

TEORETICKÉ ZÁKLADY FOURIEROVY
SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY

Johana Brokešová

Praha, 2008

Předmluva

Tato skripta vznikla jako písemný podklad k jednosemestrální přednášce „Fourierova spektrální analýza“, kterou přednáším na katedře geofyziky MFF UK již od začátku devadesátých let. Přednáška zahrnuje teoretické základy spektrální analýzy s podrobným výkladem čtyř Fourierovských transformací (Fourierovy řady spojitého a diskrétního signálu a Fourierovy transformace spojitého a diskrétního signálu) a jejich vzájemných vztahů. Vzhledem k omezenému rozsahu jednosemestrálního kurzu (3 hodiny týdně), skripta neobsahují praktické aplikace a konkrétní metody zpracování reálných dat, měla by však čtenáři poskytnout solidní základ pro studium a používání těchto metod. Výklad částečně vychází ze starších skript V. Červeného, Spektrální analýza v geofyzice I (1979), ale oproti nim je výrazně rozšířen o problematiku analýzy diskrétních signálů.

Přestože je kurz přednášen na katedře geofyziky MFF UK, je pojat velmi obecně. Výběr látky není diktován případnými konkrétními geofyzikálními aplikacemi. Pokud se některé ilustrující příklady týkají geofyzikální tematiky, jsou zvoleny vždy tak, aby byly snadno pochopitelné i pro čtenáře bez znalosti základů geofyziky. Kurz je tedy určen nejširšímu okruhu zájemců z řad studentů různých vědeckých i technických oborů. Předpokladem pro studium je pouze znalost základů matematické analýzy a lineární algebry.

Struktura skript je poněkud odlišná od „klasických“ matematických skript používaných na MFF UK. Důkazy některých vět, pokud neslouží lepšímu pochopení probírané látky, jsou vynechány. O to víc prostoru je věnováno výkladu vzájemných souvislostí se zřetelem na bezprostřední uplatnění v praxi. Kromě řešených příkladů ilustrujících probíraná témata, obsahují skripta i řadu cvičení. Výsledky cvičení je možno najít na konci textu, před částí věnovanou dodatkům.

Chtěla bych poděkovat řadě mých spolupracovníků a studentů, kteří se svými připomínkami podíleli na zkvalitnění textu. Jmenovitě pak zejména P. Pokornému, F. Gallovičovi a P. Kolínskému za jejich kritickou revizi a mnoho podnětných nápadů pro doplnění výkladu. Děkuji rovněž J. Velínskému a M. Pauerovi za jejich pomoc s technickou úpravou manuskriptu.

V Praze, leden 2008

Johana Brokešová

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Význam a oblasti využití Fourierovy spektrální analýzy	1
1.2	Zavedení pojmu signál a související terminologie	2
1.3	Vymezení obsahu kurzu – základní syllabus.	5
2	FOURIEROVA ŘADA SPOJITÉHO SIGNÁLU	9
2.1	Zavedení Hilbertova prostoru a základních souvisejících pojmů	10
2.2	Ortonormální posloupnosti a obecné Fourierovy řady	13
2.3	Úplné ortogonální systémy	17
2.4	Fourierova exponenciální řada	19
2.5	Fourierova trigonometrická řada	25
2.6	Konvergence trigonometrické Fourierovy řady.	31
2.7	Gibbsův jev	36
2.8	Vlastnosti Fourierových řad. Operace nad řadami.	39
2.9	Rozvoje pomocí vlastních funkcí.	49
2.10	Rozvoje pomocí ortogonálních polynomů.	56
2.11	Fourierovy řady více proměnných	59
3	FOURIEROVA TRANSFORMACE SPOJITÉHO SIGNÁLU	67
3.1	Intuitivní přechod od Fourierovy řady k Fourierově transformaci.	69
3.2	Definice Fourierovy transformace spojitého signálu.	70
3.3	Vztah Fourierovy řady a Fourierovy transformace spojitého signálu.	75
3.4	Fourierova sinová a kosinová transformace.	77
3.5	Fourierova transformace některých speciálních funkcí.	79
3.6	Fourierova transformace reálného signálu.	84
3.7	Vlastnosti Fourierovy transformace – symetrie spektra.	87
3.8	Vlastnosti Fourierovy transformace – operace v časové oblasti.	91
3.9	Integrální vlastnosti Fourierovy transformace.	108
3.10	Vlastnosti Fourierovy transformace – ubývání spektra.	119
3.11	Časově a frekvenčně omezené sinály	122
3.12	Hilbertova transformace a spektrum kauzálních funkcí	125
3.13	Fourierova transformace analytických signálů	132
3.14	Dvoudimenzionální Fourierova transformace spojitého signálu	138
3.15	Základy lineární filtrace	149

4	FOURIEROVA TRANSFORMACE DISKRÉTNÍHO SIGNÁLU	159
4.1	Definice Fourierovy transformace diskrétního signálu.	160
4.2	Vlastnosti Fourierovy transformace diskrétního signálu.	167
4.3	Lineární filtrace diskrétních signálů.	172
4.4	Vztah Fourierovy transformace spojitého a diskrétního signálu.	175
4.5	Vzorkovací teorém.	179
5	FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO SIGNÁLU — DFT	187
5.1	Definice diskrétní Fourierovy transformace (DFT).	190
5.2	Vlastnosti DFT — symetrie	194
5.3	Vlastnosti DFT — operace se signálem	201
5.4	Algoritmus rychlé Fourierovy transformace (FFT)	211
5.5	Vztah DFT k ostatním Fourierovským transformacím	217
5.6	DFT dvoudimenzionálních signálů	224
5.7	Interpolace pomocí DFT	228
	Dodatky	243
D.8	Některé vzorce pro goniometrické funkce.	243
D.9	Užitečné goniometrické součty.	243
D.10	Funkce sinc a integrální sinus.	244
D.11	Gram-Schmidtova ortogonalizace posloupnosti.	246
D.12	Schwarzova nerovnost.	247
D.13	Taylorův rozvoj.	248
D.14	Reziduová věta.	248
D.15	Besselovy funkce.	249
D.16	Konvoluce spojitých signálů.	252
D.17	Diracova δ funkce.	253
D.18	Korelace a autokorelace spojitých signálů.	255
D.19	Hilbertova transformace	257
D.20	Analytický signál	259
D.21	Obálka jednoparametrické soustavy křivek	261
D.22	Diskrétní ortogonalita diskrétních exponenciál	262
	Literatura	264
	Seznam nejdůležitějších symbolů	266

Kapitola 1

Úvod

1.1 Význam a oblasti využití Fourierovy spektrální analýzy

Fourierova analýza byla vyvinuta jako metoda řešení rovnice vedení tepla s okrajovými podmínkami. Postupem času se rozšířila daleko za hranice fyzikálních aplikací, pro které byla původně zamýšlena. Stala se nezbytnou v moderní fyzice, teorii komunikace, teorii lineárních systémů a hlavně v oblasti počítačového zpracování dat.

Dnes si lze jen stěží představit fyzikální obor, kde by spektrální analýza nehrála důležitou roli. Setkáme se s ní jak v oblasti teoretického modelování, tak v oblasti zpracování reálně naměřených dat, ale i v instrumentálních disciplínách.

V modelování různých fyzikálních jevů se s výhodou používá rozklad funkcí na harmonické složky, tedy tzv. harmonická analýza, kdy se hledaná funkce napíše ve tvaru Fourierovy řady a místo dané funkce pak hledáme koeficienty této řady. Výhodou je, že rovnice pro ně jsou často mnohem jednodušší než rovnice pro původní funkci. Takový postup se uplatní zejména pro různé vlnové procesy, tedy periodické jevy. Vzhledem k tomu, že proměnná definičního oboru dané funkce vůbec nemusí být čas a bázové funkce v řadě nemusí být pouze trigonometrické funkce (což je asi nejznámější typ Fourierovy řady), spadá pod pojem harmonická analýza i celá řada dalších typů Fourierovských rozvoju (např. sférická harmonická analýza). Naproti tomu, pro modelování tzv. přechodných (tedy např. časově omezených, neperiodických) jevů se často využívá integrální Fourierova transformace. Ta může pomoci zejména při řešení některých typů obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic. Obyčejná diferenciální rovnice může být Fourierovou transformací převedena na rovnici algebraickou a u parciální diferenciální rovnice zase dosáhneme snížení počtu nezávisle proměnných a převedení na zcela jiný, většinou snáze řešitelný, typ rovnice. Jako příklad zde uveďme vlnovou (tj. hyperbolickou) rovnici, která Fourierovou transformací přechází na rovnici Helmholtzovu (tj. eliptickou). Často se setkáváme s použitím Fourierovských transformací pro usnadnění derivací, integrálů, různých konvolutorních vztahů a podobně. Poměrně masivní využívání spektrálních postupů při modelování bylo nastartováno v polovině sedmdesátých let dvacátého století po objevení algoritmu rychlé Fourierovy transformace (FFT, z anglického Fast Fourier Transform). Tento algoritmus je založený na tzv. diskrétní Fourierově transformaci (DFT), bez které se neobejdeme, chceme-li realizovat modelování počítači. Vedl k takovému zefektivnění výpočtu, že přecházet při modelování do spektrální oblasti pomocí Fourierovy transformace představuje většinou skutečně velmi rychlou a nenáročnou operaci.

V oblasti zpracování dat je aplikací spektrálních metod nepřeberné množství a nemá smysl se snažit je zde vyjmenovávat. Čtenář jistě řadu z nich objeví sám při své výzkumné praxi.

Uveďme zde jen, že už samotné spektrum spočtené z naměřených dat umožňuje získat důležité informace o povaze měřeného fyzikálního jevu a eventuálně o jeho zdrojích, jakož i o různých instrumentálních efektech. Poskytne nám totiž znalost případné převládající frekvence, šířky a rychlosti ubývání spektra s rostoucí frekvencí a podobně.

Spektrální metody dále hrají důležitou roli při zkvalitnění dat pro zpracování (např. potlačení šumu, zesílení některých periodických komponent atd.). Velké uplatnění nacházejí nejrůznější metody filtrace, které se většinou pro zjednodušení provádějí právě ve spektrální oblasti.

1.2 Zavedení pojmu signál a související terminologie

Fourierova spektrální analýza pracuje s terminologií, kterou je třeba jasně definovat, neboť často není jednoznačná a různí autoři používají ve stejném významu různé pojmy nebo naopak, pro různé významy shodný termín, což může být pro čtenáře matoucí. V této podkapitole definujeme jeden ze základních pojmů vyskytující se ve spektrální analýze, pojem signál. Čtenář možná zná tento pojem z oblasti zpracování dat, kde se často vyskytuje ve slovní dvojici signál - šum. V teorii spektrální analýzy má však tento pojem mnohem obecnější význam a označuje funkci, která představuje „vstup“ nebo „výstup“ příslušných Fourierovských transformací (a v tomto smyslu může zahrnovat i výše zmíněný šum).

Definujme **spojitý signál**.

Definice:

Spojitý signál je obecně komplexní funkce reálné proměnné: $s(t); t \in R$.

Ve speciálním případě se samozřejmě může jednat o reálnou funkci (tj. imaginární část výše uvedené funkce je nulová) a pak hovoříme o reálném spojitém signálu. Příklad takového signálu je na obrázku 1.1a. V případě vícedimenzionální analýzy se pak jedná o funkci ne jedné, ale více reálných proměnných, $s(t_1, t_2, \dots, t_n); t_i \in R$. Je důležité zdůraznit, že výše uvedené definici odpovídá i funkce na obrázku 1.1b. Pro definici spojitého signálu je totiž podstatný definiční obor, v našem případě množina (podmnožina) reálných čísel, a nikoliv to, zda je daná funkce v matematickém smyslu spojitá.

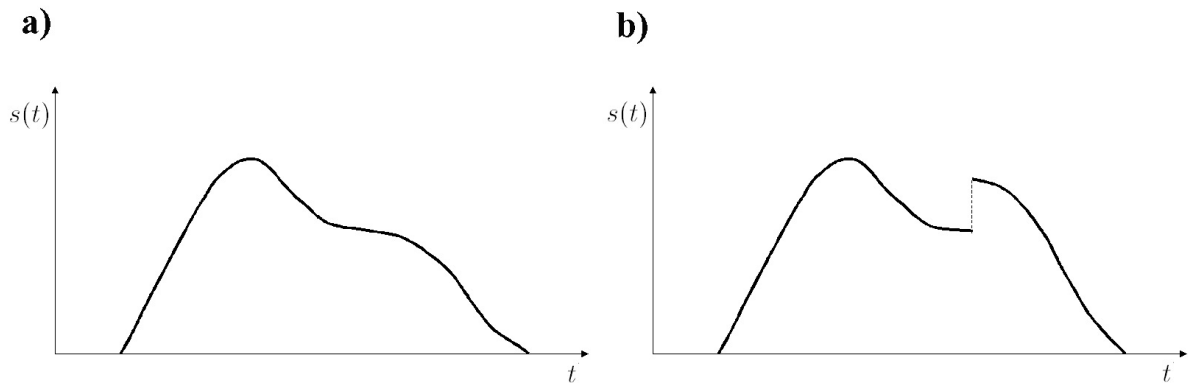
Dále definujme **diskrétní signál**:

Definice

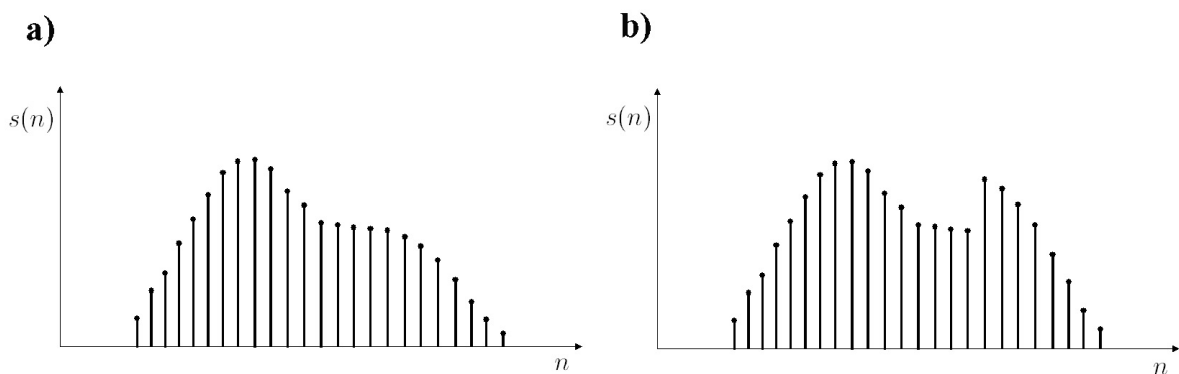
Diskrétní signál je obecně komplexní funkce celočíselné proměnné: $s(n); n \in Z$.

Speciálně se opět může jednat o reálný diskrétní signál nebo o funkci více než jedné celočíselné proměnné $s(n_1, n_2, \dots, n_k); n_i \in Z$. Diskrétní signál lze chápat též jako posloupnost, $\{s_n = s(n)\}$. Může se jednat o zcela libovolnou posloupnost, nás však v tomto kurzu budou zajímat zejména diskrétní signály, které vzniknou přirozeně ze spojitých signálů tzv. **diskretizací** neboli **vzorkováním**, tj. odebráním ekvidistantních vzorků s nějakým vzorkovacím krokem Δt ¹. Diskrétní

¹V praxi sice existují i signály s nerovnoměrným vzorkováním, což je dáno například specifickými okolnostmi



Obrázek 1.1: a) Schematické znázornění spojitého signálu. b) Spojitý signál, který je z matematického hlediska nespojitou funkcí.



Obrázek 1.2: a) Schematické znázornění diskrétního signálu vzniklého vzorkováním signálu z Obr. 1.1a. b) Diskrétní signál odpovídající spojitému signálu z Obr. 1.1b.

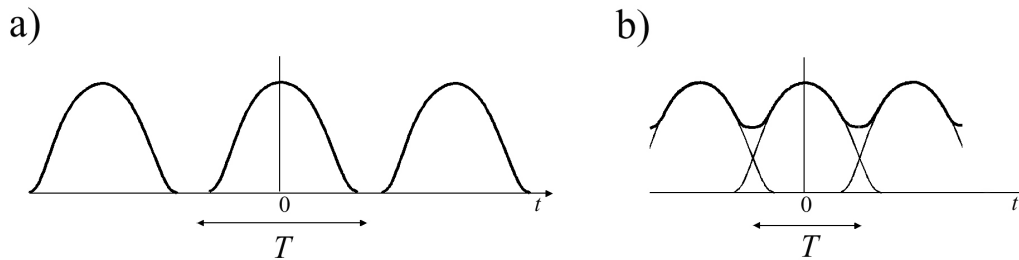
signál je pak tvořen těmito vzorky jimž je přiřazen celočíselný index (celočíselná proměnná), $s_n = s(n\Delta t)$. Příklady diskrétních signálů vzniklých diskretizací spojitých signálů z obrázku 1.1 jsou na obrázku 1.2. Poznamenejme, že nespojitost funkce na obrázku 1.1b se v jeho diskrétní verzi (obrázek 1.2b) projevuje výraznou změnou funkční hodnoty mezi dvěma sousedními vzorky. Jak uvidíme později, tyto rysy signálu (skok, respektive prudká změna funkční hodnoty) mohou ve spektrální analýze způsobovat nepříjemné numerické problémy.

V souvislosti s diskrétním signálem je vhodné objasnit ještě pojem „digitální signál“. Diskrétní signál je čistě matematický objekt, se kterým pracujeme v rámci teorie spektrální analýzy, zatímco digitální signál lze chápat jako jeho praktickou realizaci. Zakladní rozdíl je v tom, že diskrétní signál může nabývat libovolných funkčních hodnot (komplexních, případně reálných čísel), avšak funkční hodnoty digitálního signálu jsou dány vždy jistým zaokrouhlením v důsledku přesnosti měřicího či výpočetního zařízení. Příkladem digitálního signálu může být třeba digitální obrázek. Každému pixelu je přiřazena jedna barva z předem daného konečného počtu barev, tedy ne zcela libovolná barva. V tomto učebním textu budeme pracovat pouze s výše definovanými spojitými a diskrétními signály a digitálními signály se zabývat nebudeme.

Věnujme ještě pozornost volbě definičního oboru spojitých či diskrétních signálů, se kterými budeme dále pracovat. V praxi se často setkáváme se signály zadanými na konečném intervalu,

při sběru dat, jejich spektrální analýzou se však v tomto kurzu zabývat nebudeme.

tedy signály s omezeným nosičem. Nosič signálu je uzávěr té podmnožiny definičního oboru, na které signál nabývá nenulových hodnot. Z hlediska teorie Fourierovských transformací je však často výhodné rozšířit uměle definiční obor na celou množinu R , R^2 , ..., R^n , případně Z , Z^2 , ..., Z^n , a uvažovat příslušné sumy a integrály definující dané transformace v mezích od $-\infty$ do $+\infty$. Toto rozšíření definičního oboru na neomezený interval je možné provést dvojím způsobem: doplněním nulami nebo takzvanou **periodizací**, tj. nasčítáním spočetně mnoha signálů z původního konečného intervalu, vzájemně posunutých o kladnou konstantu T (obrázek 1.3a, b). Tímto postupem vzniklý signál \tilde{s} je periodický právě s periodou T , tedy platí $\tilde{s}(t) = \tilde{s}(t + kT)$ pro všechna celá k . Obdobně pro diskrétní signál bychom periodizací dostali diskrétní periodický signál s periodou např. N vzorků, $\tilde{s}(n) = \tilde{s}(n + kN)$. Zobecnění na vícedimenzionální signály je jednoduché — periodizaci musíme provést pro každou proměnnou zvlášť, přičemž periody pro různé proměnné mohou být obecně různé. Poznamenejme, že periodicky prodloužený signál nejenže nenese žádnou dodatečnou informaci oproti signálu na původním konečném intervalu (neboť je jen periodickým opakováním), ale dokonce se z důvodů případného překrývání vzájemně posunutých signálů při jejich nasčítávání může lišit od tohoto signálu i na původním intervalu, takže původní informace je částečně nebo zcela znehodnocena (viz. obrázek 1.3b). Tomuto efektu nežádoucího překrývání říkáme **efekt alias**. Dochází k němu tehdy, je-li délka periody menší než délka původního nosiče. Často se tomuto efektu nelze vyhnout, např. periodizujeme-li signály, jejichž nosič nebyl omezený. Jak uvidíme později, efekt periodizace je nevyhnutelným důsledkem diskretizace signálu v oblasti komplementární z hlediska Fourierovských transformací. Nevhodná perioda souvisí s nedostatečným (příliš řídkým) vzorkováním, a tak může k efektu alias dojít i u signálů s původně omezeným nosičem.



Obrázek 1.3: a) Periodizace bez překrývání. b) Periodizace s překrýváním, efekt alias.

V předcházejícím odstavci byl použit pojem komplementární oblasti ve Fourierově analýze. Myslí se tím oblastí definičního oboru signálu vstupujícího „do“ nebo vystupujícího „z“ Fourierovských transformací, zejména z hlediska fyzikálního významu příslušných proměnných. Vlastní fyzikální význam není sice pro tyto transformace z matematického hlediska vůbec důležitý, ale hodí se pro terminologické rozlišení daných oblastí. Například: tradičně byla Fourierova analýza používána pro zpracování časových řad nějakých měřených hodnot, proto byly signály vstupující do Fourierovských transformací chápány přirozeně jako funkce času. Příslušné transformace tedy představují zobrazení z tzv. **časové oblasti**. V těchto skriptech budeme pro jednoduchost důsledně používat termín časová oblast, přestože proměnnou signálu vstupujícího do transformací čas nemusí vůbec být - příslušnou proměnnou může být např. prostorová souřadnice a podobně. Na výstupu z transformací pak v případě času v časové oblasti nacházíme signál, který je funkcí frekvence. Někteří autoři proto užívají termín frekvenční oblast, my zde však dáme přednost obecnějšímu pojmenování **spektrální oblast**. Výstupní signál pak nazýváme **spektrum**. Fourierovské transformace tedy představují vzájemně jednoznačné zobrazení mezi výše

zmíněnými komplementárními oblastmi, tj. časovou oblastí a spektrální oblastí.

1.3 Vymezení obsahu kurzu – základní syllabus.

Jak již název napovídá, tento kurz se zabývá teoretickými základy Fourierovy spektrální analýzy. Čtenář v něm tedy nenajde praktické postupy a metody pro zpracování měřených dat, jako např. různé metody filtrace, odstraňování šumu, hledání skrytých periodicit, korelace a podobně. Jedná se sice o velmi užitečné postupy, ale pro detailní seznámení odkazujeme čtenáře na jiné kurzy a učební texty.

Zde probereme postupně zejména čtyři Fourierovské transformace a jejich vzájemné vztahy, viz. schéma na obrázku 1.4. Začneme Fourierovou řadou spojitého signálu, tedy transformací, která přiřazuje spojitému (periodickému) signálu jeho Fourierovu řadu, tedy vlastně posloupnost Fourierových koeficientů, čili diskretní spektrum. Této transformaci je věnována relativně velká pozornost hlavně ze dvou důvodů: 1) má velký praktický význam v teorii analýzy periodických procesů, 2) jako u první z probíraných transformací u ní vysvětlíme podrobněji některé vlastnosti, které pak u dalších transformací zmíníme již stručněji s poukazem na analogii právě s Fourierovou řadou. Dále probereme Fourierovu transformaci zobrazující spojitý neperiodický signál na spojité neperiodické spektrum. Tato transformace má zásadní význam pro práci s tzv. přechodnými signály a je jí v těchto skriptech věnována opět poměrně značná část textu. Další v pořadí je Fourierova transformace diskretního signálu, tedy transformace mezi diskretním (neperiodickým) signálem a spojitým (periodickým) spektrem. Hlavní význam této transformace spočívá v tzv. vzorkovacím teorému. Z pedagogického hlediska je též tato transformace důležitým mezikrokem pro výklad poslední z probíraných transformací: Fourierovy řady diskretního signálu, tedy přiřazení mezi dvěma diskretními periodickými signály. Tato transformace má velmi blízko k tzv. diskretní Fourierově transformaci (DFT), která je nezastupitelná při numerické realizaci všech výše uvedených transformací. Velký důraz je v těchto skriptech kladen na vzájemné vztahy těchto transformací včetně problematiky přepočítání jednoho typu spektra na druhý.

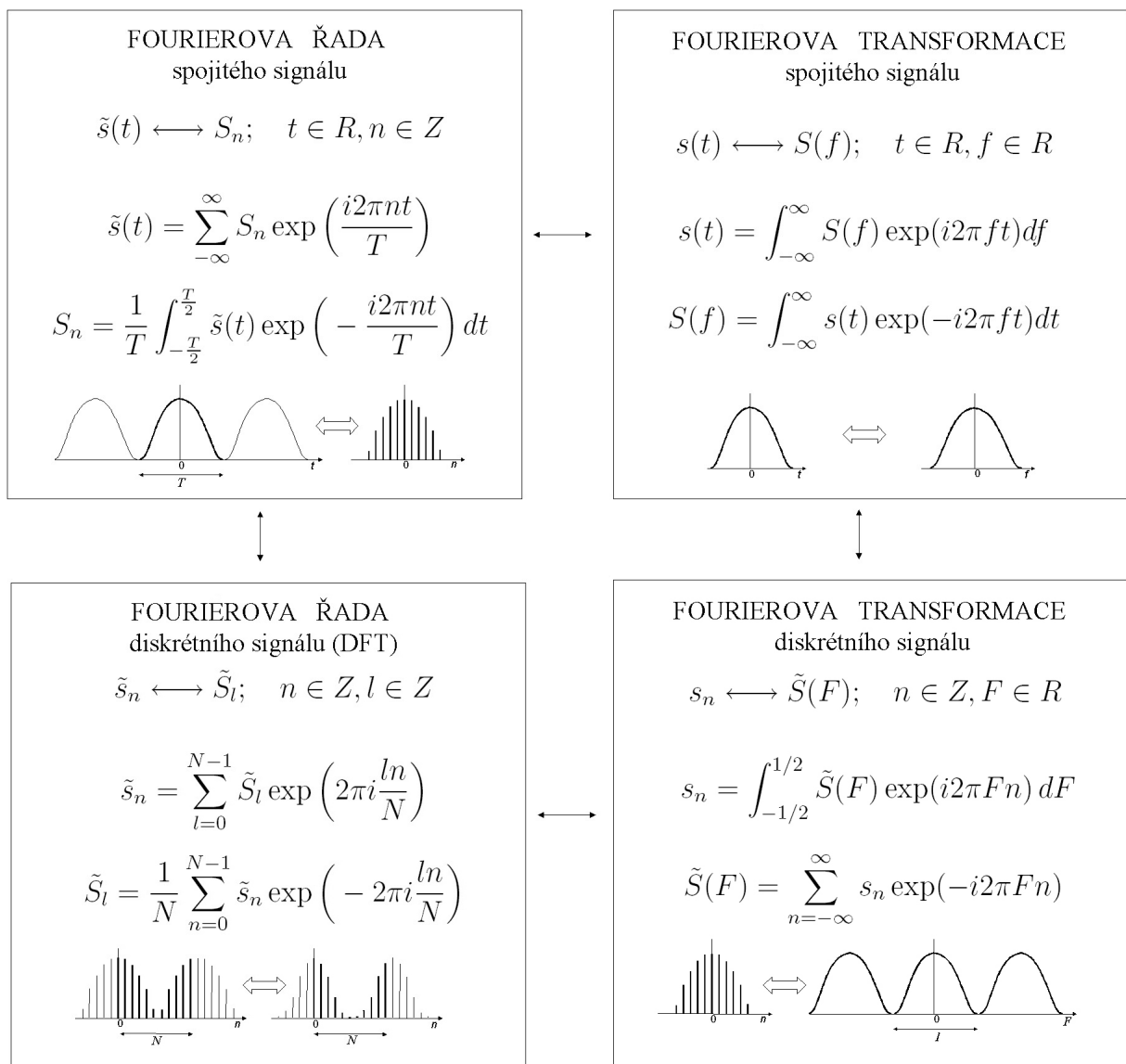
Po formální stránce se tato skripta liší od klasických skript základních matematických kurzů. Struktura „definice - věta - důkaz“ zde není striktně dodržována. Důkazy jsou uváděny hlavně pokud slouží lepšímu pochopení probírané látky. Velká pozornost je naopak věnována různým komentářům a poznámkám doplňujícím výklad s cílem lepšího pochopení vzájemných vazeb a souvislostí a zasazení probíraných témat do širšího kontextu. To usnadní čtenáři lépe se v problematice orientovat a připraví půdu pro snadné použití teoretických základů Fourierovy spektrální analýzy v praktických aplikacích. Čtenáře, který by si chtěl vynechané důkazy doplnit, odkazují na seznam doporučené literatury. Text je doplněn řešenými příklady a též řadou cvičení, jejichž výsledky lze najít v závěrečné části skriptu.

V průběhu výkladu výše zmíněných čtyř transformací se dotkneme ještě řady doplňkových témat. Na závěr této podkapitoly proto uvedeme podrobnější syllabus kurzu v základních bodech:

- Fourierovy řady

Pojem Hilbertova prostoru a jeho základní vlastnosti, ortogonální a ortonormální posloupnosti, úplné systémy, obecné Fourierovy řady.

Exponenciální tvar Fourierovy řady, trigonometrická Fourierova řada, konvergence Fourierových řad, Gibbsův jev, základní vlastnosti Fourierových řad, operace nad řadami.



Obrázek 1.4: Typy probíraných Fourierových transformací (vlnovka nad písmenem značí periodickou funkcií).

Fourierovy řady ve váhovém prostoru, rozvoje podle vlastních funkcí, rozvoje do ortonálních polynomů.

Fourierovy řady více proměnných.

- Fourierova integrální transformace

Fourierova věta, Fourierova transformace, sinová a kosinová transformace, vlastnosti Fourierovy transformace, druhy spekter.

Vícerozměrná Fourierova transformace.

Fourierova transformace speciálních funkcí, Fourierova transformace periodických funkcí, vzorkovací funkce.

Lineární filtrace, impulzní odezva, přenosová funkce.

- Hilbertova transformace

Základní vlastnosti, Hilbertova transformace a kauzální funkce, numerický výpočet Hilbertovy transformace, analytické signály.

- Spektrální analýza diskrétních signálů

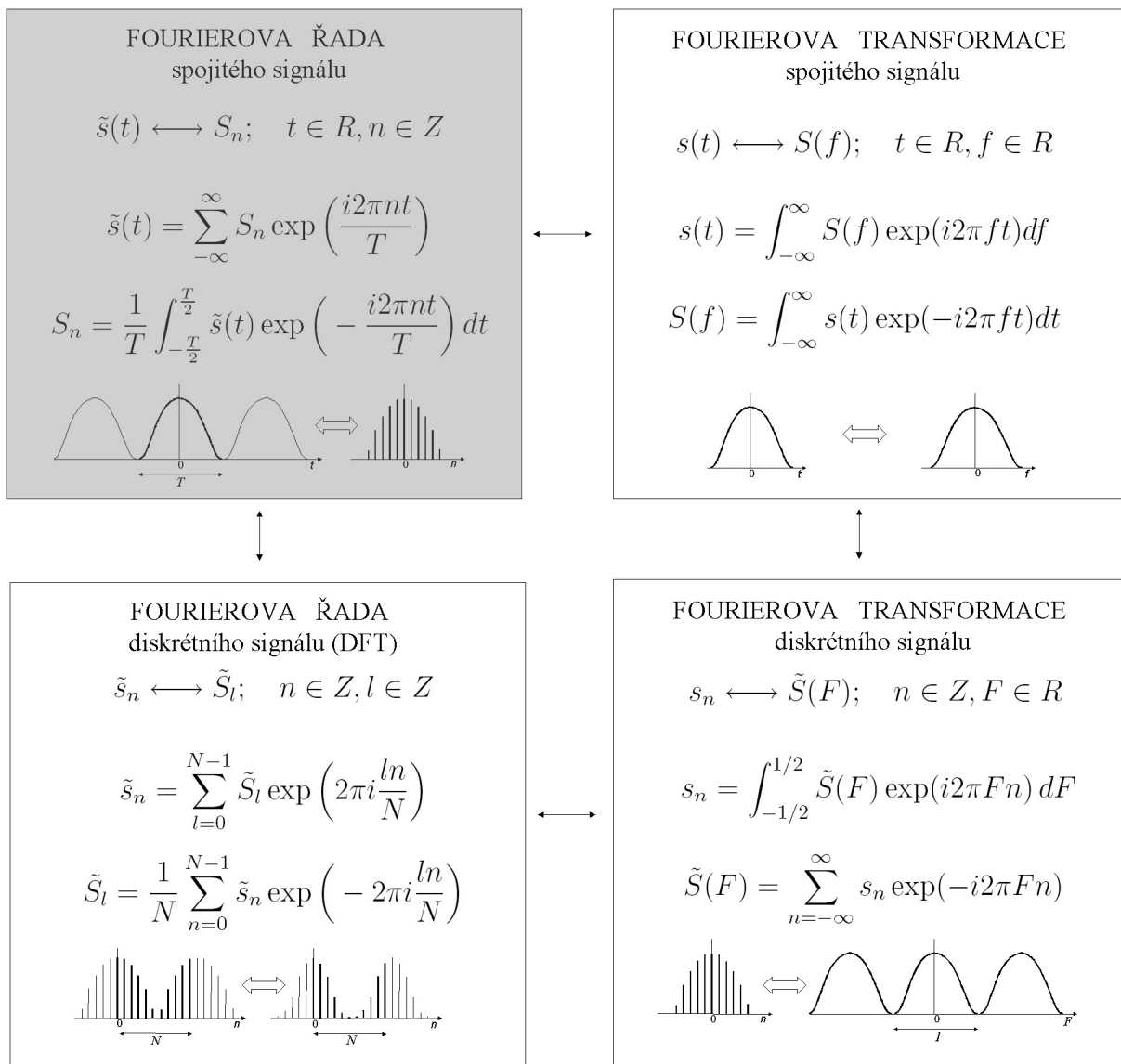
Fourierova transformace diskrétního signálu, základní vlastnosti, vzorkovací teorém, vztah spektra spojitého a diskrétního signálu.

Fourierova řada diskrétního signálu, základní vlastnosti, vztah Fourierovy řady spojitého a diskrétního signálu, vztah Fourierovy transformace a Fourierovy řady diskrétního signálu.

Diskrétní Fourierova transformace, alias ve frekvenční a časové oblasti.

Kapitola 2

FOURIEROVA ŘADA SPOJITÉHO SIGNÁLU



V této kapitole je naším cílem vybudovat aparát umožňující rozvinout ve Fourierovu řadu libovolný spojitý signál $s(t) \in L_2(a, b)$, tj. funkci, pro niž

$$\int_a^b |s(t)|^2 dt$$

existuje (má konečnou hodnotu). Absolutní hodnotu v integrandu nelze obecně vynechat, neboť připouštíme i komplexní funkce (signály): $s(t) = \Re\{s(t)\} + i\Im\{s(t)\}$. Kvadrát absolutní hodnoty je pak $|s(t)|^2 = \Re\{s(t)\}^2 + \Im\{s(t)\}^2$, zatímco prostý kvadrát by byl $s(t)^2 = \Re\{s(t)\}^2 + 2i\Re\{s(t)\}\Im\{s(t)\} - \Im\{s(t)\}^2$. Oba kvadráty jsou shodné pouze pro reálné signály, pro něž je $\Im\{s(t)\} = 0$.

