I}.$$

protože $\nabla \cdot \vec{H} = 0 \rightarrow$ H_n spoj

Dosazením (9) do (5) vyjde

$$R \nabla \times [(\vec{H}_+ - \vec{H}_-) \times \vec{n}] + \nabla R \times [(\vec{H}_+ - \vec{H}_-) \times \vec{n}] = \\ = \vec{n} \mu_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial r}.$$

\Rightarrow rozdíl $\vec{H}_+ - \vec{H}_-$ se norm. v. odliší a zbyde $\vec{H}_{S_+} - \vec{H}_{S_-}$

Rovnici rozepíšeme:

$$\vec{n} \cdot R \nabla (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) - \vec{n} R \nabla \cdot (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) - \nabla R \times [\vec{n} \times (\vec{H}_+ - \vec{H}_-)] = \vec{n} \mu_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial r}.$$

Protože $\vec{n} \cdot \nabla (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = 0$ a $\vec{n} \cdot \nabla R = 0$, platí

$$R \nabla \cdot (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) + (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) \cdot \nabla R = -\mu_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial r}. \quad (10)$$

Celkové magnetické pole kdekoli v blízkosti vrstvy i v ní pozůstává jednak z polí, buzených po obou stranách vrstvy (a ovšem v určité vzdálenosti od ní), jednak z pole proudů, indukovaných uvnitř vrstvy. Část potenciálu, která přísluší zdrojům mimo vrstvu, označme $\Omega^{(e)}$, část potenciálu se zdroji ve vrstvě označme $\Omega^{(i)}$. Pro tuto chvíli si představme, že vrstva je po obou stranách obklopena nevodičem. (Přibližně tomu tak v Zemi je, protože vodivost pevné zemské kůry je velmi malá v porovnání s obrovskou integrovanou vodivostí modelované povrchové vrstvy. Hluběji do Země v této úvaze nezasáhneme.)

Součásti potenciálu mají tyto vlastnosti: $\Omega^{(i)}$ splňuje vně vrstvy Laplaceovu rovnici a s rostoucí vzdáleností od vrstvy klesá k nule. Potenciál $\Omega^{(e)}$ rovněž splňuje vně vodivé vrstvy Laplaceovu rovnici a při průchodu vrstvou se jeho gradient mění spojitě. Učiníme proto předpoklad, že funkční tvar potenciálu $\Omega^{(e)}$ je uvnitř vrstvy těsně při rozhraní stejný jako vně, jen s jinými koeficienty. Ty určíme z podmínek spojitosti gradientu na rozhraních.

Vraťme se nyní k rovnici (10). Jestliže vodivost ve vrstvě je laterálně nehomogenní, tedy jestliže $K = K(\theta, \phi)$, je řešení rovnice (10) složité. Položíme-li však $K = konst.$, je řešení snadné: Druhý člen levé strany odpadne a máme

$$R\Delta(\Omega_+ - \Omega_-) = \mu_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t \partial r}. \quad (11)$$

Uvažujme takto: Vně ~~vrstvy~~ ^{Země (nacl. rozhraní)} je magnetický potenciál

$$\Omega = \Omega^{(e)} + \Omega^{(i)}.$$

Uvnitř ~~vrstvy~~ ^{Země} těsně při ~~hraničních plochách~~ ^{rozhraní} si představujeme Ω'

Vně splňuje Ω Laplaceovu rovnici. Jednotlivé harmonické potenciálu vně vrstvy můžeme psát

$$\Omega_n = a [\epsilon_n(t)\rho^n + i_n(t)\rho^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta), \quad \rho = \frac{r}{a} > 1.$$

Ve smyslu úvahy o spojitosti gradientu můžeme dále psát pro situaci uvnitř ~~vrstvy~~ ^{Země} při rozhraní ~~vrstvy~~ ^{rozhraní}

$$\Omega' = a [e'_n(t)\rho^n + i'_n(t)\rho^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta), \quad \rho = \frac{r}{a} < 1.$$

Podmínky spojitosti gradientu na povrchu vodivé vrstvy, vyjádřené pro jednotlivé harmonické:

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial r} = \frac{\partial \Omega'_n}{\partial r}, \quad r = a$$

a odtud

$$n\epsilon_n - (n+1)i_n = n\epsilon'_n - (n+1)i'_n. \quad (12)$$

Další rovnici získáme ze vzorce (11). Vzhledem ke spojitosti potenciálu při průchodu vrstvou můžeme místo $(\Omega_+ - \Omega_-)$ psát $(\Omega - \Omega')$.

Rovnice (11) ve sférických souřadnicích:

$$\frac{R}{a^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\Omega - \Omega') = \mu_0 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial t} \Big|_{r=a}. \quad (13)$$

Podle L'égendreovy rovnice je

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n}{d\theta} \right) = -n(n+1)P_n(\cos \theta).$$

Rovnice (13) přejde v

$$-n(n+1) \frac{R}{a} (\epsilon_n - \epsilon'_n + i_n - i'_n) = \mu_0 [n\dot{\epsilon}_n - (n+1)\dot{i}_n]. \quad (14)$$

Předpokládejme, že jsme pomocí SHA našli z dat amplitudy primární (tj. vnější) a sekundární (tj. vnitřní) součásti některé pravidelné variace geomagnetického pole, že tedy známe ϵ_n a i_n . (Pro variaci S_q stačí stupeň $n=1$.) Potom spočítáme koeficienty potenciálu z rovnic (12) a (14):

$$\epsilon'_n = \epsilon_n - \frac{k_n}{n} (n\dot{\epsilon}_n - (n+1)\dot{i}_n) \quad (15)$$

a

$$i'_n = i_n - \frac{k_n}{n+1} (n\dot{\epsilon}_n - (n+1)\dot{i}_n), \quad (16)$$

kde $k_n = \frac{\mu_0 a K}{(2n+1)}$ a K je integrovaná vodivost.

Původní model Priceův a Lahiriho je tím rozšířen o tenkou povrchovou vysoce vodivou vrstvu a obě Priceovy hraniční podmínky se přesouvají z vlastního povrchu Země na spodní hranici vodivé vrstvy s tím, že místo veličin i_n a ϵ_n v nich vystupují veličiny i'_n a ϵ'_n , které musí být předem určeny z výsledků měření. Tímto postupem byla propočítána řada modelů. Hledaly se konstanty k a m pro model

$$\sigma(r) = k \left(\frac{a}{r} \right)^m$$

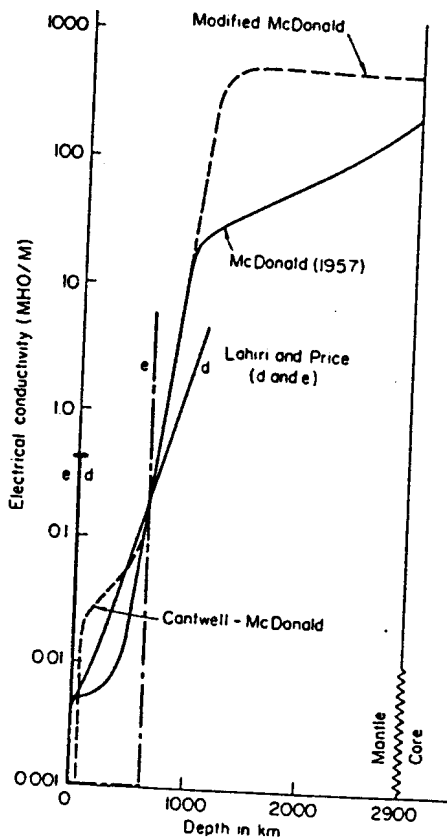
a integrovaná vodivost pro vzorce (15) a (16). Jako nejstabilnější modely vyšly tyto:

I. $K = 2 \cdot 10^3 \Omega^{-1}$, $m = 37$, $k = 4 \cdot 10^{-3}$,

II. $K = 5 \cdot 10^{15} \Omega^{-1}$, $\sigma(r) = 0$ až do hloubky $a/10$, pod touto hloubkou vodivost vyšší než $1 (\Omega m)^{-1}$.

Druhý model je méně stabilní než první. Oba modely tvoří mezní případy pro řadu dalších, ještě méně stabilních (např. McDonald na obrázku.) Hodnota m vycházela při dalších výpočtech nepříliš odlišně (30 ÷ 40). Význam těchto prvních teoretických výpočtů (raději řekněme odhadů) spočívá v tom, že umožňují první orientaci při tvorbě přesnějších modelů, které sestávají z vrstev o konstantní vodivosti.

Obrázek ukazuje přehled základních odhadů průběhu elektrické vodivosti v zemském pláští. Čáry *d* a *e* jsou mezní průběhy Lahiriho a Price. Je zřejmé, že v hloubce 1200 km je vodivost v každém případě $\geq 1(\Omega m)^{-1}$, kdežto na zemském povrchu je průměrná vodivost suchých hornin řádu $10_{-3}(\Omega m)^{-1}$. McDonaldovo pokračování vychází z rozboru spektra sekulární variace. (Podrobněji níže.)



Magnetovariační metoda

vyšetřování elektrické vodivosti svrchního pláště pomocí funkce odezvy.
(Podle R.J.Bankse, 1969.)

Tím, že se variace magnetického pole rozdělí na části vnějšího (ϵ) a vnitřního (i) původu, vzniká možnost určit tzv. odezvu Země na ten který signál (ϵ). Funkce odezvy je pro variaci o frekvenci ω definována takto:

$$Q_n^m(\omega) = \frac{i_n^m(\omega)}{\epsilon_n^m(\omega)}. \quad (1)$$

Banks nejprve hodnotí *problém jednoznačnosti*: Vodivost $\sigma(r)$ by se dala určit jednoznačně jen za současného splnění těchto tří podmínek: 1) vodivost je všude konečná, 2) je

středově

středově symetrická (závisí jen na r), 3) odezvu známe pro všechny frekvence $0 < \omega < \infty$. Z těchto podmínek je ~~pravděpodobně~~ splněna jen ta první. O druhé lze pochybovat ve všech hloubkách pláště a zejména kůry. Třetí podmínka jistě splněna není, neboť máme k dispozici jen několik frekvencí: roční a půlletou, denní a její harmonické, jež všechny souvisí s pohyby Země, a ještě tzv. 27-denní rekurenci souvisící se sluneční činností. Při $f = 10^{-3}$ cyklů za den začíná sekulární variace, jejíž zdroje jsou v jádře. Příslušnost desetileté periody je sporná. Je nutno se smířit s tím, že řešení nebude nikdy jednoznačné.

Analýza dat:

Záznamy jsou nejprve na všech observatořích zpracovávány frekvenčně, každá složka X , Y a Z zvlášť. Jde-li o periodu nejvýše půlroční, můžeme počítat s tím, že pole variace je v prvním přiblížení popsáno zonální harmonickou 1. stupně, tzn. $n = 1$, $m = 0$. Při periodě 1 rok vyhovuje zonální harmonická 2. stupně. Pro počáteční orientaci se tedy omezíme na zonální funkci odezvy

$$Q_n = \frac{i_n(\omega)}{e_n(\omega)}$$

(Znamená to, že budeme počítat jen se složkami X a Z variace, jako kdyby složka Y neexistovala. To by ovšem bylo možné jen při přesném splnění podmínek ~~středově~~ symetrie celé úlohy. Ve skutečnosti vždy existuje určitá malá východní složka variace.) K jednotlivým stupňům potenciálu

$$\Omega_n(\omega) = a \sum_n \left[i_n(\omega) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + e_n(\omega) \left(\frac{r}{a}\right)^n \right] P_n(\cos \theta)$$

příslušejí příspěvky ke složkám intenzity pro zemský povrch:

$$X_n(a) = (i_n + e_n) \frac{dP_n}{d\theta},$$

$$Z_n(a) = [-(n+1)i_n + ne_n] P_n(\cos \theta).$$

Zavedeme

$$A_{xn} = i_n + e_n, \quad A_{zn} = -n(n+1)i_n + ne_n.$$

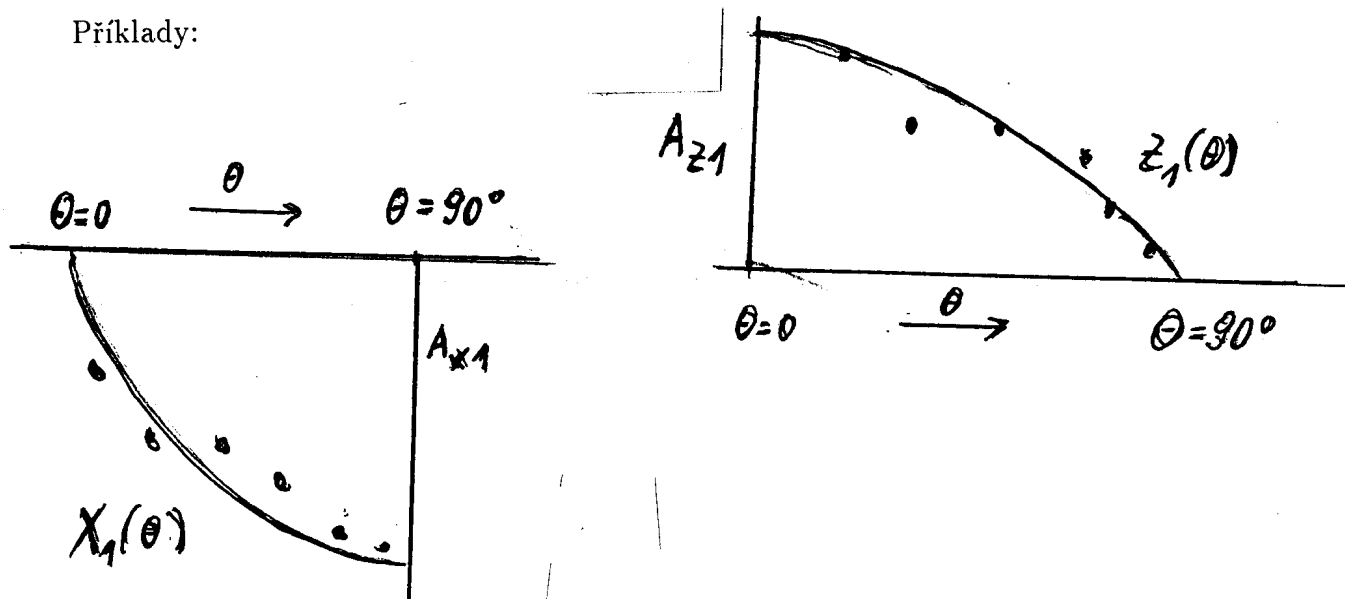
Odtud se vyjádří i_n a e_n pomocí A_{zn} a A_{xn} . Veličiny A_{xn} , A_{zn} se najdou z rovnic

$$X_n(\theta) = A_{xn} \frac{dP_n}{d\theta},$$

$$Z_n(\theta) = A_{zn} P_n(\cos \theta).$$

Levé strany těchto rovnic jsou amplitudy variací, naměřené na jednotlivých observatořích v zeměpisných šířkách θ .

Příklady:



Funkce odezvy bude podle (1) pro n -tou harmonickou

$$Q_n(\omega) = \frac{n - \frac{A_{zn}(\omega)}{A_{xn}(\omega)}}{n + 1 + \frac{A_{zn}(\omega)}{A_{xn}(\omega)}}$$

Tak např.

$$Q_1(\omega) = \frac{i_1(\omega)}{e_1(\omega)} = \frac{A_x(\omega)_1 - A_z(\omega)_1}{2A_x(\omega)_1 + A_z(\omega)_1}$$

Toto je odezva, naměřená na povrchu Země. Úkolem je nalézt takový vrstevnatý model rozložení vodivosti v Zemi, aby jeho povrchová odezva $Q_1(\omega)$ byla co nejblíže té naměřené a pokud možno stabilní při různých ω a z různých období.

Teoretická odezva se musí spočítat pro povrch zvoleného modelu. Zde se porovnává s odezvou empirickou. Zvolme model, který pozůstává z řady sférických vodivostně homogenních vrstev, obklopujících kouli o poloměru ρ_0 a o vodivosti $\sigma_0 = \text{const}$. Vnější poloměry jednotlivých vrstev jsou $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, a$. (a je poloměr celé modelové koule.) Vodivosti jednotlivých vrstev jsou $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$. (σ_s je vodivost povrchové vrstvy, může to být integrovaná vodivost zmíněná výše.) Předpokládá se, že je všude $\mu = \mu_0$.

Základní úvahy jsou stejné jako v předchozím případě, kdy se vodivost měnila s hloubkou plynule. Na jednotlivých rozhráních musí vektorové složky H_{tang} a B_{norm} probíhat spojitě. Pole \vec{E} musí být sféroidální, z Maxwellových rovnic pro ně platí

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0,$$

kde $k^2 = -i\omega\mu_0\sigma$. Tentokrát je ovšem k konstanta, lišící se od vrstvy k vrstvě. Sféroidální vektor \vec{E} je vytvořen pomocí funkce u , pro niž platí

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Řešení se opět hledá ve tvaru

$$u_n = a \sum^n R_n(r) P_n(\cos \theta).$$

Rovnice pro $R_n(r)$ zní:

$$r^2 \frac{d^2 R_n}{dr^2} + 2r \frac{dR_n}{dr} - [k^2 r^2 + n(n+1)] R_n = 0. \quad (2)$$

Je to rovnice Besselova typu, jejím řešením je kombinace Besselových funkcí 1. a 2. druhu. j_n a y_n . Protože empirická odezva vystačí s funkcemi do 2. stupně, omezuje se i modelová odezva na stupeň $n = 1, n = 2$. Je tedy

$$R_n(kr) = \alpha j_n(kr) + \beta y_n(kr).$$

Koeficienty α, β jsou různé pro různé vrstvy a určí se z podmínek spojitosti na rozhraních.

Příklad - rozhraní vrstvy 1 a 2:

Ve vrstvě 1: $R_{n,1}(k_1 r) = \alpha_1 j_n(k_1 r) + \beta_1 y_n(k_1 r)$,

ve vrstvě 2: $R_{n,2}(k_2 r) = \alpha_2 j_n(k_2 r) + \beta_2 y_n(k_2 r)$.

Z podmínek, že $rot_{tang}(u\vec{r})$ a $rot_{norm}(u\vec{r})$ se na kulové ploše o poloměru ρ_1 mění spojitě, plyne podle dřívějšího výpočtu:

$$R_{n,1}(k_1 \rho_1) + \rho_1 \frac{dR_{n,1}}{dr} \Big|_{r=\rho_1} = R_{n,2}(k_2 \rho_1) + \rho_1 \frac{dR_{n,2}}{dr} \Big|_{r=\rho_1}$$

a

$$R_{n,1}(k_1 \rho_1) = R_{n,2}(k_2 \rho_1). \quad (3)$$

Vzhledem k druhé z těchto rovnic platí také

$$\left(\frac{dR_{n,1}}{dr} \right)_{r=\rho_1} = \left(\frac{dR_{n,2}}{dr} \right)_{r=\rho_1}. \quad (4)$$

Analogické rovnice platí pro všechna další vnitřní rozhraní.

Tvorba modelu spočívá v tom, že se zvolí jednak tloušťky jednotlivých vrstev a jejich konstantní vodivosti, jednak koeficienty α a β v nejspodnější vrstvě. Uvedená dvojice rovnic pak umožní vypočítat další dvojice α a β pro všechny další vrstvy až po tu svrchní.

Volba konstant ve vrstvě 1: Klade se $\beta = 0$, a to proto, aby funkce R zůstala konečná při $r = 0$ (vzhledem k průběhu funkce y_n). Potom nic nebrání volbě $\alpha = 1$.

Na povrchu modelu platí původní Priceovy podmínky:

$$\mu(\epsilon_n + i_n) = \frac{i}{\omega} \left[R_{n,s}(a) + a \frac{dR_{n,s}}{dr} \Big|_{r=a} \right], \quad (5)$$

$$\frac{\epsilon_n}{n+1} - \frac{i_n}{n} = \frac{i}{\mu\omega} R_{n,s}(a). \quad (6)$$

Pravé strany mohou být pro daný model a frekvenci spočítány numericky. Tím je umožněno spočítat *teoretickou* odezvu $\frac{in}{e_n}$, srovnávat ji s *empirickou* (tj. naměřenou) odezvou a měnit parametry modelu. Shrnutí výsledků vidíme na obrázku. Rozptyl výsledků je dán nepřesnostmi měření variací složek X a Z (zprostředkovaná chyba). V hloubce 400 km je zřetelná diskontinuita průběhu σ . Velmi pravděpodobně jde o změnu aktivační energie, která souvisí s fázovým přechodem olivínu na spinel.
 $(\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{kT}}, E \dots \text{aktivační energie.})$

Výrazná změna v 700 km byla též mnohonásobně potvrzena.