Hned úvodem poznamenejme několik slov k volbě třídy funkcí (signálů), pro kterou je v matematické literatuře teorie Fourierových řad vybudována, tedy $L_2(a, b)$. Pro konečné intervaly platí, že je-li funkce z $L_2(a, b)$, je na $\langle a, b \rangle$ i absolutně integrovatelná, tj. patří i do třídy $L_1(a, b)$. To má význam zejména budeme-li se zajímat o vztah Fourierovy řady a Fourierovy transformace (kapitola 3), neboť teorie Fourierovy transformace je tradičně vybudována pro absolutně integrovatelné funkce. Na neomezených intervalech obecně obě třídy nesplývají a ani jedna není podmnožinou té druhé. Z hlediska praktických aplikací obou transformací nás však rozdíl mezi oběma třídami nemusí příliš trápit, neboť signály, se kterými v aplikacích pracujeme, patří do obou tříd.

Rozvinout funkci v řadu znamená napsat ji např. ve tvaru řady s obecně komplexními koeficienty c_i :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i,$$

kde komplexní funkce $\{\phi_i\}$ tvoří posloupnost a řada v nějakém smyslu konverguje. V tomto kurzu se soustředíme na takové rozvoje, kde koeficienty c_i jsou speciálně Fourierovy koeficienty (viz. dále), a funkce $\{\phi_i\}$ tvoří tzv. úplný ortogonální systém v úplném Hilbertově prostoru $L_2(a, b)$.

Předpokládám, že teorie lineárních prostorů a speciálně Hilbertových prostorů je čtenáři známa z předcházejících matematických kurzů, proto zde stručně zopakujeme jen několik základních definic a vlastností těchto prostorů se zřetelem na aplikace pro Fourierovy řady.

2.1 Zavedení Hilbertova prostoru a základních souvisejících pojmů

Uvažme obecně komplexní lineární (tj. vektorový) prostor. Prvek takového prostoru nazveme vektorem. Linearita prostoru znamená, že je v něm definován součet prvků, součin prvku s číslem, platí komutativní a asociativní zákon, existuje opačný a nulový prvek a platí distributivní zákon. Pro nás je důležité si uvědomit, že prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem na intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy výše zavedený prostor $L_2(a, b)$, je takovým lineárním prostorem. Pod pojmem vektor se tedy může myslet např. funkce z $L_2(a, b)$. Dalšími příklady vektorových prostorů jsou množiny C^n a R^n , kde vektorem se rozumí n -tice komplexních či reálných čísel $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Posledně jmenovaný případ už má blízko k představě vektoru, jak jej známe z fyziky.

V teorii lineárních vektorových prostorů hraje důležitou roli tzv. skalární součin. Definujme prostor se skalárním součinem, který tvoří též základ pro definici tzv. Hilbertova prostoru (viz dále), nezbytného pojmu v oblasti Fourierových řad a spektrální analýzy vůbec.

Definice (Komplexní vektorový prostor se skalárním součinem):

Prostor V nazveme komplexní vektorový prostor se skalárním součinem, pokud k uspořádané dvojici prvků $x, y \in V$ je přiřazeno komplexní číslo (x, y) , nazývané skalární součin, s vlastnostmi:

1. $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (komplexně sdružené).
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ pro $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.
4. (x, x) je reálné číslo ≥ 0 pro $\forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Z výše uvedených definičních podmínek pak plynou další užitečné vztahy, např.

$$2 \Rightarrow (x + y, z) = \overline{(z, x + y)} = \overline{(z, x)} + \overline{(z, y)} = (x, z) + (y, z).$$

$$3 \Rightarrow (x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \bar{\alpha}(x, y).$$

Příkladem takového vektorového prostoru je např. n -dimenzionální prostor komplexních čísel \mathbb{C}^n , kde $(\xi, \mu) = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\mu}_i$, nebo n -dimenzionální prostor reálných čísel \mathbb{R}^n , kde $(\xi, \mu) = \sum_{i=1}^n \xi_i \mu_i$. Pro nás je zde však nejdůležitější fakt, že i prostor $L_2(a, b)$ je takovým vektorovým prostorem. Skalární součin dvou komplexních funkcí $f, g \in L_2(a, b)$ je definován jako integrál:

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \int_a^b [\Re\{f(t)\}\Re\{g(t)\} + \Im\{f(t)\}\Im\{g(t)\}] dt + i \int_a^b [\Im\{f(t)\}\Re\{g(t)\} - \Re\{f(t)\}\Im\{g(t)\}] dt \end{aligned}$$

Důkazy podmínek 1 – 3 v hořejší definici jsou zřejmé z vlastností integrálů. K podmínce 4 poznamenejme, že z $(f, f) = \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$ neplyne, že je f identicky rovna 0 (ve všech bodech). Nenulová však může být pouze na množině míry 0, tj. je nulová skoro všude.

Dále definujme velikost vektoru a vzdálenost dvou vektorů ve vektorovém prostoru se skalárním součinem.

Definice (Velikost vektoru neboli tzv. norma):

Velikostí vektoru x v V (normou) nazýváme číslo $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.

Například v prostoru \mathbb{R}^n je tedy velikost dána jako $\|\xi\|_{\mathbb{R}^n} = (\sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{\frac{1}{2}}$. V prostoru $L_2(a, b)$ se velikostí vektoru f rozumí integrál:

$$\|f\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definice (Vzdálenost vektorů neboli tzv. metrika):

Vzdáleností dvou vektorů x a y v V (metrikou) nazýváme číslo $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Vzdálenost vektorů je symetrická ($\rho(x, y) = \rho(y, x)$) a splňuje tzv. trojúhelníkovou nerovnost ($\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$). Například v prostoru R^n je vzdálenost dána jako $\rho(\xi, \mu)_{R^n} = (\sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu_i)^2)^{\frac{1}{2}}$. Nás však zde zejména zajímá vzdálenost dvou funkcí v prostoru $L_2(a, b)$, která je dána jako integrál:

$$\rho(f, g)_{L_2(a, b)} = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vzdálenost dvou funkcí v L_2 se často nazývá **střední kvadratická odchylka**. Opět připomeňme jisté specifikum prostoru L_2 : je-li střední kvadratická odchylka dvou funkcí nulová, neznamená to, že jsou si obě funkce identicky rovny – mohou se vzájemně lišit na množině míry 0. Podobně, je-li střední kvadratická odchylka malá, neznamená to, že obě funkce jsou si blízko ve všech bodech sledovaného intervalu, lokálně se mohou od sebe vzdálit aniž by to příliš výrazně ovlivnilo hodnotu výše uvedeného integrálu na celém intervalu $\langle a, b \rangle$.

Máme-li zavedenou vzdálenost, můžeme uvažovat o konvergenci nějaké posloupnosti ve vektorovém prostoru a o definici tzv. Hilbertova prostoru. Pro definici Hilbertova prostoru je kromě skalárního součinu podstatná i tzv. úplnost prostoru.

Definice (Hilbertův prostor):

Hilbertův prostor H je komplexní vektorový prostor se skalárním součinem, který je úplný, tj. každá Cauchyovská posloupnost prvků z H je v H konvergentní:

$$x_n \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \rho(x_n, x_{n_0}) \leq \varepsilon,$$

Jinými slovy: úplný Hilbertův prostor H je natolik "hustý", že každá Cauchyovská posloupnost vektorů z tohoto prostoru konverguje k nějakému vektoru v H . Pro pohodlí čtenáře připomeňme ještě, co je to Cauchyovská posloupnost $x_n \in H$. Je to taková posloupnost, pro niž platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall p > 0 \quad \text{a} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{je} \quad \rho(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti $\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_{n+p}, x)$ plyne, že každá posloupnost konvergující v H (k limitě x) je Cauchyovská, neboť pro dostatečně velké n je pravá strana nerovnosti dostatečně malá. V definici úplného prostoru máme však opačnou implikaci.

Prostory R^n a C^n jsou úplné. Z hlediska dalšího výkladu je podstatné následující tvrzení:

Věta:

$L_2(a, b)$ je úplný Hilbertův prostor.

Důkaz tohoto tvrzení může čtenář najít např. v knize Kufner & Kadlec (1969).

Poznamenejme, že v případě $L_2(a, b)$ se jedná o tzv. konvergenci v průměru (někdy též nazývanou konvergencí podle středu).

Definice (Konvergence v průměru):

Existuje-li funkce $f \in L_2(a, b)$ a posloupnost $\{f_n\} \in L_2(a, b)$ a platí-li, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = 0$$

pak $\{f_n\}$ konverguje k f v průměru.

Limita v tomto smyslu je jednoznačná – konverguje-li posloupnost k nějaké funkci z $L_2(a, b)$, nemůže zároveň konvergovat k jiné funkci z téhož prostoru, tj. k funkci, která by se lišila víc než na množině míry 0. Konverguje-li $\{f_n\}$ v $L_2(a, b)$ stejnoměrně, pak také konverguje v průměru. Z obyčejné, obecně nestejnoměrné, bodové konvergence neplyne konvergence v průměru. Platí i opačné tvrzení: z konvergence v průměru neplyne konvergence bodová.

2.2 Ortonormální posloupnosti a obecné Fourierovy řady

Objasněme nejprve, co jsou to ortogonální a ortonormální vektory v Hilbertově prostoru.

Definice (Ortogonalita):

$x, y \in H$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, jsou vzájemně ortogonální, je-li $(x, y) = 0$.

Definice (Ortonormalita):

$x, y \in H$ jsou vzájemně ortonormální, je-li $(x, y) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$.

Připomeňme, že symbol δ_{ij} ve výše uvedené definici se nazývá Kroneckerovo delta.

Důležitou roli v teorii Fourierových řad hrají tzv. úplné ortonormální posloupnosti. Mějme ortonormální posloupnost $\{e_i\}$ v H : $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $\|e_i\| = 1$.

Definice (Úplná ortonormální posloupnost):

Ortonormální posloupnost vektorů $\{e_i\}$ v úplném Hilbertově prostoru H je úplná \Leftrightarrow je-li $x \in H$ takový vektor, že $(x, e_i) = 0 \quad \forall i \Rightarrow x = 0$.

Jinými slovy: v případě úplné posloupnosti neexistuje $x \neq 0$ takový, který by byl ortogonální ke všem prvkům této posloupnosti. Taková posloupnost $\{e_i\}$ se též nazývá báze Hilbertova prostoru. Skalární součiny $x_i = (x, e_i)$ pak představují souřadnice vektoru v dané bázi.

V konkrétním Hilbertově prostoru mohou být různé báze vyhovující této definici. Dokonce jich může být nekonečně mnoho. Všechny ale mají stejnou mohutnost neboli dimenzi. Objasněme si to na názorném příkladu prostoru R^3 , tj. trojic reálných čísel. Takové vektory odpovídají naší představě vektorů ve fyzikálním smyslu. Můžeme najít nekonečně mnoho tripletů vzájemně ortogonálních jednotkových vektorů a vůči těmto různým bázím pak vyjadřovat souřadnice libovolných dalších vektorů z tohoto Hilbertova prostoru. Jak víme, prostor R^3 je úplný. Vzájemně ortogonální triplety v něm tvoří úplné ortonormální posloupnosti, tj. žádný další (nenulový) vektor už k nim nemůže být ortogonální. Tuto názornou představu můžeme rozšířit i na prostor $L_2(a, b)$ s tím rozdílem, že vektory zde tvoří funkce integrovatelné s kvadrátem na daném intervalu a dimenze tohoto prostoru je nekonečná, tj. úplné ortogonální posloupnosti mají nekonečně (spočetně mnoho) prvků. V dalším si ukážeme celou řadu příkladů úplných ortogonálních soustav funkcí z $L_2(a, b)$, které se nám budou hodit pro konstruování Fourierových řad.

Uvažme obecnou ortonormální posloupnost $\{e_i\}$ v Hilbertově prostoru H . Dále uvažme v H nějaký vektor y , který chceme aproximovat lineární kombinací prvních n prvků z $\{e_i\}$, tj. chceme najít takovou lineární kombinaci $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in C$, jejíž vzdálenost od y bude co možná nejmenší.

Snadno dokážeme následující tvrzení:

Věta (O nejlepším přiblížení):

Konečná řada $\sum_{i=1}^n c_i e_i$ s koeficienty $c_i = (y, e_i)$ je nejlepším možným přiblížením k vektoru y ze všech možných lineárních kombinací $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

Tedy v případě nejlepšího přiblížení jsou koeficienty λ_i tvořeny speciálně jako skalární součiny aproximovaného prvku a příslušného vektoru z ortonormální posloupnosti, $\lambda_i = c_i = (y, e_i)$.

Důkaz:

Chceme minimalizovat vzdálenost $\|y - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|$. Z důvodů snadnějších úprav budeme místo toho minimalizovat její kvadrát. S využitím vlastností skalárních součinů můžeme psát:

$$0 \leq \|y - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 = (y - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, y - \overline{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i}) = \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, y) -$$

$$- \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i (y, e_i) + \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \|y\|^2 + \sum_{i=1}^n [\lambda_i - (y, e_i)][\bar{\lambda}_i - (e_i, y)] - \sum_{i=1}^n |(y, e_i)|^2 =$$

$$= \|y\|^2 + \sum_{i=1}^n |\lambda_i - (y, e_i)|^2 - \sum_{i=1}^n |(y, e_i)|^2.$$

Tato veličina bude minimální, eliminujeme-li prostřední člen na posledním řádku, tj. zvolíme-li $\lambda_i = (y, e_i)$, c.b.d.

Z výše uvedeného odvození také plyne tzv. Besselova nerovnost. Pro nejlepší přiblížení, tj. pro volbu $\lambda_i = (y, e_i)$, totiž okamžitě dostáváme:

$$\|y\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |(y, e_i)|^2.$$

Jak již bylo řečeno, vektor y může reprezentovat funkci s z $L_2(a, b)$. Pak rovněž prvky ortonormální posloupnosti jsou funkce z tohoto prostoru. Omezme se v dalším již jen na tento případ pro jeho využití v problematice rozvíjení funkce v řadu¹. Je zřejmé, že výše uvedené odvození pro nejlepší přiblížení se nezmění budeme-li zvyšovat počet členů v lineární kombinaci. I při $n \rightarrow \infty$, pokud řada $\sum_{i=1}^{\infty} (s, e_i)e_i$ konverguje, je její součet stále nejlepším přiblížením k funkci s . Besselova nerovnost je pak:

$$\|s\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |(s, e_i)|^2. \quad (2.1)$$

Abychom však mohli řadu $\sum_{i=1}^{\infty} (s, e_i)e_i$ považovat za rozvoj funkce s , bylo by třeba aby tato řada byla nejen nejlepším přiblížením, ale konvergovala přímo k funkci s . To znamená, aby vzdálenost (střední kvadratická odchylka) jejího součtu od s byla rovna nule. V tom případě, by v nerovnosti (2.1) „ \geq “ přešlo na „ $=$ “, tj. Besselova nerovnost by přešla na tzv. Parsevalovu rovnost:

$$\|s\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(s, e_i)|^2. \quad (2.2)$$

Shrňme tyto úvahy do následující věty:

Věta:

Řada $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, s koeficienty $c_i = (s, e_i) \in C$, kde $\{e_i\} \in L_2(a, b)$ je ortonormální posloupnost, konverguje k funkci $s \in L_2(a, b) \iff$ platí Parsevalova rovnost $\|s\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(s, e_i)|^2$.

Využití této věty pro praxi při vytváření rozvoje funkce s je však problematické, neboť ověřit přímo platnost Parsevalovy rovnosti může být obecně dosti obtížné.

Naštěstí můžeme v této situaci s výhodou využít následující důležitou větu (její důkaz může čtenář najít např. v knize Kadlec & Kufner, 1969):

¹Poznamenejme, že další výklad včetně dvou následujících matematických vět není vázán pouze na prostor $L_2(a, b)$ a je možno jej zobecnit na libovolný Hilbertův prostor H .

Věta:

Ortonormální soustava $\{e_i\} \in L_2(a, b)$ je v $L_2(a, b)$ úplná $\iff \forall s \in L_2(a, b)$ platí Parsevalova rovnost $\|s\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(s, e_i)|^2$.

Jelikož obě věty mají formu ekvivalence a v obou jde o platnost Parsevalovy rovnosti, můžeme jejich spojením dostat okamžitě tvrzení, které hraje zásadní roli při rozvíjení funkce v řadu:

Věta:

Řada $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, $c_i \in \mathbb{C}$, $e_i \in L_2(a, b)$, s koeficienty $c_i = (s, e_i)$ konverguje k funkci $s \in L_2(a, b)$ \iff soustava $\{e_i\}$ je v $L_2(a, b)$ ortonormální a úplná.

Čtenář by mohl na tomto místě namítnout, že převedením problému platnosti Parsevalovy rovnosti na problém úplnosti nějaké ortonormální soustavy funkcí z $L_2(a, b)$ jsme si příliš nepomohli, neboť i důkaz zmíněné úplnosti může být velmi náročný. To je jistě pravda, ale my zde využijeme toho, že u řady standardních soustav funkcí z $L_2(a, b)$ (např. soustavy trigonometrických a exponenciálních funkcí, soustavy ortogonálních polynomů, soustavy vlastních funkcí jistých diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami, apod.) byla jejich úplnost již v minulosti dokázána, takže je můžeme bez obav využít pro rozvoj libovolné funkce z $L_2(a, b)$ v řadu a máme zaručeno, že tato řada konverguje k rozvíjené funkci alespoň v průměru. O konvergenci bodové, případně stejnoměrné pojednává podkapitola 2.6.

Na závěr této podkapitoly zavedeme ještě související terminologii. Rozvoj funkce konstruovaný výše uvedeným způsobem se nazývá obecný Fourierův rozvoj (nebo obecná Fourierova řada) a koeficienty získané skalárním součinem rozvíjené funkce s příslušnými funkcemi dané báze (úplné soustavy ortonormálních funkcí z $L_2(a, b)$) se nazývají Fourierovy koeficienty.

Naše dosavadní poznatky tedy shrnuje následující definice:

Definice (Fourierova řada):

Obecnou Fourierovou řadou funkce $s \in L_2(a, b)$ nazveme řadu $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, kde

$$c_i = (s, e_i) = \int_a^b s(t) \overline{e_i(t)} dt$$

a $\{e_i\}$ je úplný ortonormální systém v $L_2(a, b)$.

Množinu Fourierových koeficientů budeme nazývat diskrétním Fourierovým spektrem funkce. Poznamenejme, že hodnota koeficientů závisí na chování rozvíjené funkce v celém intervalu $\langle a, b \rangle$, protože celý tento interval tvoří meze integrálu pro výpočet Fourierových koeficientů. To znamená, že pokud nás zajímá rozvoj funkce jen v okolí nějakého bodu, nebude hodnota koeficientů rozvoje ovlivněna pouze lokálním chováním funkce v okolí tohoto bodu (tak jako je

tomu třeba u Taylorova rozvoje), ale jejím chováním v celém zájmovém intervalu. Prudká změna funkce, byť „daleko“ od bodu, ve kterém nás rozvoj zajímá, může zásadně ovlivnit koeficienty tohoto Fourierova rozvoje.

2.3 Úplné ortogonální systémy

V praxi je běžné používat k rozvojm funkcí v řadě nikoliv jenom úplné ortonormální soustavy, ale i soustavy ortogonálních funkcí, které se od těch ortonormálních liší pouze normováním (norma funkcí ortogonální soustavy není rovna 1).

Například, soustava funkcí:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

je úplná ortonormální v $L_2(-\pi, \pi)$.

K ní odpovídající ortogonální soustava na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ je:

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots,$$

která se používá tradičně v tzv. trigonometrické Fourierově řadě (viz. podkapitola 2.5). Pozor: volba intervalu zde hraje klíčovou roli. Na jiném intervalu nejenže tato soustava není ortonormální, ale ani ortogonální. Např. na $\langle 0, \pi \rangle$ dostaneme $\int_0^\pi 1 \cdot \sin t dt = 2 \neq 0$.

Rozdíl mezi rozvojem do řady ortonormálních a ortogonálních funkcí je pouze formální, ale musíme správným způsobem modifikovat vzorec pro výpočet Fourierových koeficientů. Máme-li na intervalu $\langle a, b \rangle$ úplnou ortogonální posloupnost

$$\{f_i\}; \quad (f_i, f_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \|f_i\|^2 \neq 0, & i = j, \end{cases}$$

odpovídající úplné ortonormální soustavě

$$\{e_i\}; \quad e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i,$$

dostaneme obecnou Fourierovu řadu ve tvaru

$$s = \sum_1^\infty (s, e_i) e_i = \sum_1^\infty \|f_i\|^{-2} (s, f_i) f_i, \quad (2.3)$$

tj., rozvíjíme do funkcí f_i s modifikovanými koeficienty

$$c_i = \|f_i\|^{-2} (s, f_i) = \|f_i\|^{-2} \int_a^b s(t) \overline{f_i(t)} dt. \quad (2.4)$$

Parsevalova rovnost bude mít v tomto případě tvar

$$\|s\|^2 = \sum_1^\infty \|f_i\|^{-2} |(s, f_i)|^2. \quad (2.5)$$

Uveďme zde nyní několik příkladů úplných ortogonálních soustav na konkrétních intervalech, které se používají pro „klasické“ Fourierovy řady:

$$L_2(-\pi, \pi) \quad 1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots \quad \in R \quad (2.6)$$

$$\dots, \exp(-it), 1, \exp(it), \exp(2it), \dots \quad \in C \quad (2.7)$$

$$L_2(-l, l) \quad 1, \cos(\pi t/l), \sin(\pi t/l), \cos(2\pi t/l), \dots \quad \in R \quad (2.8)$$

$$\dots, \exp(-\pi it/l), 1, \exp(\pi it/l), \exp(2\pi it/l), \dots \quad \in C \quad (2.9)$$

$$L_2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \quad 1, \cos(2\pi t/T), \sin(2\pi t/T), \cos(4\pi t/T), \dots \quad \in R \quad (2.10)$$

$$\dots, \exp(-2\pi it/T), 1, \exp(2\pi it/T), \exp(4\pi it/T), \dots \quad \in C \quad (2.11)$$

$$L_2(0, \pi) \quad 1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots \quad \in R \quad (2.12)$$

$$\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots \quad \in R \quad (2.13)$$

$$L_2(0, l) \quad 1, \cos(\pi t/l), \cos(2\pi t/l), \cos(3\pi t/l), \dots \quad \in R \quad (2.14)$$

$$\sin(\pi t/l), \sin(2\pi t/l), \sin(3\pi t/l), \dots \quad \in R \quad (2.15)$$

Později si ukážeme i další příklady úplných soustav, které nejsou odvozeny pouze z trigonometrických funkcí. Některé soustavy jsou tvořeny reálnými funkcemi, jiné komplexními. V každém případě i reálné soustavy můžeme použít pro rozvoj komplexních signálů.

Pokud nás zajímá rozvoj na nějakém jiném intervalu, než jsou intervaly uvedené výše, můžeme s výhodou využít větu o substituci a vytvořit nový úplný systém ortogonálních funkcí na nějakém obecném intervalu.

Věta (o substituci):

Nechť lineární substituce $t = Ax + B$, $A > 0$, převádí proměnnou $x \in \langle a, b \rangle$ na proměnnou $t \in \langle c, d \rangle$. Je-li $\{e_i(x)\}$ ortonormální a úplná v $L_2(a, b)$, pak $\{f_i(t)\}$, kde $f_i(t) = e_i\left(\frac{t-B}{A}\right)$, je ortogonální a úplná v $L_2(c, d)$.

Je zřejmé, že metodu substituce můžeme stejným způsobem použít i na soustavu, která je na původním intervalu $\langle a, b \rangle$ „pouze“ ortogonální a úplná, neboť normalizace vektorů nemá na tvrzení o jejich vzájemné ortogonalitě a úplnosti soustavy vliv. Čtenář si jistě povšimne, že některé z výše uvedených příkladů úplných ortogonálních soustav jsou vytvořeny právě touto substitucí. Například, substituce $t = \frac{l}{\pi}x$ (tj. $A = \frac{l}{\pi}$, $B = 0$) převádí interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ na interval $\langle -l, l \rangle$ a soustavy (2.6) a (2.7) na soustavy (2.8) a (2.9).

Domysleme metodu substituce ještě dále. Z konstrukce Fourierova koeficientu c_i (viz. definice v závěru minulé podkapitoly) je jasné, že provedeme-li substituci, změní se sice meze příslušného integrálu stejně jako argumenty funkcí v integrandu, ale na vlastní (číselnou) hodnotu integrálu substituce nemá vliv, tj. hodnota Fourierova koeficientu se nezmění. Budeme-li tedy např. v

rozvoji, které již známe, provádět různé lineární substituce, dostaneme příslušné Fourierovy řady obecně jiných funkcí (jiné proměnné), na jiném intervalu a pro jinou bázi (opět vytvořenou danou substitucí) avšak se stejnými koeficienty. Tvrdit však, že spektrum funkce se při substituci nezmění, není správné, neboť „nové“ koeficienty se vztahují k jiné bázi (na jiném intervalu), takže takové srovnání nemá smysl.

V následujících dvou podkapitolách si ukážeme dvě konkrétní realizace obecných Fourierových řad: exponenciální Fourierovu řadu a trigonometrickou Fourierovu řadu. Použijeme k tomu báze funkce (2.11) a (2.10), o kterých víme, že jsou ortogonální a úplné na obecném intervalu $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$. Později si ukážeme příklady realizací i pro báze funkce zcela jiného typu.

2.4 Fourierova exponenciální řada

Mějme funkci $s(t)$ zadanou na intervalu $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$. Jak víme z předchozí podkapitoly, na tomto intervalu tvoří úplný ortogonální systém např. funkce (2.11), $\{\exp(\frac{i2\pi nt}{T})\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Normy těchto funkcí jsou pro všechna n stejné: \sqrt{T} . Pomocí této soustavy funkcí vytvoříme Fourierovu řadu:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} S_n \exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right), \quad (2.16)$$

kde koeficienty S_n jsou dány integrálem

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \exp\left(-\frac{i2\pi nt}{T}\right) dt. \quad (2.17)$$

Faktor $1/T$ před integrálem odpovídá dělení kvadrátem normy, viz. vzorec (2.4), neboť soustava funkcí (2.11) není ortonormální.

Fourierova exponenciální řada (podobně jako trigonometrická Fourierova řada, probíraná v následující podkapitole) má mezi ostatními typy Fourierových řad významné postavení. Je to jednak pro její úzký vztah k dalším Fourierovským transformacím jako např. Fourierova transformace spojitého a diskrétního signálu nebo Fourierova řada diskrétního signálu (viz kapitoly 3, 4 a 5) a jednak pro její specifické vlastnosti dané vlastnostmi exponenciálních (trigonometrických) funkcí – periodicitu, různé symetrie spektra, či vliv některých standardních matematických operací na spektrum (podkapitola 2.8).

Zaměřme se nyní na Fourierovu exponenciální řadu z hlediska periodicity exponenciálních funkcí. Společnou periodou všech exponenciálních funkcí v řadě (2.16) je T ; to je též perioda celého součtu. Na pravé straně rovnice (2.16) stojí tedy periodická funkce s periodou T . Na Fourierovu řadu se můžeme dívat dvěma způsoby mezi nimiž je rozdíl více méně formální: buď jako na přiřazení spočetné množiny Fourierových koeficientů (tj. diskrétního spektra) spojitému signálu s konečným nosičem, kde rozvoj v řadu používáme striktně pouze na tomto konečném intervalu, anebo rovnou jako na vzájemně jednoznačné zobrazení mezi spojitým periodickým signálem $\tilde{s}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, vzniklým periodickým opakováním² původní neperiodické funkce mimo konečný interval, a spočetné množiny Fourierových koeficientů. Tento druhý úhel pohledu

²V tomto případě chápeme vlastně funkci $s(t)$ tak, že je zadaná na intervalu $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ a periodicky prodloužena na $\tilde{s}(t)$ s periodou T definovanou na celém \mathbb{R} . Otevření původního konečného intervalu z jedné strany nemá vliv na výpočet příslušných Fourierových koeficientů, zato však umožní při procesu periodizace vznik funkce $\tilde{s}(t)$ jednoznačně definované v každém bodě i v případech, kdy $s(-T/2) \neq s(T/2)$.

budeme v tomto kurzu preferovat. Periodicitu funkce budeme zdůrazňovat i v označení pomocí vlnky nad symbolem funkce.

Všimněme si ještě opačného znaménka v argumentu exponentu u vztahů (2.16) a (2.17). Je to dáno tím, že koeficient je skalárním součinem rozvíjené funkce s příslušnou bázovou funkcí. V případě komplexních bází se v takovém skalárním součinu vyskytuje komplexně sdružená bázová funkce (viz. (2.4)), tedy:

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \exp\left(-\frac{i2\pi nt}{T}\right) dt.$$

Poznamenejme, že volba znaménka v exponentu v rovnicích (2.16) a (2.17) je věcí konvence a někteří autoři mohou definovat Fourierovu exponenciální řadu a příslušné Fourierovy koeficienty s opačným znaménkem. Vždy však platí, že znaménka v exponentu u bázové funkce v řadě a u koeficientů musí být navzájem opačná. Tato nejednoznačnost definic se vyskytuje ve Fourierově spektrální analýze nejen pokud jde o Fourierovy řady, ale týká se všech Fourierovských transformací probíraných v tomto kurzu. Čtenář by to měl mít na paměti při přebírání výsledků od jiných autorů a vždy si ověřit, jak ten který autor příslušné transformace definuje.

Vztah pro Fourierův koeficient je zcela v intencích výše uvedené teorie obecných Fourierových řad. V některých učebních textech se uvádí alternativní odvození vzorce pro Fourierovy koeficienty (2.17). Dospějeme k němu vynásobením rovnice (2.16) exponenciální funkcí $\exp(-i2\pi kt/T)$. Ve skalárním součinu pak na pravé straně díky ortogonalitě uvažovaných exponenciál zbyde pouze člen pro $n = k$. Za předpokladu, že je možné prohodit pořadí sumace a integrace bychom pak dospěli ke vzorci (2.17). Toto prohození je však podmíněno stejnoměrnou konvergencí dané řady – my však máme obecně zaručenu pouze konvergenci v průměru. Podmínky umožňující stejnoměrnou konvergenci budou vysvětleny v podkapitole 2.6.

Parsevalova rovnost má v případě exponenciální Fourierovy řady tvar:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\tilde{s}(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2. \quad (2.18)$$

Tuto rovnost "fyzikálně" interpretujeme tak, že energie signálu v časové oblasti je rovna energii jeho obrazu ve spektrální oblasti. Někdy se tento důležitý vzorec nazývá též Rayleighova rovnost nebo Rayleighův teorém. Na nejednoznačnost terminologie ve spektrální analýze si bohužel musíme zvyknout. Poznamenejme ještě, že vzorec (2.18) může mít značný praktický význam při výpočtu určitých integrálů některých funkcí. Často se totiž stává, že Fourierovy koeficienty nějaké funkce lze vyjádřit jednoduchým analytickým předpisem a není problém najít součet řady na pravé straně rovnice (2.18), zatímco vypočítat integrál na její levé straně (z kvadrátu absolutní hodnoty rozvíjené funkce) by bylo značně obtížné.

Spektrum S_n je obecně komplexní ($\in C$). Můžeme ho reprezentovat dvojím způsobem, buď pomocí reálné a imaginární části, $S_n = \Re\{S_n\} + i\Im\{S_n\}$, nebo pomocí modulu a fáze:

$$S_n = |S_n| \exp(i\phi_n), \quad |S_n| = \sqrt{(\Re\{S_n\})^2 + (\Im\{S_n\})^2}, \quad \phi_n \equiv \arg S_n \in (-\pi, \pi). \quad (2.19)$$

Modul $|S_n|$ se nazývá amplitudové spektrum, zatímco ϕ_n představuje tzv. fázové spektrum. Je to hlavní hodnota argumentu S_n , která je jednoznačně dána předpisem v tabulce 2.1.

$\Re\{S_n\}$	$\Im\{S_n\}$	ϕ_n
> 0		$\arctan(\Im\{S_n\}/\Re\{S_n\})$
< 0	≥ 0	$\arctan(\Im\{S_n\}/\Re\{S_n\}) + \pi$
< 0	< 0	$\arctan(\Im\{S_n\}/\Re\{S_n\}) - \pi$
0	> 0	$\pi/2$
0	< 0	$-\pi/2$
0	0	nedefinováno

Tabulka 2.1: Definice fázového spektra exponenciální Fourierovy řady

Tento druhý způsob je mnohem častější a používá se zcela standardně. Známe-li amplitudové a fázové spektrum, můžeme snadno dopočítat i reálnou a imaginární část:

$$\Re\{S_n\} = |S_n| \cos \phi_n \quad \Im\{S_n\} = |S_n| \sin \phi_n. \quad (2.20)$$

Rozepišme exponenciální funkci v rovnici (2.17) pomocí funkcí \cos a \sin :

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \cos\left(-\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \sin\left(-\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = a_n + ib_n.$$

Je zřejmé, že je-li rozvíjená funkce $\tilde{s}(t)$ reálná, jsou i a_n a b_n reálné a platí

$$a_n = \Re\{S_n\}, \quad b_n = \Im\{S_n\}. \quad (2.21)$$

(Pozor, pro obecný komplexní signál tyto vztahy neplatí!)

Jelikož \cos je funkce sudá a \sin funkce lichá, čtenář snadno nahlédne, že ve speciálním případě reálné funkce má spektrum následující důležitou vlastnost:

Věta (o Fourierových koeficientech reálného signálu):

Pro diskrétní spektrum reálného signálu $\tilde{s}(t)$ platí

$$S_{-n} = \overline{S_n}. \quad (2.22)$$

Tato vlastnost diskrétního spektra má velký praktický význam: pro reálný signál stačí počítat pouze polovinu koeficientů, např. koeficienty pro nezáporná n , a zbytek spektra již dostaneme jednoduchou operací komplexního sdružení.

Dále je zřejmé, že je-li rozvíjená funkce lichá, $a_n = 0$ a pro Fourierovy koeficienty platí $S_n = ib_n = -ib_{-n} = -S_{-n}$, tj. spektrum je funkce lichá (i pro komplexní signál $\tilde{s}(t)$). Je-li opět navíc $\tilde{s}(t)$ reálná, je spektrum funkce lichá a ryze imaginární. Naopak, je-li funkce $\tilde{s}(t)$ sudá, $b_n = 0$, a spektrum je sudý diskretní signál. Je-li navíc $\tilde{s}(t)$ reálná, je spektrum funkce sudá a reálná. Pro lepší zapamatování jsou tyto užitečné symetrie spektra schematicky znázorněny na obrázku 2.1. Spojením částí obrázku a)+b) a c)+d) čtenář snadno nahlédne, že obecně komplexní sudý signál se transformuje na komplexní sudé (diskretní) spektrum, a podobně komplexní lichý signál na komplexní liché (diskretní) spektrum.

Uvědomíme-li si, že každý signál $\tilde{s}(t)$ může být rozložen na lichou část $o(t)$ a sudou část $e(t)$, může se hodit i následující názorný diagram ukazující, která část signálu se přiřazuje které části spektra.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tilde{s}(t) & = & \tilde{o}(t) & + & \tilde{e}(t) & = & \Re\{\tilde{o}(t)\} & + & i\Im\{\tilde{o}(t)\} & + & \Re\{\tilde{e}(t)\} & + & i\Im\{\tilde{e}(t)\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \swarrow & & \searrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_n & = & O_n & + & E_n & = & \Re\{O_n\} & + & i\Im\{O_n\} & + & \Re\{E_n\} & + & i\Im\{E_n\} \end{array}$$

Tvrzení z předcházejícího teoremu o Fourierových koeficientech reálného signálu implikuje, že reálná část jeho diskretního spektra je funkcí sudou, zatímco imaginární část funkcí lichou, viz schematický náčrtek na obrázku 2.2. Souhrnně řečeno, spektrum reálného signálu je hermitovská funkce.

Tyto výše uvedené symetrie a některé další, které si čtenář snadno odvodí analogickým způsobem, jsou shrnuty v tabulce 2.2.

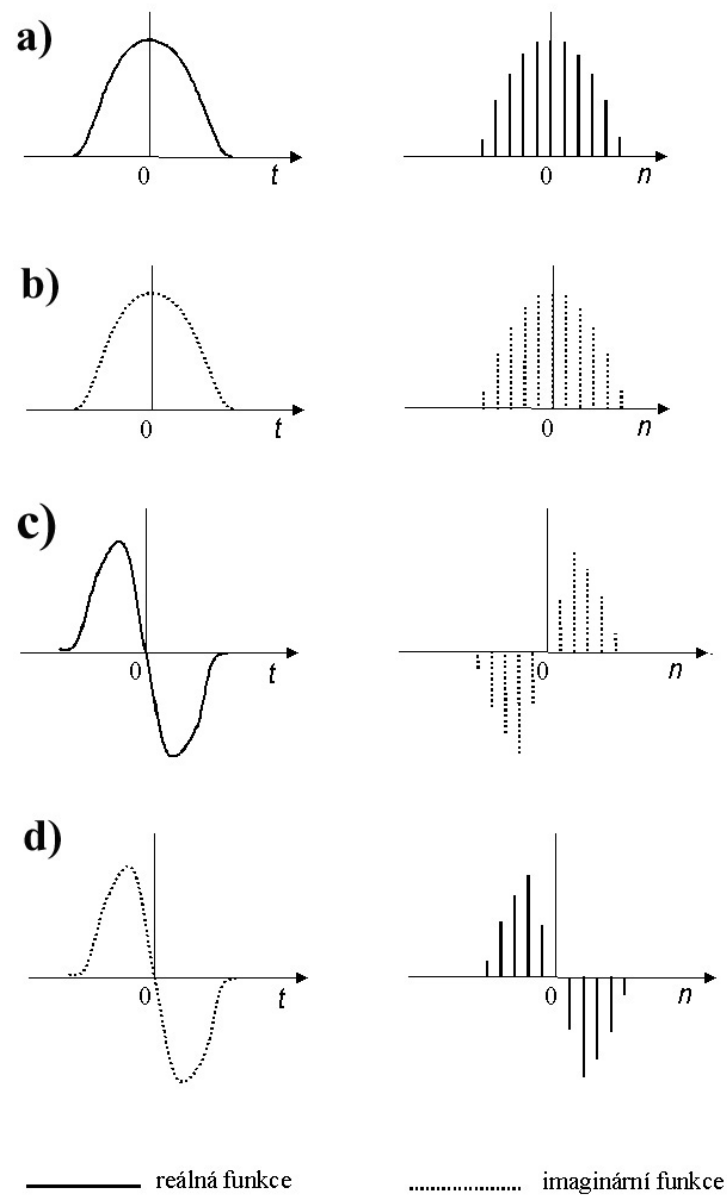
Cvičení 2.4.1:

Dokažte, že pro reálný signál $\tilde{s}(t)$, je amplitudové spektrum $|S_n|$ funkcí sudou a fázové spektrum ϕ_n funkcí lichou.

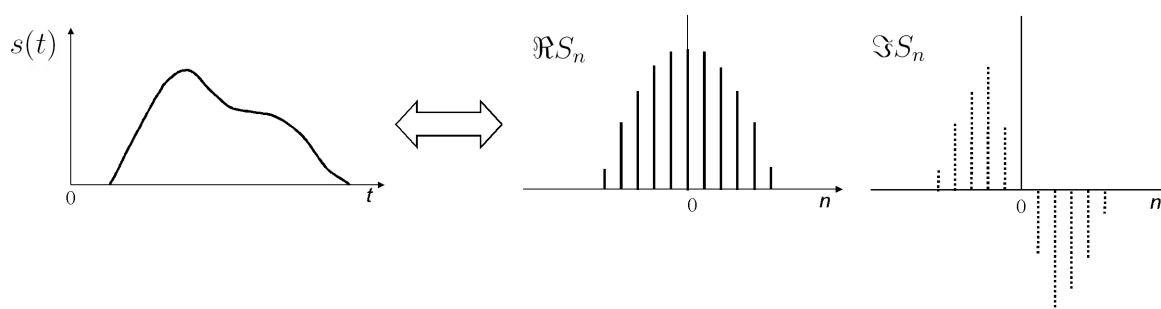
Cvičení 2.4.2:

Dokažte, že jsou-li S_n Fourierovy koeficienty signálu $\tilde{s}(t)$, jsou $\overline{S_{-n}}$ Fourierovy koeficienty komplexně sdruženého signálu $\overline{\tilde{s}(t)}$

Je-li signál $\tilde{s}(t)$ periodický, můžeme při výpočtu koeficientu pomocí integrálu (2.17) uvažovat meze odpovídající libovolnému jinému intervalu délky periody, např. \int_0^T nebo obecně \int_a^{a+T} ,



Obrázek 2.1: Některé symetrie signálu (vlevo) a jeho Fourierových koeficientů (vpravo).



Obrázek 2.2: Spektrum reálného signálu je hermitovská funkce.

$\tilde{s}(t)$	S_n
reálný signál	hermitovské spektrum ($S_{-n} = \overline{S_n}$)
imaginární signál	antihermitovské spektrum ($S_{-n} = -\overline{S_n}$)
sudý signál	sudé spektrum
lichý signál	liché spektrum
reálný sudý signál	reálné sudé spektrum
reálný lichý signál	imaginární liché spektrum
imaginární sudý signál	imaginární sudé spektrum
imaginární lichý signál	reálné liché spektrum
reálná část signálu sudá, imaginární lichá	reálné spektrum
reálná část signálu lichá, imaginární sudá	imaginární spektrum

Tabulka 2.2: Některé symetrie signálu a odpovídajícího diskretního spektra.

neboť hodnota daného integrálu se tím nezmění. Je-li však signál $s(t)$ původně neperiodický, pak uvážení jiného intervalu má samozřejmě na hodnotu koeficientů vliv (viz též cvičení v následující podkapitole).

Na závěr této podkapitoly uveďme příklad exponenciálního rozvoje pravoúhelníkové funkce, která hraje v mnoha aplikacích spektrální analýzy důležitou roli.

Příklad:

Najděme Fourierovy koeficienty S_n pravoúhelníkové funkce

$$s(t) = \Pi\left(\frac{t}{d}\right) = \begin{cases} =1 & |t| < d/2 \\ =0 & |t| \geq d/2 \end{cases}$$

na intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$, kde $T > d$.

Signál je znázorněn na obrázku 2.3a. Na obrázku je čárkovaně nakresleno periodické opakování s periodou T , které vznikne automaticky sečtením Fourierovy řady. Alternativně můžeme signál $s(t)$ už rovnou chápat jako periodickou funkci

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t+nT}{d}\right).$$

Tato funkce je reálná a sudá, očekáváme tedy, že bude mít reálné sudé spektrum. A skutečně:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp\left(-\frac{i2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} \exp(-i\omega_0 nt) dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{-in\omega_0} [\exp(-i\omega_0 nt)]_{-d/2}^{d/2} = \frac{1}{T} \frac{1}{-in\omega_0} [\exp(-i\omega_0 nd/2) - \exp(i\omega_0 nd/2)] \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{-in\omega_0} (-2i \sin(\frac{n\omega_0 d}{2})) = \frac{1}{T} \frac{2}{n\omega_0} \sin\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right) = \frac{d}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{n\pi d}{T}\right)} = \frac{d}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi d}{T}\right). \end{aligned}$$

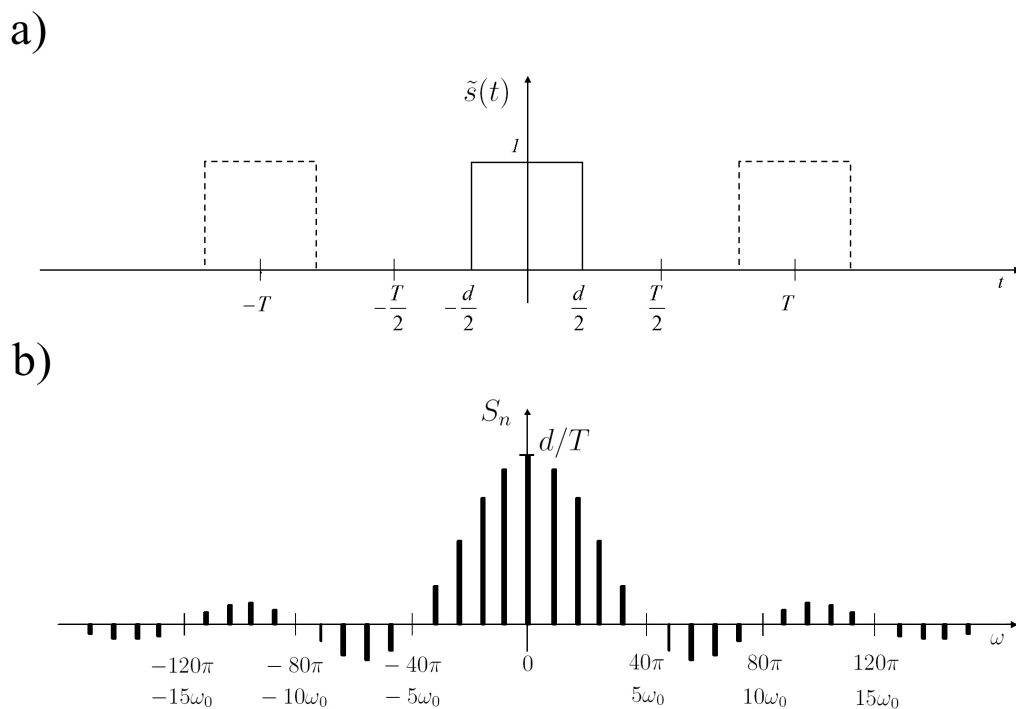
Toto diskrétní spektrum je znázorněno na obrázku 2.3b.

Obrázek 2.4 demonstruje chování spektra při různých volbách poměru d/T . V části a) zůstává šířka pravoúhelníku d konstantní, zatímco perioda T se postupně (v obrázku směrem dolů) zvětšuje. Vidíme, že zvětšování periody vede ke zmenšování vzorkovacího frekvenčního kroku ω_0 . Část b) ukazuje naopak chování spektra při konstantní periodě T , v rámci které se postupně zmenšuje (v obrázku odshora dolů) šířka signálu d . Všimněme si, jak zužování signálu způsobuje zpomalení ubývání spektra, tj. spektrum se stává „efektivně širší“. S tímto jevem se setkáme i u dalších Fourierovských transformací probíraných v tomto kurzu.

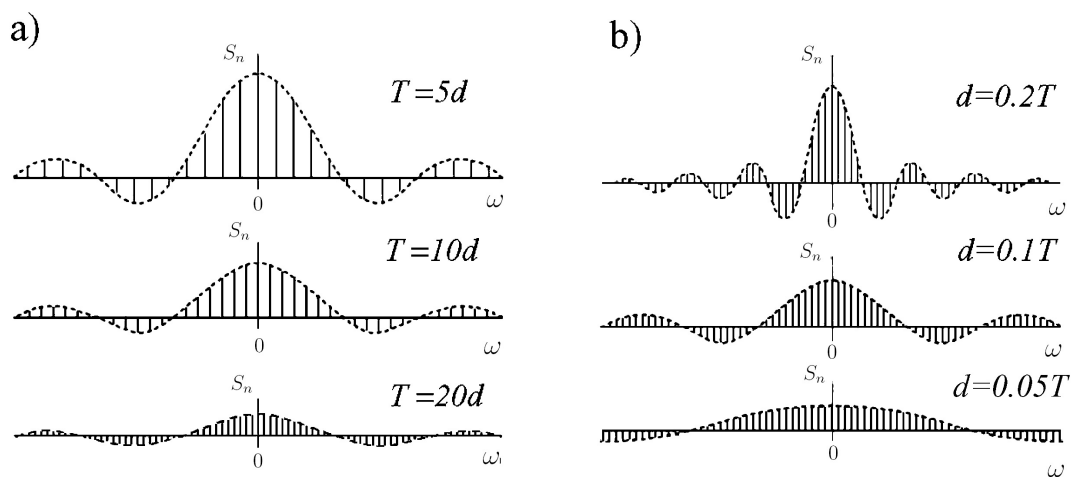
2.5 Fourierova trigonometrická řada

Uvažme opět funkci $s(t)$ zadanou na intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$ a její periodické rozšíření $\tilde{s}(t)$ na celé \mathbb{R} . Tentokrát však pro rozvoj použijeme úplnou soustavu ortogonálních funkcí (2.10):

$$1, \cos(2\pi t/T), \sin(2\pi t/T), \cos(4\pi t/T), \dots$$



Obrázek 2.3: Pravoúhelníková funkce (a) a její diskrétní spektrum (b). V tomto obrázku byly použity parametry $d = 1/20$, $T = 1/4 \Rightarrow \omega_0 = 8\pi$, $d/T = 1/5$.



Obrázek 2.4: Diskrétní spektrum pravoúhelníkové funkce pro různé šířky signálu d a různé periody T . a) šířka signálu je konstantní, mění se perioda (od horního obrázku k dolnímu se zvětšuje), b) perioda zůstává konstantní, šířka signálu se mění (od horního obrázku k dolnímu se zmenšuje). Pozn.: části a) a b) nemají stejné měřítko na vodorovné ose.

Normou jedničky na $\langle -T/2, T/2 \rangle$ je \sqrt{T} , normy všech ostatních bázových funkcí jsou $\sqrt{T/2}$.

Trigonometrická Fourierova řada je tedy řada:

$$\tilde{s}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right), \quad (2.23)$$

kde koeficienty jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Podobně jako v případě exponenciální Fourierovy řady bychom i zde mohli vzorce pro koeficienty odvodit alternativně postupným skalárním vynásobením řady (2.23) jednotlivými bázovými funkcemi a využitím jejich ortogonalit na $\langle -T/2, T/2 \rangle$. Potřebovali bychom k tomu však prohodit \sum a \int , což je možné pouze za předpokladu stejnoměrné konvergence řady (2.23).

Uveďme zde pro úplnost, jak vypadá Parsevalova rovnost v případě trigonometrické Fourierovy řady:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\tilde{s}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2). \quad (2.25)$$

Tato rovnost se s výhodou využívá k výpočtu určitých integrálů některých funkcí.

Koeficienty trigonometrické řady lze snadno přepočítat na koeficienty řady exponenciální a naopak, oba rozvoje jsou si ekvivalentní. Vzájemný vztah odvodíme snadno, pokud si v řadě (2.23) vyjádříme trigonometrické funkce pomocí exponenciál:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\exp \left(\frac{i2\pi nt}{T} \right) + \exp \left(\frac{-i2\pi nt}{T} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - ib_n \left(\exp \left(\frac{i2\pi nt}{T} \right) - \exp \left(\frac{-i2\pi nt}{T} \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - ib_n) \exp \left(\frac{i2\pi nt}{T} \right) + (a_n + ib_n) \exp \left(\frac{-i2\pi nt}{T} \right) \right]. \end{aligned}$$

Z toho porovnáním s (2.16) okamžitě dostáváme vzorce pro přepočet koeficientů:

$$\begin{aligned} S_0 = \frac{1}{2} a_0 &\quad \Rightarrow \quad a_0 = 2S_0 \\ S_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) &\quad \Rightarrow \quad a_n = S_n + S_{-n} \\ S_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) &\quad \Rightarrow \quad b_n = i(S_n - S_{-n}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pokud je rozvíjený signál reálný, pak spektrální koeficienty jsou též reálné (díky tomu, že bázové funkce jsou v případě trigonometrické Fourierovy řady reálné). Pak (2.26) opět dává nám již známou vlastnost spektra reálné funkce: $S_{-n} = \overline{S_n}$.

Trigonometrická Fourierova řada je pravděpodobně nejznámější tradičně používanou Fourierovou řadou. Pojí se s ní i specifická terminologie. Člen $a_0/2$ se nazývá nulová harmonická nebo též stejnosměrná složka a představuje průměr funkce na daném intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$. Výraz $(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T})$, pak představuje tzv. n -tou harmonickou (střídavou) složku. O veličině $1/T$ mluvíme jako o základní frekvenci, tzv. vyšší frekvence jsou jejími celočíselnými násobky (n/T). Převrácená hodnota základní frekvence (T) je společnou periodou pro všechny harmonické složky a je tedy i periodou celé řady.

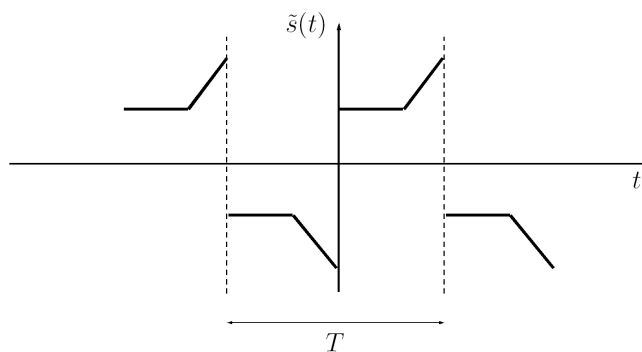
Podobně jako u exponenciální řady se spektrum zjednoduší pro případ jistých symetrií signálu $\tilde{s}(t)$. Tak například, je-li $\tilde{s}(t)$ funkce sudá, pak:

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ \tilde{s}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt. \end{aligned}$$

Pro lichou funkci $\tilde{s}(t)$ naopak dostáváme:

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ \tilde{s}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt. \end{aligned}$$

Dalším speciálním příkladem je tzv. půlvlnná symetrie signálu: $\tilde{s}(t) = -\tilde{s}(t + \frac{T}{2}) = -\tilde{s}(t - \frac{T}{2})$. Příklad takové symetrie je na obrázku 2.5.



Obrázek 2.5: Příklad půlvlnné symetrie.

Pro takový typ signálu jsou obecně nenulové pouze liché koeficienty. Ukažme si to pro koeficient a_n , pro b_n by byl důkaz analogický.

Důkaz:

Pro zkrácení zápisu použijeme označení $\omega_0 = 2\pi/T$. Pak

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(\tau) \cos(n\omega_0\tau) d\tau \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 \tilde{s}(\tau) \cos(n\omega_0\tau) d\tau + \int_0^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(\tau) \cos(n\omega_0\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Substitucí $\tau \rightarrow t - 1/2T$ v prvním integrálu převedeme oba integrály na stejné meze. V prvním integrálu pak využijeme půlvlnnou symetrii, součtový vzorec pro \cos a fakt, že $\sin(n\pi) = 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t - T/2) \cos[n\omega_0(t - T/2)] dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} [-\tilde{s}(t) \cos(n\omega_0 t) \cos(n\pi) + \tilde{s}(t) \cos(n\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{2}{T} [1 - (-1)^n] \int_0^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \cos(n\omega_0 t) dt & n \text{ liché} \\ 0 & n \text{ sudé} \end{cases} \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Pokud by půlvlnně symetrická funkce byla navíc ještě sudá (lichá), byly by koeficienty a_n (b_n) nulové a jednalo by se o tzv. čtvrtvlnnou symetrii. Příkladem takové funkce je $s(t) = \text{sgn}(t)$ zadaná na intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$ a periodicky se opakující s periodou T na celém R (viz. následující cvičení).

Cvičení 2.5.1:

Najděte trigonometrickou Fourierovu řadu funkce $s(t) = \text{sgn}(t)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Následuje příklad „pilovité“ funkce, která je lichá, avšak nemá půlvlnnou symetrii.

Cvičení 2.5.2:

Najděte trigonometrickou Fourierovu řadu funkce

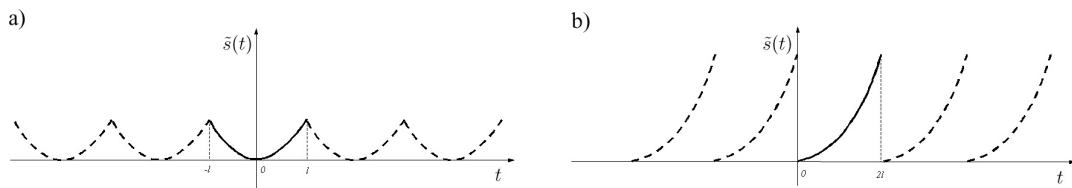
$$s(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{pro } -\pi < t < 0 \\ t - \pi & \text{pro } 0 < t < \pi \end{cases}$$

Další příklad demonstruje, jak klíčovou roli hraje volba intervalu, na kterém funkci rozvíjíme v řadu.

Cvičení 2.5.3:

- a) Najděte trigonometrickou Fourierovu řadu funkce $s(t) = t^2$ na intervalu $\langle -l, l \rangle$.
 b) Najděte trigonometrickou Fourierovu řadu funkce $s(t) = t^2$ na intervalu $\langle 0, 2l \rangle$.

Přestože se v obou případech jedná o funkci zadanou stejným analytickým předpisem, z hlediska rozvoje v řadu se díky různým intervalům jedná o dva různé signály, viz. též obrázek 2.6.



Obrázek 2.6: Funkce t^2 na intervalu $\langle -l, l \rangle$ (a) a $\langle 0, 2l \rangle$ (b).

Jak již bylo řečeno, exponenciální a trigonometrický tvar Fourierovy řady jsou si pro daný interval ekvivalentní, jeden lze snadno převést na druhý (vzorce (2.26)). Je na naší libovůli, zda preferujeme reálný tvar (trigonometrický) nebo komplexní (exponenciální). Pro reálnou funkci $\tilde{s}(t)$ můžeme navíc ještě použít další ekvivalentní vyjádření, tzv. fázový tvar Fourierovy řady.

Věta (O fázovém tvaru Fourierovy řady reálného signálu):

Reálný periodický signál s periodou T lze na intervalu

$\langle -T/2, T/2 \rangle$ vyjádřit řadou $\tilde{s}(t) = c_0 + \sum_1^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$, kde $\omega_0 = 2\pi/T$ a

$$c_0 = S_0 = |S_0|, \quad c_n = 2|S_n|, \\ \theta_n = -\phi_n,$$

přičemž $|S_n|$ a ϕ_n jsou amplitudové a fázové spektrum funkce $\tilde{s}(t)$ na daném intervalu.

Důkaz:

V důkazu využijeme mimo jiné i poznatek, že pro reálnou funkci je fázové spektrum $\phi_0 = 0$. Je to zřejmé ze vzorce (2.24) pro b_n , podle kterého je $b_0 = 0$. Jelikož pro reálný signál je $b_n = \Im\{S_n\}$, viz (2.21), znamená to, že pro $n = 0$ je S_n reálné a tudíž $\phi_0 = 0$. Fourierovu exponenciální řadu

reálného signálu můžeme přepsat následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} S_n \exp(in\omega_0 t) = \sum_{-\infty}^{\infty} |S_n| \exp(i(n\omega_0 t + \phi_n)) \\
 &= |S_0| + \sum_{1}^{\infty} |S_n| [\exp(i(n\omega_0 t + \phi_n)) + \exp(i(-n\omega_0 t - \phi_n))] \\
 &= |S_0| + \sum_{1}^{\infty} |S_n| [\exp(i(n\omega_0 t + \phi_n)) + \exp(-i(n\omega_0 t + \phi_n))] \\
 &= |S_0| + \sum_{1}^{\infty} 2|S_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \\
 &= c_0 + \sum_{1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n), \quad \text{c.b.d.}
 \end{aligned}$$

Závěrem ještě pro přesnost poznamenejme, že fázový tvar Fourierovy řady sám o sobě nepředstavuje Fourierovu řadu ve smyslu výše uvedené teorie obecných Fourierových řad, neboť zde nerozvíjíme do báze funkcí (tj. úplného ortogonálního systému na daném intervalu). Tyto funkce jsou navíc různé pro různé $\tilde{s}(t)$, díky závislosti na θ_n .

2.6 Konvergence trigonometrické Fourierovy řady.

V této podkapitole budeme mluvit o trigonometrické Fourierově řadě, ale vzhledem ke vzorcům (2.26) je výklad relevantní i pro exponenciální řadu. Z dosavadního výkladu vyplývá, že použijeme-li pro rozvoj nějaké funkce ve Fourierovu řadu úplný systém funkcí ortogonálních, respektive ortonormálních, na daném intervalu, máme jistotu, že řada konverguje v průměru k rozvíjené funkci na tomto intervalu. Vně intervalu pak konverguje v průměru k periodickému opakování funkce na celém R .

Konvergence v průměru však bohužel neznamena konvergenci v každém bodě definičního oboru. Přitom to je právě to, co bychom v praktických aplikacích potřebovali, neboť rozvoj funkce, který by neplatil v některých bodech, by měl poměrně omezenou použitelnost.

Výklad o bodové a případně stejnoměrné konvergenci trigonometrické (nebo též exponenciální) Fourierovy řady začněme obecnou úvahou o ubývání spektra s rostoucím n . Platí následující věta:

Věta (O ubývání Fourierových koeficientů trigonometrické řady):

Jsou-li $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ a $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, posloupnosti Fourierových koeficientů trigonometrické řady funkce $s(t)$ na intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$ (nebo jí odpovídající T -periodické funkce $\tilde{s}(t)$ na R), pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{s}(t) \cos(\frac{2\pi n t}{T}) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{s}(t) \sin(\frac{2\pi n t}{T}) dt = 0$.

Důkaz:

Tvrzení je jednoduchým důsledkem Parsevalovy rovnosti (2.25). Jelikož levá strana v rovnosti je konečná ($\tilde{s}(t) \in L_2(-T/2, T/2)$), má konečný součet i řada na pravé straně. Aby však tato

řada konvergovala, je nutné aby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0.$$

Jelikož sčítáme kvadráty, je platnost této rovnice podmíněna nulovou limitou samotných koeficientů:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \text{c.b.d.}$$

Ubývání koeficientů řady je podmínkou pouze nutnou, nikoliv však postačující, k tomu, aby řada konvergovala.

Trigonometrická Fourierova řada patří do široké třídy trigonometrických řad, pro které je vybudována poměrně rozsáhlá teorie, včetně různých kritérií konvergence. Uvedme zde jako příklad matematickou větu (Kufner & Kadlec, 1969) tohoto typu.

Věta (O konvergenci trigonometrické Fourierovy řady I):

Jsou-li $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě komplexní posloupnosti a konverguje-li řada $|a_0/2| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$, pak trigonometrická řada $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ konverguje absolutně stejnoměrně a je Fourierovou řadou svého součtu.

Budou-li tedy splněny podmínky výše uvedené věty, bude trigonometrická Fourierova řada konvergovat absolutně stejnoměrně (tedy ne pouze v průměru) k rozvíjené funkci. Problém s použitím vět tohoto typu v praktických aplikacích je, že kladou podmínky na koeficienty řady. Důkaz platnosti takových podmínek pak v principu vyžaduje znalost spektrálních koeficientů pro $n \rightarrow \infty$. Pokud nejsou koeficienty dány nějakým jednoduchým analytickým předpisem, může to být dokonce nemožné, zvláště uvažíme-li, že numericky v praxi vyčísľujeme jen konečný počet spektrálních koeficientů. Právě ubývání spektra pro $n \rightarrow \infty$ nám často umožňuje omezit se pouze na spektrální hodnoty neklesající pod jistou mez (např. danou procenty maximální hodnoty), tj. uvažovat koeficienty pouze do nějakého n a předpokládat, že hodnoty pro větší index budou efektivně menší, tudíž jejich zanedbání nebude zdrojem velké chyby.

Proto jsou z hlediska praktických aplikací mnohem výhodnější matematické věty jiného typu, kladoucí podmínky nikoliv na koeficienty, ale na samotnou rozvíjenou funkci. Cena, kterou je třeba zaplatit, je omezení třídy funkcí pro které budeme rozvoje provádět. Tedy nebude to už obecná třída $L_2(a, b)$, ale nějaká užší třída, zato však trigonometrická Fourierova řada bude konvergovat nejenom pouze v průměru, ale v každém bodě, případně stejnoměrně (podle konkrétní věty tohoto typu). Uvedme zde několik příkladů takových vět. Pro jednoduchost budeme uvažovat základní interval $\langle -\pi, \pi \rangle$, neboť řadu rozvinutou na $\langle -\pi, \pi \rangle$ lze substitucí převést na jiný obecnější interval aniž by to mělo vliv na její konvergenci.

Věta (O konvergenci trigonometrické Fourierovy řady II):

Předpokládejme trigonometrickou Fourierovu řadu odpovídající 2π -periodické funkci $\tilde{s}(t)$, která je

- spojitá
- absolutně integrovatelná, tj. $\tilde{s}(t) \in L_1(-\pi, \pi)$
- diferencovatelná, tj. v každém bodě existuje derivace zleva a zprava.

Pak její Fourierova řada konverguje v každém bodě k $\tilde{s}(t)$.

Poznamenejme, že absolutní integrovatelnost funkce je nutná k tomu, abychom vůbec mohli počítat její Fourierovy koeficienty. Spojitost funkce $\tilde{s}(t)$ je podmíněna tím, že odpovídající neperiodická funkce $s(t)$ je spojitá na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a navíc platí, že $s(-\pi) = s(\pi)$.

Důkaz:

Pro částečný součet řady platí

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}(\tau) \cos(k\tau) d\tau \right) \cos(kt) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}(\tau) \sin(k\tau) d\tau \right) \sin(kt) \right]. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že pro $\tilde{s}(t)$ splňující podmínky výše uvedené věty lze zaměnit pořadí \sum a \int . Pak

$$\begin{aligned} S_N(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}(\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N (\cos(kt) \cos(k\tau) + \sin(kt) \sin(k\tau)) \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}(\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos(k(\tau - t)) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Použitím vzorce (D.9.4) dostaneme

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}(\tau) \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) (\tau - t) \right]}{2 \sin \left[\frac{1}{2} (\tau - t) \right]} d\tau.$$

Provedeme substituci $u = \tau - t$. Uvážíme-li, že integrand je 2π -periodická funkce, můžeme i po substituci zachovat původní meze integrálu od $-\pi$ do π

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}(t+u) \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \sin(u/2)} du. \quad (2.27)$$

Nyní dokážeme, že $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = \tilde{s}(t)$, čili $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) - \tilde{s}(t) = 0$, tj.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t)] \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \sin(u/2)} du = 0.$$

K tomu stačí, aby funkce $\tilde{g}(u) = [\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t)]/[2\sin(u/2)]$ byla absolutně integrovatelná na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pro libovolnou $\tilde{g}(u) \in L_1(-\pi, \pi)$ totiž platí

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(u) \sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) u \right] du &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(u) \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(Nu) du \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(u) \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin(Nu) du \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

neboť i $\tilde{g}_1(u) = \tilde{g}(u) \sin(u/2) \in L_1(-\pi, \pi)$ a $\tilde{g}_2(u) = \tilde{g}(u) \cos(u/2) \in L_1(-\pi, \pi)$ a limity integrálů jsou vlastně limity koeficientů a_n a b_n rozvoje funkcí $\tilde{g}_1(u)$ a $\tilde{g}_2(u)$, viz věta o ubývání Fourierových koeficientů trigonometrické řady.

Zbývá tedy dokázat, že $\tilde{g}(u) = [\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t)]/[2\sin(u/2)] \in L_1(-\pi, \pi)$. Funkci můžeme též zapsat jako

$$\tilde{g}(u) = \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t)}{u} \frac{1}{\text{sinc}(u/2)}.$$

Jelikož v předpokladech věty je existence derivace zleva i zprava v každém bodě, tj. existence limit

$$\tilde{s}'(t^-) = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t)}{u} \quad \text{a} \quad \tilde{s}'(t^+) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t)}{u},$$

faktor násobící funkci $1/\text{sinc}(u/2)$ je na $\langle -\pi, \pi \rangle$ ohraničený:

$$\left| \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t)}{u} \right| \leq M,$$

kde M je nějaká kladná konstanta. Funkce $1/\text{sinc}(u/2)$ má v bodě 0 odstranitelnou nespojitost ($\lim_{u \rightarrow 0} 1/\text{sinc}(u/2) = 1$). Je tedy $1/\text{sinc}(u/2) \in L_1(-\pi, \pi)$ a tudíž i $\tilde{g}(u) = [\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t)]/[2\sin(u/2)] \in L_1(-\pi, \pi)$, c.b.d.

Z podmínek kladených na rozvíjenou funkci nám v praxi bude asi nejčastěji vadit první z nich – spojitost rozvíjené funkce na celém zájmovém intervalu. Ta vylučuje řadu užitečných signálů (např. signál ze cvičení 2.5.1). Výše uvedenou větu je však možno zobecnit i pro funkce po částech spojitě.

Věta (O konvergenci trigonometrické Fourierovy řady III):

Předpokládejme trigonometrickou Fourierovu řadu odpovídající 2π -periodické funkci $\tilde{s}(t)$, která je

- spojitá nebo má konečný počet nespojitostí 1. druhu na každém intervalu délky 2π
- má po částech spojitou první derivaci $\tilde{s}'(t)$ na každém intervalu délky 2π
- absolutně integrovatelná na $\langle -\pi, \pi \rangle$, tj. $\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{s}(t)| dt < \infty$,

pak trigonometrická Fourierova řada konverguje k funkci $\tilde{s}(t)$ ve všech bodech, kde je $\tilde{s}(t)$ spojitá, a k funkci $[\tilde{s}(t^-) + \tilde{s}(t^+)]/2$ v bodech nespojitosti.

Poznamenejme, že díky periodizaci různé hodnoty funkce v hraničních bodech původního intervalu vedou k vytvoření pouze dalších nespojitostí prvního druhu. Větu můžeme použít i pro

neperiodickou funkci $s(t)$ zadanou na $\langle -\pi, \pi \rangle$. První dva předpoklady této věty se pak budou vztahovat pouze na tento interval a tvrzení věty doplníme tak, že v bodech π a $-\pi$ konverguje řada k $[\tilde{s}(-\pi^-) + \tilde{s}(\pi^+)]/2$.