Vodivost spodního pláště se odhaduje podle toho, jak velké periody sekulární variace pronikají na zemský povrch. Vodivost spodního pláště musí být tak vysoká, aby byla schopna odfiltrovat frekvence vyšší než jsou ty, jež jsou na povrchu pozorovány. Tento úkol ovšem naráží na těžkou překážku: Nedá se dobře posoudit, kde je předěl frekvencí vnějšího a vnitřního původu: 3 roky? 7 let? 10 let? Ve spektru SV se dokonce vyskytuje i perioda 22 let, 22 let, jež je blízká základní periodě sluneční činnosti.

Při odhadech vodivosti spodního pláště se v podstatě vychází z tzv. rovnice magnetické indukce

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \vec{H}.$$

Je možno počítat s tím, že v hloubce 1200 km je $\sigma \geq 1(\Omega m)^{-1}$ a v nejspodnějším plášti $\sigma \geq 100(\Omega m)^{-1}$.

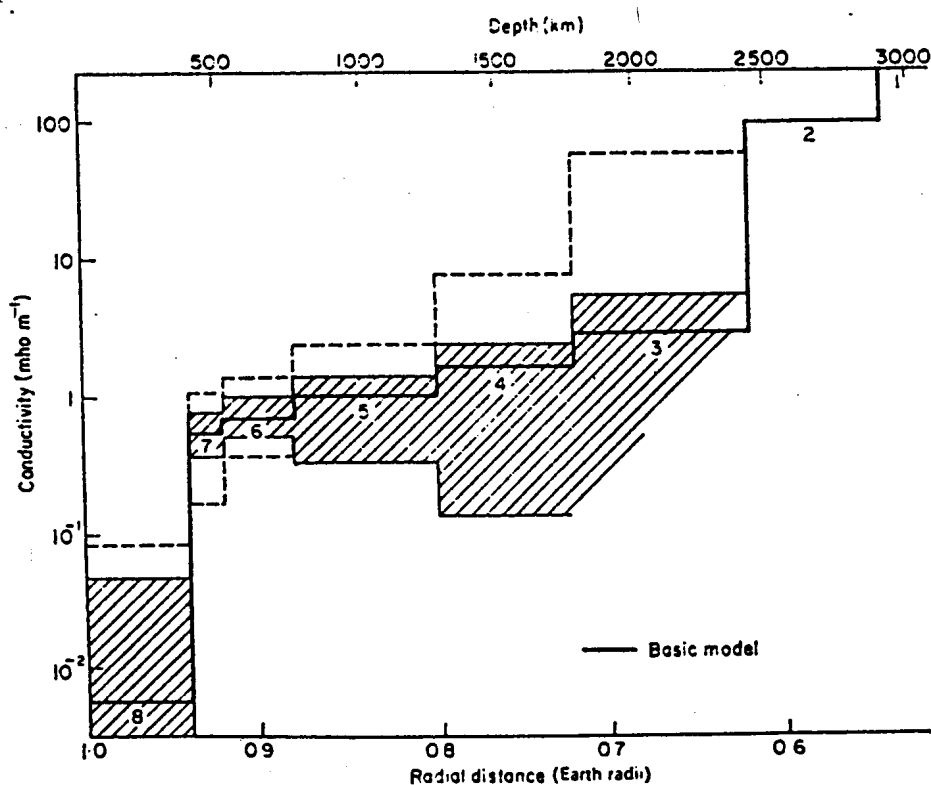


FIG. 17. Range of conductivity models compatible with the response measurements. Shaded area corresponds to ± 1 standard error, dashed lines to ± 2 standard errors.

Magnetotelurické metody

Byly podníceny pracemi L. Cagniarda v 50. letech 20. století.

Předpokládá se, že do Země vstupuje elektromagnetická rovinná vlna, harmonicky závislá na čase. Pro počáteční úvahy je lhostejné, zda jde o důsledek variace vnějšího pole nebo o umělé pole proudu zaváděného elektrodami do země. V každém případě se úvahy musí omezit na oblast, v níž lze pokládat pole za prostorově homogenní.

Budeme uvažovat poloprostor materiálově homogenní a izotropní ($\sigma = \text{konst.}$, $\varepsilon = \text{konst.}$, $\mu = \mu_0$). Shora je ohraničen horizontální rovinou. Dopadající vlna je horizontální a šíří se vertikálně dolů. Elektrickému poli \vec{E} odpovídá proud o hustotě $\vec{i} = \sigma \vec{E}$. Předpokládá se, že uvnitř uvažovaného poloprostoru není prostorový elektrický náboj ($\rho = 0$).

Kartézský souřadný systém volíme tak, že osy x a y jsou v horizontální rovině a vektory \vec{E} , \vec{i} mají směr x . Při daném modelu pronikající vlna zůstává v každé hloubce rovinnou vlnou, tzn. $E_z = E_y = 0$ při každém x . Pole pokládáme za kvazistacionární (frekvence jsou dostatečně nízké, sami si je volíme).

Vyšetření vektoru \vec{H} :

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega\mu_0\vec{H}, \\ \text{rot}_x \vec{E} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow H_x = 0, \\ \text{rot}_y \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \Rightarrow H_y = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \\ \text{rot}_z \vec{E} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow H_z = 0.\end{aligned}$$

Tedy:

$$H_y(z) = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (1)$$

Intenzity H_y a E_x jsou funkcemi hloubky z .

Vyšetření hustoty proudu:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu_0\vec{H},$$

a protože

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i} = \sigma \vec{E},$$

platí

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu_0\sigma \vec{E}$$

a odtud

$$\Delta \vec{E} = i\omega\mu_0\sigma \vec{E},$$

protože $\rho = 0$ a $\varepsilon = \text{konst.}$, takže $\nabla \cdot E = 0$. V daném případě

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = i\omega\mu_0\sigma E_x. \quad (2)$$

Odtud plyne vzorec pro hloubkovou závislost hustoty proudu (je to vzorec pro tzv. skin-efekt):

$$i_x(z) = i_{x0} e^{-z \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\omega\mu_0\sigma}} \cos(\omega t - z \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\omega\mu_0\sigma}). \quad (3)$$

Hloubka, ve které se amplituda variace zmenší na $\frac{1}{e}$ své povrchové hodnoty, bývá nazývána hloubkou průniku p :

$$p = \sqrt{\frac{T}{\pi\mu_0\sigma}},$$

T je perioda variace.

Když zintegrujeme rovnici $\nabla \times \vec{H} = \vec{i}$ přes libovolnou plochu S , dostaneme

$$\int_{(S)} \vec{i} \cdot d\vec{S} = \oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{\Gamma}. \quad (4)$$

Za plochu S zvolme obdélník v rovině zy , a to tak, že strany \overline{AB} a \overline{DC} míří ve směru horizontální osy y a jsou v hloubkách z_1 a z_2 , zatímco strany \overline{BC} a \overline{AD} míří ve směru vertikální osy z . Platí jednak

$$\int_{(S)} \vec{i} \cdot d\vec{S} = \overline{AB} \int_{z_1}^{z_2} i_x(z) dz,$$

jednak

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{\Gamma} = \overline{AB} \cdot H_y(z_1) + 0 - \overline{AB} \cdot H_y(z_2) + 0.$$

(Připomeňme si, že $\overline{AB} = \overline{CD}$ a $H_z = 0$.) Z těchto dvou rovnic plyne

$$\int_{z_1}^{z_2} i_x(z) dz = H_y(z_1) - H_y(z_2). \quad (5)$$

Nyní stanovíme hloubky z_1 a z_2 :

$$z_1 \rightarrow 0, \quad z_2 \rightarrow \infty.$$

Pole vektoru \vec{H} v nekonečnu vymizí. Proto

$$H_y(z_1) = H_y(0) = \int_0^\infty i_x(z) dz$$

a po dosazení vzorce (3) a substituci $u = \sqrt{\frac{\pi\mu_0\sigma}{T}} z$ vyjde

$$H_y(0) = i_{x0} \left(\cos \omega t \int_0^\infty e^{-u} \cos u \, du + \sin \omega t \int_0^\infty e^{-u} \sin u \, du \right) \sqrt{\frac{T}{\mu_0\sigma\pi}}.$$

Hodnota prvního i druhého integrálu je $\frac{1}{2}$. Vyjde

$$H_y(0) = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \frac{i_{x0}}{\sqrt{4\pi\mu_0}} (\cos \omega t + \sin \omega t)$$

a tedy

$$H_y(0) = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \frac{i_{x0}}{\sqrt{2\pi\mu_0}} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}). \quad (6)$$

Protože je $i_x(0, t) = i_{x0} \cos \omega t$, je

$$E_x(0, t) = \frac{i_{x0}}{\sigma} \cos \omega t$$

a pro poměr amplitud obou harmonicky proměnných vektorů platí:

$$\frac{|E_x(0)|}{|H_y(0)|} = Z(0) = \frac{\sqrt{2\pi\mu_0}}{\sqrt{\sigma T}},$$

takže

$$\sigma = \frac{2\pi\mu_0}{TZ^2}. \quad (7)$$

Veličina Z je *impedance*.

V homogenním poloprostoru zjistíme vodivost tak, že při určité frekvenci změříme impedanci a použijeme vzorec (7). Důležité je mít na paměti, že vzorec je odvozen pro *homogenní* poloprostor. Hodnota σ je pro něj konstanta a nesmí se měnit se změnou periody T . Mění-li se T , musí se příslušným způsobem měnit i impedance, tak aby vodivost byla stále táž. Dalším příznakem toho, že se měří v homogenním prostředí, je fázový rozdíl $\frac{\pi}{4}$ mezi vektory \vec{E} a \vec{H} (viz (6).) Předpoklad o homogenním poloprostoru není nikdy splněn. Při dostatečně krátké (uměle vyráběné) periodě můžeme však v rámci pozorovacích chyb přijmout výsledek $\sigma = konst.$ alespoň do hloubky průniku variace $p = \sqrt{\frac{T}{\sigma\pi\mu}}$.

Příklad hloubky průniku harmonické vlny v homogenním prostředí při různých frekvencích a různých hodnotách elektrického odporu:

$T =$	1s	1 min.	30 min.
$\rho = 0,2\Omega m$	0,2 km	1,7 km	9,5 km (mořská voda)
$\rho = 1\Omega m$	0,5km	3,9km	21,4 km.

Složitější modely prostředí. Pojem "zdánlivá vodivost".

Uvedeme nejjednodušší příklad: *Planparalelní horizontální vrstva uložená na poloprostoru.* Nad modelem je vodivost nulová, ve vrstvě je σ_1 a v poloprostoru σ_2 . Prostorový náboj je nulový, případ je kvazistacionární, $\mu = \mu_0$. Podmínky na rozhraní jako v předchozích případech:

$$H_{tang_1} = H_{tang_2}, E_{tang_1} = E_{tang_2}.$$

Normálové složky obou vektorů jsou nulové.

Shora opět dopadá rovinná horizontální vlna. Každý vektor obsahuje faktor $e^{i\omega t}$. Opět platí

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = i\omega\mu_0\sigma E_x$$

a

$$H_y = \frac{i}{\mu_0\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Zavedeme-li $a = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma}$, máme soustavu dvou rovnic pro každé z obou prostředí:

$$E_x(z) = Ae^{a\sqrt{\sigma}z} + Be^{-a\sqrt{\sigma}z},$$

$$H_y = \sqrt{\frac{T\sigma}{2\pi\mu_0}} \left(-Ae^{a\sqrt{\sigma}z} + Be^{-a\sqrt{\sigma}z} \right) e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ve vrchní vrstvě jsou konstanty: A_1, B_1, σ_1 , v poloprostoru A_2, B_2, σ_2 .

Volíme $A_2 = 0, B_2 = 1$. (Důvody jsou obdobné jako v případě magnetovariační metody.) Konstanty A_1, B_1 se spočítají z podmínek na rozhraní mezi vrstvou a podloží.

Cílem úlohy je určit 2 neznámé: Vodivost poloprostoru σ_2 a tloušťku svrchní vrstvy h . Předpokládá se, že vodivost σ_1 svrchní vrstvy je známa. (Dá se určit např. měřením při vyšších frekvencích s použitím dříve uvedených vzorců pro poloprostor.)

Z podmínky spojitosti tečné složky vektoru \vec{H} na rozhraní v hloubce h plyne

$$\sqrt{\frac{\sigma_1}{2\pi\mu_0}} (-A_1 e^{a\sqrt{\sigma_1}h} + B_1 e^{-a\sqrt{\sigma_1}h}) = \sqrt{\sigma_2} e^{-a\sqrt{\sigma_2}h},$$

z podmínky spojitosti tečné složky vektoru \vec{E} v hloubce h plyne

$$A_1 e^{a\sqrt{\sigma_1}h} + B_1 e^{-a\sqrt{\sigma_1}h} = e^{-a\sqrt{\sigma_2}h}.$$

Odtud se dostanou koeficienty A a B pro svrchní vrstvu:

$$A_1 = \frac{\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1}}{2\sqrt{\sigma_1}} e^{-ah(\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2})}, \quad (8)$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}}{2\sqrt{\sigma_1}} e^{ah(\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2})}. \quad (9)$$

Koeficienty A_1 a B_1 jsou komplexní čísla, neboť obsahují komplexní číslo a . S jejich použitím sestrojíme teoretickou povrchovou impedanci $Z(0) = \frac{E_x(0, \sigma_1)}{H_y(0, \sigma_1)}$. Pro vektory \vec{E} a \vec{H} na povrchu platí vzorce

$$E_x(0) = A_1 + B_1, \quad (10)$$

$$H_y(0) = \sqrt{\frac{T\sigma_1}{2\pi\mu_0}} (-A_1 + B_1) e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (11)$$

Jsou to veličiny komplexní a závislé na frekvenci. Je možno psát je ve tvaru

$$E_x(0) = M e^{-i\phi}, \quad (12)$$

$$H_y(0) = \sqrt{\frac{T\sigma_1}{2\pi\mu_0}} N e^{-i\psi} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (13)$$

Moduly M , N i fáze ϕ , ψ jsou reálná čísla závislá na parametrech T , σ_1 , σ_2 , h . Z toho T a σ_1 známe, h a σ_2 hledáme. Povrchová impedance se dá napsat jako komplexní číslo:

$$Z(0) = \sqrt{\frac{2\pi\mu_0}{\sigma_1 T}} \frac{M}{N} e^{-i(\phi - \psi + \frac{\pi}{4})}. \quad (14)$$

Modul i fáze impedance jsou závislé na frekvenci. Porovnáme tento modul s tím, který jsme vypočítali pro homogenní poloprostor:

pro model s rozhraním je $|Z(0)| = \frac{M}{N} \sqrt{\frac{2\pi\mu_0}{\sigma_1 T}},$

pro homogenní poloprostor je $|Z(0)| = \sqrt{\frac{2\pi\mu_0}{\sigma T}}.$

Položíme

$$\frac{M}{N} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}} \text{ a } \phi - \psi + \frac{\pi}{4} = \theta.$$

Veličina σ_a je tzv. *zdánlivá vodivost*. Vzorec (14) nyní zní

$$Z(0) = \sqrt{\frac{2\pi\mu_0}{\sigma_a T}} e^{-i\theta},$$

což je obdoba vzorce odvozeného pro homogenní poloprostor. Dá se z něho spočítat zdánlivá vodivost

$$\sigma_a = \sigma_1 \left(\frac{N}{M} \right)^2.$$

Je závislá na frekvenci. Fáze θ se nyní liší od $\frac{\pi}{4}$ a je rovněž závislá na frekvenci.

Abychom mohli porovnávat model s měřením, musíme vyjádřit proměnné M , N , ϕ , ψ pomocí parametrů h , T , σ_1 , σ_2 . Toho se docílí dosazením (8) a (9) do (10) a (11) a porovnáním s (12) a (13). Než napíšeme vzorce pro výpočet nových proměnných, připomeňme si definici hloubky *průniku* variací:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0}} \sqrt{\frac{T}{\sigma_1}}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0}} \sqrt{\frac{T}{\sigma_2}}.$$

Převodní vzorce vypadají takto:

$$M \cos \phi = \left(\frac{1}{p_1} C h \frac{h}{p_1} + \frac{1}{p_2} S h \frac{1}{p_1} \right) \cos \frac{h}{p_1}, \quad (15)$$

$$M \sin \phi = \left(\frac{1}{p_1} S h \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} C h \frac{h}{p_1} \right) \sin \frac{h}{p_1},$$

$$N \cos \psi = \left(\frac{1}{p_1} S h \frac{h}{p_1} + \frac{1}{p_2} C h \frac{h}{p_1} \right) \cos \frac{h}{p_1},$$

$$N \sin \psi = \left(\frac{1}{p_1} Ch \frac{h}{p_1} + \frac{1}{p_2} Sh \frac{h}{p_1} \right) \sin \frac{h}{p_1}.$$

Položme zprvu $h = 1$ a $\rho_1 = 1$. Při této volbě se pomocí vzorců (15) dá spočítat *zdánlivý odpor* $\rho_a = \frac{1}{\sigma_a} = \frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{M}{N} \right)^2$ a fáze θ jako funkce periody variace T , a to pro soustavu parametrických křivek pro různé hodnoty skutečného odporu ρ_1 ve svrchní vrstvě. Ve skutečnosti hodnotu h neznáme. Úlohou zůstává určit dvě neznámé: hloubku rozhraní h a odpor podloží ρ_2 . Křivky závislosti zdánlivého odporu a fáze na periodě vypočítané pro $h = 1$, $\rho_1 = 1$ se vynášejí v logaritmickém měřítku. Obě závislosti, tj. $\rho(T)$ a $\theta(T)$ se potom zjistí empiricky. Tvar křivek a rovnice (15) umožňují určit jedním měřením obě neznámé: Hloubka rozhraní h v rovnicích vystupuje pouze v rámci výrazu $\frac{h}{p_1}$, který je argumentem Sh a Ch . Můžeme jej rozepsat:

$$\frac{h}{p_1} = \frac{h}{\sqrt{\rho_1 T}} \sqrt{\pi \mu_0} = \frac{\sqrt{\pi \mu_0}}{\sqrt{\frac{T}{\frac{h^2}{\rho_1}}}}.$$

Tím, že jsme položili $h = 1$ a $\rho_1 = 1$, jsme učinili totéž, jako bychom počítali čas v jednotkách $\frac{h^2}{\rho_1}$. Na teoretických křivkách pozorujeme, že se všechny protínají vzájemně na periodové ose, a to postupně ve dvou bodech. Podobný tvar má i empirická křivka. Porovnáním vzdálenosti průsečíku na teoretické křivce, na které se čas měří v h^2/ρ_1 , s příslušnou vzdáleností na empirické křivce, kde se čas měří v sekundách, se zjistí hloubka rozhraní. Potom je při znalosti ρ_1 možno překreslit empirickou křivku ve stejných časových jednotkách, v jakých jsou vykresleny teoretické křivky, a zjistit, která z parametrických teoretických křivek vyhovuje, čímž je zjištěno σ_2 .

Složitější modely o více vrstvách se řeší v principu stejně, podmínky spojitosti se uplatňují na všech rozhraních a postupuje se zespoda k povrchu.

Závislost magnetotelurického pole na rozměrech budícího zdroje.

Po Cagniardovi ještě se ještě několik autorů snažilo odvodit takové vztahy mezi horizontálními složkami vektorů \vec{E} a \vec{H} , které by přinášely co nejvíce informací o rozložení vodivosti v Zemi. Mezi ně se zařadil také Albert Price. V roce 1962 vypracoval metodu pro situaci, že pole má nezanedbatelné horizontální gradienty. (V tom případě totiž existuje také vertikální složka vektoru \vec{H} .)

Řešení rovnice

$$\Delta \vec{E} = i\omega\mu_0\sigma \vec{E} \quad (16)$$

mělo v předchozím případě (podle Cagniarda) předpoklad, že horizontální rozměry zdroje ve vysoké atmosféře jsou velké ve srovnání s hloubkou pronikání, takže proměnná pole \vec{E} a \vec{H} pronikají do hloubky ve formě rovinné vlny. Z toho důvodu byla složka H_z ve všech hloubkách nulová. Jestliže však řečený předpoklad neplatí, tj. horizontální rozměry zdroje nejsou tak velké, mají obě pole ve všech hloubkách horizontální gradienty. Vyjádření impedance $\frac{E_x}{H_y}$ je nyní složitější. Price vyjádřil potenciál vnějšího, tj. indukujícího pole v podobě

$$\Omega_0 = A e^{-z\nu} P(x, y, \nu), \quad (17)$$

kde ν je reálná a kladná konstanta, určená horizontálními rozměry zdroje.

Ω_0 ... potenciál pole vnějšího zdroje

Ω_σ ... vytvářející funkce pro vektorové pole \vec{E}

v prostoru o vodivosti σ .

Funkce Ω_σ musí splňovat rovnici (16), která platí pro skalární složky vektoru \vec{E} . Až bude nalezena funkce Ω_σ , vytvoří se z ní pole \vec{E} operací

$$\vec{E}(x, y, z, t) = -e^{i\omega t} (\vec{n} \times \nabla \Omega_\sigma) \quad (18)$$

kde \vec{n} je vektor normály k rovinnému rozhraní ve směru osy z . Tvar funkce Ω_σ musí odpovídat potenciálu vnějšího budícího pole při uvážení skutečnosti, že hloubka průniku závisí jednak na vodivosti prostředí, jednak na rozměrech zdroje. Položme

$$\Omega_\sigma = Z(z, \nu) P(x, y, \nu) \quad (19)$$

a

$$Z = Z_0 e^{-z\sqrt{\nu^2 + k^2}}, \quad (20)$$

kde $k^2 = i\omega\mu_0\sigma$. Tato volba odpovídá základnímu vzorci pro povrchový jev (viz (3)), který stanoví, že harmonická časová změna proniká do hloubky jako $e^{-\dots\sqrt{\omega\sigma}}$. Význam ν v tomto vzorci poznáme později. Dosazením (19) do (16) je

$$P(x, y, \nu) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + Z(z) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) = k^2 Z(z) P(x, y, \nu). \quad (21)$$

Podle (20) je

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = (\nu^2 + k^2) Z(z) \quad (22)$$

a tedy podle(21)

$$\nu^2 P(x, y, \nu) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \quad (23)$$

Z rovnice (22) plyne, že *nad rozhraním*, tj. při $z < 0$ a $\sigma = 0$, je

$$Z = a_0 e^{-\nu z} + b_0 e^{\nu z}.$$

Představme si nyní, že pod rozhraním existuje soustava planparalelních horizontálních vrstev o mocnostech h_1, h_2, \dots, h_{n-1} o vodivostech $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ a pod nimi poloprostor o vodivosti σ_n . Vodivosti σ_m odpovídají veličiny

$$k_m^2 = i\omega\mu_0\sigma_m \text{ a } \theta_m^2 = \nu^2 + k_m^2.$$

V l -té vrstvě *pod rozhraním* platí

$$Z = a_l e^{-\theta_l z} + b_l e^{\theta_l z}.$$

V přímé úloze se vytvoří model o mocnostech h_1 až h_{n-1} a příslušných vodivostech σ_1 až σ_n . Je též nutno předepsat tvar funkce $P(x, y, \nu)$ ze vorce (19). Může to být např. $P = \sin(\nu x)$. Význam čísla ν je tedy ten, že výraz $\frac{2\pi}{\nu}$ je charakteristický rozměr zdroje. Velikost čísla ν je rovněž předmětem volby.

V poloprostoru se položí $b_n = 0$ a $a_n = 1$. Koeficienty a_{n-1}, b_{n-1} až a_0, b_0 se hledají postupně odzdoła z podmínek spojitého průběhu tečných složek vektorů \vec{H} a \vec{E} na všech rozhraních. Z podmínky na rozhraní Země-vzduch se nakonec spočítají koeficienty a_0, b_0 a z nich teoretická impedance. Jejím srovnáním s impedancí naměřenou se zkoumá vhodnost modelu.

Jestliže jde o pouhý poloprostor, je

$$Z_1 = a_1 e^{-z\sqrt{\nu^2 + k_1^2}}$$

a pro impedanci v tomto případě platí

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{i\omega\mu_0}{\sqrt{\nu^2 + i\omega\mu_0\sigma}} = \left(\frac{i\omega\mu_0}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - i\beta)^{-\frac{1}{2}},$$

kde $\beta = \frac{\nu^2}{\omega\mu_0\sigma}$.

Při $\nu = 0$ je charakteristický rozměr zdroje nekonečně veliký a to znamená, že musí platit původní Cagniardovy vorce. To souhlasí, neboť v tom případě je $\beta = 0$ a vzorec pro impedanci je totožný s Cagniardovým (srovnej (7)).

Pro obecný Priceův model lze odvodit zajímavou vlastnost impedance: Podle (18) je

$$\vec{E} = -e^{-i\omega t}[\vec{n} \times \nabla(ZP)],$$

takže podle (19) je

$$\vec{E} \equiv e^{i\omega t} \left(Z(z) \frac{\partial P}{\partial y}, -Z(z) \frac{\partial P}{\partial x}, 0 \right). \quad (24)$$

Z Maxwellovy rovnice

$$i\omega\mu_0\vec{H} = -\nabla \times \vec{E}$$

plyne

$$i\omega\mu_0\vec{H} \equiv -e^{i\omega t} \left[\frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial y}, -Z \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \right]. \quad (25)$$

Kombinací (23) a (25) vznikne

$$\vec{H} \equiv \frac{i}{\mu_0\omega} e^{i\omega t} \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial y}, \nu^2 Z P \right). \quad (26)$$

Z rovnic (24) a (26) vyplývá, že

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}. \quad (27)$$

Tento vztah musí platit vždy, když jsou splněny výchozí předpoklady, tzn., že vodivé prostředí je po vrstvách homogenní a izotropní a variace jsou buzeny *jedním zdrojem* konečných rozměrů. Když je situace pod zemským povrchem složitější nebo když působí více zdrojů, vztah (27) neplatí.

Případ $\left| \frac{E_x}{H_y} \right| \neq \left| \frac{E_y}{H_x} \right|$ znamená, že

$$E_x = \zeta_{xx}H_y - \zeta_{xy}H_x, \quad (28)$$

$$E_y = \zeta_{yx}H_y - \zeta_{yy}H_x,$$

kde ζ je *tenzor povrchové impedance*.

Je-li závislost impedance na volbě souřadného systému v nějakém místě trvalá a tenzor ζ je stejný při všech poruchách a variacích, jde o projev horizontální nehomogenity nebo anizotropie. V opačných případech lze soudit na složitost zdroje ve vysoké atmosféře.

Zemský plášť jako filtr elektromagnetických dějů v zemském jádře

Magnetické pole generované v zemském jádře by na povrchu Země bylo filtrováno, i kdyby zemský plášť byl elektrický izolátor. V každém případě totiž funguje "geometrický filtr". Za uvedeného předpokladu je totiž geomagnetická indukce již v plášti dána vzorcem obdobným jako vzorec pro pole na zemském povrchu a nad ním. Tak např. pro vertikální složku Z ($\equiv B_r$) platí

$$B_r = \sum_n (n+1) \sum_m (G_n^m \cos m\phi + H_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1},$$

kde a je střední poloměr Země, c střední poloměr jádra,

$$G_n^m = g_n^m \left(\frac{a}{c}\right)^{n+2}, \quad H_n^m = h_n^m \left(\frac{a}{c}\right)^{n+2} \text{ a } c < r < a.$$

Přitom $\frac{a}{c} \approx 1,8$. Čím vyšší stupeň, tím vyšší geometrické zeslabení. Pole 1. stupně je na povrchu jádra zhruba 6-krát větší než na zemském povrchu, pole 2. stupně 11-krát a pole 8. stupně již zhruba 125-krát větší než na povrchu Země.

Číselné hodnoty radiální složky indukce na CMB pro jednotlivé stupně:

n	1	2	3	4	5	6
$B_r(nT)$	220 000	57 000	81 000	92 000	62 000	88 000

Chyba určení koeficientu na CMB se ovšem s rostoucím n také progresivně zvětšuje, takže ani při izolujícím plášti bychom nemohli obraz pole věrohodně převést z povrchu Země na povrch jádra.

Geomagnetické pole, vycházející z jádra, je však filtrováno ještě tím, že elektrická vodivost pláště není nulová, a zejména ve spodním plášti dosahuje vysokých hodnot. Budeme nyní mluvit o *elektromagnetickém filtru*.

Magnetické pole v jádře si můžeme představit jako pole popsané jednak vektory poloidálními, jednak toroidálními:

$$\vec{B} = \nabla \times (T\vec{r}) + \nabla \times \nabla \times (P\vec{r}), \quad (29)$$

kde $T\vec{r}$ je toroidální vektor a $P\vec{r}$ je poloidální vektor a P, T jsou skalární funkce. Takto lze rozložit každé nedivergentní pole, což je užitečné zejména v geomagnetizmu. Skaláry T a P se dají z pole \vec{B} jednoznačně určit až na aditivní gradientovou funkci, která se při tvorbě vektoru \vec{B} "vyrotuje".

Na povrchu Země můžeme sledovat jen poloidální část vektorového pole. Rozepíšeme-li ve sférických souřadnicích operátory $\nabla \times$ a Δ , dostaneme

$$\nabla \times \nabla \times (P\vec{r}) = \nabla \left(\frac{\partial}{\partial r} (rP) \right) - \vec{r} \Delta P. \quad (30)$$

V pevném vodiči, ve kterém je $\sigma = \sigma(r)$, platí podle Maxwellových rovnic

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{\vec{i}}{\sigma} \right) = \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0 \sigma} \right),$$

a tedy

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\eta(r) \nabla \times \vec{B}), \quad (31)$$

kde

$$\eta(r) = (\mu_0 \sigma(r))^{-1}.$$

Když do této rovnice dosadíme poloidální vektor $\vec{B} = \nabla \times \nabla(\vec{r}P)$ a porovnáme s rovnicí (30), vyjde

$$\nabla \times \nabla \times \left(\vec{r} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = -\nabla \times \left\{ \eta \nabla \times \left[\nabla \left(\frac{\partial}{\partial r} (rP) \right) - \vec{r} \Delta P \right] \right\}. \quad (32)$$

Člen na pravé straně obsahující výraz $\nabla \times \nabla(\dots)$ je roven nule, takže rovnice pro skalár P zní

$$\nabla \times \nabla \times \left(\vec{r} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \nabla \times [\eta \nabla \times (\vec{r} \Delta P)]. \quad (33)$$

První integrací této rovnice dostaneme

$$\nabla \times \left(\vec{r} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \eta \nabla \times (\vec{r} \Delta P).$$

Na pravé straně by měla být ještě aditivní funkce $\nabla \phi$, tu však podle předchozí poznámky nebudeme brát v úvahu.

Platí:

$$\nabla \times (\vec{r} \eta(r) \Delta P) = -[\vec{r} \times \nabla(\eta(r) \Delta P)] = \eta(r) \nabla \times (\vec{r} \Delta P),$$

první integrál rovnice (32) je tedy

$$\nabla \times \left(\vec{r} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \nabla \times (\vec{r} \eta \Delta P)$$

a druhý integrál (opět bez aditivní gradientové funkce) je

$$\vec{r} \frac{\partial P}{\partial t} = \vec{r} \eta \Delta P.$$

Rovnice pro skalární vytvořující funkci P je

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \eta(r) \Delta P. \quad (34)$$

Mějme harmonickou variaci vektoru \vec{B} o frekvenci ω . Její vytvořující funkce $P(r, \theta, \phi, t)$ má ve frekvenční oblasti obraz $\dot{P}(r, \theta, \phi, \omega)$. Zavedeme-li

$$i\omega \mu_0 \sigma(r) = F(r),$$

platí ve frekvenční oblasti

$$\Delta \tilde{P} = -F(r)\tilde{P}. \quad (35)$$

(V dalším textu až po rovnici (50) budeme znak \sim vynechávat.) Budeme počítat závislost \tilde{B} na r prostřednictvím $\sigma(r)$ pro jeden určitý směr θ_0, ϕ_0 . Závislost uvažovaných veličin P a \tilde{B} na hloubce je totiž mnohem výraznější než závislost na θ a ϕ . Po skončení výpočtu pro určitý směr bude možno výsledek uplatnit na další směry. Pro danou frekvenci je rovnice (35) ve sférických souřadnicích

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} \right) = -F(r)\tilde{P}(r).$$

Po substituci

$$r\tilde{P}(r) = u(r) \quad (36)$$

a úpravě přejde (35) v

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + F(r)u(r) = 0. \quad (37)$$

Řešení budeme hledat ve tvaru

$$u(r) = K e^{i\Phi(r)}. \quad (38)$$

Dosazením (38) do (37) vyjde

$$-(\Phi')^2 + i\Phi'' + F = 0. \quad (39)$$

Učiníme předpoklad

$$|\Phi''| \ll |F|. \quad (40)$$

Jeho význam a platnost prozkoumáme později. Při tomto předpokladu (39) přejde v

$$\Phi' \approx \pm \sqrt{F} \quad (41)$$

a derivací vyjde

$$\Phi'' \approx \pm \frac{1}{2} \frac{F'}{\sqrt{F}}. \quad (42)$$

Snadno poznáme, že z předpokladu (40) a rovnice (42) plyne

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\frac{dF}{dr}}{\sqrt{F}} \right| \ll |F| \quad (43)$$

a po dosazení za $F(r)$ upravený předpoklad (40)

$$\frac{\sigma'}{\sigma\sqrt{\sigma}} \ll \sqrt{2\omega\mu_0}. \quad (44)$$

Nyní je zřejmé, že předpoklad (40) žádá, aby vodivost byla vysoká, její gradient malý a frekvence vysoká. Požadavek na vodivost a její průběh může být dobře splněn ve spodním plášti.

Dosazením vztahu (42) do rovnice (39) plyne

$$(\Phi')^2 \approx \pm \frac{i}{2} \frac{F'}{\sqrt{F}} + F$$

a po substituci $a = \frac{1}{2} \frac{F'}{\sqrt{F}}$, kde a se předpokládá malé, je

$$\Phi' \approx \pm (F \pm ia)^{\frac{1}{2}}.$$

Odtud

$$\Phi' \approx \pm \sqrt{F} \pm \frac{i}{2} a \frac{1}{\sqrt{F}}$$

Po dosazení za a vyjde

$$\Phi' \approx \pm \sqrt{F} \pm \frac{i}{4} \frac{F'}{F}. \quad (45)$$

Rovnici (45) zintegrujeme od CMB do libovolné hloubky r . Hloubku CMB označme c . Vyjde

$$\Phi(r) = \pm \int_c^r \sqrt{F} dr \pm \frac{i}{4} \ln F(r) \Big|_c^r + K$$

a po dosazení $F = i\omega\mu_0\sigma$ konečně

$$\Phi(r) = \pm \int_c^r \sqrt{F(r)} dr \pm \frac{i}{4} \ln \frac{\sigma(r)}{\sigma(c)} + K. \quad (46)$$

Hledané řešení je podle (38)

$$u(r) = K e^{\mp \frac{1}{4} \ln \frac{\sigma(r)}{\sigma(c)}} e^{\pm i \int_c^r \sqrt{F(r)} dr}. \quad (47)$$

Protože

$$\sqrt{F(r)} = \sqrt{i\mu_0\omega\sigma(r)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0} \sqrt{\sigma(r)}$$

a $P(r) = \frac{u(r)}{r}$, je

$$\tilde{P}(r) = \frac{K}{r} e^{\mp \frac{1}{4} \ln \frac{\sigma(r)}{\sigma(c)}} e^{\pm \frac{i-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0} \int_c^r \sqrt{\sigma(r)} dr}. \quad (48)$$

Určení konstanty K : V hloubce c je

$$\tilde{P}(c) = \frac{u(c)}{c} = \frac{K}{c} \Rightarrow K = c\tilde{P}(c).$$

Volba znaménka: S rostoucím r musí funkce $P(r)$ klesat. U obou exponentů musí proto být znaménko $+$. (U prvního proto, že σ s rostoucím r klesá.)

Upravené řešení vytvořující funkce tedy zní:

$$\tilde{P}(r) = \frac{c}{r} \tilde{P}(c) \left[\frac{\sigma(r)}{\sigma(c)} \right]^{\frac{1}{4}} e^{(i-1) \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2}} \int_c^r \sqrt{\sigma(r)} dr}. \quad (49)$$

Hledejme radiální složku poloidálního vektoru, který je ve frekvenční oblasti dán vzorcem $\vec{B}(r) = \nabla \times \nabla \times (\vec{r}P)$. (Vztah mezi radiální a běžně používanou vertikální složkou je $B_r = -Z$.)

Zavedme

$$\tau_H = \frac{\mu_0}{2} \left(\int_c^r \sqrt{\sigma} dr \right)^2.$$

Je to *vysokofrekvenční konstanta pláště*. (H...high frequency.) Radiální složka indukce ve frekvenční oblasti tedy je

$$\dot{B}_r(r) = \text{rot}_r \text{rot} \left(\overset{c}{\underset{1}{c}} P(c) \left[\frac{\sigma(r)}{\sigma(c)} \right]^{\frac{1}{4}} e^{(-1+i)\sqrt{\omega\tau_H}} \right). \quad (50)$$

Operace $\text{rot}_r \text{rot}$ obsahuje jen derivace $\frac{\partial}{\partial \theta}$ a $\frac{\partial}{\partial \phi}$. Dotkne se proto jen funkce $P(c, \theta, \phi)$:

$$\dot{B}_r(r) = c \left[\frac{\sigma(r)}{\sigma(c)} \right]^{\frac{1}{4}} e^{(-1+i)\sqrt{\omega\tau_H}} \text{rot}_r \text{rot}(\vec{r}\dot{P}(c)),$$

a protože podle (29) je radiální složka poloidálního vektoru v hloubce c

$$\dot{B}_r(c) = \text{rot}_r \text{rot}(\vec{r}\dot{P}(c)),$$

je

$$\dot{B}_r(r) = \dot{B}_r(c) \left[\frac{\sigma(r)}{\sigma(c)} \right]^{\frac{1}{4}} e^{(-1+i)\sqrt{\omega\tau_H}}. \quad (51)$$

Převáděno zpět do časové oblasti: Na povrchu Země je radiální složka vektoru \vec{B}

$$B_r(a, t) = \left(\frac{c}{a} \right)^2 \left[\frac{\sigma(c)}{\sigma(a)} \right]^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty B_r(c, t - t') \text{erfc} \left[\left(\frac{\tau_H}{2t'} \right)^{\frac{1}{2}} \right] dt', \quad (52)$$

kde

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du. \quad (53)$$

Rovnice (52) a (53) umožňují ověřovat modely průběhu vodivosti ve spodním plášti podle průběhu časových variací na zemském povrchu. Výsledky jsou ovšem nejednoznačné, a to obzvlášť z těchto důvodů: Konstanta τ_H se dá počítat pro mocnou vrstvu ve spodním plášti s tím, že nad touto vrstvou je vodivost zanedbatelná. Mocnost vrstvy a vodivost v ní se obě mohou měnit tak, že dávají stejnou hodnotu. Dalším nepříjemnou okolností je to, že splnění podmínky (44), která byla nutnou pro použití tohoto postupu, je závislé na modelu vodivosti ve vztahu k frekvenci variace.

V hloubce zhruba 1500 km se dá vodivost poměrně věrohodně odhadnout výzkumem variací vnějšího pole. Vezmeměme průměr z hodnot, jež jsou uváděny uznávanými autory (McDonald, Alldredge, Courtillot, Rokytianski); je to $\approx 30 (\Omega m)^{-1}$. Pro hloubku 3000 km vezmeme "rozumnou" hodnotu $\approx 70 (\Omega m)^{-1}$. Pro gradient vodivosti v tom případě bude platit: $\frac{\Delta\sigma}{\Delta r} \approx 0,03$.

Při periodě 3,7 let je podmínka (44) splněna,
při periodě 7 let je podmínka (44) splněna,
při periodě 60 let podmínka splněna není.

Mechanismy elektrické vodivosti v Zemi

- 1) *Vodivost elektronová* je nejvyšší ze všech druhů vodivosti. Mají ji kovy, kromě nich především tuha. Tento mechanismus přichází v úvahu v zemském globálním měřítku pouze v jádře.
- 2) *Polovodiče* mají ve srovnání s vodiči kovového typu jen malou koncentraci volných elektronů. Vodivost polovodičů se popisuje v tzv. pásové teorii pevných látek. Elektrony se v pevných látkách obecně mohou nacházet jen v dovolených pásích energií, jež jsou odděleny zakázanými pásy. Ve vodičích jsou dovolené pásy velmi blízko u sebe a jsou často nezcela zaplněné. Přechod elektronů mezi nimi je snadno možný. V polovodičích jsou blízko u sebe zaplněný a prázdný dovolený pás, čímž je umožněn přechod ze zaplněného do prázdného pásu. Polohu a obsazení pásů ovlivňuje jednak teplota, jednak různé poruchy a nečistoty v krystalových mřížkách. Proto se mluví též o *příměsové vodivosti*. Do této kategorie spadají kysličníky a siřičky. Tyto nerosty mají ekonomický význam, proto je jejich vodivost předmětem ponejvíce užité geofyziky. V globálním měřítku mají malý význam.
- 3) *Iontová vodivost* je působena usměrněným pohybem iontů v elektrickém poli. Existuje v kapalně i pevné fázi. V tavenině nebo roztoku existují snadno pohyblivé kationty a anionty. V pevných látkách vždy existují poruchy pravidelného uspořádání (vakance). Jejich koncentrace s teplotou vzrůstá. V mnoha látkách, zejména v iontových krystalech, dochází k přeskokům iontů na místa vakancí. V Zemi je tento druh vodivosti velmi důležitý, protože kapaliny v pórech hornin vždy obsahují rozpuštěné ionizované soli. Vodivost těchto slaných kapalin je o dvě až tři řády menší než vodivost polovodičů. Její význam však spočívá v tom, že se vyskytuje v celém plášti a kůře a je tedy nejdůležitější složkou vodivosti v Zemi.