Důkaz této zobecněné věty by byl zcela analogický důkazu provedenému výše s tím rozdílem, že bychom v závěru potřebovali ukázat nulovost limity výrazu $S_N(t) - \frac{1}{2}(\tilde{s}(t^+) + \tilde{s}(t^-))$ namísto výrazu $S_N(t) - \tilde{s}(t)$ při $N \rightarrow 0$. To není obtížné. Rovnici (2.27) rozepíšeme rozdělením integrálu na dvě části:

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \tilde{s}(t+u) \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{2 \sin(u/2)} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{s}(t+u) \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{2 \sin(u/2)} du. \quad (2.29)$$

Integrací vzorce (D.9.4) v mezích od $-\pi$ do 0 a od 0 do π dostaneme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{2 \sin(u/2)} du = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{2 \sin(u/2)} du = \frac{1}{2}, \quad (2.30)$$

jelikož příspěvky od kosinových členů v (D.9.4) jsou v daných mezích nulové. Vzorců (2.30) využijeme k výhodnému vyjádření

$$\frac{1}{2}(\tilde{s}(t^+) + \tilde{s}(t^-)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \tilde{s}(t^+) \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{2 \sin(u/2)} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{s}(t^-) \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})u]}{2 \sin(u/2)} du. \quad (2.31)$$

Odečtením (2.29) a (2.31) pak dostáváme

$$\begin{aligned} S_N(t) - \frac{1}{2}(\tilde{s}(t^+) + \tilde{s}(t^-)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t^+)}{2 \sin(u/2)} \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)u\right] du \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t^-)}{2 \sin(u/2)} \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)u\right] du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \tilde{g}_1(u) \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)u\right] du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{g}_2(u) \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)u\right] du. \end{aligned}$$

O funkcích $\tilde{g}_1(u)$ a $\tilde{g}_2(u)$ je opět třeba dokázat, že jsou absolutně integrovatelné na příslušných intervalech. Jediný problém bychom mohli opět očekávat v bodě 0, kde však například $\lim_{u \rightarrow 0^+} \tilde{g}_1(u)$ existuje a je konečná díky předpokladu existence derivace zprava:

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t^+)}{2 \sin(u/2)} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t^+)}{u} \frac{u/2}{\sin(u/2)} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{s}(t+u) - \tilde{s}(t^+)}{u}.$$

Analogicky bychom postupovali v případě $\lim_{u \rightarrow 0^-} \tilde{g}_2(u)$, která je konečná díky existenci derivace zleva. Podobně jako v případě rovnice (2.28), i v našem případě je pak nulovost limity $\lim_{N \rightarrow \infty} [S_N(t) - \frac{1}{2}(\tilde{s}(t^+) + \tilde{s}(t^-))]$ jednoduchým důsledkem Parsevalovy rovnosti, tentokrát však pro rozvoje na jednostranných intervalech od $-\pi$ do 0 a od 0 do π .

Někdy se podmínky kladené na rozvíjenou funkci formulují poněkud odlišně, jako například v následující větě, která se často nazývá Dirichletova věta³.

³Někteří autoři označují jako Dirichletovu větu i větu o konvergenci trigonometrické Fourierovy řady III.

Věta (Dirichletova):

Předpokládejme trigonometrickou Fourierovu řadu odpovídající 2π -periodické funkci $\tilde{s}(t)$, která je

- spojitá nebo má konečný počet nespojitostí 1. druhu na každém intervalu délky 2π
- má pouze konečný počet maxim a minim v každém intervalu délky 2π
- absolutně integrovatelná na $\langle -\pi, \pi \rangle$, tj. $\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{s}(t)| dt < \infty$

pak trigonometrická Fourierova řada konverguje k funkci $\tilde{s}(t)$ ve všech bodech, kde je $\tilde{s}(t)$ spojitá, a k funkci $[\tilde{s}(t^-) + \tilde{s}(t^+)]/2$ v bodech nespojitosti.

Větu opět můžeme (s příslušnými modifikacemi) použít i na neperiodickou funkci zadanou na konečném intervalu.

Na závěr této podkapitoly uveďme ještě větu převzatou z knihy Kufnera a Kadlece (1969), která zaručuje dokonce konvergenci stejnoměrnou.

Věta (O stejnoměrné konvergenci trigonometrické Fourierovy řady):

Předpokládejme 2π -periodickou funkci $\tilde{s}(t)$, rozvinutou v trigonometrickou Fourierovu řadu, odpovídající funkci $s(t)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Rozdělme tento interval na podintervaly $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle$, kde $-\pi = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \pi$. Platí-li, že

- $s(t)$ je spojitá na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a $s(-\pi) = s(\pi)$
- $s'(t)$ (první derivace) je spojitá na každém uzavřeném intervalu $\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle$, přitom v levých krajních bodech existuje derivace zprava a v pravých zleva
- $s''(t)$ (druhá derivace) je spojitá na každém otevřeném intervalu (α_i, α_{i+1})
- $\int_{-\pi}^{\pi} |s''(t)| dt < \infty$ tj. $s''(t) \in L_1$,

pak trigonometrická Fourierova řada konverguje stejnoměrně k funkci $\tilde{s}(t)$ na R .

Pochopitelně, řada podle této věty také konverguje stejnoměrně k funkci $s(t)$ v každém bodě konečného intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

2.7 Gibbsův jev

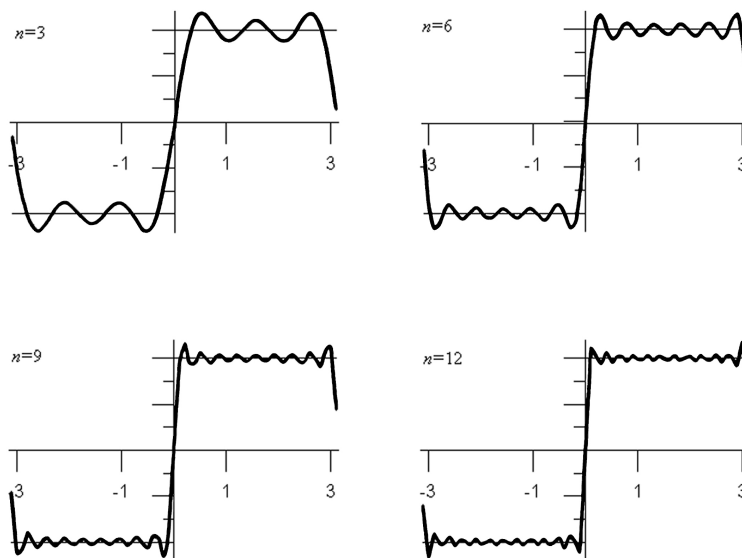
Dirichletova věta říká, že pokud rozvíjená funkce obsahuje konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu v intervalu délky periody, trigonometrická Fourierova řada dává v těchto bodech nespojitosti součet rovnající se aritmetickému průměru limit funkčních hodnot zprava a zleva. Mimo body nespojitosti je součtem funkční hodnota rozvíjené funkce. To ovšem platí pro součet nekonečné řady. V praktických aplikacích však pracujeme s konečnými řadami a v tom případě se můžeme dočkat nepříjemného numerického chování částečného součtu řady v okolí bodu ne-

spojitosti. Toto chování představuje tzv. Gibbsův jev. Vysvětleme si jeho podstatu na názorném příkladu funkce $s(t) = \operatorname{sgn} t$.

Jak víme ze cvičení 2.5.1, je rozvojem této funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ řada

$$\tilde{s}(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

Na obrázku 2.7 jsou spolu s rozvíjenou funkcí znázorněny částečné součty této řady pro několik prvních n .



Obrázek 2.7: Ilustrace Gibbsova jevu: částečné součty Fourierovy řady funkce sgn pro $n = 3, 6, 9$ a 12 .

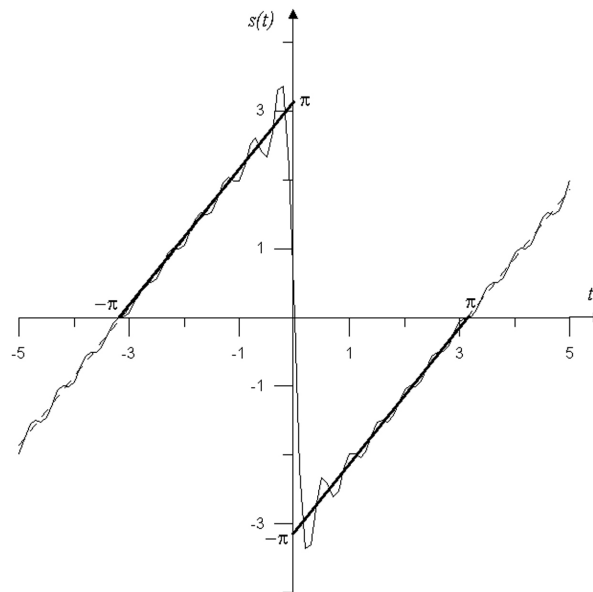
Tento ilustrativní obrázek ukazuje, že v okolí bodu nespojitosti (na obrázku v okolí 0) existuje jistá neodstranitelná chyba částečného součtu řady (maximální výchylka nad, případně pod, skutečnou funkční hodnotu rozvíjené funkce), která se nezmenšuje přičítáním dalších členů řady (zvyšováním konečného n). Tato maximální výchylka má tedy při přidávání dalších členů do součtu konečnou limitu, pouze se posunuje blíže k bodu nespojitosti. V tom spočívá podstata Gibbsova jevu. U funkce sgn z obrázku 2.7, činí tato neodstranitelná chyba zhruba 9% aproximované funkční hodnoty (respektive 4.5% rozdílů funkčních hodnot v bodě nespojitosti zprava a zleva). Následuje příklad funkce, u které je tato neodstranitelná chyba dokonce přibližně 18% (resp. 9%)⁴

Příklad:

⁴Vyjádření chyby vůči rozdílu funkčních hodnot v bodě nespojitosti vypovídá lépe o „síle“ Gibbsova jevu. Je totiž zřejmé, že například přičtení libovolné konstanty k rozvíjené funkci nezmění konečnou limitu maximální chyby částečného součtu řady, zato však zásadně ovlivní hodnotu rozvíjené funkce v bodě, ve kterém se tato maximální chyba objevuje.

Analyzujme Gibbsův jev pro funkci $s(t)$ z cvičení 2.5.2, tj.

$$s(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{pro } -\pi < t < 0 \\ t - \pi & \text{pro } 0 < t < \pi \end{cases}$$



Obrázek 2.8: Ilustrace Gibbsova jevu: funkce ze cvičení 2.5.2 (plná tučná čára) a její periodické opakování (čárkovaně) spolu s částečným součtem Fourierovy řady pro $n = 12$ (tenká plná čára).

Funkce je znázorněna na obrázku 2.8. Z cvičení víme, že ji můžeme rozvinout v řadu

$$\tilde{s}(t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Zkoumejme nyní chybu částečného součtu této řady v pravém okolí bodu nula, který je bodem nespojitosti:

$$R_n(t) = S_n(t) - \tilde{s}(t) = -2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - t + \pi.$$

V bodě nula, uvážíme-li limitu funkce $\tilde{s}(t)$ zprava, je chyba částečného součtu $R_n(0) = \pi$. Gibbsův jev spočívá v tom, že v okolí nuly existuje lokální maximum chyby částečného součtu. Přidáváním dalších členů do konečné sumy se mění poloha tohoto maxima (přibližuje se blíže bodu nespojitosti), ale jeho velikost neklesne pod jistou hodnotu. Pro lokální extrém musí platit $R'_n(t) = 0$; z této podmínky snadno určíme polohu tohoto maxima. Zderivujeme-li tedy výraz pro chybu částečného součtu, dostaneme (též s využitím (D.9.4))

$$R'_n(t) = -1 - 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) = -1 - 2 \left[\frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

a tudíž

$$R'_n(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_n = \frac{\pi}{n + 1/2}.$$

Abychom mohli lépe zkoumat konečnou limitu chyby částečného součtu v bodě t_n , vyjádříme chybu pomocí integrálu její derivace, tedy:

$$R_n(t) = R_n(0) + \int_0^t R'_n(x) dx = \pi - \int_0^t \frac{\sin((n + 1/2)x)}{\sin(x/2)} dx.$$

Pro snadnější zápis označme $\nu = n + 1/2$ a provedme substituci $v = \nu x$. V bodě t_n tedy dostáváme chybu

$$R_n(t_n) = \pi - \int_0^{\pi/\nu} \frac{\sin(\nu x)}{\sin(x/2)} dx = \pi - \int_0^{\pi} \frac{\sin(v)}{\nu \sin(v/2\nu)} dv.$$

Pro velké ν (tj. velké n) můžeme pro výraz ve jmenovateli psát

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu \sin(v/2\nu) = \frac{v}{2}.$$

Chyba částečného součtu má tedy v bodě t_n konečnou limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \pi - 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(v)}{v} dv.$$

Integrál v této rovnici představuje tzv. integrální sinus v bodě π , $\text{Si}(\pi)$, viz. též dodatek D.10.

Z tabulkových hodnot nebo pomocí běžných počítačových programů pro vyčíslování standardních matematických funkcí snadno zjistíme, že

$$\text{Si}(\pi) \approx 0.589\pi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) \approx -0.179\pi.$$

připomeňme, že funkční hodnota $\tilde{s}(t_n) \approx -\pi$ pro velká n , neodstranitelná chyba tedy dosahuje téměř 18%.

Závěrem poznamenejme, že Gibbsův jev je projevem nestejněměrné konvergence Fourierovy řady. Jev není v rozporu s bodovou konvergencí, kterou zaručuje Dirichletova věta pro nekonečnou řadu. V bodě nespojitosti je součtem nekonečné Fourierovy řady aritmetický průměr limit zprava a zleva. Pro každý jiný bod v okolí bodu nespojitosti vždy najdeme takové n_0 , pro které již bude tento bod dále od bodu nespojitosti než bod maximální (neodstranitelné) chyby. Při zvětšování $n > n_0$ se v něm bude chyba aproximace zmenšovat až pro $n \rightarrow \infty$ dosáhne nuly, tj. součet řady (nekonečné) se bude rovnat příslušné funkční hodnotě rozvíjené funkce.

2.8 Vlastnosti Fourierových řad. Operace nad řadami.

V této podkapitole probereme některé důležité vlastnosti zejména exponenciální a trigonometrické Fourierovy řady nikoliv z hlediska různých symetrií spektra (tabulka 2.2) či rychlosti jeho ubývání, ale z hlediska provádění některých standardních matematických operací. Předpokládejme,

že známe několik jednoduchých párů „signál – diskrétní spektrum“. S těmito signály budeme provádět různé matematické operace, čímž vytvoříme nové signály. Budeme zkoumat jakým způsobem se tyto operace projeví ve spektrální oblasti, tj. jaký je vztah spektra nových a původních signálů. Půjde pak hlavně o to spočítat spektrum nového signálu (který může být mnohem složitější než signál původní) jednodušším způsobem než je vyčíslení koeficientů pomocí integrálů v definičních vztazích (2.24) popřípadě (2.17). Tím můžeme s minimálními náklady podstatně rozšířit „rejstřík“ známých párů signál – spektrum.

Objasněme nejprve, jaký vliv mají některé základní operace v časové oblasti na diskrétní spektrum pro případ exponenciální Fourierovy řady. Původní signály (před provedením operace) v časové oblasti budeme značit $\tilde{s}(t)$, případně $\tilde{f}(t)$ a $\tilde{g}(t)$, a jim odpovídající spektra S_n , F_n a G_n . Předpokládejme, že signály $\tilde{s}(t)$, $\tilde{f}(t)$ a $\tilde{g}(t)$ mají stejnou periodu T . Operací vznikne nový signál $\tilde{h}(t)$, kterému nechť odpovídá spektrum H_n , tj. předpokládáme, že nový signál lze též rozvinout v exponenciální Fourierovu řadu na intervalu stejné délky T . Mezi uvažovanými operacemi tedy nebudou takové, které by délku intervalu (periodu) měnily, tedy např. změna měřítka. Taková operace představuje substituci, o které víme již z podkapitoly 2.3, že Fourierovy koeficienty zachovává, ale mění báze funkce.

Lineární kombinace

$$\tilde{h}(t) = \alpha \tilde{f}(t) + \beta \tilde{g}(t) \quad \leftrightarrow \quad H_n = \alpha F_n + \beta G_n,$$

pro libovolné komplexní konstanty α a β .

Důkaz je triviální, plyne z linearit integrálu v definičním vztahu pro Fourierův koeficient. Poznamenejme, že u této operace není podstatné, že báze funkce v rozvoji jsou exponenciály. Tato vlastnost (linearita) spektra je univerzální, platí pro jakoukoliv Fourierovu řadu v $L_2(a, b)$.

Násobení

$$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t)\tilde{g}(t) \quad \leftrightarrow \quad H_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k G_{n-k}.$$

Poznamenejme, že výraz na pravé straně představuje diskrétní konvoluci: $H_n = F_n * G_n$.

Důkaz: Označme $\omega_0 = 2\pi/T$. Pak

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t) \exp(-i\omega_0 n t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \exp(i\omega_0 k t) \right) \tilde{g}(t) \exp(-i\omega_0 n t) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{g}(t) \exp(-i\omega_0 (n-k)t) dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k G_{n-k}, \quad \text{c.b.d} \end{aligned}$$

Praktický význam při výpočtu spektra funkce $\tilde{h}(t)$ má tato operace pouze pro konečné Fourierovy řady funkcí $\tilde{f}(t)$ a $\tilde{g}(t)$, tj. pro případ, že spektrální hodnoty původních signálů jsou od určitého n nulové (nebo alespoň efektivně nulové).

Translace signálu (časový posun)

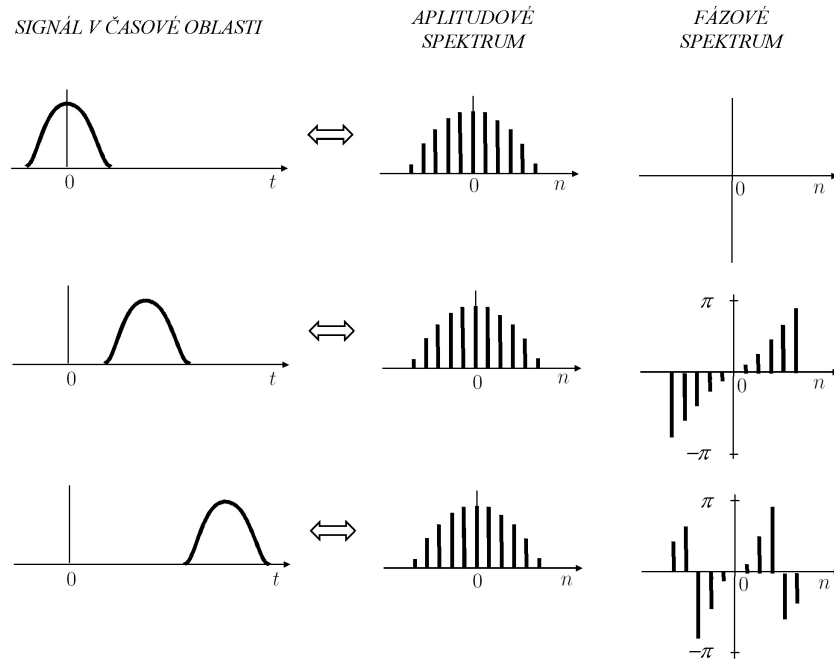
$$\tilde{h}(t) = \tilde{s}(t - \tau) \quad \leftrightarrow \quad H_n = S_n \exp\left(\frac{-i2\pi n \tau}{T}\right).$$

Důkaz: (pro zjednodušení zápisu opět označíme $\omega_0 = 2\pi/T$)

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t) &= \tilde{s}(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp(i\omega_0 n(t - \tau)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (S_n \exp(-i\omega_0 n\tau)) \exp(i\omega_0 nt) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp(i\omega_0 nt).\end{aligned}$$

Násobení exponenciálním faktorem $\exp(\frac{-i2\pi n\tau}{T})$ se někdy nazývá též modulace. Můžeme tedy shrnout: translace signálu v časové oblasti (tj. například změna počátku časové osy) je vždy doprovázena modulací signálu ve spektrální oblasti. Později uvidíme i komplementární vlastnost, tj. že modulace signálu v časové oblasti je spojena s frekvenčním posunem v oblasti spektrální.

Uvědomíme-li si, že pro modul modulačního faktoru platí $|\exp(\frac{-i2\pi n\tau}{T})| = 1$, snadno nahlédneme, že translace signálu v časové oblasti se nijak neprojeví na jeho amplitudovém spektru. Má vliv pouze na lineární nárůst (pokles) jeho fázového spektra, viz. obrázek 2.9. Konkrétně: dodatečná fáze způsobená posunem v časové oblasti je $\Delta\phi_n = -n\omega_0|\tau|$, $\phi_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$ pro $\tau > 0$ (posun doleva) a $\Delta\phi_n = n\omega_0|\tau|$, $\phi_n \in \langle -\pi, \pi \rangle$ pro $\tau < 0$ (posun doprava).



Obrázek 2.9: Vliv posunu signálu v časové oblasti na diskrétní fázové spektrum (pro jednoduchost předpokládáme, že posun je menší než délka periody).

Modulace signálu

Komplementární operací k translaci je modulace. Modulace v časové oblasti se projeví frekvenčním posunem ve spektrální oblasti:

$$\tilde{h}(t) = \tilde{s}(t) \exp\left(\frac{i2\pi mt}{T}\right) \leftrightarrow H_n = S_{n-m},$$

kde $m \in Z$

Důkaz je velmi jednoduchý ($\omega_0 = 2\pi/T$):

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp(i\omega_0 nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{s}(t) \exp(i\omega_0 mt) \exp(-i\omega_0 nt) dt \right] \exp(i\omega_0 nt) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{s}(t) \exp(-i\omega_0(n-m)t) dt \right] \exp(i\omega_0 nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{n-m} \exp(i\omega_0 nt), \quad \text{c.b.d.}\end{aligned}$$

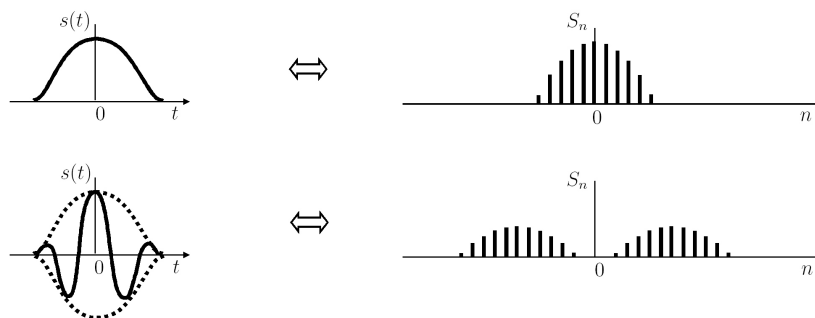
Někdy se modulací rozumí násobení signálu pouze funkcí sin, resp. cos, namísto exponenciály. Vyjádříme-li sin a cos pomocí exponenciál (viz vzorce (D.8.2))

$$\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{\exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right) + \exp\left(-\frac{i2\pi nt}{T}\right)}{2}, \quad \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{\exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right) - \exp\left(-\frac{i2\pi nt}{T}\right)}{2i},$$

snadno pak z linearity odvodíme:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t) = \tilde{s}(t) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) &\leftrightarrow H_n = \frac{S_{n-m} + S_{n+m}}{2} \\ \tilde{h}(t) = \tilde{s}(t) \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) &\leftrightarrow H_n = \frac{S_{n-m} - S_{n+m}}{2i}.\end{aligned}$$

Modulace signálu se často používá ve sdělovací technice. Obrázek 2.10 ukazuje názorně vliv modulace funkcí cos na diskrétní spektrum.



Obrázek 2.10: Vliv kosinové modulace signálu v časové oblasti na diskrétní spektrum.

Časová inverze (zrcadlení)

$$\tilde{h}(t) = \tilde{s}(-t) \quad \leftrightarrow \quad H_n = S_{-n}.$$

Důkaz ($\omega_0 = 2\pi/T$):

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t) &= \tilde{s}(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp(i\omega_0 n(-t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp(i\omega_0(-n)t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{-m} \exp(i\omega_0 mt) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{-m} \exp(i\omega_0 mt) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m \exp(i\omega_0 mt), \quad \text{c.b.d.}\end{aligned}$$

Komplexní sdružení

$$\tilde{h}(t) = \overline{\tilde{s}(t)} \quad \leftrightarrow \quad H_n = \overline{S_{-n}}.$$

Důkaz (viz. též cvičení v podkapitole 2.4):

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= \overline{\tilde{s}(t)} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp(i\omega_0 n t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{S_n} \exp(-i\omega_0 n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{S_n} \exp(i\omega_0 (-n)t) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{S_{-m}} \exp(i\omega_0 m t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{S_{-m}} \exp(i\omega_0 m t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m \exp(i\omega_0 m t), \quad \text{c.b.d} \end{aligned}$$

V důkazu jsme opět pro zjednodušení zápisu označili $\omega_0 = 2\pi/T$.

Pro speciální případ reálného signálu $\tilde{s}(t)$, navíc dostaneme $H_n = \overline{S_n}$.

Integrovaní

Předpokládejme T -periodickou funkci $\tilde{s}(t)$, rozvinutou v exponenciální Fourierovu řadu $\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp(i\omega_0 n t)$, kde $\omega_0 = 2\pi/T$. Zintegrujme tuto řadu člen po členu od nuly do t :

$$\int_0^t \tilde{s}(\tau) d\tau = S_0 t + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{S_n}{i\omega_0 n} [\exp(i\omega_0 n t) - 1] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{i\omega_0 n} [\exp(i\omega_0 n t) - 1]. \quad (2.32)$$

Takto vzniklá řada jistě není řadou Fourierovou, už kvůli přítomnosti lineárního členu, v důsledku čehož její součet není ani periodický. Tento „nedostatek“ je však pouze formální a můžeme jej snadno odstranit převedením lineárního členu na druhou stranu rovnice. Nebudeme tedy hledat rozvoj integrálu samotné funkce $\tilde{s}(t)$, ale funkce

$$\tilde{h}(t) = \int_0^t (\tilde{s}(\tau) - S_0) d\tau.$$

Předpokládejme, že funkce $\tilde{s}(t)$ je spojitá nebo po částech spojitá, tudíž $\tilde{h}(t)$ je spojitá. Funkce $\tilde{h}(t)$ je navíc i T -periodická, neboť platí:

$$\tilde{h}(t) - \tilde{h}(t+T) = \int_t^{t+T} (\tilde{s}(t) - S_0) dt = \int_{-T/2}^{T/2} (\tilde{s}(t) - S_0) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{s}(t) dt - T S_0 = 0.$$

Druhá rovnost v tomto vztahu je důsledkem T -periodicity samotné funkce $\tilde{s}(t)$, poslední rovnost pak plyne přímo z definičního vztahu pro S_0 . Funkce $\tilde{h}(t)$ je tedy spojitá, T -periodická a navíc zjevně diferencovatelná (je totiž integrálem $\tilde{s}(t)$). Lze jí tedy rozvinout ve Fourierovu řadu $\tilde{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp(i\omega_0 n t)$, která konverguje v každém bodě. Srovnáním s (2.32) pak okamžitě dostáváme

$$\tilde{h}(t) = \int_0^t (\tilde{s}(\tau) - S_0) d\tau \quad \leftrightarrow \quad H_n = \frac{S_n}{in\omega_0} \quad \text{pro } n \neq 0; \quad H_0 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{-S_n}{in\omega_0}.$$

Shrňme tedy: je-li S_0 funkce $\tilde{s}(t)$ rovno nule, můžeme její Fourierovu řadu formálně zintegrovat člen po členu a dostaneme rovnou Fourierovu řadu integrálu funkce $\tilde{s}(t)$. Pokud $S_0 \neq 0$ musíme před integrováním odečíst S_0 od $\tilde{s}(t)$ a po integraci dostaneme Fourierovu řadu integrálu funkce $\tilde{s}(t) - S_0$. Podmínka nulovosti S_0 , znamená nulovost integrálu $\int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$. Tuto podmínku splňují všechny liché signály, ale i některé „oscilující“ signály, u kterých se kladné a záporné příspěvky v integrálu vyruší.

Z kvalitativního pohledu, operace integrace v časové oblasti urychluje ubývání spektra s rostoucím n z důvodů dělení spektrálních koeficientů frekvencí $\omega = n\omega_0$. Ve spektru se tedy relativně posilují nízkofrekvenční složky, zatímco vysokofrekvenční se utlumují. Z matematického hlediska můžeme říci, že operace integrace urychluje konvergenci Fourierovy řady. Pokud tedy Fourierova řada původní funkce konvergovala, Fourierova řada jejího integrálu konverguje tím spíše, dokonce stejnoměrně k tomuto integrálu. Fourierovu řadu integrálu ovšem můžeme vytvořit integrací člen po členu i v případě, že řada původní funkce pouze existuje (tj. funkce je absolutně integrovatelná na $\langle -T/2, T/2 \rangle$, aby bylo možno spočítat koeficienty) a konverguje jen v průměru.

Derivování

V případě derivace funkce $\tilde{s}(t)$, musíme být při derivování řady člen po členu mnohem obezřetnější, než při integrování. Jak ukážeme níže (a jak čtenář již jistě tuší), operace derivování v časové oblasti je doprovázena násobením koeficientů frekvencí $\omega = n\omega_0$. Tudíž narozdíl od integrování, kde byly koeficienty frekvencí dělené, zde dochází ke zpomalování konvergence původní řady a může se snadno stát, že derivováním člen po členu vytvoříme řadu divergentní. Abychom tuto možnost vyloučili, je třeba klást jisté podmínky dodatečně omezující třídu funkcí $\tilde{s}(t)$, pro které chceme derivování provádět. Nestačí tedy jen aby původní neperiodická funkce $s(t)$ byla z $L_2(-T/2, T/2)$ (a tím pádem na daném intervalu i absolutně integrovatelná), tak jako v případě integrování, ale požadujeme navíc aby

- $s(t)$ byla spojitá na $\langle -T/2, T/2 \rangle$,
- platilo $s(-T/2) = \tilde{s}(T/2)$,
- její derivace $s'(t)$ byla alespoň po částech spojitá a diferencovatelná na $\langle -T/2, T/2 \rangle$.

Pak je zaručena konvergence Fourierovy řady derivace, kterou získáme formálním zderivováním původní řady:

$$\tilde{h}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp(in\omega_0 t) = \tilde{s}'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega_0 S_n \exp(in\omega_0 t).$$

Porovnáním koeficientů v obou řadách okamžitě vidíme, že za výše zmíněných předpokladů o funkci $\tilde{s}(t)$

$$\tilde{h}(t) = \tilde{s}'(t) \quad \leftrightarrow \quad H_n = in\omega_0 S_n.$$

Konvoluce

Nejprve definujeme konvoluci dvou periodických signálů s periodou T .

$$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) * \tilde{g}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau. \quad (2.33)$$

Poznamenejme, že tradičně používaný zápis $\tilde{f}(t) * \tilde{g}(t)$ je velmi zjednodušený a mohl by být zavádějící. Konvoluci je třeba chápat jako funkci proměnné t , $(\tilde{f} * \tilde{g})(t)$.

Snadno dokážeme, že konvoluci dvou funkcí v časové oblasti odpovídá násobení jejich Fourierových koeficientů ve spektrální oblasti:

$$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) * \tilde{g}(t) \quad \leftrightarrow \quad H_n = F_n G_n.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{h}(t) \exp(-i\omega_0 n t) dt = \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau \right) \exp(-i\omega_0 n t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(\tau) \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{g}(t - \tau) \exp(-i\omega_0 n t) dt \right) d\tau. \end{aligned}$$

V posledním integrálu přes t provedeme substituci $u = t - \tau$, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(\tau) \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2-\tau}^{T/2-\tau} \tilde{g}(u) \exp(-i\omega_0 n (u + \tau)) du \right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(\tau) \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{g}(u) \exp(-i\omega_0 n u) du \right) \exp(-i\omega_0 n \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(\tau) G_n \exp(-i\omega_0 n \tau) d\tau = G_n \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(\tau) \exp(-i\omega_0 n \tau) d\tau \\ &= G_n F_n, \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Korelace

Definujeme korelaci dvou periodických signálů s periodou T .

$$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) \star \tilde{g}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{\tilde{f}(\tau)} \tilde{g}(t + \tau) d\tau.$$

Opět zde používáme zjednodušené značení $\tilde{f}(t) \star \tilde{g}(t)$ namísto správnějšího $(\tilde{f} \star \tilde{g})(t)$. Pro reálné signály můžeme komplexní sdružení v integrandu vynechat. Poznamenejme, že někteří autoři definují korelaci bez komplexního sdružení i pro komplexní signály.

Narozdíl od konvoluce není korelace obecně komutativní

$$\tilde{g}(t) \star \tilde{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{\tilde{g}(\tau)} \tilde{f}(t + \tau) d\tau \neq \tilde{f}(t) \star \tilde{g}(t).$$

Z definičního integrálu je zřejmé, že korelaci můžeme vyjádřit pomocí konvoluce

$$\tilde{f}(t) \star \tilde{g}(t) = \overline{\tilde{f}(-t)} \star \tilde{g}(t), \quad \tilde{g}(t) \star \tilde{f}(t) = \overline{\tilde{g}(-t)} \star \tilde{f}(t).$$

Odtud již snadno dostaneme (pomocí časové inverze a komplexního sdružení) vyjádření pro spektrální koeficienty:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) \star \tilde{g}(t) &\leftrightarrow H_n = \overline{F_n} G_n \\ \tilde{h}(t) = \tilde{g}(t) \star \tilde{f}(t) &\leftrightarrow H_n = F_n \overline{G_n}. \end{aligned}$$

Speciálně pro reálné signály můžeme využít, že $\overline{S_n} = S_{-n}$ a výše uvedené vztahy přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) \star \tilde{g}(t) &\leftrightarrow H_n = \overline{F_n} G_n = F_{-n} G_n \\ \tilde{h}(t) = \tilde{g}(t) \star \tilde{f}(t) &\leftrightarrow H_n = F_n \overline{G_n} = F_n G_{-n}. \end{aligned}$$

Diskrétní spektrum korelace je obecně komplexní. Jeho reálná část se někdy nazývá diskrétní kospektrum, zatímco imaginární část diskrétní kvadrurní spektrum.

Autokorelace

Autokorelace periodické funkce s periodou T se zavádí jako korelace této funkce se sebou samou, tedy

$$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) \star \tilde{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{\tilde{f}(\tau)} \tilde{f}(t + \tau) d\tau.$$

Pro reálný signál můžeme opět komplexní sdružení v integrandu vynechat.

Z výše uvedeného je zřejmé, že pro spektrum autokorelace obecného komplexního signálu platí

$$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) \star \tilde{f}(t) \quad \leftrightarrow \quad H_n = \overline{F_n} F_n = |F_n|^2.$$

Speciálně pro reálný signál pak máme

$$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) \star \tilde{f}(t) \quad \leftrightarrow \quad H_n = \overline{F_n} F_n = |F_n|^2 = F_{-n} F_n.$$

Tento vztah představuje tzv. autokorelační nebo také Wiener-Chinčinův⁵ teorém.

Spektrum autokorelace se nazývá výkonové spektrum. Jelikož je to pouze kvadrát amplitudového spektra, je zřejmé, že informace o fázi (tedy např. poloze časového počátku) je po provedení autokorelace v časové oblasti ztracena. Naproti tomu výkonové spektrum zvýrazňuje maximální amplitudy, a proto lze z něho lépe odečítat převládající frekvence.

V praxi se často amplitudové spektrum počítá odmocněním výkonového spektra, tedy pomocí spektra autokorelace. Výhoda oproti výpočtu amplitudového spektra jakožto modulu spektra funkce $\tilde{s}(t)$ spočívá ve významných symetriích autokorelace. Z definice autokorelace vidíme, že v případě komplexní funkce je autokorelace funkcí hermitovskou a v případě reálné funkce funkcí sudou. Proto je výpočet spektra autokorelace méně numericky náročný oproti výpočtu spektra samotné funkce.