Na všechny typy vodivosti má podstatný vliv *teplota*. Kovové vodiče svou vodivost s růstem teploty ztrácejí, vodivost iontová i polovodičová naopak s teplotou roste.

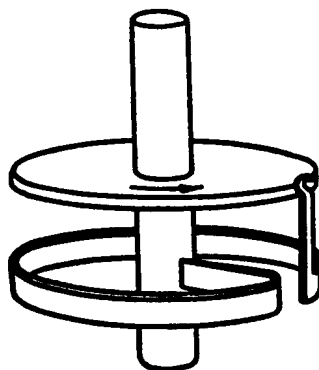
Tlak má pouze nepatrný vliv na elektrickou vodivost. Laštovičková (1983) uvádí vzorec $\sigma = \sigma_0 p^m$, kde m se pohybuje v mezích $+0,15 \div +0,45$.

Buzení a udržování magnetického pole v zemském jádře

Bullardovo diskové dynamo

Jde o úvahu, která má ukázat, zda a za jakých podmínek je možné trvalé samobuzení magnetického pole. Jde ovšem pouze o princip, nikoli o napodobení reálných poměrů v zemském jádře.

Vodivý disk je pevně spojen s vodivou osou otáčení. Okraj disku je pomocí polepů a kartáčků spojen s osou vodivým proužkem nebo drátem (podle nákresu). Disk se otáčí ve slabém počátečním homogenním magnetickém poli \vec{B}_0 , jež má směr osy otáčení. Rychlost otáčení je $\vec{\omega}$. Postupná rychlost je v každém bodě disku $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, kde \vec{r} je polohový vektor v rovině disku s počátkem v ose otáčení. V disku při otáčení vzniká elektrická intenzita $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}_0$. Protože $\vec{v} \perp \vec{B}_0$ a $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, je v každém bodě disku velikost intenzity $E = \omega r B_0$. Poloměr disku je a .



Mezi osou otáčení a okrajem disku je potenciálový rozdíl

$$U = \int_0^a E dr = \int_0^a \omega B_0 r dr = \frac{\omega B_0}{2} a^2.$$

Kovovým proužkem, jenž tvoří smyčku souosou s diskem, na začátku otáčení začne probíhat proud s počáteční hodnotou

$$I_0 = \sigma \frac{\omega B_0}{2} a^2,$$

kde σ je vodivost systému. (Pro jednoduchost předpokládejme, že disk, osa i proužek jsou ze stejného kovu.) Proud však nezůstává konstantní, neboť sám produkuje přídavné magnetické pole h . Toto pole zesiluje nebo zeslabuje primární pole B_0 . Přídavné pole i celkový proud jsou tedy funkcemi času: $h(t)$, $I(t)$. Podle Biotova-Savartova zákona bude proud v čase t vytvářet uvnitř smyčky magnetickou indukci

$$b(t) = \frac{2\pi\mu_0 I(t)}{a}.$$

Potenciálový rozdíl mezi osou otáčení a okrajem disku však není jediným zdrojem proudu. Protože je pole proměnné v čase, mění se magnetický tok plochou ohraničenou spojovacím proužkem a tedy i plochou disku. Přídavná elektromotorická síla je

$$dU = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{db}{dt}.$$

Celkový proud je

$$I(t) = \sigma \frac{\omega a^2}{2} [B_0 + b(t)] - \sigma \pi a^2 \frac{db}{dt}.$$

Je-li uspořádání takové, že se magnetické pole pohybem zesiluje, je po určitém čase možno primární pole B_0 zanedbat proti $b(t)$.

Dosazením vzorečku pro $b(t)$ do poslední rovnice máme po úpravě

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2\sigma\pi a} \left(\sigma a \omega - \frac{1}{\pi\mu_0} \right) b(t).$$

Z toho plyne:

$\frac{db}{dt} > 0$, je-li

$$\sigma a \omega > \frac{1}{\pi\mu_0}.$$

Tento závěr se dá vyložit tak, že zesilování pole samobuzením vyžaduje 1) dostatečně vysokou vodivost materiálu, 2) dostatečně velký rozměr, 3) dostatečně velkou rychlost. Součin těchto tří veličin je totožný s magnetickým Reynoldsovým číslem.

Rovnice pro zemské magnetické dynamo.

- 1) Maxwellovy rovnice pro kvazistacionární pole.
- 2) Ohmův zákon pro vodič v pohybu:

$$\vec{i} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

- 3) Pohybová rovnice Navierova-Stokesova:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} + 2\rho\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v} + \frac{1}{3}\eta\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \rho g + \vec{i} \times \vec{B}.$$

- 4) Rovnice přenosu tepla:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\Delta T - (\vec{v} \cdot \nabla T) + \varepsilon.$$

Koeficient teplotní difuze κ se chápe jako konstanta, ε je hustota tepelných zdrojů. Stavová rovnice:

$$\rho = \rho(p, T, B).$$

Hustota je v tomto případě funkcí i magnetické indukce, protože "zamrzlé" siločáry kontrolují pohyby materiálu a tím i jeho zhušťování a ředění.

- 6) Rovnice kontinuity:

$$\nabla \cdot (\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Často se předpokládá nestlačitelnost kapaliny, čili

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

V tomto případě vymizí také 3. člen na pravé straně Navierovy-Stokesovy rovnice.

Ještě častěji se používá tzv. *Boussinesqovy-Oberbeckovy aproximace* stavové rovnice. Ta je vyjádřena rovnicí

$$\rho = \rho_m - \alpha(T - T_m),$$

kde veličiny označené indexem m znamenají hodnoty průměrné ve vyšetřovaném prostředí a koeficient teplotní roztažnosti α se předpokládá velmi malý. Tato aproximace vede rovněž na výsledek $\nabla \cdot \vec{v} \approx 0$. B. a. se může dosadit přímo do pohybové rovnice. N.-St. r. tím získá tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla p' + \vec{g} \alpha_m T' + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_m} \vec{i} \times \vec{B}.$$

Čárkované veličiny: $p' = p - p_0$, kde p_0 je hydrostatický tlak, a $T' = T - T_{ad}$.

Z Maxwellových rovnic a Ohmova zákona vyplývá známá rovnice magnetické indukce:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta_M \Delta \vec{B} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1)$$

Koeficient

$$\eta_M = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$$

bývá nazýván buď *magnetická difuzivita* podle jeho reálného významu nebo též (zejména dříve) *koeficient magnetické viskozity* podle analogie s pohybovou rovnicí. (Koeficient stojí v obou rovnicích u členu $\Delta \dots$) Rovnice

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

implikuje

$$\frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0.$$

Přitom se předpokládá, že ploška dS mění při pohybu kapaliny svůj tvar i velikost. Důkaz jsme ukázali již dříve. Jiný důkaz je obdobný důkazu Helmholtzovy věty o víru rychlosti. Podle té věty jsou siločáry vektoru $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$ rovněž vázány na pohybující se tekutinu (kapalinu nebo plyn). To, že vír rychlosti cestuje spolu s prostředím, známe z běžné životní praxe. Pro vektor $\vec{\Omega}$ platí stejné rovnice jako pro vektor \vec{B} :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}), \quad \nabla \cdot \vec{\Omega} = 0.$$

V laboratorních podmínkách je děj, při kterém by magnetické siločáry byly do materiálu vmrazeny, těžko uskutečnitelný. *Magnetické Reynoldsovo číslo* $Re_M = \mu_0 \sigma L V$ je

pro takové případy příliš malé. Příklad: Naplníme-li nádobku o char. rozměru $\approx 30 \text{ cm}$ rtutí a vyvoláme v ní tepelnou konvekci v přítomnosti primárního magnetického pole, vůbec nemůže dojít k měřitelným elektromagnetickým dějům. Když totiž pohybem kovu v primárním poli vznikne elektrický proud s příslušným magnetickým polem, difunduje toto pole s relaxační dobou 0,1 sekundy. Za tuto dobu se interakce pole s pohyby nestačí projevit.

Bezrozměrná čísla, charakterizující magnetohydrodynamické procesy v jádře Země.

Kromě Re_m , které se týká chování magnetického pole a je pro zemské jádro pravděpodobně řádu $10 \div 10^2$, bylo definováno několik dalších čísel. Souvisejí s N.-St. rovnicí. Zopakujme ji v Boussinesqově aproximaci:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla p' - 2(\vec{\Omega} \times \vec{V}) + \alpha \vec{g} T' + \frac{1}{\rho_m} (\vec{i} \times \vec{B}) + \nu \Delta \vec{V}. \quad (2)$$

Jednotlivé síly jsou posuzovány vztahem k síle Coriolisově, která má v mechanismu buzení pole evidentně důležitou roli (viz směr dipólu). Sílu *viskózní* se silou Coriolisovou porovnává Ekmanovo číslo

$$E = \frac{\nu}{\Omega L^2}.$$

Setrvačnou sílu se silou Coriolisovou srovnává

Rossbyho číslo

$$Ro = \frac{V}{\Omega L}.$$

(Je to proto, že $\frac{1}{t} = \frac{V}{L}$.)

Pro posouzení vlivu *Lorenzovy* síly bylo zavedeno Elsasserovo číslo

$$El = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega}.$$

(Postup: Lorenzova síla = $\vec{i} \times \vec{B}$, hustota proudu = $\vec{i} = \sigma(\vec{v} \times \vec{B})$)

Odhad hodnot pro jádro:

$$L \approx 3,5 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$v \approx 10^{-4} \text{ m s}^{-1},$$

$$\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$$\nu \in (10^{-6} \div 10^5) \text{ m}^2 \text{ s}^{-1},$$

$$\sigma \in (10^4 \div 10^5) \text{ S m}^{-1},$$

$$\rho \approx 10^4 \text{ kg m}^{-3},$$

$$B \in (5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-2} \text{ T}).$$

Koeficient kinematické viskozity ν je velmi těžko odhadnutelný, prozatím jsou určeny meze oboru, v němž se může pohybovat, v rozpětí 11 řádů. Proto i Ekmanovo číslo je odhadnuto velmi neurčitě:

$E \epsilon (10^{-15} \div 10^{-4})$.

Pro Rossbyho číslo platí

$Ro \approx 10^{-7}$.

Z těchto dvou čísel již je zřejmé, že jak setrvačná, tak viskózní síla jsou zanedbatelné proti síle Coriolisově. Zbývá tedy rovnice

$$\frac{1}{\rho_m} \nabla p' = -2(\vec{\Omega} \times \vec{v}) + \alpha \vec{g} T' + \frac{1}{\rho_m} (\vec{i} \times \vec{B}).$$

Nejprve ponechme stranou Lorenzovu sílu; konvekce bezpochyby může probíhat i bez ní. Vztlkový člen $\alpha \vec{g} T'$ je vzhledem k nepatrným hodnotám koeficientu α a nadadiabatické teploty T' velmi malý oproti Coriolisově síle. V žádném případě jej však nemůžeme zanedbat, protože on právě tvoří sílu, která spouští konvekci. Pokud je totiž $\vec{v} = 0$, je nulový i gradient "nadhydrostatického" tlaku p' . Spouštěcí člen se tedy v rovnici ponechává, aby platila pro počátek děje.

Nyní posuďme vliv Lorenzovy síly. Geometrickým prodloužením multipólového pole z povrchu na CMB máme pro poloidální modus pole \vec{B} odhad $4 \cdot 10^{-4} T$. V takovém případě by pro Elsasserovo číslo platilo $El = (2 \cdot 10^{-3} \div 2 \cdot 10^{-2})$, podle toho, je-li $\sigma = 10^4$ nebo 10^5 . Takovému magnetickému poli v jádře se říká slabé pole. Jeho vliv na proudění se dá proti vlivu Coriolisovy síly s dobrou přesností zanedbat. Gradient tlaku je při slabém poli kompenzován pouze Coriolisovou silou a takovéto proudění je proudění geostrofické. V zemském jádře ovšem můžeme očekávat i jiný modus pole indukce, totiž pole toroidální. To může být silnější než poloidální, ale nemáme přímou možnost jeho velikost zjistit, protože neproniká k zemskému povrchu. Můžeme však odhadnout jeho řád, a to touto úvahou: Existující pole jeví výrazný vliv Coriolisovy síly. Kdyby Lorenzova síla, příslušná toroidálnímu poli, byla silnější než Coriolisova, neexistovala by trvalá blízkost směru rotační a dipólové osy, kterou po většinu času (s výjimkou období změny polarity) pozorujeme. Při nejsilnějším možném vlivu Lorenzovy síly je tedy Elsasserovo číslo rovno jedničce a dohromady pro ně platí $El \epsilon (10^{-3} \div 1)$. Pole, při nichž je $El = 1$, se nazývají silná pole a jim příslušné proudění je magnetostrofické proudění. Toroidální magnetické pole příslušné maximální hodnotě čísla El je řádu $(10^{-3} \div 10^{-2}) T$, opět podle volby řádu elektrické vodivosti.

Proudění kapaliny v zemském jádře se týká ještě Pécletovo číslo Pe . Nesouvisí přímo s magnetickým polem, nýbrž s přenosem tepla. Charakterizuje poměr podílu konvektivního a difuzního členu v rovnici přenosu tepla:

$$Pe = \frac{VL}{\kappa} \approx 3,5 \cdot 10^7.$$

Tam, kde proudění je laminární, tj. L velké (\approx poloměr jádra), je ztráta tepla difuzí zanedbatelná. Ve vrstvách, v nichž dochází k turbulenci, což jsou spíše vrstvy při rozhraních, je L blízké rozměru turbulentní buňky, tedy malé, a tepelná difuze se tam uplatní.

Matematický aparát teorie procesů ve vodivém kapalném jádře
podle W.M. Elsassera (1945).

Předpoklady: $\mu = \text{konst.}$, $\varepsilon = \text{konst.}$, $\sigma = \text{konst.}$, $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$. Zprvu i $\vec{v} = 0$, tedy kapalina v aktuálním stavu bez pohybů, ale s existujícími magnetickými poli a elektrickými proudy. Magnetická indukce se odvozuje z vektorového potenciálu \vec{A} rovnicí

$$\vec{B} = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\phi). \quad (3)$$

Uvažují se vektory \vec{A} , \vec{B} , \vec{E} , \vec{i} .
Dodefinování vektoru \vec{A} :

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

Takto určený vektor \vec{A} je možno k danému magnetickému poli najít, jestliž neuvažujeme možné skalární ani vektorové potenciály, které by měly zdroje mimo uvažovanou oblast (jako např. ϕ v rovnici (3)). Proto $\phi = 0$.

Dosazením potenciálového vyjádření vektoru \vec{B} do 2. Maxwellovy rovnice $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ vyjde

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Dosazením vektorového potenciálu \vec{A} do Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times \vec{B} - \mu\sigma\vec{E} = 0$$

vyjde

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

a konečně

$$\Delta \vec{A} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Jestliže byl ve vodivém prostředí v určitém čase vyvolán systém proudů a není udržován, dojde k difuzi všech uvažovaných polí. Budou slábnout exponenciálně:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-\lambda t},$$

a (4) tedy přejde v

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0, \quad (5)$$

kde

$$k^2 = \mu\sigma\lambda.$$

To je Helmholtzova rovnice. Řeší se zavedením skalární vytvořující funkce ψ , pro kterou platí

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0. \quad (6)$$

Vektor \vec{A} můžeme dostat jako

1) $\vec{U} = -\nabla\psi$. To je tzv. *skaloidální* vektor. Pro tento účel se nehodí, protože $\nabla \times \vec{U} = 0$.

2) $\vec{T} = \nabla \times (\vec{r}\psi)$. To je vektor *toroidální*. Proti němu není námitek.

3) $\vec{S} = R\nabla \times \vec{T} = R\nabla \times \nabla \times (\vec{r}\psi)$. Vektor *poloidální*. Hodí se rovněž, protože v tomto

případě nejsou dány podmínky pro jeho směr, jak tomu bylo v případě zemského pláště. (V plášti se předpokládalo, že $\sigma = \sigma(r)$, kdežto v jádře $\sigma = konst.$)

Konstanta R má rozměr délky. Zavádí se z rozměrových důvodů: Je třeba, aby veličiny \vec{S} a \vec{T} měly stejný rozměr.

Vztah mezi vektory \vec{T} a \vec{S} :

$$\nabla \times \vec{S} = R \nabla \times \nabla \times \vec{T} = R \nabla \nabla \cdot \vec{T} - R \Delta \vec{T} \Rightarrow \nabla \times \vec{S} = -R \Delta \vec{T},$$
 protože $\nabla \cdot \vec{T} = 0$. Podle (5) je $\Delta \vec{T} = -k^2 \vec{T}$, takže $\nabla \times \vec{S} = Rk^2 \vec{T}$. Platí tedy:

$$\vec{S} = R \nabla \times \vec{T}, \quad \vec{T} = \frac{1}{Rk^2} \nabla \times \vec{S}.$$

Platí rovněž

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{i} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B}.$$

Je-li vektorový potenciál \vec{A} poloidální, je pole \vec{B} toroidální a proudy \vec{i} poloidální a *vice versa*.

Řešení rovnice (6):

$$\psi = \sum_{n,m} \psi_n^m, \quad \psi_n^m = konst \cdot r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n r) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos \phi \\ \sin \phi \end{cases}.$$

Běžně se používá této konvence:

$$\psi_n^{m_c} = R_n P_n^m \cos m\phi, \quad \psi_n^{m_s} = R_n P_n^m \sin m\phi.$$

Odtud též $T_n^{m_c}$, $S_n^{m_s}$ atd.

Elsasser se pokoušel řešit soustavu rovnic (1), (2), (3), (5) s cílem najít systém pohybů, který by byl schopen udržet pole. Teoreticky se to nepodařilo. Bullard proto navrhl model dvou pravděpodobných systémů pohybů v jádře, totiž diferenciální rotace a konvekce. a snažil se nalézt způsob, jak tyto pohyby postupně zesilují původní slabé homogenní pole, rovnoběžné s rotační osou, až se posléze dospěje k aktuálnímu poli. Byl to jen myšlenkový pokus a autor sám netrval na jeho reálnosti.

Bullardem předpokládané pohyby jsou však dosud pokládány za věrohodné. *Diferenciální rotace* je důsledek zachování momentu hybnosti při stoupání částice: $m\vec{r} \times \vec{v} = konst.$ Roste-li r , musí klesat v . Kapalina rotuje tím pomaleji, čím více se vzdálila ode dna. Jednotlivé vrstvy kapaliny rotují diferencovaně. Tento pohyb se dá popsat toroidálním polem T_1^0 . *Konvekce* se v důsledku diferenciální rotace odehrává formou konvekčních buněk, jež se podle Bullarda dají přibližně popsat několika mody polí S_2 .

Pojem *vmraženosti siločar* usnadňuje představu, jak z dipólového nebo homogenního magnetického pole vzniká pole toroidální: Kapalina dipólovou siločáru "vytahuje" a unáší, až se vytvoří útvar, obepínající celou rovnoběžku. Takto vzniklé magnetické pole se dá popsat vektorovým polem T_2^0 . (Na jižní polokouli má opačný směr než na severní.) Této představě se říká ω - efekt. Jím je popsáno, jak se energie poloidálního pole přenáší do pole toroidálního. Zpětný přenos energie se již nedá tak názorně vysvětlit. Uspokojivě se to podařilo až v 70. letech teorií tzv. α - efektu.

Úvaha o energetické bilanci magnetického pole

Vrátíme se ještě k pracím W.M.Elsassera. Ukázal, že teoretické výpočty modelu rychlostí v jádře nevedou k cíli, ale předložil zajímavou úvahu o energetické bilanci interakce pohybů a pole v zemském jádře:

Uvažuje se koule naplněná vodivou kapalinou. V ní pohyby, rychlostní pole \vec{v} . Elektromagnetické pole s vektory \vec{B} , \vec{E} , \vec{i} . Konstantní vodivost σ . Platí rovnice

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{i}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{i} = \sigma[\vec{E} + \gamma(\vec{v} \times \vec{B})].$$

Pole \vec{v} popisuje geometricky systém pohybů, číselný faktor γ udává velikost rychlostí.