Tabulka 2.3 shrnuje přehledně vlastnosti Fourierových řad z hlediska matematických operací probraných v této podkapitole. V tabulce si můžeme též všimnout jisté symetrie mezi časovou a

⁵V anglické transkripci se můžeme setkat s výrazem Khinchin nebo Khintchine namísto Chinčin.

spektrální oblastí u některých vlastností (např. translace \leftrightarrow modulace, násobení \leftrightarrow konvoluce) v následujícím smyslu: má-li operace v časové oblasti svůj protějšek v nějaké operaci ve spektrální oblasti, pak aplikujeme-li operaci ze spektrální oblasti na oblast časovou, projeví se to ve spektru původní operací z časové oblasti.

vlastnost	signál v časové oblasti	diskrétní spektrum
sčítání	$\tilde{h}(t) = \alpha \tilde{f}(t) + \beta \tilde{g}(t)$	$H_n = \alpha F_n + \beta G_n$
násobení	$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)$	$H_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k G_{n-k}$
translace	$\tilde{h}(t) = \tilde{s}(t - \tau)$	$H_n = S_n \exp\left(\frac{-i2\pi n\tau}{T}\right)$
modulace	$\tilde{h}(t) = \tilde{s}(t) \exp\left(\frac{i2\pi mt}{T}\right)$	$H_n = S_{n-m}$
časová inverze	$\tilde{h}(t) = \tilde{s}(-t)$	$H_n = S_{-n}$
komplexní sdružení	$\tilde{h}(t) = \overline{\tilde{s}(t)}$	$H_n = \overline{S_{-n}}$
integrál	$\tilde{h}(t) = \int_0^t (\tilde{s}(\tau) - S_0) d\tau$	$H_n = \frac{S_n}{in\omega_0}$ pro $n \neq 0$ $H_0 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{-S_n}{in\omega_0}$
derivace	$\tilde{h}(t) = \tilde{s}'(t)$	$H_n = in\omega_0 S_n$
konvoluce	$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) * \tilde{g}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(t - \tau) d\tau$	$H_n = F_n G_n$
korelace	$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) \star \tilde{g}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{\tilde{f}(\tau)} \tilde{g}(t + \tau) d\tau$	$H_n = \overline{F_n} G_n$
autokorelace	$\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) \star \tilde{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{\tilde{f}(\tau)} \tilde{f}(t + \tau) d\tau$	$H_n = \overline{F_n} F_n = F_n ^2$

Tabulka 2.3: Vlastnosti Fourierových řad – operace nad řadami.

Vzhledem k tradičnímu významu trigonometrických Fourierových řad, uveďme zde některé z výše uvedených vlastností formulované i pro koeficienty trigonometrické řady. Předpokládejme funkci $s(t)$ rozvinutou na intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$ ve Fourierovu řadu $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$, kde $\omega_0 = 2\pi/T$.

Pak funkce $\tilde{h}(t) = \int_0^t (\tilde{s}(\tau) - a_0/2) d\tau$ lze rozvinout ve Fourierovu řadu $A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_0 t) +$

$B_n \sin(n\omega_0 t)$), kde koeficienty jsou dány vzorci

$$\begin{aligned} A_n &= -b_n/n\omega_0, & A_0/2 &= -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n/n\omega_0, \\ B_n &= a_n/n\omega_0. \end{aligned}$$

Je-li funkce derivací původní funkce, $h(t) = s'(t)$, a splňuje-li $s(t)$ podmínky zaručující konvergenci Fourierovy řady její derivace, tj. je spojitá, $s'(t)$ po částech spojitá a diferencovatelná a $s(-T/2) = s(T/2)$, jsou Fourierovy koeficienty derivace dány vztahy

$$\begin{aligned} A_n &= n\omega_0 b_n, & A_0 &= 0, \\ B_n &= -n\omega_0 a_n. \end{aligned}$$

Kufner & Kadlec 1969 uvádějí obecnější variantu se slabšími podmínkami na $s(t)$, kde se nepožaduje $s(-T/2) = s(T/2)$. Pak

$$\begin{aligned} A_n &= n\omega_0 b_n + (-1)^n A_0, & A_0 &= \frac{2}{T}(s(T/2) - s(-T/2)), \\ B_n &= -n\omega_0 a_n. \end{aligned}$$

V každém případě nelze, narozdíl od integrace, řadu pouze formálně zderivovat člen po členu, ale nejprve je třeba ověřit platnost uvedených podmínek.

Přestože přepočítání koeficientů exponenciální řady na koeficienty řady trigonometrické je dán jednoduchými vztahy, v některých případech je formální zapsání příslušné vlastnosti pro trigonometrickou řadu značně složitější. Ukážeme to na příkladu násobení dvou T -periodických funkcí $\tilde{f}(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$ a $\tilde{g}(t) = c_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(n\omega_0 t) + d_n \sin(n\omega_0 t))$. Trigonometrická Fourierova řada jejich součinu $\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)$ má koeficienty

$$\begin{aligned} A_n &= a_0 c_n / 2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (c_{m+n} + c_{m-n}) + b_m (d_{m+n} + d_{m-n}), & n &= 0, 1, 2, \dots \\ B_n &= a_0 d_n / 2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (d_{m+n} + d_{m-n}) + b_m (c_{m+n} + c_{m-n}), & n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

kde pro $k > 0$ klademe $c_{-k} = c_k$ a $d_{-k} = -d_k$.

Cvičení 2.8.1:

Najděte trigonometrickou Fourierovu řadu funkce $s(t) = t$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Výpočet proveďte a) z definičních vzorců pro koeficienty, b) pomocí operace posunutí signálu s využitím výsledku cvičení 2.5.2.

Cvičení 2.8.2:

Najděte trigonometrickou Fourierovu řadu funkce

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Výpočet proveďte a) z definičních vzorců pro koeficienty, b) pomocí operace posunutí signálu s využitím výsledku s pravoúhelníkovou funkcí, c) uvážením, že $s(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(t) + 1)$ s využitím výsledku cvičení 2.5.1.

2.9 Rozvoje pomocí vlastních funkcí.

Exponenciální (popřípadě trigonometrická) Fourierova řada hraje ve spektrální analýze zásadní roli a je úzce spojena s ostatními typy Fourierovských transformací, které se postupně probírají v tomto kurzu. Nicméně vzhledem k širokým aplikacím věnujme zde pozornost i ostatním typům Fourierových řad, které též odpovídají obecné teorii vysvětlené v podkapitole 2.2, ale jsou tvořeny zcela jinými báзовými funkcemi než jsou úplné systémy exponenciálních (trigonometrických) funkcí.

Bohatým zdrojem úplných ortogonálních soustav jsou soustavy řešení obyčejných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami. I systémy uvedené v podkapitole 2.3, které jsme dosud používali, představují řešení určitých rovnic tohoto typu. Abychom mohli plně využít širokou škálu možností volby těchto nových úplných ortogonálních soustav řešení, musíme nejprve naši obecnou teorii Fourierových řad na Hilbertových prostorech zobecnit na případ tzv. prostorů s vahou, nebo též **vahových prostorů**. Toto zobecnění je velmi jednoduché.

Uvažme reálnou funkci $w(t)$, která je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, je na tomto intervalu nezáporná a rovna nule nanejvýš v konečném počtu bodů. Takovou funkci budeme nazývat **vahovou funkcí**. Označme $L_2^w(a, b)$ Hilbertův prostor s vahou w funkcí integrovatelných s kvadrátem na $\langle a, b \rangle$, tj. prostor funkcí, pro které

$$\int_a^b w(t)|f(t)|^2 dt < \infty.$$

Skalární součin dvou funkcí v tomto prostoru je dán jako integrál

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)\overline{g(t)} dt.$$

Soustava funkcí $\{f_i\}$, ortogonální s vahou $w(t)$ na $L_2^w(a, b)$, splňuje

$$\int_a^b w(t)f_i(t)\overline{f_j(t)} dt = 0, \quad i \neq j.$$

Pro ortonormální soustavu $\{e_i\}$ platí

$$\int_a^b w(t)e_i(t)\overline{e_j(t)} dt = \delta_{ij}, \quad \text{tj.} \quad \int_a^b w(t)|e_n(t)|^2 dt = 1 \quad \forall n.$$

Rozvojem funkce $s(t)$ ve Fourierovu řadu na vahovém prostoru $L_2^w(a, b)$ rozumíme rovnost

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \psi_i(t), \tag{2.34}$$

kde koeficienty jsou dány vzorcem

$$c_i = \frac{\int_a^b w(\xi)s(\xi)\overline{\psi_i(\xi)} d\xi}{\int_a^b w(\xi)\psi_i(\xi)\overline{\psi_i(\xi)} d\xi} \tag{2.35}$$

a $\{\psi_i\}$ je úplná ortogonální soustava na $L_2^w(a, b)$.

Parsevalova rovnost na vahovém prostoru má tvar

$$\|s\|_{L_2, w(a, b)}^2 = \int_a^b w(t) |s^2(t)| dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2. \quad (2.36)$$

Rovnice (2.34) a (2.35) definují Fourierovu řadu, která je přímočarým zobecněním řady definované v podkapitole 2.2 a má analogické vlastnosti (nejlepší přiblížení, konvergence v průměru, atd.). Je-li speciálně $w(t) = 1$, přechází zobecněná Fourierova řada v $L_2^w(a, b)$ na „klasickou“ Fourierovu řadu v $L_2(a, b)$ z podkapitoly 2.2.

Definujme nyní tzv. okrajovou úlohu někdy též nazývanou Sturm-Liouvillov problém.

Definice: (Regulární okrajová úloha)

Okrajová úloha spočívá v hledání netriviálního řešení obyčejné lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$\frac{d}{dt} \left(A(t) \frac{du(t)}{dt} \right) + B(t)u(t) = -\lambda w(t)u(t),$$

na intervalu (a, b) splňujícího na hranicích intervalu okrajové podmínky

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 \quad \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0,$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ a $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ a zároveň $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. Funkce $A(t)$, $B(t)$ a $w(t)$ jsou reálné a spojité na (a, b) a navíc platí:

- $A(t)$ je kladná a má spojité derivace na (a, b)
- $w(t)$ je kladná a integrovatelná v $L_2(a, b)$.

Někdy se Sturm-Liouvillova okrajová úloha definuje v poněkud obecnějším smyslu, zejména pokud jde o specifikaci okrajových podmínek. Například mluvíme o tzv. singulární okrajové úloze, pokud namísto konkrétní funkční hodnoty v některém hraničním bodě je požadována pouze omezenost funkce. Dalším příkladem je tzv. periodická okrajová úloha, kdy okrajové podmínky požadují rovnost hodnot funkce (případně její derivace) v obou krajních bodech.

Čtenář si jistě všiml, že funkce $w(t)$ ve výše uvedené definici odpovídá podmínkám kladeným na vahovou funkci.

Takové λ , pro které existuje netriviální řešení se nazývá **vlastní číslo** a odpovídající řešení je **vlastní funkce** dané okrajové úlohy. Upřesněme, že vlastní funkcí budeme rozumět řešení „normalizované“ v $L_2^w(a, b)$, tj. takové $u(t)$, pro které $\int_a^b w(t) |u(t)|^2 dt = 1$. Je jasné, že je-li $u(t)$ řešením okrajové úlohy, je takovým řešením i $Cu(t)$, pro libovolnou konstantu C .

Věta: (O vlastních číslech a vlastních funkcích okrajové regulární úlohy)

Platí následující tvrzení

- Existuje nekonečně mnoho vlastních čísel. Tato čísla jsou reálná a tvoří posloupnost $\{\lambda_i\}$, kde $\lambda_{k+1} > \lambda_k$ pro všechna k .
- Každému vlastnímu číslu odpovídá právě jedna vlastní funkce.
- Vlastní funkce vytvářejí úplný ortonormální systém na $L_2^w(a, b)$.

Třetí tvrzení je pro nás z hlediska rozvíjení funkce ve Fourierovu řadu nejdůležitější; zaručuje možnost provádět rozvoje do řad konvergujících k rozvíjené funkci alespoň ve smyslu konvergence v průměru. Platí i pro singulární a periodické okrajové úlohy.

Dokažme alespoň některá z tvrzení výše uvedené věty, konkrétně ortogonalitu vlastních funkcí a to, že vlastní čísla jsou reálná.

Důkaz:

Předpokládejme 2 vlastní funkce, $u_n(t)$ a $u_m(t)$, odpovídající dvěma vlastním číslům λ_n a λ_m . První splňuje rovnici

$$\frac{d}{dt} \left(A(t) \frac{du_n(t)}{dt} \right) + B(t)u_n(t) = -\lambda_n w(t)u_n(t) \quad (2.37)$$

s okrajovými podmínkami

$$\alpha u_n(a) + \beta u_n'(a) = 0 \quad \gamma u_n(b) + \delta u_n'(b) = 0, \quad (2.38)$$

zatímco druhá splňuje rovnici

$$\frac{d}{dt} \left(A(t) \frac{du_m(t)}{dt} \right) + B(t)u_m(t) = -\lambda_m w(t)u_m(t) \quad (2.39)$$

s podmínkami

$$\alpha u_m(a) + \beta u_m'(a) = 0 \quad \gamma u_m(b) + \delta u_m'(b) = 0. \quad (2.40)$$

Vynásobením rovnice (2.37) funkcí $\overline{u_m}$ a jejím zintegrováním od a do b dostaneme

$$\int_a^b \overline{u_m}(t) \frac{d}{dt} \left(A(t) \frac{du_n(t)}{dt} \right) dt + \int_a^b B(t)u_n(t)\overline{u_m}(t) dt = -\lambda_n \int_a^b w(t)u_n(t)\overline{u_m}(t) dt.$$

První integrál na levé straně upravíme metodou per partes, čímž získáme rovnici

$$[\overline{u_m}(t)A(t)u_n'(t)]_a^b - \int_a^b \overline{u_m}'(t)A(t)u_n'(t) dt + \int_a^b B(t)u_n(t)\overline{u_m}(t) dt = -\lambda_n \int_a^b w(t)u_n(t)\overline{u_m}(t) dt,$$

kde u_i' zkráceně označuje derivaci: $u_i'(t) = \frac{d}{dt}u_i(t)$. Využitím okrajových podmínek přejde tato rovnice na

$$\begin{aligned} -\overline{u_m}(b)A(b)\frac{\gamma}{\delta}u_n(b) + \overline{u_m}(a)A(a)\frac{\alpha}{\beta}u_n(a) - \int_a^b \overline{u_m}'(t)A(t)u_n'(t)dt + \int_a^b B(t)u_n(t)\overline{u_m}(t)dt = \\ -\lambda_n \int_a^b w(t)u_n(t)\overline{u_m}(t)dt. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Analogicky, vynásobíme-li rovnici (2.39) funkcí $\overline{u_n}$, dospějeme stejným postupem k rovnici

$$\begin{aligned} -\overline{u_n}(b)A(b)\frac{\gamma}{\delta}u_m(b) + \overline{u_n}(a)A(a)\frac{\alpha}{\beta}u_m(a) - \int_a^b \overline{u_n}'(t)A(t)u_m'(t)dt + \int_a^b B(t)u_m(t)\overline{u_n}(t)dt = \\ -\lambda_m \int_a^b w(t)u_m(t)\overline{u_n}(t)dt. \end{aligned} \quad (2.42)$$

S rovnicí (2.42) proved'eme operaci komplexního sdružení. Důležitou roli zde hraje to, že funkce $A(t)$, $B(t)$ a $w(t)$, jakož i konstanty α , β , γ , δ jsou podle definice reálné, a proto komplexním sdružením dostaneme

$$\begin{aligned} -u_n(b)A(b)\frac{\gamma}{\delta}\overline{u_m}(b) + u_n(a)A(a)\frac{\alpha}{\beta}\overline{u_m}(a) - \int_a^b u_n'(t)A(t)\overline{u_m}'(t)dt + \int_a^b B(t)\overline{u_m}(t)u_n(t)dt = \\ -\overline{\lambda_m} \int_a^b w(t)\overline{u_m}(t)u_n(t)dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Rovnice (2.41) a (2.43) mají stejnou levou stranu, jejich odečtením tedy dostaneme

$$0 = -(\lambda_n - \overline{\lambda_m}) \int_a^b w(t)u_m(t)\overline{u_n}(t)dt. \quad (2.44)$$

Z této rovnice již snadno dokážeme požadovaná tvrzení. Volbou $n = m$, přejde (2.44) na

$$0 = -(\lambda_n - \overline{\lambda_n}) \int_a^b w(t)|u_n(t)|^2 dt.$$

U této rovnice je podstatné, že integrál na její pravé straně je vždy kladný. Je to důsledek základního předpokladu o vahové funkci, a sice že je kladná skoro všude. Vzhledem k tomu, že vlastní funkce uvažujeme normované na jedničku je tento integrál dokonce roven jedné. Za těchto okolností je ale jedinou možností, jak splnit výše uvedenou rovnici, že $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$, tj. že vlastní čísla jsou reálná. Tato úvaha platí pro libovolné n , tj. pro všechny vlastní čísla.

Ortogonalitu dostaneme naopak volbou $n \neq m$. Pak

$$0 = -(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w(t)u_n(t)\overline{u_m}(t)dt$$

(zde jsme již využili reálnost vlastních čísel). Jelikož výraz v závorce je při $n \neq m$ nenulový, musí být nulový integrál na pravé straně, tj. vlastní funkce jsou ortogonální s vahou w .

Různými volbami funkcí $A(t), B(t)$ a $w(t)$, konstant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a intervalu (a, b) dostaneme různé konkrétní okrajové úlohy, kterým odpovídají konkrétní systémy vlastních funkcí. Vzhledem k tomu, že podle výše uvedené věty jsou tyto systémy úplné a ortogonální (dokonce ortonormální) v $L_2^w(a, b)$, můžeme je použít k vytváření Fourierových řad, které konvergují v průměru⁶ k rozvíjené funkci. Uveďme několik příkladů.

Příklad:

Uvažujme rovnici

$$u''(t) + \lambda u(t) = 0$$

na intervalu $(0, l)$ s okrajovými podmínkami

$$u(0) = u(l) = 0.$$

Daná rovnice s okrajovými podmínkami představuje speciální případ regulární okrajové úlohy na $L_2(0, l)$ zvolíme-li: $A(t) = 1, B(t) = 0, w(t) = 1, \alpha = \gamma = 1, \beta = \delta = 0$. Obecné řešení této jednoduché rovnice je čtenáři jistě dobře známo

$$u(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Pro $t = 0$ plyne z okrajové podmínky $u(0) = 0$, že $C_1 = 0$. Z okrajové podmínky v druhém bodě dostaneme $C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$, při $C_2 \neq 0$ (neboť triviální řešení nehledáme). Výše uvedenou podmínku splňují pouze taková λ_n , pro která je $\sqrt{\lambda_n}l = n\pi$, tedy

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

Tato λ_n představují vlastní čísla dané okrajové úlohy. Odpovídající řešení jsou

$$u_n = \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right), \quad (2.45)$$

kde jsme vynechali konstantu C_2 . Tento multiplikační faktor je bezpředmětný, neboť stejně bychom měli řešení normalizovat na velikost jedna, abychom dostali ortonormální systém vlastních funkcí. Jak však víme z podkapitoly 2.3, můžeme k rozvojem používat i soustavy ortogonální na daném intervalu, tedy např. přímo funkce $\{\sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right)\}$ na $(0, l)$. Tento systém je nám ostatně již znám – je to soustava (2.15). Cílem tohoto prvního příkladu bylo ukázat, že i námi dosud používané trigonometrické (exponenciální) řady spadají pod Sturm-Liouvillovu teorii.

Cvičení 2.9.1:

Najděte vlastní čísla a jim odpovídající netriviální řešení rovnice

$$u''(t) + \lambda u(t) = 0$$

na intervalu $(-l, l)$ s okrajovými podmínkami

$$u(-l) = u(l), \quad u'(-l) = u'(l).$$

⁶Ve zobecněném smyslu vahového prostoru.

Sturm-Liouvillova teorie nám může posloužit i k získání systémů zcela nových, jak ukazují další příklady.

Příklad:

Uvažujme rovnici

$$u''(t) + \lambda u(t) = 0$$

na intervalu $(0, l)$ s okrajovými podmínkami

$$u(0) = 0, \quad u'(l) + u(l) = 0.$$

Jedná se o další speciální případ regulární okrajové úlohy na $L_2(0, l)$ pro parametry: $A(t) = 1, B(t) = 0, w(t) = 1, \alpha = \delta = \gamma = 1, \beta = 0$. Rovnice i její obecné řešení jsou stejné jako v předcházejícím příkladu. Okrajová podmínka v nule nám opět dá $C_1 = 0$. Druhá okrajová podmínka vede na podmínku

$$\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l) + \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$$

pro netriviální řešení. Pro vlastní čísla musí tedy platit $\sqrt{\lambda_n} = -\tan(\sqrt{\lambda_n}l)$. Tuto rovnici pro vlastní čísla nelze řešit přímo analyticky, můžeme ji však řešit numericky, resp. graficky. Označíme-li $\xi = \sqrt{\lambda}l$ rovnice přejde na tvar

$$\tan(\xi) = -\frac{\xi}{l}.$$

Její řešení jsou znázorněna na obrázku 2.11. Označíme-li taková řešení ξ_n , pak vlastní čísla jsou

$$\lambda_n = \frac{\xi_n^2}{l^2}.$$

a odpovídající řešení tvoří úplný ortogonální systém $\{u_n\}$, kde

$$u_n = \sin\left(\frac{\xi_n}{l}t\right).$$

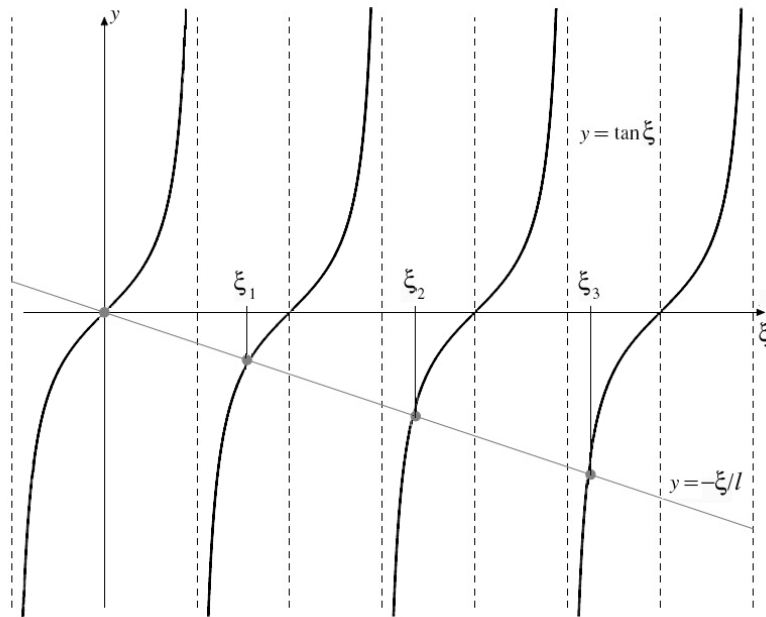
Přestože se v tomto konkrétním případě opět jedná o systém tvořený trigonometrickými funkcemi, jde o systém zcela jiného typu než soustavy v podkapitole 2.3.

Příklad:

Na intervalu $(0, l)$ uvažujme rovnici

$$\frac{d}{dt} \left(t \frac{du(t)}{dt} \right) = -\lambda t u(t),$$

tj. $u''(t) + \frac{1}{t}u'(t) + \lambda u(t) = 0$. Tato rovnice se nazývá Besselova rovnice nultého řádu. Okrajová podmínka je dána explicitně pouze v bodě l , $u(l) = 0$. V okolí nuly požadujeme, aby funkce byla ohraničená.



Obrázek 2.11: Grafy funkcí $y = \tan(\xi)$ a $y = -\xi/l$. Průsečíky křivek odpovídají řešením rovnice $\tan(\xi) = -\frac{\xi}{l}$.

Jedná se tedy o singulární okrajovou úlohu, kde $A(t) = w(t) = t$, $B(t) = 0$ a $\gamma = 1, \delta = 0$.

Obecné řešení této diferenciální rovnice je

$$u(t) = C_1 J_0(t\sqrt{\lambda}) + C_2 Y_0(t\sqrt{\lambda}), \quad (2.46)$$

kde $J_0(t)$ a $Y_0(t)$ jsou tzv. Besselovy funkce prvního a druhého druhu nultého řádu, viz dodatek D.15. Jsou znázorněny tučnou čarou na obrázku D.4. Jelikož $Y_0(t)$ není v okolí $t = 0$ omezená, plyne z okrajové podmínky, že $C_2 = 0$. Druhá z okrajových podmínek požaduje

$$J_0(l\sqrt{\lambda}) = 0,$$

neboť C_1 musí být různé od nuly. Označme ξ_n kořeny Besselovy funkce J_0 . Pro vlastní čísla pak dostaneme

$$\lambda_n = \frac{\xi_n^2}{l^2}.$$

Odpovídající řešení pak jsou

$$u_n(t) = J_0\left(\frac{\xi_n}{l}t\right).$$

Tyto funkce tvoří na intervalu $(0, l)$ úplný ortogonální systém. Můžeme je tedy použít pro vytvoření Fourierovy řady funkce $s(t)$ na daném intervalu (řada se nazývá Fourier-Besselova):

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\xi_n}{l}t\right), \quad (2.47)$$

kde koeficienty jsou dány vzorcem

$$c_n = \frac{\int_0^l t s(t) J_0\left(\frac{\xi_n}{l}t\right) dt}{\int_0^l t J_0^2\left(\frac{\xi_n}{l}t\right) dt}. \quad (2.48)$$

Připomeňme, že jmenovatel v tomto vzorci představuje normu funkce $J_0(\frac{\xi_n}{l}t)$ ve vahovém prostoru $L_2^w(0, l)$, kde $w(t) = t$.

2.10 Rozvoje pomocí ortogonálních polynomů.

Další rozsáhlou skupinou úplných ortogonálních soustav jsou tzv. klasické ortogonální polynomy. Přestože se opět jedná o vlastní funkce jistých diferenciálních rovnic ve vahovém prostoru $L_2^w(a, b)$, pojednáme zde tuto skupinu samostatně podrobněji, neboť teorie ortogonálních polynomů je značně rozpracovanou matematickou disciplínou s mnoha užitečnými aplikacemi.

Uvažme na konečném intervalu $\langle a, b \rangle$ posloupnost mocnin

$$1, t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots \quad (2.49)$$

Tyto funkce obecně nejsou na $\langle a, b \rangle$ ortogonální, platí pro ně však velmi důležitá věta, jejíž důkaz může čtenář najít např. v knize Kufner & Kadlec (1969).

Věta: (O „kvaziúplnosti“ mocnin)

Je-li $f(t) \in L_2^w(a, b)$ ortogonální ke všem mocninám soustavy (2.49) ve skalárním součinu vahového prostoru, pak $f(t)$ je nulová funkce.

Podle této věty tedy nelze najít nenulovou funkci, která by byla ortogonální zároveň ke všem funkcím soustavy (2.49). To je podobné definiční podmínce pro úplnost soustavy, až na to, že funkce soustavy mocnin nejsou navzájem ortogonální v $L_2^w(a, b)$, což je druhá definiční podmínka úplnosti soustavy. Proto jsme zde použili termín „kvaziúplnost“.

To, že funkce soustavy (2.49) nejsou navzájem ortogonální nepředstavuje principiální problém. Každou posloupnost v $L_2^w(a, b)$ lze totiž snadno ortogonalizovat pomocí Gram-Schmidtovy ortogonalizace, což je formální postup vysvětlený v dodatku D.11.

Gram-Schmidtova ortogonalizace vytváří ortogonální funkce pomocí lineárních kombinací funkcí původní, neortogonální, soustavy. Lineární kombinace mocnin nazýváme polynomy. Soustava vzniklá ortogonalizací je tedy soustava ortogonálních polynomů, které budeme značit

$$P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t), \dots, P_n(t), \dots \quad (2.50)$$

Polynom n -tého stupně obecně zapíšeme

$$P_n(t) = a_{n,n}t^n + a_{n,n-1}t^{n-1} + a_{n,n-2}t^{n-2} + \dots + a_{n,1}t + a_{n,0}, \quad (2.51)$$

kde $a_{n,n} \neq 0$ (Pozor: čárka v dolním indexu zde neznamená derivaci). Polynom je určen až na případný multiplikatívni faktor. Někdy se volí tak, aby $a_{n,n} = 1$. Jiná, často užívaná volba je taková, která zaručí jednotkovou normu v daném vahovém prostoru $L_2^w(a, b)$. Pro úplnost ještě poznamenejme, že polynomy jsou reálné.

Cvičení 2.10.1:

Ortogonalizujte posloupnost (2.49) na $L_2(-1, 1)$. Napište několik prvních členů nově vzniklé ortogonální posloupnosti.

Se zřetelem na možnost vytváření Fourierovských rozvoju je podstatné, že polynomy P_n vzniklé výše uvedeným postupem tvoří úplný ortogonální systém. Ortogonalita je dána způsobem jejich vzniku (ortogonalizací) a úplnost je důsledkem věty o „kvaziúplnosti“. Z důvodů linearity integrálu představujícího skalární součin platí, že je-li nějaká funkce ortogonální ke všem polynomům soustavy $\{P_i\}$, je také ortogonální ke všem mocninám, neboť polynomy jsou lineárními kombinacemi mocnin. Taková funkce pak ale musí být podle věty o „kvaziúplnosti“ rovna nule, což znamená, že soustava ortogonálních polynomů je úplná. Pro různé vahové funkce (případně různé intervaly) dostaneme různé typy ortogonálních polynomů. Tyto soustavy polynomů můžeme použít pro rozvíjení funkce v řadu, kde koeficienty jsou dány skalárním součinem rozvíjené funkce s daným polynomem v daném vahovém prostoru

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t), \quad c_n = \|P_n\|^{-2}(s, P_n) = \frac{\int_a^b w(t)s(t)P_n(t)dt}{\int_a^b w(t)P_n^2(t)dt}.$$

Parsevalova rovnost je

$$\int_a^b w(t)|s(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2.$$

Jak již bylo řečeno, teorie ortogonálních polynomů je značně rozvinutá. Čtenáři jsou jistě známé některé související pojmy jako vytvářící funkce nebo rekurentní vzorce. My zde uvedme jen to, že klasické ortogonální polynomy na konečných intervalech (a, b) jsou dány tzv. Rodrigue-zovou formulí

$$P_n(t) = \frac{1}{p_n w(t)} \frac{d^n}{dt^n} [w(t)H^n(t)], \quad (2.52)$$

kde p_n je jistá multiplikativní konstanta (pro různé typy polynomů různá), $w(t)$ je vahová funkce zavedená v předchozí podkapitole a $H(t) = (b-t)(t-a)$.

Teorie polynomů rovněž říká, že polynomy jsou řešením diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(w(t)H(t) \frac{du(t)}{dt} \right) = -\lambda w(t)u(t), \quad (2.53)$$

což je vlastně rovnice Sturm-Liouvillova typu. Tato rovnice má nesingulární řešení pro

$$\lambda = \lambda_n = -n \left(p_1 a_{1,1} + \frac{n-1}{2} \frac{d^2 H(t)}{dt^2} \right), \quad (2.54)$$

kde $a_{1,1}$ je koeficient u mocniny t^1 v daném polynomu. Pro každé λ_n je řešením odpovídající polynom P_n . Polynomy lze tedy chápat jako vlastní funkce odpovídající vlastním číslům λ_n .

Mezi klasické ortogonální polynomy patří i takové, které jsou definovány na neomezených intervalech, konkrétně na intervalech typu (a, ∞) a $(-\infty, \infty)$. Výše uvedenou teorii lze aplikovat i na takové polynomy, avšak s jistými modifikacemi. Nejzásadnější problém spočívá v tom, že na neomezených intervalech, při nevhodně zvolené vahové funkci, by mocniny (2.49) vůbec nemusely patřit do $L_2^w(a, b)$ a tudíž i věta o „kvaziúplnosti“ by byla bezpředmětná. Aby taková situace nemohla nastat, je třeba klást ještě další podmínky na vahovou funkci, kromě těch, které jsou dány v její definici. Příklad takových podmínek ukazuje následující věta (Kadlec & Kufner, 1969).

Věta: (O vahové funkci na nekonečných intervalech)

Jestliže máme interval $\langle a, \infty \rangle$ nebo $(-\infty, \infty)$ a existují kladné konstanty R, C, β takové, že

$$|w(t)| \leq C \exp(-\beta t) \quad \text{pro } |t| \geq R \quad \text{a} \quad w(t) \in L_1(a, b)$$

potom soustava mocnin (2.49) patří do $L_2^w(a, b)$ a platí věta o „kvaziúplnosti“.

Tato věta se může zdát čtenáři poněkud šroubovaná z hlediska podmínek kladených na vahovou funkci. Jejich smysl je však možno shrnout poměrně jednoduše: zaručit, že $w(t)$ ubývá s rostoucím t (případně $|t|$) rychleji než libovolná mocnina.

Za výše uvedených podmínek na vahovou funkci lze vytvořit polynomy na nekonečných intervalech a pracovat s nimi stejným způsobem jako s polynomy na intervalech konečných. Pouze funkci $H(t)$ v rovnicích (2.52) – (2.54) musíme definovat jiným způsobem, a sice

$$\begin{aligned} H(t) &= t - a && \text{pro interval typu } \langle a, \infty \rangle \\ H(t) &= 1 && \text{pro interval } (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Tabulka 2.4 ukazuje přehled nejznámějších klasických ortogonálních polynomů.

název	interval	vahová funkce	obecný vzorec	norma
Legendrový	$\langle -1, 1 \rangle$	$w(t) = 1$	$P_n(t) = \frac{1}{(-2)^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t^2)^n]$	$\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$
Čebyševovy I. druhu	$\langle -1, 1 \rangle$	$w(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$	$P_n(t) = (-1)^n \frac{(n-1)! 2^{n-1}}{(2n-1)!} \sqrt{1-t^2} \times \frac{d^n}{dt^n} [(1-t^2)^{n-1/2}]$	$\sqrt{\pi/2}, n \neq 0$ $\sqrt{\pi}, n = 0$
Čebyševovy II. druhu	$\langle -1, 1 \rangle$	$w(t) = \sqrt{1-t^2}$	$P_n(t) = (-1)^n \frac{(n+1)! 2^n}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \times \frac{d^n}{dt^n} [(1-t^2)^{n+1/2}]$	$\sqrt{\pi/2}$
Laguerrový	$\langle 0, \infty \rangle$	$w(t) = t^\alpha \exp(-t),$ $\alpha > -1$	$P_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!} \exp(t) t^{-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} [\exp(t) x^{n+\alpha}]$	$\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}}$
Hermitovy	$(-\infty, \infty)$	$w(t) = \exp(-t^2)$	$P_n(t) = (-1)^n \exp(t^2) \frac{d^n}{dt^n} [\exp(-t^2)]$	$\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}$

Tabulka 2.4: Nejčastěji používané ortogonální polynomy.

Cvičení 2.10.2:

Rozvíňte funkci $s(t) = t^2$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ v řadu Legendrových polynomů. Kolik má nenulových koeficientů? Porovnejte s výsledky cvičení 2.5.3a.