Vezměme dva systémy proudů a odpovídajících polí:

$$\vec{i} \dots \vec{B}, \quad \vec{i}' \dots \vec{B}'.$$

Ohmův zákon vyjádřený pro proud prvního systému vynásobme skalárně proudem druhého systému:

$$\frac{1}{\sigma} \int_T (\vec{i} \cdot \vec{i}') d\tau = \int_T (\vec{E} \cdot \vec{i}') d\tau + \gamma \int_T [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{i}'] d\tau. \quad (7)$$

Zde T je celý prostor. Počátek souřadnic budiž uprostřed uvažované koule. Prostor ohraničený povrchem koule budeme značit K . Mimo kouli je $\sigma = 0$ a tedy $i = 0$ a $i' = 0$. Úprava rovnice (7):

$$\int_T (\vec{E} \cdot \vec{i}') d\tau = \frac{1}{\mu} \int_T (\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B}') d\tau.$$

Platí:

$$\nabla \cdot (\vec{B}' \times \vec{E}) = (\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B}') - (\vec{B}' \cdot \nabla \times \vec{E}),$$

takže

$$\int_T (\vec{E} \cdot \vec{i}') d\tau = \frac{1}{\mu} \int_T \nabla \cdot (\vec{B}' \times \vec{E}) d\tau + \frac{1}{\mu} \int_T (\vec{B}' \cdot \nabla \times \vec{E}) d\tau.$$

V těch členech rovnice (7), které obsahují proudy, má smysl integrovat pouze přes objem K . Rovnice (7) přechází v rovnici

$$\frac{1}{\sigma} \int_K (\vec{i} \cdot \vec{i}') d\tau = \int_T \nabla \cdot (\vec{B}' \times \vec{E}) d\tau + \frac{1}{\mu} \int_T (\vec{B}' \cdot \nabla \times \vec{E}) d\tau + \gamma \int_K [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{i}'] d\tau. \quad (8)$$

První člen pravé strany je nulový. Představme si to takto: Integrujeme nejprve přes konečnou kouli a integrál upravíme podle Gaussovy věty. Potom necháme rozměr koule vzrůstat do nekonečna. Oba vektory, \vec{B}' i \vec{E} a stejně tak i jejich součin v nekonečnu vymizí. Do druhého členu pravé strany dosadíme podle M. rovnice za $\nabla \times \vec{E}$. Z rovnice (8) dostaneme

$$\frac{1}{\sigma} \int_K (\vec{i} \cdot \vec{i}') d\tau = -\frac{1}{\mu} \int_T \left(\vec{B}' \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\tau + \gamma \int_K [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{i}'] d\tau. \quad (9)$$

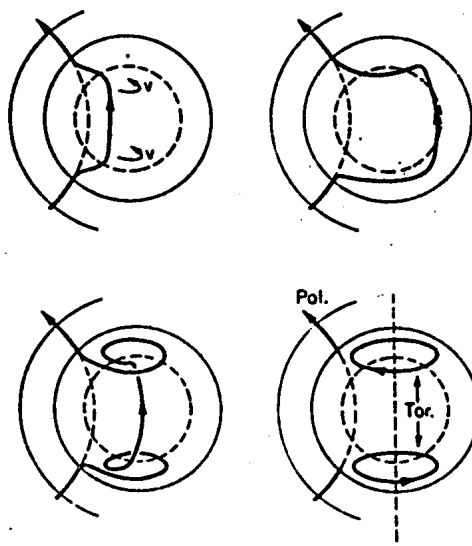
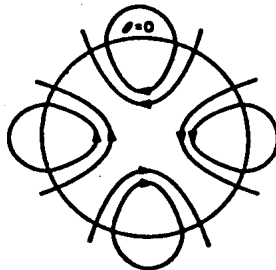
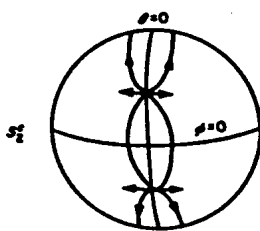
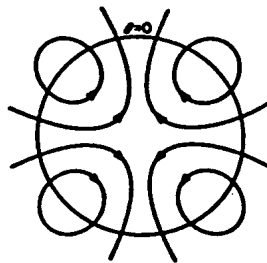
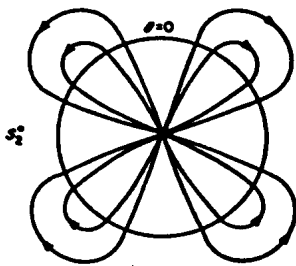
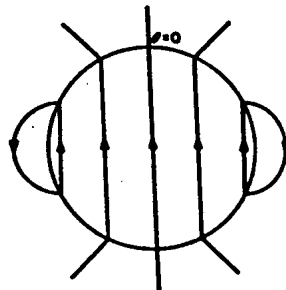
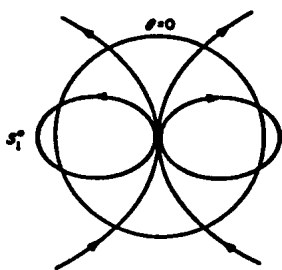
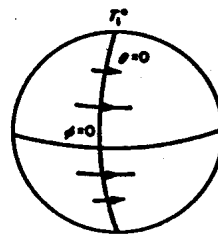


FIG. 6.3. Generation of a toroidal field in a non-uniformly rotating sphere (after W. M. Elsasser).

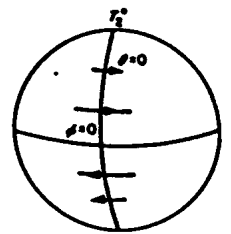


(a)

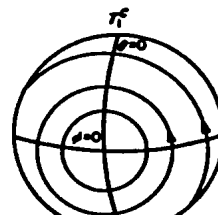
Fig. 6.1. Examples of (a) poloidal fields and (b) toroidal fields. Superscripts *c* and *s* respectively stand for cosine and sine and indicate that part of the ϕ component in the surface harmonic ψ_r^c that is retained. (After Bullard, 1949a.)



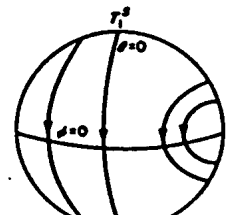
$$\begin{aligned} \psi_1 &= f(\gamma) \cos \theta \\ T_r &= 0 \\ T_\theta &= 0 \\ T_\phi &= R \sin \theta \end{aligned}$$



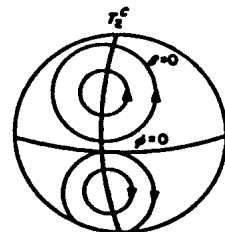
$$\begin{aligned} \psi_2 &= f(\gamma) \cos^2 \theta - 1 \\ T_r &= 0 \\ T_\theta &= 0 \\ T_\phi &= \frac{1}{2} R \sin 2\theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \psi_1 &= f(\gamma) \sin \theta \cos \phi \\ T_r &= 0 \\ T_\theta &= R \sin \phi \\ T_\phi &= R \cos \theta \cos \phi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \psi_1 &= f(\gamma) \sin \theta \sin \phi \\ T_r &= 0 \\ T_\theta &= R \cos \phi \\ T_\phi &= -R \cos \theta \sin \phi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{1}{2} f(\gamma) \sin 2\theta \cos \phi \\ T_r &= 0 \\ T_\theta &= -\frac{1}{2} R \cos \theta \sin \phi \\ T_\phi &= -\frac{1}{2} R \cos 2\theta \cos \phi \end{aligned}$$

(b)

Nyní můžeme položit $\vec{i}' = \vec{i}$ a rovnice (9) přejde v

$$\frac{1}{\mu} \int_T \left(\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\tau = \gamma \int_K [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{i}] d\tau - \frac{1}{\sigma} \int_K i^2 d\tau.$$

Po úpravě máme konečně rovnici energie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_T \frac{B^2}{2\mu} d\tau = - \int_K [\vec{v} \cdot (\vec{i} \times \vec{B})] d\tau - \frac{1}{\sigma} \int_K i^2 d\tau. \quad (10)$$

Člen na levé straně této rovnice znamená změnu energie magnetického pole v celém prostoru. (Jde o pole, vznikající uvnitř uvažované koule.) První integrál pravé strany je výkon Lorenzovy síly uvnitř koule, druhý člen znamená rozptyl energie pole elektrickým proudem, tedy teplem. Všechny tři vektory, tj. \vec{v} , \vec{B} a \vec{i} se v čase mění. Lze si představit omezený časový úsek, ve kterém je pravá strana rovnice kladná. Nelze však tímto způsobem určit vektory jako funkce času.

Cowlingův teorém.

T.G.Cowling publikoval v roce 1934 studii o dřívější práci J. Larmora (1919), v níž byla předložena hypotéza o vzniku magnetických polí slunečních skvrn dynamovým mechanismem. Cowling při této příležitosti zkoumal poloidální magnetická pole symetrická kolem osy a ukázal, že takováto pole se dynamovým mechanismem nemohou udržet. Tento výsledek je znám jako Cowlingův teorém.

Postup úvahy je ve stručnosti tento: Představme si osově symetrické stacionární magnetické pole, udržované libovolným systémem pohybů. Magnetické pole můžeme rozložit na pole poledníkové B_p a azimutální B_ϕ :

$$\vec{B} = B_\phi \vec{e}_\phi + \vec{B}_p,$$

kde

$$\vec{B}_p = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$$

je průmět pole do rovin poledníků. Azimutální složka necht' je taková, že osová symetrie pole je zachována. V bodech, do kterých se siločáry "scvrkávají", existuje jen azimutální složka. Křivku, která prochází těmito body, označme C .

Ohmův zákon:

$$\frac{\vec{i}}{\sigma} = \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Integrujme tuto rovnici podél uzavřené křivky C :

$$\oint_C \left(\frac{\vec{i}}{\sigma} \cdot d\vec{s} \right) = \oint_C (\vec{E} \cdot d\vec{s}) + \oint_C [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}].$$

Má-li pole existovat, musí je udržovat proud \vec{i} . Člen na levé straně rovnice tedy musí být nenulový. Pro stacionární proud platí

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

První člen pravé strany se dá přetvořit:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Tento člen je však, jak jsme si řekli, ve stacionárním poli nulový. Druhý člen pravé strany je rovněž nulový, protože $\vec{B} \parallel d\vec{s}$. Tím se dochází ke sporu, což je důkaz Cowlingova teorému.

Je řada způsobů, jak dokázat, že magnetické pole může být v zemském jádře generováno a udržováno i při platnosti Cowlingova teorému.

Např. ruský geofyzik *S.I. Braginskij* řešil úspěšně modely s malými odchylkami od symetrie. Implicitně se problém antidynama překonává také v teorii středních polí, vedoucí na tzv. α efekt. Tato teorie předpokládá malorozměrové poruchy velkorozměrových rychlostních a tím i magnetických polí. Současně řeší obtížný problém převodu energie mezi jednotlivými typy polí.

Teorie středních polí.

(Autoři *F.Krause, K.H.Rädler, M.Steenbeck*, první práce vyšla v Berlíně 1961.)

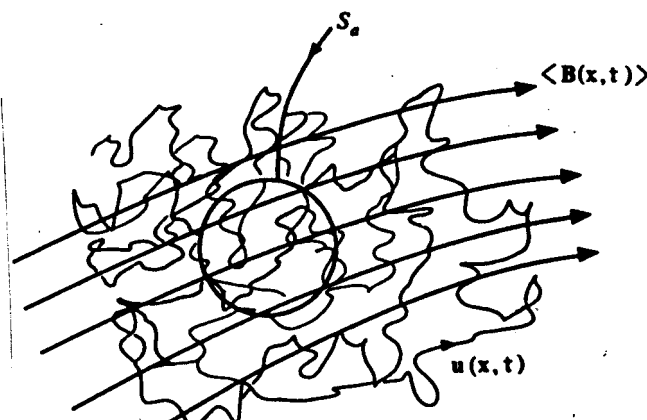
Základní předpoklady: Kapalné kontinuum s dostatečně vysokou elektrickou vodivostí. V rychlostech musí existovat dvouměřítková situace:

- 1) Velkorozměrové pohyby - vůči těm druhým téměř homogenní. Char. rozměr: L .
- 2) Malorozměrové pohyby - např. turbulence. Char. rozměr l .

Musí platit

$$l \ll a \ll L,$$

kde a je poloměr koule, v níž se studují malorozměrová pole.



Na přesné volbě a nezáleží, pokud je nerovnost splněna. Vznik turbulentních pohybů

podmiňuje vznik turbulentních elektromagnetických sil a malorozměrových magnetických polí. Výpočty se obvykle konají jen do 1. a 2. řádu; při vyšších řádech už je to velmi složité.

Malorozměrové pole rychlostí můžeme chápat jako poruchu velkorozměrového pole. Může vzniknout nejen turbulencí, ale např. také superpozicí vlnových pohybů. Souvisí to mj. s existencí nebo neexistencí zvrstvení jádra, a to zase souvisí s gradientem teploty. Je-li nižší než gradient adiabatický, nedojde ke konvekci a částice kmitají kolem svých rovnovážných poloh. Rozruchy, které vznikly na ICB nebo CMB se v takovém prostředí šíří jako vlny v kapalině. Ty rozruchy: Na ICB může přituhnout část železa a lehčí částice materiálu je vypuzena směrem vzhůru. Na CMB se může usadit část hmoty z pláště obohacená železem (snad jako pokračování diferenciacce) a má tendenci klesnout. - Jestliže gradient teploty je prudší než adiabatický, hmota je ve vyšších vrstvách těžší než ve spodních a dojde ke konvekci. Ta však nemusí být hladká. Události na rozhraních mohou vyvolávat turbulentní pohyby.

Odvození rovnic pro střední pole.

Rozměr L ... rychlost \vec{U} ... magn. pole \vec{B} .

Rozměr l ... rychlost \vec{u} ... magn. pole \vec{b} .

Pojem "střední hodnota".

$$\overline{\psi(x,t)} = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\xi| < a} \psi(x + \xi, t) (d\xi)^3.$$

Střední pole budeme značit $\bar{\psi}$, odchylky ψ' . Celkové pole

$$\psi = \bar{\psi} + \psi'.$$

Reynoldsova pravidla

pro počítání se středními poli:

Máme dvě funkce, obě můžeme rozdělit na střední hodnotu a odchylku.

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \quad \phi = \bar{\phi} + \phi'.$$

Pravidla:

$$\overline{\bar{\psi}} = \bar{\psi}, \quad \overline{\psi'} = 0, \quad \overline{\psi + \phi} = \bar{\psi} + \bar{\phi}, \quad \overline{\psi\phi} = \bar{\psi}\bar{\phi},$$

$$\overline{\psi'\phi} = 0, \quad \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}},$$

kde x je libovolná skalární prostorová proměnná.

Aplikace na pole v zemském jádře:

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{u}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$$

Rovnice magnetické indukce:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{U} \times B) + \lambda \Delta \vec{B}, \quad (11)$$

kde $\lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$. Vektorová pole v této rovnici rozdělíme na střední pole a odchylky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{U}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\vec{U}_0 \times \vec{b}) + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) + \\ + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{b}) + \lambda \Delta \vec{B}_0 + \lambda \Delta \vec{b}. \end{aligned} \quad (12)$$

Tuto rovnici vystředíme:

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\vec{U}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times \overline{(\vec{u} \times \vec{b})} + \lambda \Delta \vec{B}_0. \quad (13)$$

Vystředěnou rovnici odečteme od původní rovnice (12) a dostaneme

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{U}_0 \times \vec{b}) + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{b}) - \nabla \times \overline{(\vec{u} \times \vec{b})} + \lambda \Delta \vec{b}. \quad (14)$$

Zavedeme:

$$\vec{\epsilon} = \overline{\vec{u} \times \vec{b}}, \quad (15)$$

$$\vec{G} = \vec{u} \times \vec{b} - \overline{\vec{u} \times \vec{b}}. \quad (16)$$

Získali jsme nové rovnice pro pole \vec{B}_0 a \vec{b} :

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\vec{U}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times \vec{\epsilon} + \lambda \Delta \vec{B}_0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{U}_0 \times \vec{b}) + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) + \nabla \times \vec{G} + \lambda \Delta \vec{b}. \quad (18)$$

Důležitý prvek, který vzešel z těchto výpočtů, je veličina $\vec{\epsilon}$. Z rovnice (17) je vidět, že je to elektromotorická síla. Podle rovnice (15) závisí na veličinách \vec{u} a \vec{b} , její složky jsou úměrné složkám vektoru \vec{b} .

Malorozměrové magnetické pole \vec{b} vznikne vlivem vzniku malorozměrového pole rychlostí \vec{u} . Počáteční stav pro pole \vec{b} :

$$t = 0 \Rightarrow \vec{b} = 0; \quad \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}_0).$$

(Rovnice (18).) Pole \vec{B}_0 je tedy zdrojový člen pro vznik pole \vec{b} . V následujícím čase přistupují do rovnice (18) členy, obsahující složky vektoru \vec{b} v 1. stupni. Ve všech časech je proto mezi složkami \vec{b} a \vec{B}_0 lineární vztah. Vztah mezi složkami $\vec{\epsilon}$ a \vec{b} je rovněž lineární. Z toho plyne, že musí existovat lineární vztah i mezi jednotlivými složkami vektorů $\vec{\epsilon}$ a \vec{B}_0 .

Pole \vec{B}_0 je oproti poli \vec{b} dostatečně hladké, jeho prostorové derivace budou malé. Lineární závislost složek $\vec{\epsilon}$ na složkách \vec{B}_0 můžeme proto vyjádřit Taylorovým rozvojem s malým počtem členů:

$$\epsilon_i = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \frac{\partial B_{0j}}{\partial x_k} + \dots \quad (19)$$

Dosad'me za $\vec{\epsilon}$ do rovnice (17):

$$\frac{\partial B_{0i}}{\partial t} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} U_{0l} B_{0m} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_{kl} B_{0l} + \beta_{klm} \frac{\partial B_l}{\partial x_m} + \dots \right) + \lambda \Delta B_{0i}. \quad (20)$$

Je-li poruchové pole izotropní, platí

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} \alpha.$$

Člen obsahující α v rovnici (20) se v tomto případě dá přepsat:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha \delta_{kl} B_{0l}) = \alpha \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} B_{0k} = \alpha \text{rot}_i \vec{B}_0.$$

Rovnice (20) nyní zní

$$\frac{\partial B_{0i}}{\partial t} = \text{rot}_i (\vec{U}_0 \times \vec{B}_0) + \alpha \text{rot}_i \vec{B}_0 + \dots + \lambda B_{0i}.$$

Její první přiblížení ve vektorovém tvaru je:

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \left[(\vec{U}_0 \times \vec{B}_0) + \alpha \vec{B}_0 \right] + \lambda \Delta \vec{B}_0. \quad (21)$$

Tento případ izotropního poruchového pole je důležitý pro fungování dynama. Do rovnice indukce pro střední pole \vec{B}_0 přibyla nová elektromotorická síla $\alpha \vec{B}_0$, jež má směr středního pole. Stejný směr bude tedy mít i proud vyvolaný touto elektromotorickou silou:

$$\vec{i}^{(1)} = \sigma \vec{\epsilon}^{(1)} \parallel \vec{B}_0. \quad (22)$$

Horním indexem (1) označujeme, že jde o první přiblížení. Koeficient α , použitý v rovnici (18), dal jméno této zajímavé teorii.

19

α - efekt

je tedy popis děje, při kterém podle teorie středních polí může vznikat proud stejného směru jako dané střední pole. Tak se mohou z toroidálních polí vytvářet pole poloidální a obráceně. Pro zajímavost si povšimněme ještě druhého extrému: Necht' je poruchové pole maximálně anizotropní (zrcadlově symetrické). V tomto případě je koeficient α anti-symetrický tenzor a platí pro něj

$$\alpha_{ij} = -\varepsilon_{ijk} a_k,$$

kde

$$a_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \alpha_{ij}.$$

Člen obsahující α v rovnici (20) se pak přepíše takto:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_{kl} B_{0l}) = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{klm} a_m B_{0l}) = \text{rot}_i (\vec{a} \times \vec{B}_0).$$

První přiblížení rovnice (20) je v tomto antisymetrickém případě

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times [(\vec{U}_0 + \vec{a}) \times \vec{B}_0] + \lambda \vec{B}_0.$$

Elektromotorická síla se nezměnila, ale zvětšila se rychlost.

Účinek koeficientu β , tj. druhé přiblížení:

Koeficient β se vyskytuje v tomto členu rovnice (20):

$$\epsilon^{(2)} = \beta_{ijk} \frac{\partial B_{0j}}{\partial k}.$$

Je-li pole izotropní, je

$$\beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}.$$

Proto

$$\epsilon_i^{(2)} = -\beta \text{rot}_i \vec{B}_0 = -\beta \mu i_{0i}.$$

Dále se dá psát:

$$\vec{\epsilon}^{(1+2)} = \alpha \vec{B}_0 - \beta \nabla \times \vec{B}_0.$$

Rovnice (20) má v druhém přiblížení symetrického uspořádání poruchového pole tvar

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times [(\vec{U}_0 \times \vec{B}_0) + \alpha \vec{B}_0] + (\beta + \lambda) \Delta \vec{B}_0.$$

Koeficient β tedy ovlivňuje rychlost difuze pole. (Byl počítán pro některé modely polí. Většinou vyšel kladný, ale v určitých extrémních případech též záporný.)