Ke skupině klasických ortogonálních polynomů se někdy počítají i tzv. přidružené Legendrovy funkce

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t). \quad (2.55)$$

Přestože tyto funkce mají mnoho vlastností polynomů (mají vytvořující funkci, jsou dány Rodrigueзовou formulí, platí pro ně rekurentní vzorce, jsou řešením Legendrovy přidružené diferenciální rovnice), je zřejmé, že o polynomy v pravém slova smyslu se jedná pouze pro m sudé. Navíc platí $P_n^m(t) = 0$ pro $m > n$. Poznamenejme, že někteří autoři definují přidružené Legendrovy funkce tak, že (2.55) obsahuje navíc multiplikativní faktor $(-1)^m$.

Cvičení 2.10.3:

Najděte $P_2^1(t)$, $P_2^2(t)$, $P_3^2(t)$ a $P_3^3(t)$.

Podobně jako Legendrovy polynomy, i přidružené Legendrovy funkce jsou ortogonální na $\langle -1, 1 \rangle$ s vahovou funkcí $w(t) = 1$ (vzhledem k dolnímu indexu)

$$\int_{-1}^1 P_n^m(t) P_k^m(t) dt = 0, \quad n \neq k$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

a tvoří na tomto intervalu úplný systém. Funkci $s(t)$ můžeme tedy rozvíjet v řadu

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n^m(t), \quad c_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^1 s(t) P_n^m(t) dt.$$

Cvičení 2.10.4:

Najděte koeficienty funkce $s(t) = a(1-t^2)$ v rozvoji do přidružených Legendrových funkcí při $m = 2$.

Na závěr tohoto exkursu do Fourierových řad vytvářených pomocí jiných než exponenciálních (trigonometrických) bází poznamenejme, že vlastnosti probírané v podkapitole 2.8 (kromě linearitu), stejně jako různé symetrie spektra (podkapitola 2.4) se na tyto řady obecně nevztahují. V souvislosti s konvergencí hovoříme obecně pouze o konvergenci v průměru, kritéria pro bodovou případně stejnoměrnou konvergenci mohou být značně komplikovaná. Některé vlastní funkce jakož i ortogonální polynomy jsou obecně neperiodické a není zvykem je periodicky dodefinovat mimo jejich základní interval. Proto ani sečtením takové Fourierovy řady obecně nedostaneme periodické prodloužení funkce $s(t)$ vně původního intervalu⁷.

2.11 Fourierovy řady více proměnných

Vícedimenzionální Fourierovy řady jsou důležité v mnoha aplikacích, neboť řada signálů, se kterými ve spektrální analýze pracujeme, závisí na více proměnných. V této podkapitole zmíníme

⁷To je též důvod proč jsme v této a předchozí podkapitole přestali používat symbol $\tilde{s}(t)$ pro rozvíjenou funkci.

stručně pouze Fourierovy řady dvou proměnných, rozšíření na více proměnných je přímočaré, ale zápis příslušných vzorců by byl dost komplikovaný.

Uvažme obdélníkový interval K , definovaný v rovině reálných proměnných (t_1, t_2) : $a \leq t_1 \leq b, c \leq t_2 \leq d$. Uvažme prostor $L_2(K)$ funkcí, pro které

$$\int_a^b \int_c^d |f(t_1, t_2)|^2 dt_2 dt_1 < \infty.$$

$L_2(K)$ tvoří úplný Hilbertův prostor se skalárním součinem definovaným jako integrál

$$(f, g) = \int_a^b \int_c^d f(t_1, t_2) \overline{g(t_1, t_2)} dt_2 dt_1.$$

Abychom mohli vytvářet Fourierovské rozvoje v analogii k případu funkcí jedné proměnné, potřebujeme nějaké úplné ortogonální (ortonormální) soustavy funkcí na intervalu K . V tom nám bude velmi užitečná následující věta:

Věta: (O úplných systémech funkcí 2 proměnných)

Je-li $\{\phi_n(t)\}$ úplná ortonormální soustava funkcí v prostoru $L_2(a, b)$ a $\{\psi_m(t)\}$ úplná ortonormální soustava funkcí v prostoru $L_2(c, d)$, pak soustava funkcí $\{e_{nm}(t_1, t_2) = \phi_n(t_1)\psi_m(t_2)\}$ je úplná a ortonormální v prostoru $L_2(K)$, $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.

Důkaz provedeme podle knihy Kufner & Kadlec (1969).

Důkaz:

Ortonormalita:

$$\begin{aligned} (e_{mn}, e_{jk}) &= \int_a^b \int_c^d \phi_m(t_1) \psi_n(t_2) \overline{\phi_j(t_1) \psi_k(t_2)} dt_1 dt_2 = \int_a^b \phi_m(t_1) \overline{\phi_j(t_1)} dt_1 \int_c^d \psi_n(t_2) \overline{\psi_k(t_2)} dt_2 \\ &= (\phi_m, \phi_j) (\psi_n, \psi_k). \end{aligned}$$

Díky ortonormalitě jednodimenzionálních soustav $\{\phi_m(t)\}$ a $\{\psi_n(t)\}$ dostáváme

$$(e_{mn}, e_{jk}) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } m = n \text{ a } j = k \\ 0 & \text{je-li } m \neq n \text{ nebo } j \neq k \end{cases}, \quad \text{c.b.d.}$$

Úplnost:

Uvažme $s(t_1, t_2) \in L_2(K)$. Označme $g_{t_2}(t_1) = s(t_1, t_2)$ při fixním t_2 . Funkce $g_{t_2}(t_1)$ musí být (v souladu se známou Fubiniovou větou) z prostoru $L_2(a, b)$. Lze ji tedy rozvinout v řadu pomocí úplné ortonormální soustavy $\{\phi_n(t_1)\}$, přičemž koeficienty této řady budou záviset na t_2 :

$$g_{t_2}(t_1) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t_2) \phi_m(t_1), \quad c_m(t_2) = (g_{t_2}, \phi_m) = \int_a^b g_{t_2}(t_1) \overline{\phi_m(t_1)} dt_1 = \int_a^b s(t_1, t_2) \overline{\phi_m(t_1)} dt_1$$

a Parsevalova rovnost má tvar

$$\int_a^b |g_{t_2}(t_1)|^2 dt_1 = \int_a^b |s(t_1, t_2)|^2 dt_1 = \sum_{m=1}^{\infty} |c_m(t_2)|^2. \quad (2.56)$$

Funkce $c_m(t_2)$ patří do $L_2(c, d)$, což je důsledkem toho, že $s(t_1, t_2) \in L_2(K)$:

$$\int_c^d |c_m(t_2)|^2 dt_2 \leq \int_c^d \sum_{m=1}^{\infty} |c_m(t_2)|^2 dt_2 = \int_c^d \int_a^b |s(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 < \infty.$$

V tom případě ji ale musí jít rozvinout do Fourierovy řady na (c, d) pomocí soustavy $\{\psi_n(t)\}$

$$c_m(t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{m,n} \psi_n(t_2), \quad c_{m,n} = (c_m, \psi_n) = \int_a^b \int_c^d s(t_1, t_2) \overline{\phi_m(t_1) \psi_n(t_2)} dt_2 dt_1 \quad (2.57)$$

a platí Parsevalova rovnost

$$\int_c^d |c_m(t_2)|^2 dt_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_{m,n}|^2. \quad (2.58)$$

Spojením Parsevalových rovností (2.56) (zintegrované od c do d přes t_2) a (2.58) dostaneme

$$\int_c^d \int_a^b |s(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 = \int_c^d \sum_{m=1}^{\infty} |c_m(t_2)|^2 dt_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \int_c^d |c_m(t_2)|^2 dt_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{m,n}|^2,$$

což je Parsevalova rovnost odpovídající funkci $s(t_1, t_2)$ rozvinuté na $L_2(K)$ do Fourierovy řady

$$s(t_1, t_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{m,n} \phi_m(t_1) \psi_n(t_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{m,n} e_{mn}(t_1, t_2). \quad (2.59)$$

Z podkapitoly 2.2 víme, že platnost Parsevalovy rovnosti je ekvivalentní úplnosti soustavy, pomocí níž je Fourierova řada vytvořena. Tudíž jsme dokázali, že soustava $\{e_{nm}(t_1, t_2) = \phi_n(t_1) \psi_m(t_2)\}$ je úplná a ortonormální soustava v prostoru $L_2(K)$.

Věta, kterou jsme právě dokázali je velmi užitečná pro vytváření úplných ortonormálních soustav na dvojrozměrných intervalech prostým vynásobením známých úplných ortonormálních soustav na odpovídajících jednorozměrných intervalech. Ty pak použijeme pro Fourierovy řady funkcí dvou proměnných. Příslušné vzorce pro rozvoj i koeficienty jsme už odvodili v rámci výše uvedeného důkazu (rovnice (2.59) a (2.57)). Pro pohodlí čtenáře je zde uveďme v přehledné formě

$$s(t_1, t_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{m,n} e_{mn}(t_1, t_2), \quad c_{m,n} = \int_a^b \int_c^d s(t_1, t_2) \overline{e_{mn}(t_1, t_2)} dt_2 dt_1$$

Takové Fourierovy řady se pro mechanismus vytváření jejich bázových funkcí nazývají násobné (v našem případě tedy **dvojnásobné Fourierovy řady**). Obecnějšími typy Fourierových řad než jsou řady násobné se v tomto kurzu nebudeme zabývat.

Mějme interval $I = \langle -l, l \rangle \times \langle -h, h \rangle$ $h > 0, l > 0$. V Hilbertově prostoru $L_2(I)$ je podle výše uvedené věty s použitím podkapitoly 2.3 úplná a ortonormální například soustava

$$e_{mn}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\sqrt{lh}} \exp\left(i\pi\left(\frac{mt_1}{l} + \frac{nt_2}{h}\right)\right) \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.60)$$

Tyto funkce jsou periodické. Všem společnou periodou je $2l$ v proměnné t_1 a $2h$ v proměnné t_2 . Pomocí soustavy (2.60) můžeme libovolnou funkci z $L_2(I)$ rozvinout ve Fourierovu řadu

$$\tilde{s}(t_1, t_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m,n} \frac{1}{2\sqrt{lh}} \exp\left(i\pi\left(\frac{mt_1}{l} + \frac{nt_2}{h}\right)\right) \quad (2.61)$$

s koeficienty

$$S_{m,n} = (\tilde{s}, e_{mn}) = \frac{1}{2\sqrt{lh}} \int_{-l}^l \int_{-h}^h \tilde{s}(t_1, t_2) \exp\left(-i\pi\left(\frac{mt_1}{l} + \frac{nt_2}{h}\right)\right) dt_1 dt_2. \quad (2.62)$$

Tato řada konverguje k funkci $\tilde{s}(t_1, t_2)$ přinejmenším v průměru. Obecná kritéria bodové případně stejnoměrné konvergence jsou mnohem složitější než v případě jedné proměnné a jsou mimo rámec těchto skript. Poznamenejme, že součet řady je funkce $2l$ -periodická v proměnné t_1 a $2h$ -periodická v proměnné t_2 .

Cvičení 2.11.1:

Uvažujte interval $I = \langle -\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2} \rangle \times \langle -\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2} \rangle$. Na tomto intervalu rozviňte funkci

$$s(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{na intervalu } (-\mu, \mu) \times (-\nu, \nu) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}, \quad 2\mu \leq T_1, 2\nu \leq T_2$$

v dvojnásobnou exponenciální Fourierovu řadu.

Dvoudimenzionální diskretní spektrum má analogické vlastnosti jako spektra jednodimenzionální co se týče různých symetrií a také operací nad řadami. Následuje zdaleka ne úplný výčet nejdůležitějších z nich. Důkazy by byly obdobné těm, které jsme prováděli v podkapitole 2.8. Některé operace, jako například transpozice, různá zrcadlení či smíšené derivace jsou umožněny dvoudimenzionálním charakterem signálů a jejich spekter. Jejich důkazy jsou jednoduché a čtenář si je jistě snadno provede sám.

Translace

$$\tilde{h}(t_1, t_2) = \tilde{s}(t_1 - a, t_2 - b) \quad \leftrightarrow \quad H_{n,m} = S_{n,m} \exp(-2\pi i \left(\frac{an}{T_1} + \frac{bm}{T_2}\right)).$$

Modulace

$$\tilde{h}(t_1, t_2) = \tilde{s}(t_1, t_2) \exp(2\pi i \left(\frac{it_1}{T_1} + \frac{jt_2}{T_2}\right)) \quad \leftrightarrow \quad H_{n,m} = S_{n-i, m-j}$$

Derivace

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t_1, t_2) &= \frac{\partial \tilde{s}(t_1, t_2)}{\partial t_1} &\leftrightarrow H_{n,m} &= 2\pi i \frac{n}{T_1} S_{n,m} \\ \tilde{h}(t_1, t_2) &= \frac{\partial \tilde{s}(t_1, t_2)}{\partial t_2} &\leftrightarrow H_{n,m} &= 2\pi i \frac{m}{T_2} S_{n,m} \\ \tilde{h}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 \tilde{s}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &\leftrightarrow H_{n,m} &= -4\pi^2 \frac{nm}{T_1 T_2} S_{n,m}\end{aligned}$$

Transpozice

$$\tilde{h}(t_1, t_2) = \tilde{s}(t_2, t_1) \quad \leftrightarrow \quad H_{n,m} = S_{m,n}$$

Zrcadlení

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t_1, t_2) &= \tilde{s}(-t_1, t_2) &\leftrightarrow H_{n,m} &= S_{-n,m} \\ \tilde{h}(t_1, t_2) &= \tilde{s}(t_1, -t_2) &\leftrightarrow H_{n,m} &= S_{n,-m} \\ \tilde{h}(t_1, t_2) &= \tilde{s}(-t_1, -t_2) &\leftrightarrow H_{n,m} &= S_{-n,-m}\end{aligned}$$

Násobení

$$\tilde{h}(t_1, t_2) = \tilde{f}(t_1, t_2) \tilde{g}(t_1, t_2) \quad \leftrightarrow \quad H_{n,m} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{j,k} G_{n-j,m-k}$$

Konvoluce

$$\tilde{h}(t_1, t_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \int_{-T_2/2}^{T_2/2} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2) \tilde{g}(t_1 - \xi_1, t_2 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad \leftrightarrow \quad H_{n,m} = F_{n,m} G_{n,m}$$

Korelace

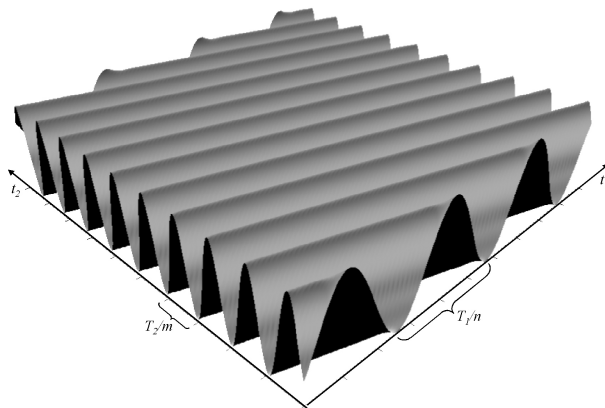
$$\tilde{h}(t_1, t_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \int_{-T_2/2}^{T_2/2} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2) \overline{\tilde{g}(t_1 + \xi_1, t_2 + \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad \leftrightarrow \quad H_{n,m} = F_{n,m} \overline{G_{n,m}}$$

Autokorelace

$$\tilde{h}(t_1, t_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \int_{-T_2/2}^{T_2/2} \tilde{s}(\xi_1, \xi_2) \overline{\tilde{s}(t_1 + \xi_1, t_2 + \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \quad \leftrightarrow \quad H_{n,m} = |S_{n,m}|^2$$

Poznamenejme rovněž, že v analogii k jednodimenzionálnímu případu i zde pro reálný signál platí

$$S_{-n,-m} = \overline{S_{n,m}}.$$



Obrázek 2.12: Funkce $\cos\left(2\pi\left(\frac{nt_1}{T_1} + \frac{mt_2}{T_2}\right) + \arg(S_{nm})\right)$.

Abychom získali názornou představu o tom, co to znamená rozvinout reálnou funkci $s(t_1, t_2)$ ve dvojnásobnou exponenciální Fourierovu řadu, sečteme dohromady harmonické složky pro indexy n, m a $-n, -m$. Takové součty označme $H_{(n,m)}(t_1, t_2)$. Platí

$$\begin{aligned} H_{(n,m)}(t_1, t_2) &= S_{n,m} \exp\left(2\pi i\left(\frac{nt_1}{T_1} + \frac{mt_2}{T_2}\right)\right) + S_{-n,-m} \exp\left(2\pi i\left(-\frac{nt_1}{T_1} - \frac{mt_2}{T_2}\right)\right) \\ &= 2\left\{\Re\{S_{n,m}\} \cos\left(2\pi\left(\frac{nt_1}{T_1} + \frac{mt_2}{T_2}\right)\right) - \Im\{S_{n,m}\} \sin\left(2\pi\left(\frac{nt_1}{T_1} + \frac{mt_2}{T_2}\right)\right)\right\} \end{aligned}$$

Vyjádříme-li koeficienty pomocí modulu a fáze, $S_{n,m} = |S_{nm}| \exp(i \operatorname{Arg}(S_{nm}))$, je zřejmé, že pro reálnou a imaginární část platí $\Re\{S_{n,m}\} = |S_{n,m}| \cos(\arg(S_{n,m}))$, $\Im\{S_{n,m}\} = |S_{n,m}| \sin(\arg(S_{n,m}))$. S využitím součtového vzorce (D.8.4) pak již snadno dostaneme

$$H_{(n,m)}(t_1, t_2) = 2|S_{n,m}| \cos\left(2\pi\left(\frac{nt_1}{T_1} + \frac{mt_2}{T_2}\right) + \arg(S_{n,m})\right).$$

Tato funkce je schématicky znázorněna na obrázku 2.12. Ze skript Bezvoda a kol. (1987) si pro ni vypůjčíme přilehavý název „vlnitý plech“. Lze tedy říci, že signál $\tilde{s}(t_1, t_2)$ je vyjádřen jako superpozice spočetně mnoha takových „vlnitých plechů“, které se liší amplitudou, fází, frekvencí a natočením v rovině (t_1, t_2) daným poměrem $T_1 T_2 / nm$. Tato superpozice představuje vlastně fázový tvar dvojnásobné exponenciální Fourierovy řady (viz též podkapitola 2.5 pro jednodimenzionální případ). Pro komplexní signál je zobecnění jednoduché: do „vlnitých plechů“ rozložíme zvlášť reálnou a imaginární část.

Rozepsáním exponenciálních funkcí pomocí funkcí \cos a \sin (vzorec (D.8.1)), dojdeme k tzv. reálnému (nebo též trigonometrickému) tvaru řady (2.61). Jeho formální zápis je však poněkud komplikovaný a nepřehledný.

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t_1, t_2) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} \left[a_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right) + b_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right) \right. \\ &\quad \left. + c_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right) + d_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right) \right] \end{aligned} \tag{2.63}$$

kde koeficienty jsou dány vzorci

$$\begin{aligned} a_{m,n} &= \frac{1}{lh} \int_{-l}^l \int_{-h}^h \tilde{s}(t_1, t_2) \cos\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right) dt_1 dt_2, \\ b_{m,n} &= \frac{1}{lh} \int_{-l}^l \int_{-h}^h \tilde{s}(t_1, t_2) \sin\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right) dt_1 dt_2, \\ c_{m,n} &= \frac{1}{lh} \int_{-l}^l \int_{-h}^h \tilde{s}(t_1, t_2) \cos\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right) dt_1 dt_2, \\ d_{m,n} &= \frac{1}{lh} \int_{-l}^l \int_{-h}^h \tilde{s}(t_1, t_2) \sin\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (2.64)$$

kde

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} 1/4 & \text{pro } m = n = 0 \\ 1/2 & \text{pro } n = 0, m > 0 \quad \text{nebo } m = 0, n > 0 \\ 1 & \text{pro } m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Jedná se vlastně o rozvoj pomocí funkcí

$$1, \cos\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right), \sin\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right), \cos\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right), \sin\left(\frac{m\pi t_1}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi t_2}{h}\right), \dots$$

$(m, n = 1, 2, \dots)$

které tvoří na I úplný ortogonální systém.

Cvičení 2.11.2:

Uvažujte interval $I = \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$. Na tomto intervalu rozviňte funkci

$$s(t_1, t_2) = t_1 t_2$$

v dvojnásobnou trigonometrickou Fourierovu řadu. Využijte výsledku cvičení 2.8.1.

Na závěr této podkapitoly uveďme ještě příklad násobné Fourierovy řady, která je tvořena jiným systémem básových funkcí než jsou součiny exponenciál nebo trigonometrických funkcí. Tato řada je základem tzv. **sférické harmonické analýzy** a nachází četné aplikace například v geofyzice.

Příklad:

Uvažme jednotkovou kouli. K jejímu popisu potřebujeme 2 úhlové souřadnice: $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ a $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Rozviňte funkci $s(\theta, \phi)$ zadanou na této jednotkové kouli v řadu pomocí tzv. sférických harmonik.

Jedná se o funkci

$$Y_{n(c)}^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos(\theta)) \cos(m\phi) \quad Y_{n(s)}^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos(\theta)) \sin(m\phi), \quad (2.65)$$

kde P_n^m jsou přidružené Legendrovy funkce dané předpisem ⁸

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}.$$

⁸V definici opět někteří autoři zahrnují multiplikativní faktor $(-1)^m$.

Sférické harmonické funkce tvoří na jednotkové kouli úplný ortogonální systém. Jejich normy jsou

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \right]^{1/2} && \text{pro } m \neq 0 \\ & \left[\frac{4\pi}{(2n+1)} \right]^{1/2} && \text{pro } m = 0. \end{aligned}$$

Každou funkci můžeme tedy na jednotkové kouli rozvinout v řadu

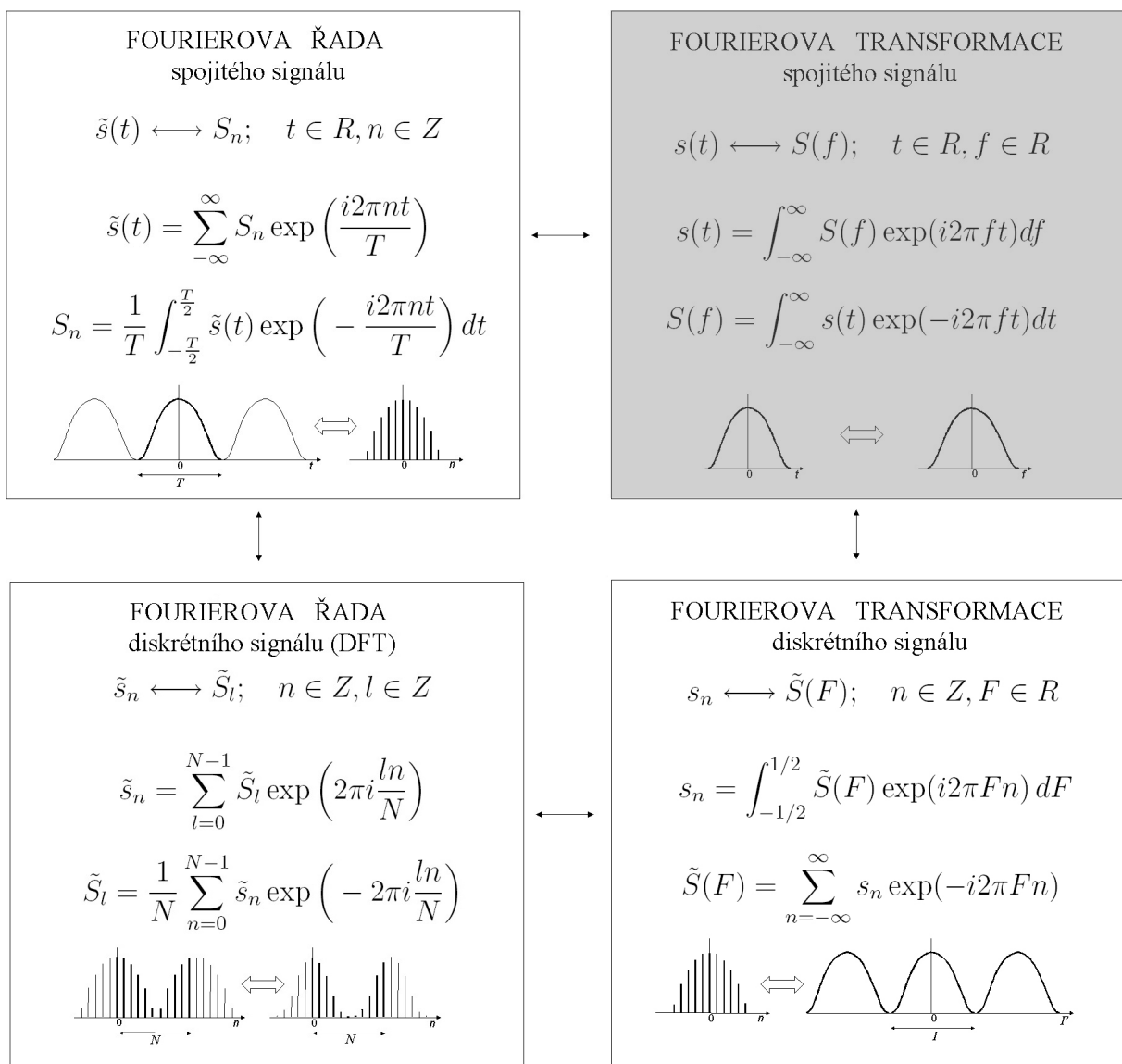
$$\begin{aligned} s(\theta, \phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{n(c)}^m Y_{n(c)}^m(\theta, \phi) + a_{n(s)}^m Y_{n(s)}^m(\theta, \phi)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{n(c)}^m \cos m\phi + a_{n(s)}^m \sin m\phi] P_n^m(\cos \theta), \end{aligned}$$

kde koeficienty jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} a_{n(c)}^m &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} s(\theta, \phi) Y_{n(c)}^m(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (m \neq 0) \\ a_{n(c)}^0 &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} s(\theta, \phi) Y_{n(c)}^0(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} s(\theta, \phi) P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta d\phi \\ a_{n(s)}^m &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} s(\theta, \phi) Y_{n(s)}^m(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (m \neq 0) \\ a_{n(s)}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Kapitola 3

FOURIEROVA TRANSFORMACE SPOJITÉHO SIGNÁLU



V této kapitole vysvětlíme základy Fourierovy integrální transformace, tedy vzájemně jednoznačného přiřazení mezi spojitým (neperiodickým) signálem v časové oblasti a jiným spojitým (neperiodickým) signálem ve spektrální oblasti. Nejprve si vyjasněme třídu funkcí, se kterými zde budeme pracovat. Jedná se o tzv. Fourierovské signály standardního typu, někdy zkráceně nazývané Fourierovské signály.

Definice: (Fourierovský signál standardního typu)

Fourierovským signálem standardního typu nazveme funkci $s(t) \in C$, která

- je neperiodická a absolutně integrovatelná na $(-\infty, \infty)$, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)| d\tau < \infty$$

- splňuje Dirichletovy podmínky v libovolném konečném intervalu.

Dirichletovými podmínkami se zde rozumí buď podmínky věty o konvergenci trigonometrické Fourierovy řady III nebo podmínky Dirichletovy věty (viz 2.6). Požadujeme tedy, aby kromě absolutní integrovatelnosti byla funkce $s(t)$ na daném intervalu spojitá nebo po částech spojitá s konečným počtem bodů nespojitosti a měla po částech spojitou první derivaci anebo měla konečný počet maxim a minim. Jak uvidíme později, splnění těchto podmínek zaručuje existenci inverzní Fourierovy transformace, tj. výpočtu signálu v časové oblasti z jeho spektra. Existenci přímé transformace, tj. výpočtu spektra ze signálu v časové oblasti, naopak zaručuje podmínka absolutní integrovatelnosti funkce.

Absolutní integrovatelnost je podmíněna ubýváním funkčních hodnot $s(t)$ při $t \rightarrow \pm\infty$, tedy podmínkou $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} s(t) = 0$. To splňují funkce buď nenulové pouze na konečném intervalu (funkce s omezeným nosičem, rozšířené na R doplněním nulami), nebo alespoň tzv. „efektivně“ nenulové na konečném intervalu (funkce, jejichž hodnoty mimo tento interval jsou malé a můžeme je zanedbat). Funkce nenulové na konečném intervalu se nazývají **přechodné funkce**. Pokud jsou navíc ještě hladké, říkáme jim finitní funkce.

V této kapitole se budeme také zajímat o vztah Fourierovy transformace spojitého signálu a Fourierovy řady spojitého signálu, které je věnována předcházející kapitola. Půjde nám při tom o Fourierovu exponenciální řadu, případně její reálnou reprezentaci ve formě trigonometrické Fourierovy řady. Integrální protějšky řad vytvořených pomocí jiných bází zde zkoumat nebudeme. Každopádně vnímavému čtenáři jistě neuniklo, že teorie Fourierových řad je vybudována pro funkce integrovatelné s kvadrátem, zatímco zde požadujeme pouze absolutní integrovatelnost. Při uvažovaném rozšíření na celé R je zřejmé, že ani jedna třída není podmnožinou té druhé:

$$L_1(-\infty, \infty) \not\subset L_2(-\infty, \infty), \quad L_2(-\infty, \infty) \not\subset L_1(-\infty, \infty).$$

Budeme-li však chtít srovnávat oba typy transformací, musíme se omezit na funkce, které patří do průniku obou tříd. Naštěstí funkce, se kterými se můžeme setkat v praxi, jsou většinou primárně zadané jen na konečném intervalu a do průniku obou tříd jistě patří.

Později, v podkapitole 3.5, opustíme třídu Fourierovských signálů standardního typu a budeme

uvažovat Fourierovu transformaci i pro některé speciální funkce, které například nejsou absolutně integrovatelné (konstanta, signum, Heavisideova funkce), nebo to dokonce nejsou funkce v pravém slova smyslu, ale jedná se o distribuce (δ -funkce).

3.1 Intuitivní přechod od Fourierovy řady k Fourierově transformaci.

V této podkapitole rozhodně není prezentováno striktní matematické odvození Fourierovy transformace z Fourierovy řady. Jde nám spíše o poskytnutí názornější představy o souvislosti obou typů transformací a o lepší pochopení toho, proč je Fourierova transformace spojitého signálu definována právě takovým způsobem, jak je tomu v kapitole 3.2.

Uvažujme například finitní funkci¹ $s(t)$ (obrázek 3.1a) rozvinutou v exponenciální Fourierovu řadu na intervalu $(-T/2, T/2)$. Funkci tedy uvažujeme jako T -periodickou a píšeme pro ni

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp(i2\pi nt/T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) \exp(-i2\pi n\tau/T) d\tau \right\} \exp(i2\pi nt/T).$$

Pro zjednodušení zápisu označme $\omega_n = 2\pi n/T$ a $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T$. Veličina $\Delta\omega$ tedy představuje základní úhlovou frekvenci². Pro úplnost poznamenejme, že v kapitole 2 jsme pro ni používali označení ω_0 . Máme tedy $\omega_n = n\Delta\omega$ a rozvoj můžeme napsat ve tvaru

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) \exp(i\omega_n(t - \tau)) d\tau. \quad (3.1)$$

Nyní provedme takový myšlenkový experiment, při kterém budeme postupně zvětšovat T (obrázky 3.1b a 3.1c). Rovnice (3.1) zůstává v platnosti. Až v limitě $T \rightarrow \infty$, se z periodické funkce stane opět původní finitní funkce, $\tilde{s}(t) = s(t)$, viz obrázek 3.1d. Při tomto limitním přechodu předpokládáme, že $\omega_n \rightarrow \omega$, kde ω je nějaké reálné číslo, které nazveme **úhlovou frekvencí**. Veličina $\Delta\omega$ přejde na infinitezimální $d\omega$ a \sum přejde na \int . Pro Fourierovu reprezentaci neperiodické funkce tedy budeme psát

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(i\omega(t - \tau)) d\tau. \quad (3.2)$$

Tento výraz se nazývá **dvojnásobný Fourierův integrál**. Označíme-li dále

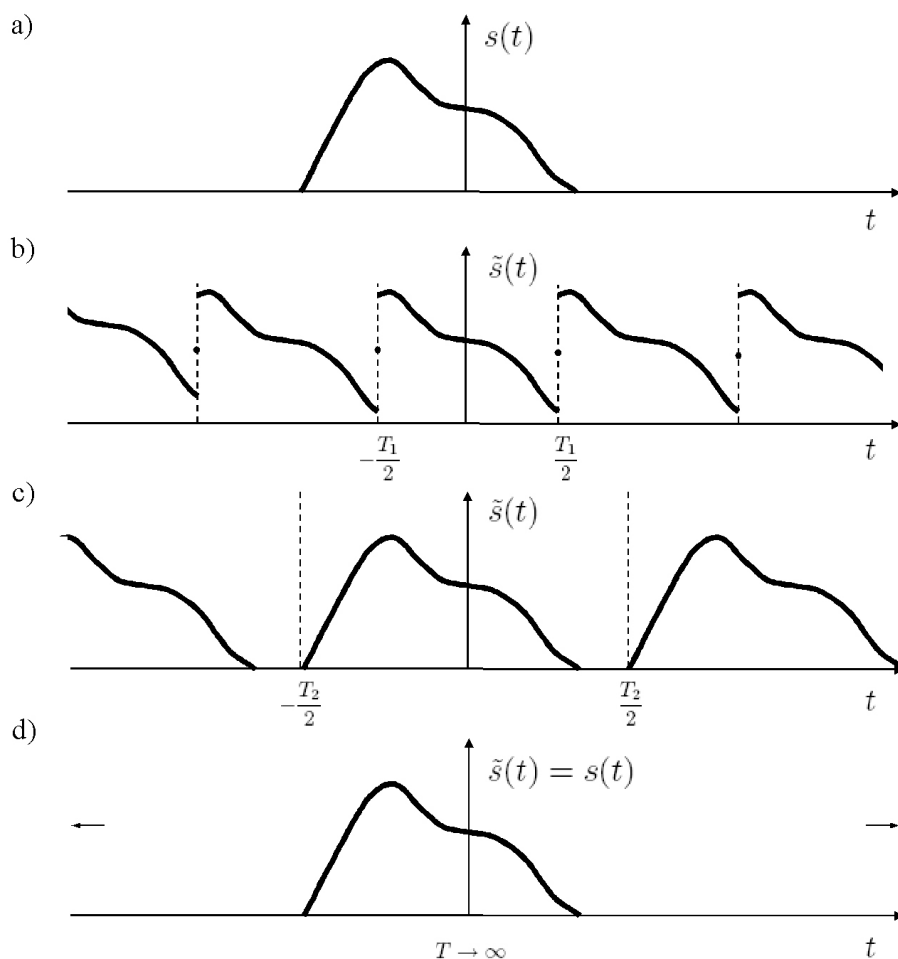
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (3.3)$$

přejde Fourierův integrál do tvaru

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.4)$$

¹Tato funkce jistě splňuje Dirichletovy podmínky.

²Fyzikální jednotkou úhlové frekvence je radián za sekundu, [rad/s].