Jak se koeficienty α a β počítají: Musí se sestrojít model \vec{B}_0 a \vec{u} . Z rovnice (18) se potom spočítá pole \vec{b} a odtud

$$\vec{\epsilon} = \overline{\vec{u} \times \vec{b}} = \alpha \vec{B}_0$$

a obdobně pro koeficient β .

Teorie středních polí se vyhýbá překážce Cowlingova "antidynama" tím, že předpokládá nepravidelná poruchová pole, a zároveň ukazuje možnost převodu energie mezi poloidálními a toroidálními typy polí. Rozeznávají se dva typy dynam:

- 1) Dynamo $\alpha - \omega$, tj. takové, ve kterém se energie přenáší z pole poloidálního do toroidálního $\omega - \epsilon$ efektem a v obráceném směru $\alpha - \epsilon$ efektem,
- 2) dynamo $\alpha - \alpha$, tj. takové, kde se přenos v obou směrech děje $\alpha - \epsilon$ efektem.

Vlny v plazmatu

Matematické diskuse vlnového pohybu vesměs vycházejí z rovnovážného stavu; ten je v určitém místě a čase mírně porušen a porucha se potom šíří jako vlna. Výchozí rovnice jsou linearizovány a předpokládá se, že poruchové veličiny se šíří ve tvaru

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Postup, který sledujeme, byl odvozen pro vlny na Slunci, má však i obecnější platnost.

Výchozí rovnice.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + (\nabla \times \vec{B}) \times \frac{\vec{B}}{\mu} - \rho g \hat{z} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v}. \quad (2)$$

Stavová rovnice podle situace; my budeme nyní v zájmu návaznosti aparátu sledovat výklad pro Slunce, použijeme tedy rovnici pro adiabatický děj v plynu:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (3)$$

Rovnice magnetického pole:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{j} = \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu}. \quad (6)$$

Označení \hat{z} znamená jednotkový vektor ve směru vnější normály. Veličina γ je Poissonova konstanta.

Uvažujme malé odchylky od rovnovážného stavu:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \vec{v} = \vec{v}_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1.$$

Rovnice (1) až (5) linearizujeme: zanedbáme čtverce a součiny malých veličin (označených subskriptem 1):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 + \rho_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1) = 0, \quad (7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + (\nabla \times \vec{B}_1) \times \frac{\vec{B}_0}{\mu} - \rho_1 g \hat{z} - 2\rho_0 \vec{\Omega} \times \vec{v}_1, \quad (8)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) p_0 - c_s^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \rho_0 \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0), \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0, \quad (11)$$

kde

$$c_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (12)$$

je rychlost zvuku. (Rovnici (9) jsme dostali z (3).)

Odhadneme ještě charakteristický rozměr: Předpokládejme, že rovnovážný tlak je hydrostatický a splňuje proto vztah

$$0 = -\frac{dp_0}{dz} + \rho_0 g.$$

Odtud plyne pro charakteristický rozměr

$$\Lambda = \frac{p_0}{\rho_0 g}. \quad (13)$$

Pro usnadnění dalšího postupu budeme pokládat gravitační zrychlení v uvažovaném prostoru za konstantu.

Za rovnovážné magnetické pole \vec{B}_0 zvolme pole homogenní. Rovnice (7) až (11) se dají převést na jedinou rovnici: Rovnici (8) zderivujeme podle času a z ostatních rovnic soustavy do ní dosadíme za

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Po úpravách vyjde

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{v}_1) - (\gamma - 1) g \hat{z} (\nabla \cdot \vec{v}_1) - g \nabla v_{1z} - 2\Omega \times \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + [\nabla \times (\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0))] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu \rho_0}. \quad (14)$$

Předpokládáme-li šíření rovinné vlny ve tvaru

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

můžeme nahradit derivaci $\frac{\partial}{\partial t}$ násobením $-i\omega$ a operaci ∇ násobením $i\vec{k}$.

Pokud je $\vec{B}_0 = 0$, přejde (14) v rovnici s konstantními koeficienty

$$\omega^2 \vec{v}_1 = c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(\gamma - 1) g \hat{z} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i g \vec{k} v_{1z} - 2i\omega \vec{\Omega} \times \vec{v}_1. \quad (15)$$

Pokud ovšem není $\vec{B}_0 = 0$, přistupuje další člen - magnetický, a ten nemá konstantní koeficient, neboť hustota ρ_0 závisí na souřadnici z . Pokud však vlnová délka $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ je malá ve srovnání s charakteristickou délkou $\Lambda = \frac{p_0}{\rho_0 g}$, je možno pokládat ρ_0 za lokálně konstantní. Dostaneme rovnici s konstantními koeficienty

$$\omega^2 \vec{v}_1 = c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i(\gamma - 1) g \hat{z} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + i g \vec{k} v_{1z} - 2i\omega \vec{\Omega} \times \vec{v}_1 + [\vec{k} \times (\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0))] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu \rho_0}. \quad (16)$$

Rovnice (15) a (16) mohou být použity pro diskusi několika typů vln: zvukových, magnetických, inerciálních a gravitačních.

VSUVKA

Odvození rovnice (14).

Předpokládá se, že před nástupem poruch existuje homogenní magnetické pole \vec{B}_0 , prostupující vertikálně zvrstvené plazma. Rozložení rovnovážného hydrostatického tlaku a jemu příslušející hustoty se dají popsat vzorci

$$\rho_0(z) = \text{const.} e^{-\frac{z}{\Lambda}}, \quad p_0(z) = \text{const.} e^{-\frac{z}{\Lambda}}. \quad (17)$$

Veličina Λ je určena vzorcem (13), jenž plyne z rovnice hydrostatického tlaku. Protože rychlost \vec{v}_1 vznikla jako důsledek poruchy rovnovážného stavu, nemusíme uvažovat žádnou jinou rychlost a budeme v dalším místo \vec{v}_1 psát jednoduše \vec{v} . Derivací (8) podle času dostaneme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \right) \times \frac{\vec{B}_0}{\mu} - \frac{\partial \rho_1}{\partial t} g \hat{z} - 2\rho_0 \vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Dosazením za $\frac{\partial p_1}{\partial t}$ z rovnice (9) a za $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ z rovnice (10) máme

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = & -\nabla \left[c_s^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho_0 \right) - \vec{v} \cdot \nabla p_0 \right] + \left[\nabla \times (\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)) \right] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu} - \frac{\partial \rho_1}{\partial t} g \hat{z} - \\ & - 2\rho_0 \vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dosadíme dále za $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$ z rovnice (7):

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = & -\nabla \left[c_s^2 (-\vec{v} \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho_0) - \vec{v} \cdot \nabla p_0 \right] + \left[\nabla \times (\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)) \right] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu} + \\ & + g \hat{z} (\vec{v} \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 (\nabla \cdot \vec{v})) - 2\rho_0 \vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Gradientsy funkcí p_0 , ρ_0 mají pouze z-složku. Proto další úpravou získáme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = & + \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla (\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{\rho_0} \nabla \left(v_z \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) + \left[\nabla \times (\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)) \right] \times \frac{B_0}{\mu} + \frac{g}{\rho_0} \hat{z} \left(v_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} \right) - \\ & - 2\vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Podle rovnic (13) a (12) platí

$$\frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\rho_0 g}{\rho_0} \hat{z}, \quad c_s^2 \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} = -\gamma g \hat{z}.$$

Při hydrostatickém tlaku je proto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = & \frac{1}{\rho_0} [c_s^2 (\nabla \cdot \vec{v}) \nabla \rho_0 + c_s^2 \rho_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{v})] + \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial p_0}{\partial z} \nabla v_z + v_z g \nabla \rho_0 \right] + \frac{g}{\rho_0} \hat{z} v_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + g \hat{z} (\nabla \cdot \vec{v}) + \\ & + \left[\nabla \times (\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)) \right] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu \rho_0} - 2\vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \end{aligned}$$

dále

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = & c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla \cdot \vec{v}) \left[c_s^2 \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} + g \hat{z} \right] - \frac{g^2 v_z \gamma}{c_s^2} \hat{z} + \\ & + \frac{1}{\rho_0} [\rho_0 g \nabla v_z + v_z g \nabla \rho_0] + [\dots] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu \rho_0} - \left(2\vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

a protože

$$\frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} = \frac{g \gamma}{c_s^2} \hat{z},$$

je konečně

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - (\gamma - 1) g \hat{z} (\nabla \cdot \vec{v}) - g \nabla v_z + \left[\nabla \times (\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)) \right] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu \rho_0} - 2\vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

To je rovnice (14).

Vraťme se nyní k **rovnici (16)**:

Tato rovnice podobně jako (15) reprezentuje 3 skalární rovnice pro poruchovou rychlost \vec{v} . Koeficienty těchto rovnic se v praxi obvykle hledají rozličnými vektorovými operacemi (nikoli pomocí determinantu).

Fázová rychlost šíření vlny je

$$\vec{v}_p = (\omega/k) \hat{k},$$

složky grupové rychlost jsou

$$v_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \quad v_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \quad v_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z}.$$

Zvukové vlny.

Jestliže v rovnici (16) je $g = B_0 = \Omega = 0$, zbývá z rovnice (16) jen

$$\omega^2 \vec{v} = c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}). \quad (18)$$

(Člen na pravé straně odpovídá gradientu tlaku v původní rovnici (8).) Rovnici (18) vynásobíme skalárně vektorem \vec{k} . Za předpokladu, že $\vec{k} \cdot \vec{v} \neq 0$ (tj., že prostředí není nestlačitelné), vyplývá z rovnice (18)

$$\omega^2 = k^2 c_s^2.$$

Disperzní rovnice je tedy

$$\omega = k c_s.$$

Fázová a grupová rychlost jsou

$$v_p \left(\equiv \frac{\omega}{k} \right) = c_s, \quad v_g \left(\equiv \frac{d\omega}{dk} \right) = c_s$$

ve směru \vec{k} .

Jde o zvukové vlny. Mohou existovat díky tomu, že prostředí je stlačitelné ($\vec{k} \cdot \vec{v} \equiv \nabla \cdot \vec{v} \neq 0$). Jsou to vlny *podélné*, neboť podle rovnice (18) je směr šíření totožný se směrem poruchové rychlosti.

Magnetické vlny.

Jestliže v rovnici (16) převládá magnetická síla, platí

$$\omega^2 \vec{v} = [\vec{k} \times (\vec{k} \times (\vec{v} \times \vec{B}_0))] \times \frac{\vec{B}_0}{\mu \rho_0}.$$

Výraz

$$\frac{B_0}{(\mu \rho_0)^{1/2}}$$

dostal název *Alfvénova rychlost*, budeme jej značit v_A . Rovnici poruchové rychlosti můžeme psát takto:

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \vec{v} = [\vec{k} \times (\vec{k} \times (\vec{v} \times \hat{B}_0))] \times \hat{B}_0, \quad (19)$$

kde \hat{B}_0 je jednotkový vektor. Rozepíšeme pravou stranu:

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \vec{v} = -\hat{B}_0 \times [\vec{k} \times (\vec{v}(\vec{k} \cdot \hat{B}_0) - \hat{B}_0(\vec{k} \cdot \vec{v}))]$$

a dále

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \vec{v} = (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)^2 \vec{v} - (\vec{k} \cdot \vec{v})(\vec{k} \cdot \hat{B}_0) \hat{B}_0 + [(\vec{k} \cdot \vec{v}) - (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)(\hat{B}_0 \cdot \vec{v})] \vec{k}.$$

Úhel mezi rovnovážným polem \vec{B}_0 a směrem šíření \vec{k} budiž θ_B . Potom

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} \vec{v} = k^2 \cos^2 \theta_B \vec{v} - (\vec{k} \cdot \vec{v}) k \cos \theta_B \hat{B}_0 + [(\vec{k} \cdot \vec{v}) - k \cos \theta_B (\hat{B}_0 \cdot \vec{v})] \vec{k}. \quad (20)$$

Magnetické vlny mají tyto vlastnosti:

1) $\text{div} \vec{B}_1 = 0$, tedy $\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0$, takže poruchy magnetického pole jsou kolmé na směr šíření vlny.

2) Vynásobením (19) skalárně vektorem \hat{B}_0 , dostáváme

$$\hat{B}_0 \cdot \vec{v} = 0, \quad (21)$$

takže poruchová rychlost je kolmá na rovnovážné pole.

3) Násobíme-li rovnici (19) skalárně vektorem \vec{k} , dostaneme

$$\zeta \quad (\omega^2 - k^2 v_A^2) (\vec{k} \cdot \vec{v}) = 0. \quad (22)$$

Rovnice (22) má dvojí interpretaci, a to podle toho, jde-li o prostředí stlačitelné nebo nestlačitelné.

Prostředí nestlačitelné - střížné Alfvénovy vlny. Zde platí

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = 0. \quad (23)$$

O disperzní rovnici nemůžeme soudit podle rovnice (22). Je nutno se vrátit k rovnici (20): z ní plyne s přihlédnutím k (21) a (23):

$$\omega = k v_A \cos \theta_B. \quad (24)$$

(Kladná odmocnina náleží k vlnám, které se šíří ve směru pole \vec{B}_0 , záporná odmocnina odpovídá vlnám šířící se ve směru opačném.) *Fázová rychlost* těchto vln je $v_A \cos \theta_B$. Ve směru magnetického pole B_0 , se šíří fázovou rychlostí v_A . (Odtud označení veličiny.) Podle (23) je poruchová rychlost \vec{v} kolmá na směr šíření, jsou to tedy vlny *transverzální*. Nazývají se *střížné Alfvénovy vlny*. Jejich rychlost je největší, šíří-li se podél rovnovážného pole B_0 (v obou smyslech); ve směru kolmém na B_0 se nešíří.

Další vlastnost těchto vln se dá ukázat na základě rovnice (10): Z ní pro rovinnou vlnu plyne

$$-\omega \vec{B}_1 \vec{\equiv} \vec{k} \times (\vec{v} \times \vec{B}_0)$$

neboli

$$-\omega \vec{B}_1 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v} - (\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{B}_0,$$

avšak vzhledem k (22) je

$$\zeta \quad -\omega \vec{B}_1 = k \cos \theta_B B_0 \vec{v}.$$

Porovnáním s ²⁴(23) získáme dále

$$-kv_A \cos \theta_B \vec{B}_1 = k \cos \theta_B B_0 \vec{v}$$

a konečně

$$\vec{v} = -\frac{\vec{B}_1}{(\mu\rho_0)^{1/2}}. \quad (25)$$

To znamená, že \vec{B}_1 a \vec{v} mají stejný směr a leží v rovině rovnoběžné s čelem vlny. Z rovnice (20) a (24) plyne také

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 = 0. \quad (26)$$

To znamená, že poruchové pole je kolmé na \vec{B}_0 .

Prostředí stlačitelné - kompresní Alfvénovy vlny.

V případě, že prostředí je stlačitelné, plyne z (22)

$$\omega = kv_A. \quad (27)$$

Fázová rychlost těchto tzv. *kompresních* vln je v_A , grupová rychlost $\vec{v}_g = v_A \hat{k}$. Energie těchto vln se tedy šíří izotropně. Z rovnice (20) plyne, že poruchová rychlost \vec{v} je v rovině určené vektory \vec{k} a \vec{B}_0 , a podle (21) je zároveň kolmá na \vec{B}_0 .

Magnetické Alfvénovy vlny.

E.H.Priest, Solar Magnetohydrodynamics, 1982; P.Melchior, The Physics of the Earth's Core, 1986.

Jestliže v kapalném vodiči elektriny, který se nachází v magnetickém poli, probíhají pohyby, vzniká v něm proud o hustotě i . Zároveň vzniká brzdící síla, *Lorentzova síla*

$$\vec{L} = \vec{i} \times \mu \vec{H} \quad (1)$$

neboli

$$\vec{L} = \vec{i} \times \vec{B}.$$

Tato síla vystupuje jako jedna ze sil v N.-St. rovnici. Hmota, která se pohybuje rychlostí \vec{v} , vykonává proti této síle práci. Výkon Lor. síly v objemu V je

$$N = - \int_{(V)} \vec{v} \cdot \vec{L} dV$$

čili

$$N = - \int_{(V)} \vec{v} \cdot (\vec{i} \times \mu \vec{H}) dV. \quad (2)$$

Výraz (1) pro Lorentzovu sílu se dá přepsat takto:

$$\vec{i} \times \mu \vec{H} = -\mu \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}). \quad (3)$$

Platí:

$$\nabla(H^2) = \nabla(\vec{H} \cdot \vec{H}) = 2(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H} + 2\vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}).$$

Je tedy

$$\vec{i} \times \mu \vec{H} = -\nabla \frac{\mu H^2}{2} + (\mu \vec{H} \cdot \nabla)\vec{H}. \quad (4)$$

Pro Lorentzovu sílu tedy platí

$$\vec{L} = \vec{B} \cdot \nabla \frac{\vec{B}}{\mu} - \nabla \frac{B^2}{2\mu}. \quad (5)$$

Výraz $\mu H^2/2$ v rovnici (5) má rozměr tlaku:

$$[\mu] = mkg s^{-2} A^{-2}, \quad [H] = A m^{-1} \Rightarrow [\mu H^2] = kg s^{-2} m^{-1}.$$

Je nazýván *izotropní Maxwellův magnetický tlak*. Je možno zavést ho do výrazu pro tzv. *redukovaný tlak* v N.-St. rovnici:

$$p = \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2} |(\vec{\Omega} \times \vec{r})|^2 + \frac{\mu H^2}{2\rho}. \quad (6)$$

(Do redukovaného tlaku je zahrnut potenciál odstředivé síly a magnetický tlak. Vztakový člen N.-St. rovnice potom obsahuje zrychlení gravitační, nikoli tíhové.)

Rozvedeme nyní rovnici (5) podrobněji. Vezmeme její x-ovou složku:

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \frac{B_x}{\mu} - \frac{\partial B^2}{\partial x} \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{\mu} \left(B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial B^2}{\partial x} \frac{1}{2\mu}, \quad (7)$$

po úpravě

$$L_x = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial B_x^2}{\partial x} - B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_x B_y}{\partial y} - B_x \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x B_z}{\partial z} - B_x \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B^2}{\partial x} \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

a tedy, protože $\nabla \cdot \vec{B} = 0$,

$$L_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(B_x^2 - \frac{B^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_x B_y}{\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_x B_z}{\mu} \right). \quad (9)$$

Porovnejme tento výsledek s výrazem pro elastické napětí \vec{E} jednotky objemu ve směru x:

$$E_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}. \quad (10)$$

Upravíme-li ještě složky L_y a L_z Lorentzovy síly a porovnáme vzájemně všechny složky této síly se složkami elastického napětí, dostaneme:

$$\tau_{xx} = \frac{1}{\mu} \left(B_x^2 - \frac{B^2}{2} \right), \quad \tau_{xy} = \frac{B_x B_y}{\mu}, \quad \tau_{xz} = \frac{B_x B_z}{\mu}$$

$$\tau_{yx} = \frac{B_y B_x}{\mu}, \quad \tau_{yy} = \frac{1}{\mu} \left(B_y^2 - \frac{B^2}{2} \right), \quad \tau_{yz} = \frac{B_y B_z}{\mu}$$

$$\tau_{zx} = \frac{B_z B_x}{\mu}, \quad \tau_{zy} = \frac{B_z B_y}{\mu}, \quad \tau_{zz} = \frac{1}{\mu} \left(B_z^2 - \frac{B^2}{2} \right).$$

Ve dvojitelných na diagonále se vyskytuje *izotropní Maxwellův tlak* neboli *magnetický tlak* $\frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2}$.

Výrazy $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \dots$ jsou, jak známo, *Maxwellova magnetická střižná napětí*. Tato napětí umožňují, že se kapalinou mohou šířit příčné vlny. (Dá se mluvit o pseudoelasticitě kapaliny; musí ovšem jít o elektricky vodivou kapalinu, nacházející se v magnetickém poli.)

Uplatníme důsledně srovnání s elasticitou pevných látek. Struna, která má na jednotku délky hmotnost ρ_0 a je pod napětím τ , propouští příčné vlny, které se *podél* ní šíří rychlostí

$$\left(\frac{\tau}{\rho_0}\right)^{1/2}.$$

Podle analogie můžeme očekávat, že *magnetické napětí* bude produkovat *příčné magnetické vlny*, které se šíří *podél* magnetického pole B_0 rychlostí $\left[\frac{B_0^2}{\mu\rho_0}\right]^{1/2}$. Tato rychlost má název *Alfvénova rychlost* v_A :

$$v_A = \frac{B_0}{(\mu\rho_0)^{1/2}}. \quad (11)$$

Tyto vlny byly objeveny Alfvénem. Jejich rychlost nezávisí na délce vlny, nejsou tedy disperzivní. Učiňme si představu o jejich konkrétní rychlosti: V kapalně vrstvě jádra berme $\mu = 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$, $\rho = 10^4 \text{ kg m}^{-3}$, $B = 4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$. Podle toho je Alfvénova rychlost v jádře $v_A = 0,4 \text{ cm s}^{-1}$, což znamená, že vlna urazí 2500 km za 20 let . (Pro srovnání: seismická vlna urazí stejnou vzdálenost za 20 minut .)