Obrázek 3.1: Intuitivní přechod od Fourierovy řady k Fourierově transformaci.

3.2 Definice Fourierovy transformace spojitého signálu.

Předpokládejme Fourierovský signál standardního typu.

Definice: (Fourierova transformace spojitého signálu pro úhlovou frekvenci)

Fourierovou transformací (spektrém) spojitého signálu $s(t)$ nazveme funkci $S(\omega)$

$$S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (3.5)$$

Inverzní Fourierovou transformací odpovídající spektru $S(\omega)$ je

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.6)$$

V případě inverzní transformace je rovnost $s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(\omega)]$ splněna pouze pokud je $s(t)$ v bodě t buď spojitá anebo rovna aritmetickému průměru limit zprava a zleva³.

V literatuře existuje řada alternativních definic. Tak například faktor $1/2\pi$ někteří autoři řadí k přímé Fourierově transformaci namísto k inverzní, tj. jako kdyby do transformace dle naší definice vstupovala funkce $2\pi s(t)$ namísto $s(t)$, což je samozřejmě pouze otázka dohody. Existuje i symetrické vyjádření, kdy se u obou transformací vyskytuje faktor $1/\sqrt{2\pi}$. Rovněž znaménko v exponentu používají někteří autoři u přímé a inverzní transformace obráceně.

Vyjádříme-li $\omega = 2\pi f$, tj. provedeme-li substituci $f = \omega/2\pi$, kde f je tzv. **obyčejná frekvence**⁴, dostaneme tvar Fourierovy přímé a inverzní transformace, který je plně symetrický (liší se jen znaménkem exponentu) a který budeme v tomto kurzu preferovat.

Definice: (Fourierova transformace spojitého signálu pro obyčejnou frekvenci)

Fourierovou transformací (spektrém) spojitého signálu $s(t)$ nazveme funkci $S(f)$

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i2\pi ft) dt. \quad (3.7)$$

Inverzní Fourierovou transformací odpovídající spektru $S(f)$ je

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) df. \quad (3.8)$$

I zde je inverzní Fourierova transformace rovna funkci $s(t)$ v bodě t , pokud je tato v daném bodě spojitá anebo rovna průměru limit zprava a zleva.

Poznamenejme, že striktně matematicky vzato bychom měli použít jiný symbol pro spektrum reprezentované pomocí úhlové frekvence a spektrum vyjádřené pomocí obyčejné frekvence, neboť numericky jde o různé funkce v následujícím smyslu: pro stejnou hodnotu argumentu dostaneme v obou reprezentacích různé funkční hodnoty (rozdíl je dán škálovacím faktorem 2π na vodorovné ose, tedy vlastně volbou jednotek). Jelikož však v dalším textu nebudeme obě reprezentace směšovat, vždy budeme konzistentně používat buď jednu nebo druhou, budeme pro jednoduchost používat stejný symbol (např. S) pro spektrum bez ohledu na uvažovanou spektrální proměnnou. Je však třeba dát pozor na eventuelní záměnu dvou výše uvedených spektrálních reprezentací zejména při odebírání diskretních vzorků spektra, kde se již ztrácí možnost rozlišení obou případů pomocí symbolu spektrální proměnné (f nebo ω).

Dvojici signál a jeho Fourierovo spektrum, tedy $s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f)] \leftrightarrow S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$ budeme nazývat **Fourierův pár**.

Opět je třeba při práci s literaturou dát pozor na to, že někteří autoři mohou mít znaménka v exponentu použita obráceně, tj. u přímé transformace $+$ a u inverzní $-$. Naše definice je konzistentní s tím, jak jsme používali znaménko exponentu u odpovídající exponenciální Fourierovy řady v podkapitole 2.4.

³Pro signály obecně nespojitě tato rovnost v bodech nespojitosti platit nemusí.

⁴Fyzikální jednotkou obyčejné frekvence je Herz, [Hz].

Zdůrazněme ještě jednou, že funkci $s(t)$ zde chápeme jako Fourierovský signál standardního typu. To mimo jiné znamená, že je absolutně integrovatelná na R , tj. $s(t) \in L_1(-\infty, \infty)$. Tato podmínka zaručuje, že spektrum funkce $s(t)$ (tedy $S(f)$ nebo $S(\omega)$) existuje, jak ukazuje následující cvičení.

Cvičení 3.2.1:

Dokažte, že pro absolutně integrovatelnou funkci $s(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, tj. funkci, pro kterou $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$, vždy existuje Fourierovo spektrum $S(f)$.

Je to zcela analogická situace, jako v případě Fourierovy řady: tam rovněž stačí, aby rozvíjená funkce byla absolutně integrovatelná na daném intervalu, a již můžeme zcela formálním způsobem konstruovat Fourierovy koeficienty její exponenciální řady (diskrétní spektrum). Otázka ale je, zda takto vytvořená řada je skutečně rozvojem dané funkce pokud možno v každém bodě. K tomu jsme v podkapitole 2.6 potřebovali například splnění Dirichletových podmínek. A stejně tak zde. Součástí definice Fourierovského signálu standardního typu je i splnění Dirichletových podmínek, které garantují existenci integrálu inverzní Fourierovy transformace. Platí, že integrál vyjadřující inverzní Fourierovu transformaci je konečný (alespoň ve smyslu vlastní hodnoty) pro taková t , pro která exponenciální Fourierova řada, rozvinutá na intervalu větším než nosič $s(t)$, konverguje k funkci $s(t)$. Hodnota integrálu je pak rovna součtu této řady na daném intervalu. Tento poznatek shrnuje následující věta.

Věta (Fourierova):

Jestliže funkce $s(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky v každém konečném intervalu a je absolutně integrovatelná na $(-\infty, \infty)$, pak $\forall t \in R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(i2\pi f(t - \tau)) d\tau = \frac{1}{2}(s(t^+) + s(t^-)).$$

Hodnota integrálu představuje inverzní Fourierovu transformaci. Je zřejmé, že je-li funkce v bodě t spojitá, je hodnota integrálu rovna přímo $s(t)$.

Podmínky v předpokladech této věty jsou podmínky postačující nikoliv nutné. Existují signály, které tyto podmínky nespĺňují a přesto pro ně můžeme zavést přímou i inverzní Fourierovu transformaci. O některých z nich pojednává oddíl 3.5.

Všimněme si, že Fourierova transformace je integrální transformace, u které se mění proměnná, tj. do transformace vstupuje spojitý signál reálné proměnné t (například čas) a vystupuje z ní spojitý signál jiné reálné proměnné f (času odpovídající frekvence)⁵.

Spektrum $S(f)$ je i pro reálný signál obecně komplexní funkcí frekvence f . Můžeme jí

⁵Konkrétní fyzikální význam těchto proměnných může být pochopitelně zcela jiný než čas a frekvence. Na vstupu do transformace se může např. jednat o prostorovou souřadnici, na výstupu pak hovoříme o prostorové frekvenci nebo vlnovém čísle.

reprezentovat dvěma reálnými funkcemi, buď ve formě reálné a imaginární části spektra

$$S(f) = \Re\{S(f)\} + i\Im\{S(f)\},$$

anebo, což je běžnější, pomocí modulu a fáze, tj. **amplitudového spektra** $|S(f)|$ a **fázového spektra** $\phi(f)$

$$S(f) = |S(f)| \exp(i\phi(f)),$$

kde $\phi(f)$ představuje tzv. hlavní hodnotu argumentu $S(f)$, $\phi(f) = \text{Arg}S(f)$, pro kterou platí, že $-\pi < \phi(f) \leq \pi$. Fázové spektrum se vypočítává podle zcela analogického předpisu jako v případě exponenciální Fourierovy řady, jak ukazuje tabulka 3.1.

$\Re\{S(f)\}$	$\Im\{S(f)\}$	$\phi(f)$
> 0		$\arctan(\Im\{S(f)\}/\Re\{S(f)\})$
< 0	≥ 0	$\arctan(\Im\{S(f)\}/\Re\{S(f)\}) + \pi$
< 0	< 0	$\arctan(\Im\{S(f)\}/\Re\{S(f)\}) - \pi$
0	> 0	$\pi/2$
0	< 0	$-\pi/2$
0	0	nedefinováno

Tabulka 3.1: Definice fázového spektra Fourierovy transformace spojitého signálu

Pro komplexní signál $s(t)$ není obecně žádný vztah mezi hodnotami spektra pro $f < 0$ a $f > 0$. Jinak je tomu v případě reálných signálů, viz podkapitola 3.6.

Cvičení 3.2.2:

Najděte Fourierovu transformaci Gaussovy funkce $s(t) = \exp(-\pi t^2)$.

Cvičení 3.2.3:

Najděte Fourierovu transformaci pravoúhelníkové funkce $s(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{pro } |t| > 1/2 \end{cases}$.

Cvičení 3.2.4:

Najděte Fourierovu transformaci funkce $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \exp(-\alpha t), & \alpha > 0, \text{ pro } t \geq 0 \end{cases}$.

Cvičení 3.2.5:

Najděte Fourierovu transformaci funkce $s(t) = \exp(-\alpha|t|)$, $\alpha > 0$.

Výpočet integrálu Fourierovy transformace (popřípadě inverzní Fourierovy transformace) nemusí být vždy tak jednoduchý, jako tomu bylo v předcházejících cvičeních. Někdy je třeba sáhnout k některým „solistikovanějším“ metodám výpočtu, např. metodě konturních integrálů v komplexní rovině s využitím reziduové věty, viz dodatek D.14. Jako příklad tohoto postupu poslouží výpočet inverzní Fourierovy transformace spektra, které jsme spočetli ve cvičení 3.2.4.

Příklad:

Spočtěte inverzní Fourierovu transformaci spektra

$$S(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}.$$

Z definice víme, že

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \exp(i2\pi ft) df.$$

Tento integrál konverguje, tj. můžeme ho chápat jako limitu

$$s(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \exp(i2\pi ft) df$$

pro reálné R . Rozšířme nyní reálnou proměnnou f na komplexní, $f = f_1 + if_2$ a uvažme uzavřenou křivku C tak, že úsečku $\langle -R, R \rangle$ doplníme polokružnicí C_R o poloměru R a středu $[0, 0]$ v dolní respektive horní polorovině (obrázek D.3). Křivku v horní polorovině orientujeme proti a v dolní po směru hodinových ručiček. Horní polorovinu využijeme pro výpočet $s(t)$ pro $t > 0$, a dolní pro $t < 0$, neboť pak dá exponenciální faktor v integrandu vždy ubývání při zvětšujícím se poloměru půlkružnice C_R . V takovém případě bude integrál po křivce C_R v limitě pro $R \rightarrow \infty$ roven nule a integrál po uzavřené křivce, která je sjednocením úsečky a půlkružnice bude v limitě roven hledanému integrálu od $-\infty$ do ∞ .

Podle reziduové věty pak můžeme psát

$$\oint_C \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \exp(i2\pi ft) df = \begin{cases} i2\pi \sum_{j=1}^{n_h} \operatorname{Res}_{f=\phi_j} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \exp(i2\pi ft) & \text{pro } t > 0 \\ -i2\pi \sum_{j=1}^{n_d} \operatorname{Res}_{f=\phi_j} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \exp(i2\pi ft) & \text{pro } t < 0 \end{cases},$$

kde n_h a n_d označují počty reziduí ϕ_j integrandu v horní a dolní polorovině. V našem případě má integrand jeden jednoduchý pól v horní polorovině v bodě $f = i\alpha/2\pi$. Odpovídající reziduum spočteme snadno podle vzorce (D.14.2) jako limitu

$$\operatorname{Res}_{f=i\alpha/2\pi} \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \exp(i2\pi ft) = \lim_{f \rightarrow i\alpha/2\pi} \frac{1}{i2\pi} \exp(i2\pi ft) = \frac{1}{i2\pi} \exp(-\alpha t).$$

V dolní polorovině se žádný pól nenachází a příslušná suma reziduí je tedy rovna nule. Souhrnně jsme tedy dostali

$$s(t) = \begin{cases} \exp(-\alpha t) & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}.$$

3.3 Vztah Fourierovy řady a Fourierovy transformace spojitého signálu.

V oddílu 3.1 jsme si ukázali intuitivní přechod od Fourierovy řady k Fourierově transformaci pomocí limitního zvětšování periody do nekonečna. Nyní si vysvětlíme, jaký je konkrétní vztah mezi oběma druhy spekter: diskretním spektrem odpovídajícím Fourierově řadě (Fourierovými koeficienty) a spojitým spektrem Fourierovy transformace.

Předpokládejme finitní funkci $s(t)$ nenulovou na (a, b) . Její spektrum dané Fourierovou transformací je tedy

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i2\pi t f) dt = \int_a^b s(t) \exp(-i2\pi t f) dt. \quad (3.9)$$

Rozvíňme funkci $s(t)$ v exponenciální Fourierovu řadu na intervalu $(c, c+T)$ takovém, že $(a, b) \subset (c, c+T)$. Koeficienty této řady jsou

$$S_n = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} s(t) \exp\left(-i2\pi t \frac{n}{T}\right) dt = \frac{1}{T} \int_a^b s(t) \exp\left(-i2\pi t \frac{n}{T}\right) dt.$$

Označíme-li $f_n = n/T$, můžeme psát

$$S_n = \frac{1}{T} \int_a^b s(t) \exp(-i2\pi t f_n) dt. \quad (3.10)$$

Budeme-li uvažovat hodnoty spektra $S(f)$ pouze v diskretních bodech $f = f_n$, tj. diskretizujeme-li spektrum s krokem $\Delta f = 1/T$, dostaneme okamžitě porovnáním vzorců (3.9) a (3.10) hledaný vztah mezi oběma typy spekter.

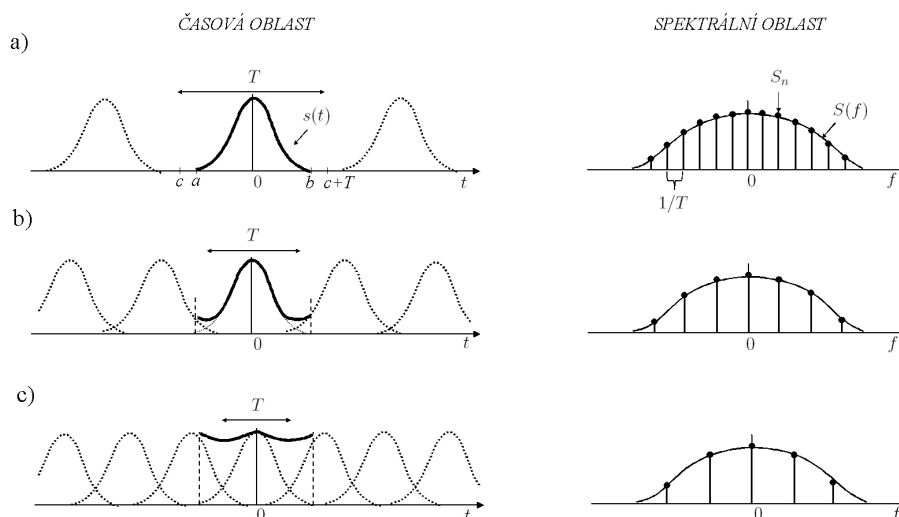
Věta (O vztahu Fourierovy řady a Fourierovy transformace spojitého signálu):

Jestliže má funkce $s(t)$ konečný nosič a rozvineme ji v exponenciální Fourierovu řadu na intervalu obsahujícím tento nosič, jsou Fourierovy koeficienty funkce $s(t)$ dány diskretními hodnotami její Fourierovy transformace

$$S_n = \frac{1}{T} S(f_n), \quad f_n = \frac{n}{T}. \quad (3.11)$$

Pro úplnost dodejme, že pokud bychom měli spektrum spojitého signálu vyjádřeno v úhlové frekvenci, museli bychom vztah (3.11) přepsat formálně na tvar

$$S_n = \frac{1}{T} S(\omega_n), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}. \quad (3.12)$$



Obrázek 3.2: Souvislost Fourierovy řady a Fourierovy transformace spojitého signálu.

Na vzájemné souvislosti diskrétního a spojitého spektra se tím však nic nemění. Oba vzorce se liší pouze v použitém „měřítku“ pro spektrální reprezentaci.

Vztah mezi oběma spektry ilustruje obrázek 3.2a, kde pro jednoduchost neuvažujeme multiplikativní faktor $1/T$ na svislé ose ve spektrální oblasti. Tento vztah nám nabízí alternativní možnost výpočtu inverzní Fourierovy transformace, známe-li spektrum a chceme určit signál v časové oblasti: namísto výpočtu integrálu (3.8), odebereme ze spektra $S(f)$ diskrétní vzorky s krokem Δf , čímž dostaneme Fourierovy koeficienty, a $s(t)$ je pak dána součtem příslušné Fourierovy řady. V případě rychle ubývajícího spektra má tento postup výhodu v konečném počtu Fourierových koeficientů, které musíme do součtu zahrnout. Poznamenejme, že sečtením řady dostaneme kromě funkce $s(t)$ na původním intervalu i její periodické opakování s periodou T vně tohoto intervalu (na obrázku 3.2a tečkovanou čarou).

Zdůrazněme, že tento postup je zcela podmíněn splněním předpokladů výše uvedené věty. Nelze jej tedy rozhodně použít pro signály s neomezeným nosičem. I pro finitní funkce pak hraje zásadní roli volba diskretizačního kroku ve spektrální oblasti. Nevhodně zvolený (příliš velký) krok vede k tomu, že perioda řady je menší než délka intervalu, na kterém je signál nenulový. Periodizace sečtením Fourierovy řady je pak zatížena překrýváním vzájemně posunutých signálů $s(t)$, což se nazývá efekt alias. V tom případě nelze signál $s(t)$ na původním intervalu (a, b) sečtením řady rekonstruovat, případně je výsledek nepřesný alespoň v okolí bodů a a b (obrázky 3.2b a 3.2c)⁶.

Obrázek 3.2 také ilustruje, že diskretizace Fourierova spektra $S(f)$ s konečným krokem $\Delta f = 1/T$ vede nevyhnutelně k periodizaci⁷ původního signálu $s(t)$, tj. ke vzniku T -periodické funkce $\tilde{s}(t)$ v časové oblasti. Jak uvidíme v následujících kapitolách, tato dualita diskretizace a periodizace ve vzájemně komplementárních oblastech provází i další Fourierovské transformace probírané v tomto kurzu.

Kvůli úzké souvislosti Fourierovy řady a Fourierovy transformace spojitého signálu (tj. diskrétního a spojitého spektra) čtenáře jistě nepřekvapí, že vlastnosti Fourierovy transformace,

⁶Levá část obrázku kvalitativně odpovídá chování na obrázku 2.4a, se kterým jsme se setkali v podkapitole 2.4 a ve kterém šlo také o změnu periody v časové oblasti.

⁷S případným překrýváním nebo bez.

probírané v této kapitole, jsou naprosto analogické těm, které již dobře známe z problematiky Fourierových řad (kapitola 2).

3.4 Fourierova sinová a kosinová transformace.

Rozepíšme dvojnásobný Fourierův integrál (pro obyčejnou frekvenci f) na dvě části s uvážením kladných a záporných frekvencí zvlášť. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(i2\pi f(t - \tau)) d\tau &= \int_{-\infty}^0 df \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(i2\pi f(t - \tau)) d\tau + \\ &\quad \int_0^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(i2\pi f(t - \tau)) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) [\exp(i2\pi f(t - \tau)) + \exp(-i2\pi f(t - \tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Využijeme-li Eulerův vzorec pro kosinus (D.8.2), můžeme Fourierovu reprezentaci spojitě funkce psát ve tvaru

$$s(t) = 2 \int_0^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cos(2\pi f(t - \tau)) d\tau. \quad (3.13)$$

V případě spojitěho signálu (který je z matematického hlediska nespojitou funkcí) můžeme použít stejnou reprezentaci (3.13), pokud funkci pro jednoduchost formálně dodefinujeme tak, že v bodech nespojitosti je rovna aritmetickému průměru limit zprava a zleva. Rozepíšeme-li dále kosinus rozdílů v rovnici (3.13) pomocí vzorce (D.8.3), dostaneme Fourierovu reprezentaci ve tvaru

$$s(t) = \int_0^{\infty} \{A(f) \cos(2\pi ft) + B(f) \sin(2\pi ft)\} df, \quad (3.14)$$

kde pro funkce $A(f)$ a $B(f)$ platí

$$A(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau, \quad B(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \sin(2\pi f\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Srovnáním s definicí Fourierova spektra $S(f)$ okamžitě vidíme, že $S(f) = \frac{1}{2}(A(f) - iB(f))$. Přitom pro komplexní $s(t)$ obecně $A(f) \neq 2\Re\{S(f)\}$ a $B(f) \neq -2\Im\{S(f)\}$. Poznamenejme, že mezi funkcemi $S(f)$, $A(f)$ a $B(f)$ platí stejné přepočtení vztahy (2.26) jako mezi koeficienty S_n exponenciální Fourierovy řady a koeficienty a_n, b_n odpovídající trigonometrické Fourierovy řady.

Předpokládejme, že $s(t)$ je **sudá funkce**, tj. $s(-t) = s(t)$. Pak evidentně $B(f) = 0$, neboť integrand je lichá funkce a integruje se v mezích od $-\infty$ do ∞ . Fourierova transformace sudé funkce se tedy redukuje na

$$S(f) = A(f)/2 = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Tato transformace se nazývá **Fourierova kosinová transformace**. Někdy se pro ni používá speciální označení \mathcal{F}_C , můžeme tedy psát

$$\mathcal{F}_C[s(t)] = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt.$$

Z definice funkce $A(f)$ vyplývá, že je to sudá funkce frekvence, $A(f) = A(-f)$. Tudíž i kosinová transformace je sudou funkcí frekvence. Sudý signál v časové oblasti se tedy vždy transformuje na sudé spektrum.

Pro inverzní transformaci máme (díky tomu, že $A(f)$ je sudá funkce)

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(f)}{2} \cos(2\pi ft) df = 2 \int_0^{\infty} \frac{A(f)}{2} \cos(2\pi ft) df = 2 \int_0^{\infty} \mathcal{F}_C[s(t)] \cos(2\pi ft) df \\ &= \mathcal{F}_C^{-1}[A(f)/2] = \mathcal{F}_C^{-1}[S(f)]. \end{aligned}$$

Cvičení 3.4.1:

Najděte Fourierovu transformaci trojúhelníkové funkce $s(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$.

Cvičení 3.4.2:

Najděte Fourierovu transformaci funkce $s(t) = \text{sinc}_{\pi}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$. (Poznamenejme, že sinc je příkladem funkce, která není na $(-\infty, \infty)$ absolutně integrovatelná, přesto však její Fourierova transformace existuje.)

Předpokládejme naopak, že $s(t)$ je **lichá funkce**, tj. $s(-t) = -s(t)$. Pak $A(f) = 0$ a pro Fourierovo spektrum liché funkce dostáváme

$$S(f) = -iB(f)/2 = -i \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt = -2i \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt = -i\mathcal{F}_S[s(\tau)],$$

kde $\mathcal{F}_S[s(\tau)]$ je tzv. **Fourierova sinová transformace**

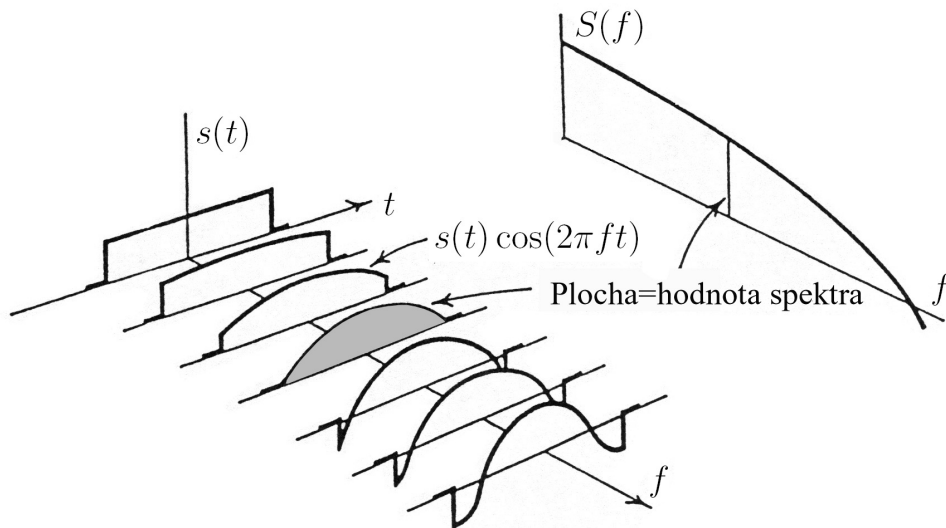
$$\mathcal{F}_S[s(\tau)] = 2 \int_0^{\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt.$$

Z definice funkce $B(f)$ vidíme, že $B(f) = -B(-f)$ a proto i Fourierova sinová transformace je lichou funkcí frekvence. Lichý signál v časové oblasti se tedy vždy transformuje na liché spektrum.

Pro inverzní transformaci dostáváme

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(f)}{2} \sin(2\pi ft) df = 2 \int_0^{\infty} \frac{B(f)}{2} \sin(2\pi ft) df = 2 \int_0^{\infty} \mathcal{F}_S[s(t)] \sin(2\pi ft) df \\ &= \mathcal{F}_S^{-1}[B(f)/2] = i\mathcal{F}_S^{-1}[S(f)]. \end{aligned}$$

Využití sinové a kosinové Fourierovy transformace značně vzroste uvědomíme-li si, že každý spojitý signál může být rozložen na sudou a lichou část: $s(t) = e(t) + o(t)$, kde $e(t) = \frac{1}{2}(s(t) +$



Obrázek 3.3: Ilustrace výpočtu Fourierova spektra (podle Bracewella, 1978).

$s(-t)$) a $o(t) = \frac{1}{2}(s(t) - s(-t))$. S oběma částmi pak můžeme pracovat nezávisle díky linearitě integrálů Fourierovy přímé a inverzní transformace. Platí

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s(\tau)\} = S(f) &= \mathcal{F}\{e(\tau)\} + \mathcal{F}\{o(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} o(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e(t) \cos(2\pi ft) dt - 2i \int_0^{\infty} o(t) \sin(2\pi ft) dt = \mathcal{F}_C\{e(\tau)\} - i\mathcal{F}_S\{o(\tau)\}. \end{aligned}$$

(Pozor, \mathcal{F}_C a \mathcal{F}_S zde obecně nepředstavují reálnou a imaginární část $S(f)$.)

Pokud je signál zadán původně pouze pro $t \geq 0$ (kauzální funkce) nebo pouze pro $t \leq 0$ může být vždy dodefinován tak, aby představoval buď sudou nebo lichou funkci. Pak použití sinové resp. kosinové Fourierovy transformace vede k dvojnásobné redukci výpočetních nároků, neboť spektrum se vyčísluje pouze pro nezáporné frekvence.

Z teoretického hlediska Fourierova sinová a kosinová transformace dobře poslouží při zkoumání různých symetrií spektra, viz podkapitola 3.7.

Na závěr tohoto oddílu použijeme Fourierovu kosinovou transformaci pro názornou ilustraci toho, co konkrétně se děje s funkcí $s(t)$, provádíme-li Fourierovu transformaci, a jak se určuje Fourierovo spektrum pro danou frekvenci. Jako příklad použijeme Fourieruv pár $\Pi(t) \leftrightarrow \text{sinc}_{\pi}(f)$, který známe ze cvičení 3.2.3. Situaci ukazuje obrázek 3.3, převzatý z knihy Bracewell (1978). Rozvíjenou funkci (v našem případě $\Pi(t)$), přenásobujeme kosinem, který s rostoucí frekvencí stále rychleji osciluje. Hodnota spektra na dané frekvenci je dána plochou pod křivkou odpovídající tomuto součinu.

3.5 Fourierova transformace některých speciálních funkcí.

V praxi často pracujeme s funkcemi, které nesplňují podmínky kladené na standardní Fourierovský signál. Pro ně pak potřebujeme vhodným způsobem dodefinovat Fourierovu transformaci tak, aby jejich spektrum mělo stejné vlastnosti, jako spektra signálů standardního typu. V této podkapitole si vysvětlíme postupně, jak se zavádí Fourierova transformace pro pět nejdůležitějších

speciálních signálů: Diracovu δ -funkci, vzorkovací funkci, konstantní funkci, Funkci signum a Heavisideovu funkci. V závěru tohoto odstavce dodefinujeme Fourierovu transformaci obecné periodické funkce, která též není standardním Fourierovským signálem, neboť není absolutně integrovatelná na celém definičním oboru. Obecný princip je konkrétně demonstrován na příkladu trigonometrických funkcí.

δ -funkce

Diracova δ -funkce, někdy též nazývaná impulzní funkce, je zavedena v dodatku D.17, kde jsou také shrnuty její nejvýznamější vlastnosti. Není to funkce v pravém slova smyslu, ale tzv. distribuce. Přesto můžeme velmi snadno určit její Fourierovu transformaci, a to přímo z její lokalizační vlastnosti (D.17.3). Platí totiž

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \exp(-i2\pi ft) \Big|_{t=0} = 1$$

Obdobně můžeme pro inverzní Fourierovu transformaci psát

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) \exp(i2\pi ft) df = \exp(i2\pi ft) \Big|_{f=0} = 1.$$

Dodefinovali jsme tedy 2 Fourierovy páry

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = 1, \quad \mathcal{F}(1) = \delta(f). \quad (3.16)$$

Cvičení 3.5.1:

Najděte analogickým způsobem Fourierovu transformaci posunutého δ -funkce $\delta(t - a)$ a funkce $s(t) = \exp(i2\pi at)$, kde a je reálná konstanta.

Vzorkovací funkce

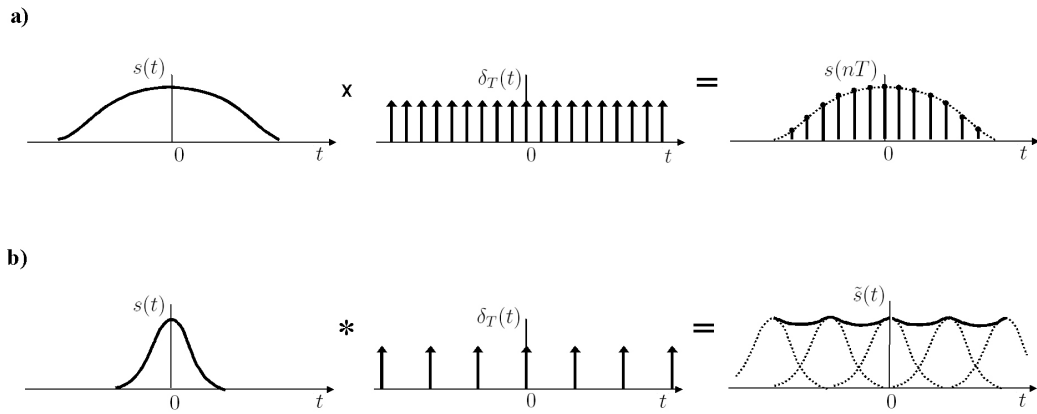
Vzorkovací funkce také není funkcí v pravém smyslu, ale distribucí. Někdy se výstižně nazývá **Diracův hřeben**, neboť se jedná o T -periodickou sumu vzájemně posunutých δ -funkcí, jak je vidět z její definice

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (3.17)$$

Tato funkce se používá ke vzorkování signálu (odebrání ekvidistantních vzorků) nebo k jeho periodizaci (nasčítání periodicky se opakujících signálů). Přitom se uplatňuje tzv. vzorkovací respektive replikační vlastnost vzorkovací funkce.

Vzorkovací vlastnost vzorkovací funkce spočívá v tom, že přenásobením spojitého signálu vzorkovací funkcí vznikne diskrétní signál

$$\delta_T(t)s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)s(nT),$$



Obrázek 3.4: Vzorkovací (a) a replikační (b) vlastnost vzorkovací funkce.

kde jsme použili (D.17.4). Vzorkování pomocí vzorkovací funkce ukazuje graficky obrázek 3.4a.

Replikační vlastnost vzorkovací funkce spočívá v tom, že konvolucí spojitého signálu se vzorkovací funkcí vznikne periodický signál. Operace konvoluce je popsána v dodatku D.16.

$$\begin{aligned} \delta_T(t) * s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(\tau) s(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) \right) s(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) s(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT), \end{aligned}$$

kde jsme opět použili (D.17.4). Je zřejmé, že pouze pokud je $s(t)$ nenulová vně intervalu $(-T/2, T/2)$, dochází při replikaci k překrývání. Obrázek 3.4b ukazuje schematicky replikaci pomocí vzorkovací funkce (v tomto případě k překrývání dochází).

Jakým způsobem bychom mohli vhodně dodefinovat Fourierovu transformaci vzorkovací funkce? Zde si pomůžeme „trikem“, kdy formálně rozvineme $\delta_T(t)$ v exponenciální Fourierovu řadu na intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \exp(i2\pi kt/T), \quad S_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right) \exp(-i2\pi kt/T) dt.$$

Jelikož ze všech δ -funkcí Diracova hřebenu v integrandu leží uvnitř integračních mezí pouze $\delta(t)$, dostáváme

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \exp(-i2\pi kt/T) dt = \frac{1}{T} \exp(-i2\pi kt/T) \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \\ \Rightarrow \delta_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi kt/T). \end{aligned}$$

Fourierovu transformaci pak získáme z této řady pomocí linearitu Fourierova integrálu

$$\mathcal{F}(\delta_T(t)) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\exp(i2\pi nt/T)).$$

Ze cvičení 3.5.1 víme, že spektrem dané exponenciály je $\delta(f - \frac{n}{T})$. Pro Fourierovu transformaci vzorkovací funkce tedy máme

$$\mathcal{F}(\delta_T(t)) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}). \quad (3.18)$$

Speciálně, pro $T = 1$ je $\mathcal{F}(\delta_1(t)) = \mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) = \delta_1(f)$. Jedná se tedy o zcela symetrický Fourierův pár, podobně jako v případě Gaussovy funkce.

Konstantní funkce

Konstantní $s(t) = A$ funkce není obecně absolutně integrovatelná (kromě případu $A = 0$). Přesto můžeme dodefinovat její Fourierovu transformaci ve smyslu distribucí. Využijeme k tomu toho, že známe Fourierův pár $\mathcal{F}(1) = \delta(f)$. Můžeme tedy psát

$$\mathcal{F}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(-i2\pi ft) dt = A \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(-i2\pi ft) dt = A\delta(f).$$

Funkce signum

Definujme funkci signum takto

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Stejně jako konstanta, ani funkce sgn není na $(-\infty, \infty)$ absolutně integrovatelná. Její Fourierova transformace se zavádí jako limita spektra pomocné funkce $g(t)$

$$g(t) = \exp(-\alpha|t|)\text{sgn}(t), \quad \alpha > 0$$

která již absolutně integrovatelná je. Ze cvičení 3.2.5 víme, že její spektrum je

$$G(f) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha|t|)\text{sgn}(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \frac{1}{i2\pi f - \alpha} + \frac{1}{i2\pi f + \alpha} = \frac{-i4\pi f}{4\pi^2 f^2 + \alpha^2}.$$

Nyní uvažme limitní přechod pro $\alpha \rightarrow 0$. Limita spektra bude

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(f) = -\frac{i}{\pi f},$$

zatímco funkce $g(t)$ přejde v limitě na funkci sgn . Získáváme tedy Fourierův pár

$$\mathcal{F}(\text{sgn}(t)) = -\frac{i}{\pi f} \quad (3.19)$$

Heavisideova funkce

Heavisideovu funkci definujeme

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

Opět se nejedná o absolutně integrovatelnou funkci na $(-\infty, \infty)$. Můžeme jí však snadno přiřadit Fourierovo spektrum, známe-li spektrum funkce signum a konstantní funkce. Platí totiž, že $u(t) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(t) + 1)$. Díky linearitě Fourierova integrálu tedy máme

$$\mathcal{F}(u(t)) = \frac{1}{2}[\mathcal{F}(\text{sgn}(t)) + \mathcal{F}(1)] = \frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f). \quad (3.20)$$

Poznamenejme, že podobně jako v případě funkce signum, i spektrum Heavisideovy funkce bychom mohli určit jako limitu spektra nějaké vhodně zvolené pomocné funkce, která je standardní fouriérovskou funkcí. Takovou funkcí by mohla být například funkce ze cvičení 3.2.4, jejíž spektrum je $(i2\pi f + \alpha)^{-1}$. Limitu tohoto zlomku pro $\alpha \rightarrow 0^+$ však není tak jednoduché spočítat. Výpočtem s využitím teorie distribucí, který je ovšem nad rámec těchto skript, bychom zjistili, že tato limita je rovna právě 3.20 a nikoliv pouze funkční hodnotě pro $\alpha = 0$.