Uvedeme ještě hodnoty v_A pro Slunce a jeho obal; hustota ρ se v tomto případě počítá podle typické hustoty částic v jednotlivých vrstvách. Alfvénova rychlost se potom dá psát

$$v_A = 2,8 \times 10^{16} \frac{B_0}{(\mu n_0)^{1/2}} \text{ m s}^{-1}.$$

Pro sluneční koronu v místě nad aktivní oblastí jsou typické hodnoty $B_0 \approx 10^{-3} \text{ T}$, $n_0 \approx 10^{16} \text{ m}^{-3}$. Pro takovou oblast korony vychází $v_A \approx 300 \text{ km s}^{-1}$. Ve fotosféře je $B_0 \approx 10^{-1} \text{ T}$, $n_0 \approx 10^{23} \text{ m}^{-3}$. Tato čísla dávají pro fotosféru $v_A \approx 10 \text{ km s}^{-1}$. Alfvénova rychlost má základní význam při studiu magnetoakustických nárazových vln.

Inerciální vlny

Jestliže ve výchozí rovnici (16) zanedbáme sílu vztlakovou a Lorentzovu proti Coriolisově, máme

$$\omega^2 \vec{v} = c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}) - 2i\omega \vec{\Omega} \times \vec{v}. \quad (30)$$

V nestlačitelném prostředí, v němž je $\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$, najdeme řešení tak, že (30) vektorově znásobíme vektorem \vec{k} :

$$\omega \vec{k} \times \vec{v} = 2i(\vec{k} \cdot \vec{\Omega}) \vec{v}. \quad (31)$$

Srovnáním velikosti čísel na obou stranách rovnice získáme disperzní rovnici:

$$\omega = \pm \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{\Omega})}{k}. \quad (32)$$

Zavedeme-li θ_Ω , úhel mezi osou rotace a směrem šíření vlny, zní disperzní rovnice

$$\omega = \pm 2\Omega \cos \theta_\Omega. \quad (33)$$

Zavedme kartézský systém souřadnic s osou Z ve směru rotační osy $\vec{\Omega}$. Vlastnosti inerciálních vln jsou zřetelné, působí-li ze všech sil v rovnici (8) pouze síla Coriolisova. Pak zbude z rovnice (8)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}. \quad (34)$$

V přijatém souřadném systému je tato rovnice ve složkách

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 2\Omega v_y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -2\Omega v_x.$$

Derivací podle času získáme

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = -4\Omega^2 v_x, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = -4\Omega^2 v_y.$$

Dále platí

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0.$$

Tyto tři rovnice napovídají, že rovinná vlna se šíří podle rovnic

$$v_x = A \cos(kz - 2\Omega t), \quad v_y = A \sin(kz - 2\Omega t).$$

V pevném bodě $z = \text{const.}$ koná vektor poruchové rychlosti \vec{v} kruhový pohyb s frekvencí 2Ω v rovině kolmé na směr šíření. Při šíření vlny vektor rychlosti postupuje konstantní rychlostí a zároveň rotuje kolem směru šíření. Vlny jsou příčné a kruhově polarizované. V obecném případě směr šíření svírá s osou rotace úhel θ_Ω a frekvence je dána rovnicí (32). Velikost fázové rychlosti je

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{\Omega})}{k^2}.$$

Složky *grupové rychlosti* jsou

$$v_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}$$

atd., tedy s použitím (32)

$$v_{gx} = \pm 2 \left\{ \frac{\Omega_x}{k} - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{\Omega}) k_x}{k^2} \right\} = \pm 2 \frac{(k^2 \Omega_x - k_x (\vec{k} \cdot \vec{\Omega}))}{k^3}$$

atd. Vektor *grupové rychlosti* je

$$\vec{v}_g = \pm \frac{2}{k^3} (k^2 \vec{\Omega} - \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{\Omega})).$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$\vec{v}_g = \pm \frac{\vec{k} \times (2\vec{\Omega} \times \vec{k})}{k^3}. \quad (35)$$

Je to vektor kolmý na \vec{k} , energie inerciálních vln se tedy šíří ve směru kolmém na směr šíření. Velikost *grupové rychlosti* je

$$v_g = \frac{2\Omega \sin \theta_\Omega}{k}.$$

Součet

$$(v_g^2 + v_p^2)^{1/2} = \frac{2\Omega}{k}$$

je nezávislý na směru šíření vlny.

Vliv Coriolisovy síly na magnetické vlny.

Klademe-li v rovnici (16) $g = 0$ a $\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$, dostaneme rovnici pro současné působení Coriolisovy a Lorentzovy síly. (Protože jde o nestlačitelné prostředí, berou se z obou typů magnetických vln v úvahu jen vlny příčné.) Připomeňme si, že podle rovnice (32) je kruhová frekvence inerciálních vln

$$\omega_I = \pm \frac{2(\vec{k} \cdot \vec{\Omega})}{k}$$

a kruhová frekvence Alfvénových vln je podle rovnice (24)

$$\omega_A = k v_A \cos \theta_B = k \cos \theta_B \frac{B_0}{(\mu_0 \rho)^{1/2}} = v_A (\vec{k} \cdot \vec{B}_0).$$

Z rovnice (16) zbývá

$$\omega^2 \vec{v} = -2i\omega \vec{\Omega} \times \vec{v} + \left[\vec{k} \times (\vec{k} \times (\vec{v} \times \hat{B}_0)) \right] \times \hat{B}_0 v_A^2. \quad (36)$$

Použijeme-li předpokladu nestlačitelnosti $\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$, můžeme tuto rovnici upravit na

$$\omega^2 \vec{v} = -2i\omega \vec{\Omega} \times \vec{v} - v_A^2 (\vec{k} \cdot \hat{B}_0)^2 \vec{v}.$$

Když tuto rovnici vynásobíme vektorově zleva vektorem \vec{k} , dostaneme po úpravě

$$\omega^2(\vec{k} \times \vec{v}) = 2i\omega\vec{v}(\vec{k} \cdot \vec{\Omega}) + v_A^2(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2(\vec{k} \times \vec{v}).$$

S použitím rovnic (31) pro ω_I a (24) pro ω_A odtud obdržíme

$$\omega^2 \mp \omega_I \omega - \omega_A^2 = 0. \quad (37)$$

Jsou-li vektory $\vec{\Omega}$, \vec{k} a \vec{B}_0 zhruba paralelní, povaha řešení závisí na poměru

$$\frac{\omega_A}{\omega_I} \approx \frac{kv_A}{2\Omega}.$$

Je-li $\omega_I/\omega_A \ll 1$, je

$$\omega^2 \approx \omega_A^2 \left(1 \pm \frac{\omega_I}{\omega_A}\right).$$

Coriolisova síla tedy v takovém případě působí malé frekvenční štěpení Alfvénovy vlny. Tento případ zřejmě nastává na Slunci, kde je $\frac{\omega_A}{\omega_I}$ z oboru ($10 \div 10^3$).

Poměry v zemském jádře jsou jistě podstatně odlišné. Porovnejme: 1) Úhlová rychlost rotace Ω je na Zemi zhruba 30krát větší než na Slunci. 2) Zatímco Alfvénova rychlost ve sluneční fotosféře a atmosféře je v oboru ($10 \div 10^3$) ms^{-1} (podle Priesty), v zemském jádře je (podle Melchiora) v oboru ($4 \times 10^{-3} \div 10^{-1}$) ms^{-1} . Poměr $\frac{\omega_A}{\omega_I}$ je tedy nejméně o 3 a možná až o 7 řádů menší než na Slunci, takže řešení rovnice (36) budou

$$\omega^2 \approx \omega_I^2 \quad 37$$

a

$$\omega^2 \approx \frac{\omega_A^4}{\omega_I^2}.$$

První typ jsou prostě inerciální vlny, druhý je nazýván hydromagnetické inerciální vlny a šíří se mnohem pomaleji než vlny Alfvénovy.

Podle Braginského jsou vlny v jádře ovládány silami Lorentzovou (M), vztlakovou (A) a Coriolisovou (C) a dostaly proto název vlny MAC.

Opakování

Maxwellova napětí.

Lorentzova síla je síla elektromagnetického původu, působící na objemovou jednotku homogenního vodiče, kterým protéká elektrický proud o hustotě \vec{i} a na který současně působí magnetické pole \vec{B} . Ve stacionárním magnetickém poli je hustota této síly

$$\vec{F} = \vec{i} \times \vec{B}.$$

Je-li pole nestacionární, může objemová jednotka obsahovat také volný elektrický náboj ρ a hustota Lorentzovy síly je potom

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{i} \times \vec{B}.$$

Vezměme soustavu Maxwellových rovnic pro nestacionární pole:

$$\nabla \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4)$$

Rovnici (1) násobíme vektorově zprava vektorem \vec{B} , rovnici (3) vektorově zprava vektorem \vec{D} , rovnici (2) vektorem \vec{E} a rovnici (4) vektorem \vec{H} . Sečtením všech čtyř rovnic dostaneme hustotu Lorentzovy síly:

$$\vec{f} = \vec{E} \nabla \cdot \vec{D} + \vec{H} \nabla \cdot \vec{B} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} - \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5)$$

Zavedme označení kartézských složek x_1, x_2, x_3 . Rozepíšeme první složku síly (5) a seřadíme členy podle derivací:

$$\begin{aligned} f_1 = & E_1 \frac{\partial D_1}{\partial x_1} - D_2 \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - D_3 \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + H_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_1} - B_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - B_3 \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \\ & + E_1 \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + D_2 \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + H_1 \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + B_2 \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \\ & + E_1 \frac{\partial D_3}{\partial x_3} + D_3 \frac{\partial E_1}{\partial x_3} + H_1 \frac{\partial B_3}{\partial x_3} + B_3 \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B})_1. \end{aligned}$$

Je-li prostředí homogenní a izotropní, takže $\varepsilon = konst.$ a $\mu = konst.$, platí např.

$$E_1 \frac{\partial D_1}{\partial x_1} = \varepsilon E_1 \frac{\partial E_1}{\partial x_1} = D_1 \frac{\partial E_1}{\partial x_1}$$

apod. pro další součiny. Potom můžeme psát

$$E_1 \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + E_2 \frac{\partial D_2}{\partial x_1} + E_3 \frac{\partial D_3}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\vec{E} \cdot \vec{D})$$

a podobně pro další derivace, analogicky pak pro derivace součinu $(\vec{H} \cdot \vec{B})$. Tím dostaneme složky Lorentzovy síly ve tvaru

$$f_1 = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial t} g_1, \quad (6)$$

kde

$$T_{11} = E_1 D_1 + H_1 B_1 - \frac{1}{2} [(\vec{E} \cdot \vec{D}) + (\vec{H} \cdot \vec{B})],$$

$$T_{12} = E_1 D_2 + H_1 B_2,$$

$$T_{13} = E_1 D_3 + H_1 B_3$$

a

$$g_1 = (\vec{D} \times \vec{B})_1.$$

Obecně pro libovolnou složku f_α ($\alpha = 1, 2, 3$) platí

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial}{\partial t} g_\alpha, \quad (7)$$

kde

$$T_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

a

$$\vec{g} = \varepsilon \mu (\vec{E} \times \vec{H}).$$

Přitom $\delta_{\alpha\beta} = 1$ pro $\alpha = \beta$ a $\delta_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$.

Připomeňme si pro úplnost, že vektor $\vec{E} \times \vec{H}$ je Poyntingův vektor a má význam hustoty proudů elektromagnetického pole. Ve stacionárním poli odpadne v rovnici (6) poslední člen (časová změna Poyntingova vektoru).

Na objem V , uzavřený v ploše S , působí ve stacionárním poli složka elektromagnetické síly

$$F_\alpha^{stac} = \int_{(V)} f_\alpha dV.$$

Použitím Gaussovy formule dostaneme

$$F_\alpha^{stac} = \int_{(S)} \sum_{\beta=1}^3 T_{\alpha\beta} n_\beta dS,$$

kde \vec{n} je jednotkový vektor ve směru vnější normály. Podle posledního vztahu se objemová síla \vec{F} dá vyjádřit jako výslednice plošných sil, působících na plošné elementy dS povrchu uvažovaného objemu. Je to tedy obdobná situace jako v elasticitě. Proto se již sám Maxwell pokoušel vyjádřit popsany tenzor jako tenzor napětí v hypotetickém éteru. Tenzoru se říká "tenzor Maxwellových napětí".

Proudman-Taylorův teorém

(Proudman 1916, Taylor 1917.)

Týká se stacionárního pomalého pohybu neviskózní homogenní kapaliny v rotujícím tělese při nulovém nebo slabém magnetickém poli (síla magnetického původu se neuvažuje).

N.-St. rovnice v Boussinesqově aproximaci:

$$0 = -\frac{1}{\rho_m} \nabla p' - 2[\vec{\Omega} \times \vec{v}].$$

(ρ_m je střední hustota, p' je odchylka tlaku od hydrostatického průběhu.) Setrvačná, vztlaková i viskózní síla jsou zanedbány, jde tedy o geostrofické proudění. Kapalina necht' je v prostoru ohraničeném plochou S . Na S je $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Zavedme kartézský souřadný systém, osa z je ve směru $\vec{\Omega}$. Na rovnici provedeme rotaci:

$$\nabla \times \Omega(\vec{v} \times \vec{i}_z) = 0.$$

Rozepsáno:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{i}_x v_y - \vec{i}_y v_x) &= 0, \\ \vec{i}_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + \vec{i}_y \frac{\partial v_y}{\partial z} - \vec{i}_z \frac{\partial v_x}{\partial x} - \vec{i}_z \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Doplňme:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} - \vec{i}_z \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

V Boussinesqově aproximaci můžeme položit

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

a proto

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(x, y).$$

Jestliže prostor, v němž je kapalina, je shora a zdola omezen plochami $z = konst.$, je $v_z = 0$ všude v tomto prostoru.

Vezměme obecnější případ plochy S : Necht' je to osově symetrický kontejner, rotující kolem osy souměrnosti. Osa z má opět směr $\vec{\Omega}$. Zvolme dva body, jejichž spojnice je rovnoběžná s osou rotace. Normály k ploše v těchto bodech jsou n_1 a n_2 . Pro rychlosti ve zvolených bodech platí

$$v_{n_1} = v_{n_2} = 0.$$

Protože podél osy z , tj. podél spojnice bodů se rychlost nemění, platí i na spojnici uvedená rovnice. Podél celé spojnice má tedy rychlost směr

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Představme si nyní válcový souřadný systém s osou v ose rotace. Rychlost na spojnici uvažovaných bodů může mít pouze směr azimutální souřadnice ϕ . Protože platí $div \vec{v} = 0$, platí

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \vec{v} = v_\phi(s) \vec{e}_\phi,$$

kde s je kolmá vzdálenost od osy rotace.

Proudmanův sloupec

Mějme planparalelní vrstvu o tloušťce d . V jejím dnu je v určitém místě dolík, takže vrstva je tam tlustší. Vrstva je vyplněna kapalinou a rotuje kolem osy kolmé na svá rozhraní. V určité vzdálenosti od dolíku se v kapalině generuje vnitřní pohyb (např. variacemi tlaku). V dolíku kapalina stojí. Protože je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0$, je kapalina v klidu i všude nad dolíkem. Proud kapaliny bude tedy obtékat válec nad dolíkem, jako kdyby byl pevný. Bylo to potvrzeno i experimentálně. (Obrázek.)

R.Hide (1966) vyslovil předpoklad, že undulace CMB o tloušťce řádu 1 km mohou ovlivňovat do značné hloubky proudění v jádře. Může to být jeden z několika druhů vazby mezi pláštěm a jádrem. (Mechanická vazba.)

P.-T. teorém se ve slabší formě uplatní i tehdy, když se připustí tepelné vztlakové síly a zvrstvení kapaliny při rozhraních.

F.H.Busse v roce 1970 navrhl geostrofický model proudění v jádře, sestávající z válců koaxiálních s osou rotace. (Obrázek.) V takovém případě by ovšem nemohla existovat celojaderná konvekce. Pro vysvětlení driftu nedipólového pole by model musel driftovat vůči plášti jako celek. Odchyšky by se potom daly vysvětlit jako poruchy, dané turbulencí a lokálně působící Lorentzovou silou (interference vln, α -efekt.)

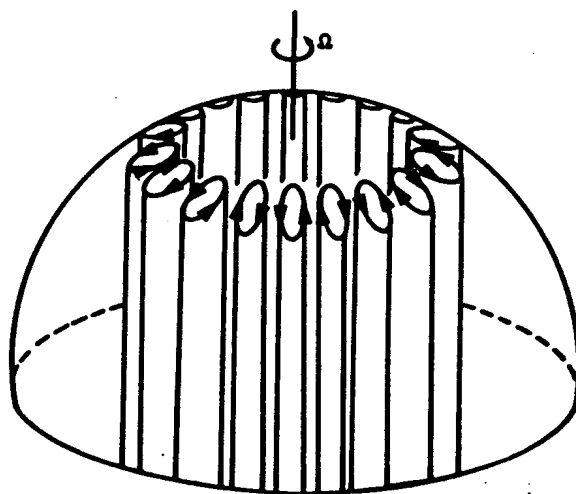


Fig. 8.5. Qualitative sketch of the onset of convection in a rotating fluid sphere following the experiments and results of Busse (1975). Convection occurs in columns parallel to the rotation axis.

Zvrstvení, stabilita a kmity zemského jádra.

Složení jádra:

Podle seismologie existují v kapalně vrstvě kromě Fe a Ni i lehčí prvky; snad Si, S, O, P a možná i H. Podle pokusů s rázovými vlnami je však *jadérko* z čistého železa. Lehčí prvky v kapalině jádra přispívají ke vztlakové síle; snad právě ony pohánějí konvekci.

Jestliže v kapalině jádra je hybatelem kompoziční konvekce, je třeba ke stavovým veličinám ρ, T, P přidat veličinu další, totiž *koncentraci lehkých prvků*. Budeme ji značit ξ .

Výraz "konvekce" byl původně zaveden pro přenos tepla spolu s materiálem - na rozdíl od přenosu vedením a zářením. My se nyní zabýváme jiným typem konvekce - tzv. *kompoziční konvekci*.

Je možno rozlišovat tři druhy konvekce: 1) vynucená, 2) volná konvekce a 3) konvekční nestabilita. Prvním druhem se nemusíme zabývat, neboť se nazakládá na vztlaku (je to např. konvekce vyvolaná dmycháním). Rozdíl mezi 2. a 3. druhem je velmi jemný.

V následujících úvahách nebudeme uvažovat vazkost kapaliny jádra. - Je-li kapalina původně v klidu a později v ní začnou působit tepelné zdroje rozložené tak, že izotermální plochy přestávají koincidovat s plochami tíhového potenciálu, je hydrostatická rovnováha neudržitelná a dojde k volné konvekci bez ohledu na vydatnost zdrojů.

Níže si ukážeme, že v případě, kdy izotermální plochy koincidují s plochami tíhového potenciálu, mohou nastat dvě situace: (i) Tepelné zdroje jsou tak vydatné, že přenos tepla pouhým vedením by vyžadoval natolik velký gradient teploty, že hydrostatický stav by se stal opět nestabilním, takže libovolná fluktuace by ho vychýlila z rovnováhy a došlo by opět k volné konvekci. (ii) Gradient teploty nepostačuje k tomu, aby se hydrostatický stav stal nestabilním. Fluktuace v systému pak vedou pouze k tomu, že kapalina kmitá kolem svého rovnovážného stavu s tzv. Brunt-Väisäläovou frekvencí.

Při procesu tuhnutí kapalně vrstvy (odspoda) narůstá *jadérko*. Hustota ztuhlé fáze (čisté železo) je větší než hustota fáze kapalně (železo s příměsemi). Když na ICB "přimrzá" další železo, uvolněné lehčí příměsi vztlakem stoupají a "míchají" celé jádro. Nesou s sebou teplo a tím řídí transport tepla v kapalně vrstvě.

Schwarzschildova kriteria pro vznik konvekce. v ideální kapalině.

Uvažujme "balíček" kapaliny ve vzdálenosti r od středu Země. Představujme si, že je zabalený do pružné membrány. Ta nepropouští hmotu ani teplo, ale může se libovolně roztahovat tak, aby se tlak uvnitř mohl vyrovnávat s tlakem v okolním prostředí. Veličiny ρ, S chápeme jako funkce p, T, ξ . (S ...entropie.)

Představme si, že se balíček v důsledku kompozičního míchání zvedl z hladiny r na hladinu $r + dr$. Hmotu ani energie se uvnitř membrány nezměnily, tlak uvnitř se však změnil o Δp . ($\Delta S = \Delta \xi = 0$.) Vnější tlak na hladině $r + dr$ se od tlaku na hladině r liší o dp . Vyrovnáním tlaku ($\Delta p = dp$) se hustota uvnitř změnila o $\Delta \rho$, kdežto venku v novém okolí se hustota liší od hustoty na hladině r o $d\rho$.

Je-li $\Delta \rho < d\rho$, bude balíček pokračovat v cestě od výchozí polohy. To může znamenat

počátek konvekce. Rovnovážný stav je dán hydrostatickou rovnováhou

$$\nabla p = \rho \vec{g}. \quad (1)$$

Pro okolí balíčku platí

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S,\xi} dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,\xi} dS + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_{p,S} d\xi. \quad (2)$$

Uvnitř balíčku je

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S,\xi} \Delta p + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,\xi} \Delta S + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_{p,S} \Delta\xi. \quad (3)$$

Protože

$$\Delta p = dp, \quad \Delta S = \Delta\xi = 0,$$

je

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{S,\xi} dp. \quad (4)$$

Připomeneme si *termodynamické vzorce*:

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,\xi} \quad C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,\xi} \quad \alpha = -\rho^{-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,\xi} \quad \kappa_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T,\xi}$$

a Maxwellovy vztahy

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\xi} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,\xi} = \alpha \kappa_{T,\xi}^{-1}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,\xi} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,\xi} = -\frac{\alpha}{\rho}.$$

Připomenuté termodynamické vztahy platí pro prostředí s konstantní koncentrací ξ . Z rovnic (2) a (4) dostaneme:

$$\frac{\Delta\rho - d\rho}{dr} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,\xi} \frac{dS}{dr} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_{p,S} \frac{d\xi}{dr}. \quad (5)$$

Místo stavové proměnné S zavedeme proměnnou T :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,\xi} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,\xi} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,\xi} \quad (6)$$

a odtud

$$-\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,\xi} = -\frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,\xi}}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,\xi}} = \frac{\alpha \rho T}{C_p}. \quad (7)$$

Z rovnic (5) a (7):

$$\frac{\Delta\rho - d\rho}{dr} = \frac{\rho\alpha T}{C_p} \frac{dS}{dr} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)_{p,S} \frac{d\xi}{dr}. \quad (8)$$

Má-li dojít ke konvekční nestabilitě, musí být levá strana (8) záporná ($\Delta\rho < d\rho$). Kdyby kapalina byla dokonale homogenní, t.j. kdyby $\frac{d\xi}{dr} = 0$, plynula by z (8) pro vznik nestability podmínka

$$\frac{dS}{dr} < 0, \quad (9)$$

protože $\frac{\rho\alpha T}{C_p} > 0$.

Jedna formulace podmínky pro vznik nestability v kapalině tedy zní, že entropie musí růst směrem dolů.

Jiná formulace podmínky pro homogenní kapalinu.

Z (5) plyne

$$\frac{\Delta\rho - d\rho}{\rho dr} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{p,\xi} \frac{dS}{dr} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)_{p,S} \frac{d\xi}{dr}. \quad (10)$$

$S = S(p, T, \xi)$, a proto

$$\frac{dS}{dr} = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,\xi} \frac{dp}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,\xi} \frac{dT}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)_{p,T} \frac{d\xi}{dr} \quad (11)$$

a podle termodynamických vzorců

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{\alpha}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{C_p}{T} \frac{dT}{dr} + \bar{s} \frac{d\xi}{dr}, \quad (12)$$

kde

$$\bar{s} = \left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)_{p,T}. \quad (13)$$

Zavedeme ještě

$$\bar{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)_{p,T}. \quad (14)$$

Je to obdoba koeficientu teplotní roztažnosti. Z rovnic (10)-(13) tedy vyjde

$$\frac{\Delta\rho - d\rho}{\rho dr} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial S} \right)_{p,\xi} \left(-\frac{\alpha}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{C_p}{T} \frac{dT}{dr} + \bar{s} \frac{d\xi}{dr} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi} \right)_{p,S} \frac{d\xi}{dr}. \quad (15)$$

Úprava $\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi} \right)_{p,S}$ (uvažujeme $\rho = \rho(p, S(p, T, \xi), \xi)$):

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi} \right)_{p,T} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi} \right)_{p,S} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S} \right)_{p,\xi} \left(\frac{\partial S}{\partial\xi} \right)_{p,T} \quad (16)$$

V soulase s (14) je

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi} \right)_{p,S} = -\rho\bar{\alpha} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial S} \right)_{p,\xi} \left(\frac{\partial S}{\partial\xi} \right)_{p,T} \quad (17)$$

a dále s použitím (7)

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi} \right)_{p,S} = -\rho\bar{\alpha} + \frac{\alpha\rho T}{C_p} \bar{s}. \quad (18)$$

Podle (15), (7) a (18) je

$$\frac{\Delta\rho - d\rho}{\rho dr} = \frac{\alpha T}{C_p} \left(-\frac{\alpha}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{C_p}{T} \frac{dT}{dr} + \bar{s} \frac{d\xi}{dr} \right) + \bar{\alpha} \frac{d\xi}{dr} - \frac{\alpha T \bar{s}}{C_p} \frac{d\xi}{dr} \quad (19)$$

a odtud po úpravě

$$\frac{\Delta\rho - d\rho}{\rho dr} = \alpha \frac{dT}{dr} + \bar{\alpha} \frac{d\xi}{dr} - \frac{\alpha^2 T}{C_p \rho} \frac{dp}{dr}. \quad (20)$$

V termodynamice se dokazuje, že

$$\frac{\alpha T g}{C_p} = \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} \quad (21)$$

neboli *adiabatický gradient teploty*. Budeme předpokládat $\frac{dp}{dr} = \rho g$. Přesně to sice platí jen při hydrostatické rovnováze, protože však v Zemi je hydrostatický tlak dominantní, můžeme to použít. Potom můžeme rovnici (20) napsat

$$\frac{\Delta\rho - d\rho}{\rho dr} = \alpha \left[\frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} \right] + \bar{\alpha} \frac{d\xi}{dr}. \quad (22)$$

Konvekční nestabilita nastává při

$$\Delta\rho - d\rho < 0.$$

Je-li, podobně jako v předchozí úvaze, kapalina dokonale promíchána, tedy $\frac{d\xi}{dr} = 0$, je podmínkou pro vznik konvekční nestability podle rovnice (22) nerovnost

$$\frac{dT}{dr} < \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}. \quad (23)$$

Uvážíme-li, že teplota roste s hloubkou, zní podmínka (23) takto: Konvekční nestabilita nastane, je-li gradient teploty vyšší než adiabatický.

Poznámka: Stále uvažujeme ideální kapalinu. Ve viskózní kapalině může být gradient teploty vyšší než adiabatický a konvekční nestabilita nenastane.

Nenulová kompoziční nehomogenita

může děj buď stabilizovat nebo destabilizovat. Záleží to na druhém členu pravé strany rovnic (8) a (20). Z (8) plyne pro vznik konvekční nestability podmínka

$$\frac{\rho\alpha T}{C_p} \frac{dS}{dr} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)_{p,S} \frac{d\xi}{dr} < 0. \quad (24)$$

Dosadíme podle (17):

$$\frac{\rho\alpha T}{C_p} \frac{dS}{dr} - \left[-\rho\bar{\alpha} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{p,\xi} \left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)_{p,T} \right] \frac{d\xi}{dr} < 0. \quad (25)$$

Dosazením podle (7) a (13):

$$\frac{\rho\alpha T}{C_p} \frac{dS}{dr} - \left(\frac{\rho\alpha T}{C_p} \bar{s} - \rho\bar{\alpha} \right) \frac{d\xi}{dr} < 0. \quad (26)$$

a další úpravou:

$$\frac{dS}{dr} - \left(\bar{s} - \frac{\bar{\alpha} C_p}{\alpha T} \right) \frac{d\xi}{dr} < 0. \quad (27)$$

To je první formulace *Schwarzschildova kriteria* pro vznik konvekční nestability, je-li kapalina kompozičně nehomogenní.

Druhá formulace plyne z rovnice (22). Podle ní je podmínkou pro vznik konvekční nestability splnění nerovnosti

$$\frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \frac{d\xi}{dr} < 0. \quad (28)$$

Jestliže (27) a (28) neplatí, jde buď o neutrální stabilitu ($\Delta\rho = d\rho$) nebo o případ $\Delta\rho > d\rho$, což znamená znemožnění konvekce, tj. *zvrstvení jádra*.

V okamžiku, kdy dojde k tomuto stavu, stává se vztlakový člen silou, jež vrací balíček do původní polohy. Difuze nehomogenity je velmi pomalá, má charakteristický čas $\approx 10^{12}$ roků. Ztrátu energie kompoziční nehomogenity difuzí nemusíme tedy uvažovat. Dostane-li se balíček na hladinu r , na níž platí $\Delta\rho > d\rho$, kmitá balíček kolem této hladiny s tzv. **Brunt-Väisälä**-ovou frekvencí N . Ta je dána rovnicí

$$N(r) = (g\alpha)^{1/2} \left[\frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \frac{d\xi}{dr} \right]^{1/2}. \quad (29)$$

Odvození Brunt-Väisäläovy frekvence.

Technická poznámka: Odtud začíná nové číslování rovnic. Pokud jsou používány dřívější rovnice, je jejich číslo označeno číslicí 1 za lomítkem.

Předpokládáme, že děj probíhá v oblasti, jejíž horizontální rozměr je velmi malý ve srovnání s vertikálním, takže pohyby můžeme chápat jako vertikální. "Balíčky" materiálu kmitají kolem referenční hladiny r . Předpokládáme dále, patrně právem, že výchylky z této hladiny jsou tak malé, že v jejich rozmezí jsou gradienty stavových veličin konstantní a rovné gradientům na hladině r . Takto chápanou výchylku označme R . Je to funkce času. Za těchto okolností můžeme v rovnici (22/1), použijeme-li ji pro jednotlivé okamžiky kmitavého pohybu, psát místo časově proměnného elementu vzdálenosti dr psát časovou funkci $R(t)$.

Na referenční hladině r platí rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\nabla p = \rho g. \quad (1)$$

Pohybová rovnice kmitajícího balíčku je

$$\rho \frac{d^2 R}{dt^2} = -\nabla p + \rho g - (\Delta\rho - d\rho)g. \quad (2)$$

První a druhý člen pravé strany se podle (1) kompenzují, třetí - poruchový člen je hnací silou kmitání. Rovnici (22/1) můžeme podle úvahy o nepatrnosti pohybů napsat v podobě

$$\delta\rho - d\rho = \rho\alpha \left[\frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \frac{d\xi}{dr} \right] R. \quad (3)$$

Po dosazení této rovnice do (2) máme

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = g\alpha \left[\frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \frac{d\xi}{dr} \right] R(t) \quad (4)$$

nebo

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = N^2(r)R. \quad (5)$$

Řešením této rovnice je

$$R = konst \cdot e^{iN(r)t}, \quad (6)$$

kde

$$N^2(r) = g\alpha \left[\frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \frac{d\xi}{dr} \right]. \quad (7)$$

To právě odpovídá Br.V. frekvenci podle rovnice (29). V rovnici (7) je

$$N^2(r) \geq 0.$$

Značka $>$ znamená, že jde o kmitání, značka $=$, že jde o neutrální stabilitu, jež může přejít buď ve stav kmitavý nebo v konvekci. Kdyby bylo

$$N^2(r) < 0,$$

znamenalo by to podle Schwarzschildova kriteriá (28/1), že probíhá volná konvekce, a rovnice (4) by neměla smysl, což formálně odpovídá tomu, že její řešení diverguje.

Stav při $N^2(r) > 0$ je stav zvrstveného jádra. Kapalný materiál kmitá kolem jednotlivých hladin r . Tím se přenáší teplo, ne však jako při konvekci: je to předávání energie mezi jednotlivými kmitajícími vrstvami.

Veličinu $N(r)$ můžeme převést na veličiny, jejichž průběh buď známe nebo jej můžeme určit seismologicky. Následující úvaha se však týká pouze případu, že teplota v kapalině jádra je adiabatická a stav polybů závisí pouze na kompoziční nehomogenitě. V tomto případě rovnice (7) přechází v

$$N^2 = g\bar{\alpha} \frac{d\xi}{dr}. \quad (8)$$

Koeficient kompoziční rozpínavosti $\bar{\alpha}$ a prostorovou změnu koncentrace lehkých příuněsí $\frac{d\xi}{dr}$ neznáme, ale můžeme zprvu učinit odhad průměrných hodnot: $\bar{\alpha} = 0.5$ a $\frac{d\xi}{dr} = 10^{-5} km^{-1}$, což by znamenalo změnu ξ asi o 3% při průchodu jádrem. Pak bychom dostali průměrnou hodnotu Br.V. frekvence $7 \times 10^{-3} s^{-1}$, což odpovídá periodě asi 15 minut. Nyní se obrátíme k možnosti využít seismologická data.

Podle (18/1) je

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\alpha \rho T}{C_p} \bar{s} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_{p,S} \right], \quad (9)$$

kde

$$\bar{s} = \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)_{p,T}.$$

Potom

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \frac{d\xi}{dr} \left[\frac{\alpha \rho T}{C_p} \bar{s} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_{p,S} \right]. \quad (10)$$

Úpravou (2/1) dostaneme

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_{p,S} \frac{d\xi}{dr} = \frac{d\rho}{dr} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\xi,S} \frac{dp}{dr} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p,\xi} \frac{dS}{dr}. \quad (11)$$

Platí:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\xi,S} = \frac{\rho}{\kappa_S},$$

kde κ_S je adiabatický koeficient nestlačitelnosti, dále

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g$$

a podle (7)

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p,\xi} = -\frac{\rho \alpha T}{C_p}.$$

S použitím těchto vztahů a rovnice (11) můžeme rovnici (10) napsat takto:

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \left[-\frac{d\rho}{dr} - \frac{\rho^2 g}{\kappa_S} - \frac{\rho \alpha T}{C_p} \frac{dS}{dr} + \frac{\alpha \rho T}{C_p} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)_{p,T} \frac{d\xi}{dr} \right]. \quad (12)$$

Tato rovnice se dá zjednodušit tímto způsobem:

$$\frac{dS}{dr} = \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)_{p,T} \frac{d\xi}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p,\xi} \frac{dT}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T,\xi} \frac{dp}{dr}. \quad (13)$$

avšak podle Maxwellových vztahů můžeme poslední dva členy pravé strany psát

$$\frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{ad} + \frac{\alpha}{g} \rho g = -\frac{C_p}{T} \frac{T \alpha g}{C_p} + \alpha \rho = 0.$$

takže

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)_{\rho, T} \frac{d\xi}{dr} = \frac{dS}{dr}. \quad (14)$$

Při adiabatickém gradientu teploty tedy je

$$N^2(r) = g \left(-\frac{\rho g}{\kappa_S} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right). \quad (15)$$

Platí

$$\kappa_S = \rho \phi, \quad \phi = v_P^2 - \frac{4}{3} v_S^2.$$

kde v_P , v_S jsou rychlosti seismických vln. Rovnice (15) potom zní

$$N^2(r) = g \left(-\frac{g}{\phi} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right). \quad (16)$$

V zásadě se tedy průběh Br.-V. frekvence dá odhadnout ze seismických rychlostí a modelu hustoty. Podle modelu Gilberta a Dziewonského z roku 1975 vychází průběh, uvedený na obrázku. Nejvyšší hodnoty, nehluboko pod CMB, $N^2 \approx 28 \times 10^{-8} s^{-2}$ odpovídají periodě $T \approx 3.3$ hodiny. Hodnota $N^2 \approx 5 \times 10^{-8} s^{-2}$ při ICB odpovídá $T \approx 7.8$ hodiny.

Poznamnejme, že v adiabatickém stavu je tedy podmínka nulové stability $N^2(r) = 0$ ekvivalentní platnosti Williamsovy-Adamsovy rovnice

$$-\frac{d\rho}{dr} = \frac{\rho g}{\Phi}.$$

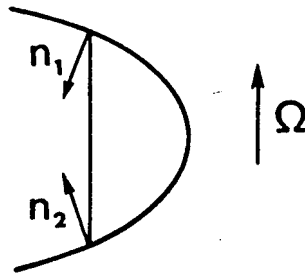


Figure 9. Application of the Proudman-Taylor theorem. A line parallel to Ω meets the bounding surface of the container in two points, at each of which the flow along the normals must vanish. Since the flow is the same everywhere on the line by the PT theorem, v is parallel to $n_1 \times n_2$.

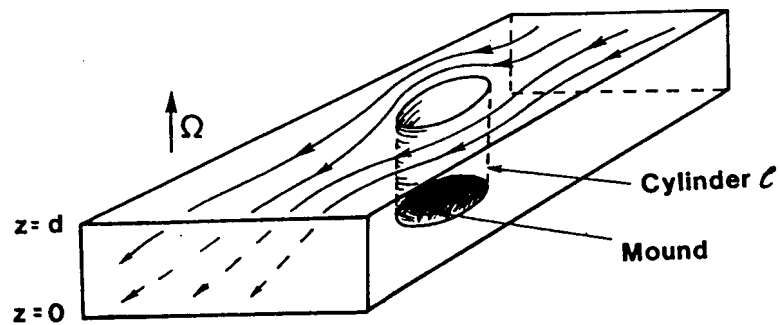


Figure 11. The effect of bottom topography. The imaginary cylinder circumscribing the mound and with generators parallel to Ω acts as a solid obstacle to a stream in which it lies, according to the PT theorem.

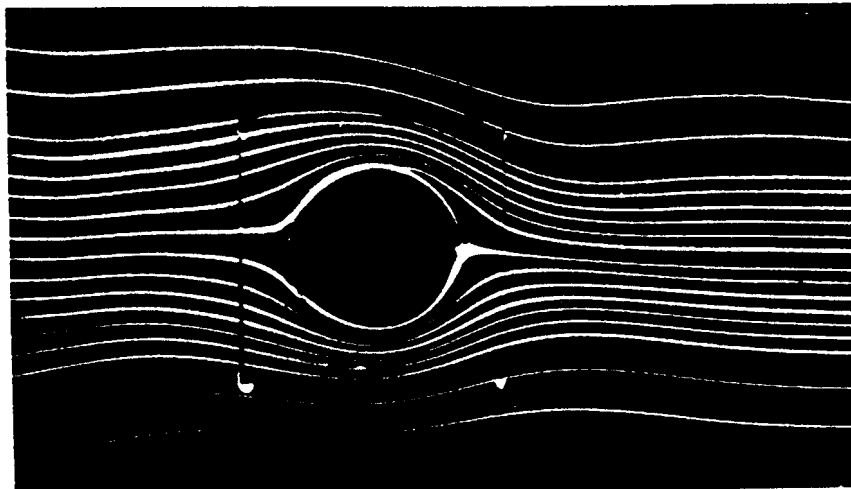


Figure 12. The Taylor column over a cylindrical hole for $R_0 = 4.9 \times 10^{-2}$ and $E = 6.9 \times 10^{-4}$. (Unpublished photograph courtesy of D. L. Boyer; see also Boyer *et al.*, 1984.)

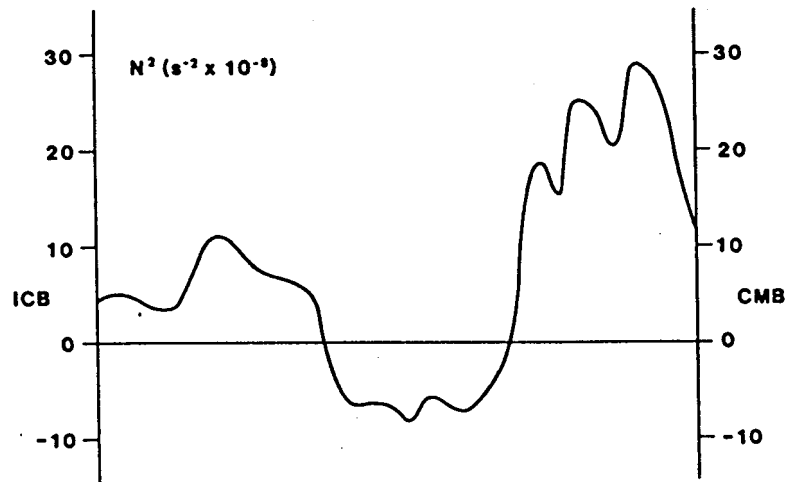


Figure 3. Brunt-Väisälä frequency in the Earth's core. The Brunt-Väisälä frequency can be estimated from seismologically determined parameters, at least in principle. The difficulty is that the density gradient is poorly determined. The values of N^2 shown are derived from model 1066B of Gilbert and Dziewonski (1975). Negative values of N^2 are physically unrealistic and must be attributed to inaccuracies in the density determination. The larger positive values near the CMB may be indicative of stable stratification, but again there is not sufficient accuracy to be sure.