Periodické funkce

Jak již bylo řečeno v úvodu, periodické funkce obecně nepatří do $L_1(-\infty, \infty)$. Přesto lze dodefinovat spektrum takové funkce $\tilde{s}(t)$, které má zcela analogické vlastnosti (symetrie, operace v časové oblasti a jejich protějšky v oblasti spektrální atd., viz odstavce 3.6 až 3.8), pokud je daná periodická funkce rozvinutelná ve Fourierovu řadu na intervalu délky periody.

Označme délku periody T . Exponenciální Fourierova řada je

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right),$$

kde S_n je Fourierův koeficient daný rovnicí (2.17).

Na tuto rovnici aplikujme Fourierovu transformaci. Díky linearitě Fourierova integrálu dostaneme

$$\mathcal{F}(\tilde{s}(t)) = \mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \left[\mathcal{F}\left(\exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right)\right)\right].$$

Výraz v hranatých závorkách je podle cvičení 3.5.1 roven $\delta(f - n/T)$. Fourierovo spektrum periodické funkce je tedy

$$\mathcal{F}(\tilde{s}(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right). \quad (3.21)$$

Spektrum je tedy, podle očekávání, diskrétní. Je dáno řadou ekvidistantních δ -funkcí násobených Fourierovými koeficienty. Obráceně platí, že každé spektrum typu (3.21) musí nutně být spektrem periodické funkce, a to dokonce bez ohledu na to, zda koeficienty řady jsou Fourierovými koeficienty, nebo ne⁸. Inverzní Fourierovou transformací totiž dostaneme

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{i2\pi nt}{T}\right),$$

⁸Pokud by se nejednalo o Fourierovy koeficienty funkce $\tilde{s}(t)$, byla by funkce v časové oblasti pouze T -periodická, nerovnála by se však funkci $\tilde{s}(t)$.

kde suma na pravé straně je T -periodická, neboť sčítáme exponenciály s periodou T . O jakou konkrétní periodickou funkci se jedná závisí na koeficientech C_n . Jsou-li to Fourierovy koeficienty funkce $\tilde{s}(t)$, a konverguje-li Fourierova řada k této funkci, jedná se samozřejmě o funkci $\tilde{s}(t)$.

Příklad:

Najděte spektrum funkce

$$\tilde{s}(t) = \sin(\pi t).$$

Perioda dané funkce je $T = 2$. Rozvineme ji na intervalu $(-1,1)$. Výpočtem koeficientů

$$S_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin(\pi t) \exp(-i\pi n t) dt$$

s využitím ortogonality báze funkcí zjistíme, že nenulové jsou pouze 2:

$$S_1 = -\frac{1}{2}i, \quad S_{-1} = \frac{1}{2}i.$$

K tomuto závěru bychom ostatně mohli dospět rovnou z Eulerova vzorce (D.8.2), který je také ve tvaru exponenciální Fourierovy řady. Pro Fourierovo spektrum tedy podle (3.21) dostáváme

$$\mathcal{F}(\sin(\pi t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \delta\left(f - \frac{n}{2}\right) = \frac{i}{2} \left(\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) \right). \quad (3.22)$$

Poznamenejme, že rovněž k tomuto výsledku bychom mohli dospět rovnou z Eulerova vzorce, neboť jak víme ze cvičení 3.5.1

$$\mathcal{F}(\exp(i\pi t)) = \mathcal{F}(\exp(i2\pi \frac{1}{2}t)) = \delta\left(f - \frac{1}{2}\right)$$

a podobně pro komplexně sdruženou exponenciálu v (D.8.2).

Analogickým postupem bychom odvodili i Fourierovu transformaci funkce $\cos(\pi t)$

$$\mathcal{F}(\cos(\pi t)) = \frac{1}{2} \left(\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) \right). \quad (3.23)$$

Tabulka 3.2 shrnuje speciální signály probrané v tomto odstavci, které nespádají do třídy Fourierovských signálů standardního typu. Spektrum je v ní uváděno jak pro obyčejnou tak pro úhlovou frekvenci. Schematicky jsou některé z těchto signálů spolu s jejich amplitudovým spektrem zobrazeny na obrázku 3.5.

3.6 Fourierova transformace reálného signálu.

Předpokládejme speciálně, že signál $s(t)$ je reálný. Pak i funkce $A(f)$ a $B(f)$, zavedené v podkapitole 3.4, jsou reálné a $A(f) = 2\Re\{S(f)\}$, $B(f) = -2\Im\{S(f)\}$. Z jejich definičních vzorců dále vyplývá, že $A(f)$ je sudou funkcí frekvence, $A(-f) = A(f)$, zatímco $B(f)$ je funkcí lichou,

$s(t)$	$S(f)$	$S(\omega)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - a)$	$\exp(-i2\pi fa)$	$\exp(-i\omega a)$
$\delta_T(t)$	$\frac{1}{T}\delta_{\frac{1}{T}}(f)$	$\frac{2\pi}{T}\delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$
A	$A\delta(f)$	$A2\pi\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{-i}{\pi f}$	$\frac{-2i}{\omega}$
$u(t)$	$\frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\cos(\pi t)$	$\frac{1}{2}(\delta(f + \frac{1}{2}) + \delta(f - \frac{1}{2}))$	$\frac{2\pi}{2}(\delta(\omega + \pi) + \delta(\omega - \pi))$
$\sin(\pi t)$	$\frac{i}{2}(\delta(f + \frac{1}{2}) - \delta(f - \frac{1}{2}))$	$\frac{i2\pi}{2}(\delta(\omega + \pi) - \delta(\omega - \pi))$

Tabulka 3.2: Některé speciální funkce a jejich spektra vyjádřená v obyčejné a v úhlové frekvenci.

$B(-f) = -B(f)$. Spektrum reálného signálu $s(t)$ je tedy **Hermitovská funkce**. Platí pro něj důležitá věta:

Věta (O Fourierově transformaci reálného spojitého signálu):

Jestliže je signál $s(t)$ reálný, pak pro jeho spektrum platí

$$S(-f) = \overline{S(f)}. \quad (3.24)$$

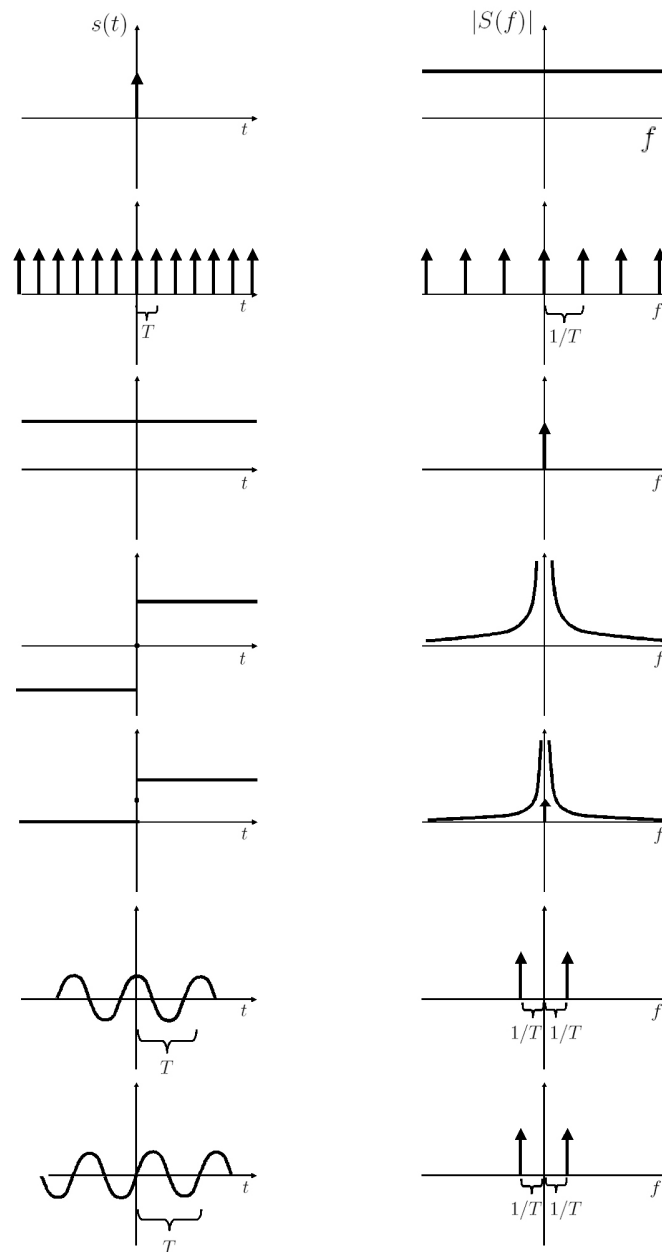
Navíc jeho amplitudové spektrum je sudou funkcí frekvence a fázové lichou

$$|S(-f)| = |S(f)|, \quad \phi(-f) = -\phi(f)$$

a $\phi(0) = 0$.

Důkaz:

Jelikož $S(f) = \frac{1}{2}(A(f) - iB(f))$, pak díky vlastnostem funkcí $A(f)$ a $B(f)$ pro reálný signál $s(t)$ musí platit $S(-f) = \frac{1}{2}(A(-f) - iB(-f)) = \frac{1}{2}(A(f) + iB(f)) = \overline{S(f)}$. Jelikož $S(f) = |S(f)| \exp(i\phi(f))$, musí pro komplexně sdružené spektrum platit $\overline{S(f)} = |S(f)| \exp(-i\phi(f))$ a pro



Obrázek 3.5: Některé „nefourierovské“ signály $s(t)$ a jejich amplitudová spektra $|S(f)|$.

zrcadlový obraz spektra máme $S(-f) = |S(-f)| \exp(i\phi(-f))$. Pro reálný signál tedy dostáváme

$$|S(f)| \exp(-i\phi(f)) = |S(-f)| \exp(i\phi(-f)) \quad \Rightarrow \quad |S(-f)| = |S(f)|, \quad \phi(-f) = -\phi(f).$$

Pro nulovou frekvenci dává definice $B(f)$, že $B(0) = 0$. Jelikož však $B(0) = -2\Im\{S(0)\}$, znamená to, že na nulové frekvenci je spektrum reálného signálu reálné, tj. $\phi(0) = 0$, c.b.d.

Tyto vztahy můžeme využít k odvození některých alternativních vzorců pro inverzní Fourierovu transformaci v případě reálného signálu v časové oblasti. Příklad velmi často užívaného alternativního vyjádření poskytuje následující věta.

Věta (O alternativním Fourierově reprezentaci reálného spojitého signálu):

Fourierovu reprezentaci reálného spojitého signálu $s(t)$ lze psát ve tvaru

$$s(t) = 2\Re\left\{\int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) df\right\}. \quad (3.25)$$

Důkaz:

Abychom mohli využít vztah (3.24) pro reálné signály, rozdělíme při inverzní Fourierově transformaci integrační obor na dvě části

$$s(t) = \int_{-\infty}^0 S(f) \exp(i2\pi ft) df + \int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) df.$$

V prvním integrálu použijeme substituci $u = -f$, čímž dostaneme stejné meze jako v druhém integrálu. Pro jednoduchost se vrátíme k původnímu označení integrační proměnné f a použijeme vzorec (3.24) pro $S(-f)$.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^{\infty} \overline{S(f)} \exp(-i2\pi ft) df + \int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) df \\ &= \int_0^{\infty} \overline{\{S(f) \exp(i2\pi ft) + S(f) \exp(i2\pi ft)\}} df \\ &= 2\Re\left\{\int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) df\right\}, \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Tabulka 3.3 ukazuje další alternativy pro Fourierovu reprezentaci reálného signálu. Důkazy jsou jednoduché, v zásadě analogické tomu, který jsme právě provedli. Pro pohodlí čtenáře uvádíme v tabulce i tvary zapsané pomocí úhlové frekvence. Tabulka je převzata ze skript V. Červeného (1979).

Cvičení 3.6.1:

Ověřte, že i spektrum speciálních signálů probíraných v odstavci 3.5 má tu vlastnost, že pro reálný signál je spektrum hermitovskou funkcí (případně distribucí) frekvence. (δ -funkci chápeme jako sudou, neboť $\delta(t) = \delta(-t)$.)

3.7 Vlastnosti Fourierovy transformace – symetrie spektra.

S některými významnými symetriemi spektra jsme se již setkali v předcházejících podkapitolách. Víme již například, že sudá funkce se transformuje opět na sudou funkci a lichá funkce na

$s(t) = \dots$ pro obyčejnou frekvenci f	$s(t) = \dots$ pro úhlovou frekvenci ω
$2\Re\left\{\int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft)df\right\}$	$\frac{1}{\pi}\Re\left\{\int_0^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega t)d\omega\right\}$
$2\Im\left\{\int_0^{\infty} iS(f) \exp(i2\pi ft)df\right\}$	$\frac{1}{\pi}\Im\left\{\int_0^{\infty} iS(\omega) \exp(i\omega t)d\omega\right\}$
$2\Re\left\{\int_0^{\infty} S(f) \exp[i(2\pi ft + \phi(f))]df\right\}$	$\frac{1}{\pi}\Re\left\{\int_0^{\infty} S(\omega) \exp[i(\omega t + \phi(\omega))]d\omega\right\}$
$2\Im\left\{\int_0^{\infty} S(f) \exp[i(2\pi ft + \phi(f) + \frac{\pi}{2})]df\right\}$	$\frac{1}{\pi}\Im\left\{\int_0^{\infty} S(\omega) \exp[i(\omega t + \phi(\omega) + \frac{\pi}{2})]d\omega\right\}$
$2\int_0^{\infty} S(f) \cos(2\pi ft + \phi(f))df$	$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))d\omega$
$2\int_0^{\infty} S(f) \sin(2\pi ft + \phi(f) + \frac{\pi}{2})df$	$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega) + \frac{\pi}{2})d\omega$

Tabulka 3.3: Alternativní tvary pro inverzní Fourierovu transformaci reálného signálu.

funkci lichou. Dále jsme dokázali, že spektrum reálného signálu je hermitovská funkce frekvence (komplexní funkce se sudou reálnou a lichou imaginární částí) se všemi důsledky, které to má pro amplitudové a fázové spektrum.

Cvičení 3.7.1:

Dokažte, že spektrum ryze imaginárního signálu je antihermitovskou funkcí frekvence, tj. jeho reálná část je lichá, zatímco imaginární sudá a platí $S(-f) = -\overline{S(f)}$.

Je-li signál $s(t)$ sudý a navíc ještě reálný, je jeho spektrum $S(f) = A(f)/2$ rovněž reálné a sudé. Reálnost plyne z definice $A(f)$ (reálný integrand) a sudost je automatickou vlastností každé Fourierovy kosinové transformace. Podobně, je-li signál $s(t)$ sudý a navíc ryze imaginární, je jeho spektrum také ryze imaginární (ryze imaginární integrand) a sudé. Analogicky můžeme uvažovat v případě lichého signálu. Je-li signál $s(t)$ lichý a reálný, je jeho spektrum $S(f) = -iB(f)/2$ ryze imaginární a lichá funkce frekvence, neboť $B(f)$ je vždy funkce lichá a v případě reálného signálu také reálná.

Cvičení 3.7.2:

Dokažte, že spektrum ryze imaginárního lichého signálu je reálná lichá funkce frekvence.

Pro snadnější zapamatování těchto symetrií může dobře posloužit následující mnemotechnický diagram využívající rozklad jak signálu v časové oblasti, tak jeho spektra, na sudou ($e(t)$ respektive $E(f)$) a lichou část ($o(t)$ respektive $O(f)$):

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{s}(t) & = & \tilde{o}(t) & + & \tilde{e}(t) & = & \Re\{\tilde{o}(t)\} + i\Im\{\tilde{o}(t)\} + \Re\{\tilde{e}(t)\} + i\Im\{\tilde{e}(t)\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \swarrow & \searrow \\ S_n & = & O_n & + & E_n & = & \Re\{O_n\} + i\Im\{O_n\} + \Re\{E_n\} + i\Im\{E_n\} \end{array}$$

Pro souhrnný přehled o symetriích spektra nám může pomoci identická tabulka s tabulkou 2.2, kde bychom psali pouze $s(t)$ místo $\tilde{s}(t)$ a $S(f)$ místo S_n . V grafické podobě jsou symetrie schématicky znázorněny na obrázku 3.6.

Všimněme si, že způsob, jakým jsme dodefinovali Fourierovu transformaci pro některé speciální signály probírané v odstavci 3.5, zachovává zde zmiňované symetrie spektra, i když v některých případech signál či jeho spektrum chápeme ve smyslu distribucí. Tak například, δ -funkce je reálná sudá distribuce a její spektrum je reálná sudá funkce. Vzorkovací funkce, tvořící symetrický Fourierův pár, je reálná a sudá distribuce. Naopak, funkce signum je reálná a lichá a její spektrum je, dle očekávání, imaginární lichá funkce frekvence. Rovněž spektra trigonometrických funkcí respektují výše uvedené symetrie.

Z tabulky a obrázku 3.6 si také můžeme všimnout, že Fourierova transformace vykazuje jistou symetrii vůči záměně vzájemně komplementárních oblastí (časové a spektrální). Tak například reálný signál se transformuje na hermitovský a hermitovský v časové oblasti opět na reálný v oblasti spektrální. Imaginární lichý signál má protějšek v reálném lichém signálu a naopak. Ve výčtu těchto záměn bychom mohli pokračovat. Zmíněný jev je důsledkem důležité vlastnosti Fourierovy transformace, které říkáme **reciprocita**. Reciprocita se týká nejen symetrií signálu a jeho spektra, ale přímo konkrétního tvaru signálů v časové a spektrální oblasti. Konkrétně platí

Věta (O reciprocitě Fourierovy transformace):

$$S(f) = \mathcal{F}(s(t)) \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{F}(S(t)) = s(-f). \quad (3.26)$$

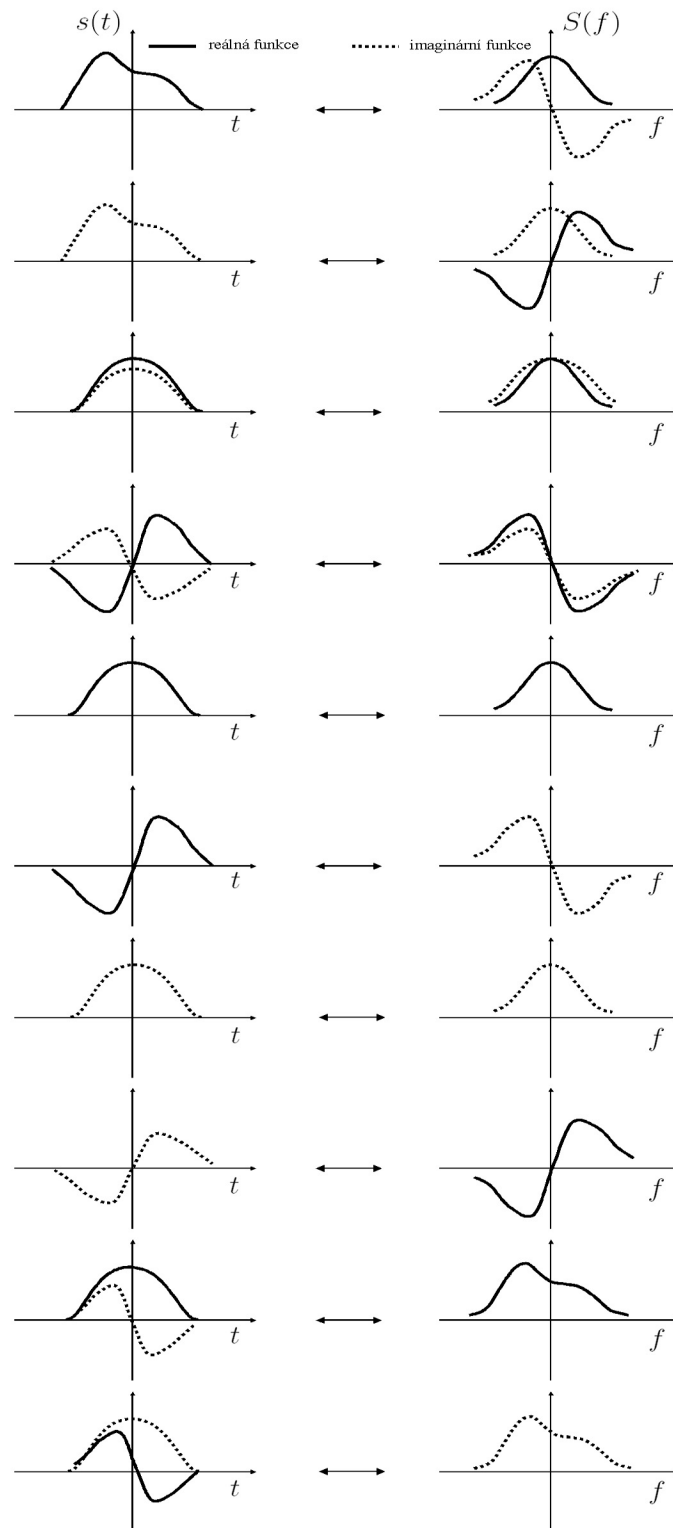
Je-li signál $s(t)$ navíc sudý, pak platí dokonce přesná symetrie, tj. $S(f) = \mathcal{F}(s(t)) \leftrightarrow s(f) = \mathcal{F}(S(t))$. To jsme viděli ve cvičení 3.2.3 a 3.4.2 na příkladu záměny pravouhelníkové funkce a funkce sinc a také v odstavci 3.5 pro případ δ -funkce a konstantní funkce. Tato vlastnost také dává jasné opodstatnění výrazu Fourierův pár, kdy vlastně nespecifikujeme, která funkce přísluší které oblasti.

Důkaz reciprocity je jednoduchý, vychází přímo z definice přímé a inverzní Fourierovy transformace.

Důkaz:

Ve výrazu pro inverzní transformaci provedme přeo značení $t \rightarrow -t$. Nejedná se o substituci, neboť integrace se týká proměnné f . Integrační meze se tedy nezmění. Pro větší názornost pak ještě přeo značíme $t \rightarrow f$. Celkem tedy dostaneme

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) df \rightarrow s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(-i2\pi ft) df \rightarrow \\ s(-f) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \mathcal{F}(S(t)), \quad \text{c.b.d} \end{aligned}$$



Obrázek 3.6: Symetrie Fourierovy transformace spojitého signálu.

Cvičení 3.7.3:

Pomocí vlastnosti reciprocity Fourierovy transformace najděte spektrum funkce $s(t) = \frac{1}{\pi t}$.

3.8 Vlastnosti Fourierovy transformace – operace v časové oblasti.

V tomto odstavci si vysvětlíme, jakým způsobem se některé standardní matematické operace provedené v časové oblasti projeví na odpovídajícím spektru. Cílem je usnadnění výpočtu Fourierovy transformace pomocí jednoduchých operací ve spektrální oblasti namísto vyčíslování definičního integrálu. V následujícím textu budeme signály v časové oblasti značit $s(t)$, popřípadě $f(t)$ a $g(t)$, a jim odpovídající spektra $S(f)$, popřípadě $F(f)$ a $G(f)$. Signál, který vznikne po provedení příslušné operace v časové oblasti, nechť je $h(t)$ a jemu odpovídající spektrum $H(f)$. Většina těchto vlastností Fourierovy transformace spojitého signálu je analogická těm, probíraným v kapitole 2.8 v souvislosti s exponenciální Fourierovou řadou. Pro široký praktický význam zde přidáme i některé další.

Lineární kombinace

Pro obecně komplexní konstanty α a β platí

$$h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \alpha F(f) + \beta G(f). \quad (3.27)$$

Tato vlastnost je triviálním důsledkem linearitu integrálu v definičním vztahu pro Fourierovu transformaci.

Poznamenejme také, že násobení signálu reálnou konstantou, které se ve spektrální oblasti projeví násobením spektra toutéž konstantou, nemá vliv na fázové spektrum, neboť zachovává poměr reálné a imaginární části komplexního spektra.

Příklad:

Najděte spektrum funkce

$$h(t) = \begin{cases} \exp(-\alpha t) \sin(2\pi f_0 t + \nu) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases},$$

kde $\alpha > 0$ a f_0, ν jsou nějaké reálné konstanty. Použijte výsledku cvičení 3.2.4: $\mathcal{F}(\exp(-\alpha t)) = (\alpha + i2\pi f)^{-1}$.

Pomocí Eulerova vzorce (D.8.2) pro sin přepíšeme $s(t)$ do tvaru

$$h(t) = \frac{1}{2i} \exp(-(\alpha - i2\pi f_0)t) \exp(i\nu) - \frac{1}{2i} \exp(-(\alpha + i2\pi f_0)t) \exp(-i\nu).$$

Odtud již snadno zjistíme, že $S(f)$ se na základě linearitu musí rovnat

$$H(f) = \frac{\exp(i\nu)}{2i} \frac{1}{\alpha + i2\pi(f - f_0)} - \frac{\exp(-i\nu)}{2i} \frac{1}{\alpha + i2\pi(f + f_0)}.$$

Komplexní sdružení

$$h(t) = \overline{s(t)} \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \overline{S(-f)}. \quad (3.28)$$

Cvičení 3.8.1:

Proveďte důkaz tohoto tvrzení. (S výhodou lze použít mnemotechnický diagram z předcházející podkapitoly).

Speciálním případem této vlastnosti je nám již známá symetrie spektra reálného signálu $\overline{S(f)} = S(-f)$. Pro reálný signál totiž platí $s(t) = \overline{s(t)}$, tudíž pro jeho spektrum máme $S(f) = \overline{S(-f)}$. Provedeme-li na tuto rovnici operaci komplexního sdružení, dostaneme, že pro spektrum reálného signálu je $\overline{S(f)} = \overline{\overline{S(-f)}} = S(-f)$.

Změna měřítka

Uvažujme reálnou konstantu $\alpha \neq 0$ pomocí níž budeme měnit měřítko na vodorovné ose v časové oblasti. Pro zúžení signálu použijeme $|\alpha| > 1$, pro jeho rozšíření naopak $|\alpha| < 1$. Pak

$$h(t) = s(\alpha t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{f}{\alpha}\right). \quad (3.29)$$

Vidíme tedy, že rozšíření signálu v časové oblasti má za následek zúžení jeho spektra (a nárůst jeho amplitudy), zatímco zúžení signálu vede k rozšíření spektra⁹ (a poklesu jeho amplitudy).

Důkaz:

Nejprve uvažujme $\alpha > 0$. V integrálu pro Fourierovu transformaci provedeme substituci $u = \alpha\tau \Rightarrow d\tau = du/\alpha$.

$$\mathcal{F}(s(\alpha t)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \exp(-i2\pi fu/\alpha) du = \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

Pro $\alpha < 0$ je postup stejný s tím rozdílem, že při substituci dojde k prohození integračních mezí a tedy změně znaménka před integrálem. Souhrnně tedy dostáváme $\mathcal{F}(s(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{f}{\alpha}\right)$, c.b.d.

Příklad:

Najděte spektrum funkce

$$h(t) = \exp(-\beta^2 t^2),$$

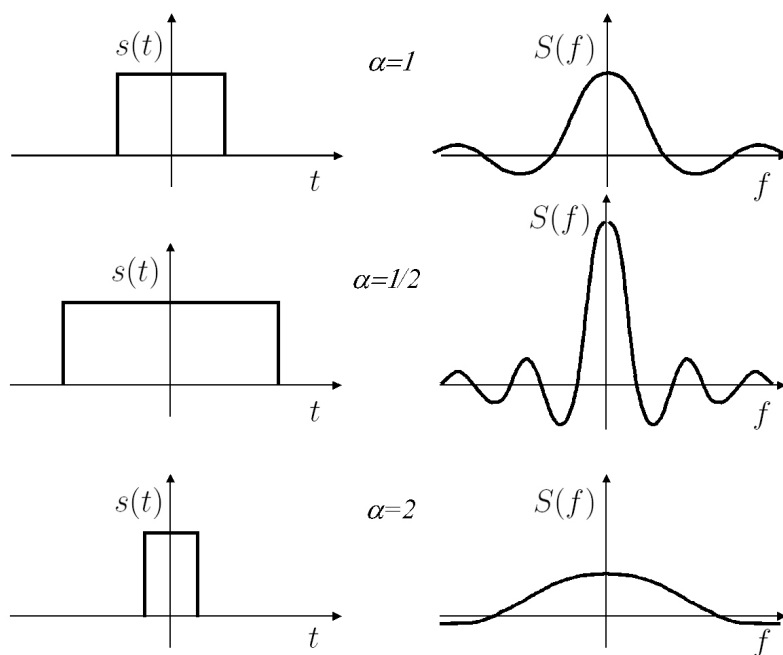
kde β je reálná konstanta. Použijte výsledku cvičení 3.2.2: $\mathcal{F}(\exp(-\pi t^2)) = \exp(-\pi f^2)$.

$$\mathcal{F}(\exp(-\pi(\alpha t)^2)) = \frac{1}{\alpha} \exp(-\pi \frac{f^2}{\alpha^2}),$$

kde jsme bez újmy obecnosti předpokládali $\alpha > 0$, neboť Gaussova funkce je sudá. Volbou $\alpha = \beta/\sqrt{\pi}$ dostáváme okamžitě hledaný výsledek:

$$\mathcal{F}(\exp(-\beta^2 t^2)) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\pi \frac{f^2}{\beta^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\pi^2 \frac{f^2}{\beta^2}\right).$$

⁹To, že zúžení signálu (ať už ho bylo dosaženo jakýmkoliv způsobem) provází rozšíření spektra a naopak, je obecnou vlastností Fourierovy transformace. Zde zúžení/rozšíření signálu v časové oblasti dosahujeme speciálně změnou měřítka, jsou však i jiné způsoby (např. přenásobení signálem s užším nosičem, konvolucí s jiným signálem, apod.). Při kvantifikaci tohoto jevu však vždy záleží na zvolené míře pro šířku signálu/spektra.



Obrázek 3.7: Vliv změny měřítka na Fourierovu transformaci.

Obrázek 3.7 ilustruje změnu měřítka pro známý pár pravoúhelník-sinc. Chování spektra je obdobné jako chování Fourierových koeficientů na obrázku 2.4b, kde také dochází ke změně šířky pravoúhelníkové funkce vůči konstantní periodě řady.

Cvičení 3.8.2:

Změna měřítka při $\alpha > 0$ nezmění tvar signálu u Heavisideovy funkce. Ověřte že tato změna měřítka se ve spektru také neprojeví.

Speciálním případem změny měřítka je i následující operace zrcadlení, tedy zrcadlové převrácení signálu bez horizontální kontrakce či dilatace. Odpovídá volbě $\alpha = -1$.

Zrcadlení

$$h(t) = s(-t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = S(-f). \quad (3.30)$$

Speciálně pro reálný signál pak dostaneme $\mathcal{F}(s(-t)) = \overline{S(f)}$.

Translace signálu

Nechť t_0 je reálná konstanta. Pak

$$h(t) = s(t - t_0) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = S(f) \exp(-i2\pi f t_0). \quad (3.31)$$

Důkaz:

$$\mathcal{F}(s(t - t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau - t_0) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau.$$

Provedeme substituci $u = \tau - t_0$, čímž dostaneme

$$\mathcal{F}(s(t - t_0)) = \exp(-i2\pi ft_0) \int_{-\infty}^{\infty} s(u) \exp(-i2\pi fu) du = S(f) \exp(-i2\pi ft_0), \quad \text{c.b.d.}$$

Podobně jako u exponenciální Fourierovy řady, i v případě Fourierovy transformace se translace signálu v časové oblasti projeví modulací spektra. Platí to i pro speciální signály, které nejsou Fourierovskými signály standardního typu, ale přesto zavádíme jejich Fourierovu transformaci. Například spektrum posunuté Heavisideovy funkce $s(t) = u(t - t_0)$ je $S(f) = (\frac{1}{2}\delta(f) - \frac{i}{2\pi f}) \exp(-i2\pi ft_0) = \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{i}{2\pi f} \exp(-i2\pi ft_0)$. Spektrum posunuté δ -funkce, které jsme spočítali už v kapitole 3.5, také odpovídá tomuto translačnímu teorému.

Cvičení 3.8.3:

Najděte spektrum $\sin(\pi t)$ pomocí spektra $\cos(\pi t - \frac{1}{2})$. Použijte vzorec (3.23) a translační teorém.

Cvičení 3.8.4:

Najděte spektrum pravoúhelníkové funkce ze cvičení 3.2.3 pomocí rozdílu dvou posunutých Heavisideových funkcí.

Povšimněme si opět, že modulace ve spektru mění pouze fázi a nemá žádný vliv na amplitudové spektrum, tj. moduly modulovaného a původního spektra jsou si rovny ($|S(f) \exp(-i2\pi ft_0)| = |S(f)|$). Amplitudové spektrum tedy nenese informaci o volbě počátku v časové oblasti. Naopak fázové spektrum silně závisí na eventuálním časovém posunu t_0 . V praxi proto bývá často výhodné volit počátek na časové ose tak, aby bylo fázové spektrum co nejjednodušší. Situaci ilustruje obrázek 3.8 na příkladu Gaussovy funkce. Položíme-li počátek do středu Gaussovy funkce, dostaneme sudý reálný signál, jehož spektrum je též sudé a hlavně reálné, tudíž má nulové fázové spektrum. Posuneme-li signál o t_0 , přestane být sudý a jeho spektrum se stane komplexní hermitovskou funkcí. Přitom amplitudové spektrum zůstane stejné a fázové spektrum bude lineární lichou funkcí frekvence. Konkrétně při posunu o $t_0 > 0$ půjde o klesající funkci $\phi(f) = -2\pi f|t_0|$ a při posunu o $t_0 < 0$ o rostoucí funkci $\phi(f) = 2\pi f|t_0|$, přičemž tato funkce zůstává v intervalu $(-\pi, \pi)$, neboť se jedná o hlavní hodnotu argumentu $S(f)$. Vidíme tedy, že sklon lineárních úseků fázového spektra bude tím větší, čím větší bude posun $|t_0|$.

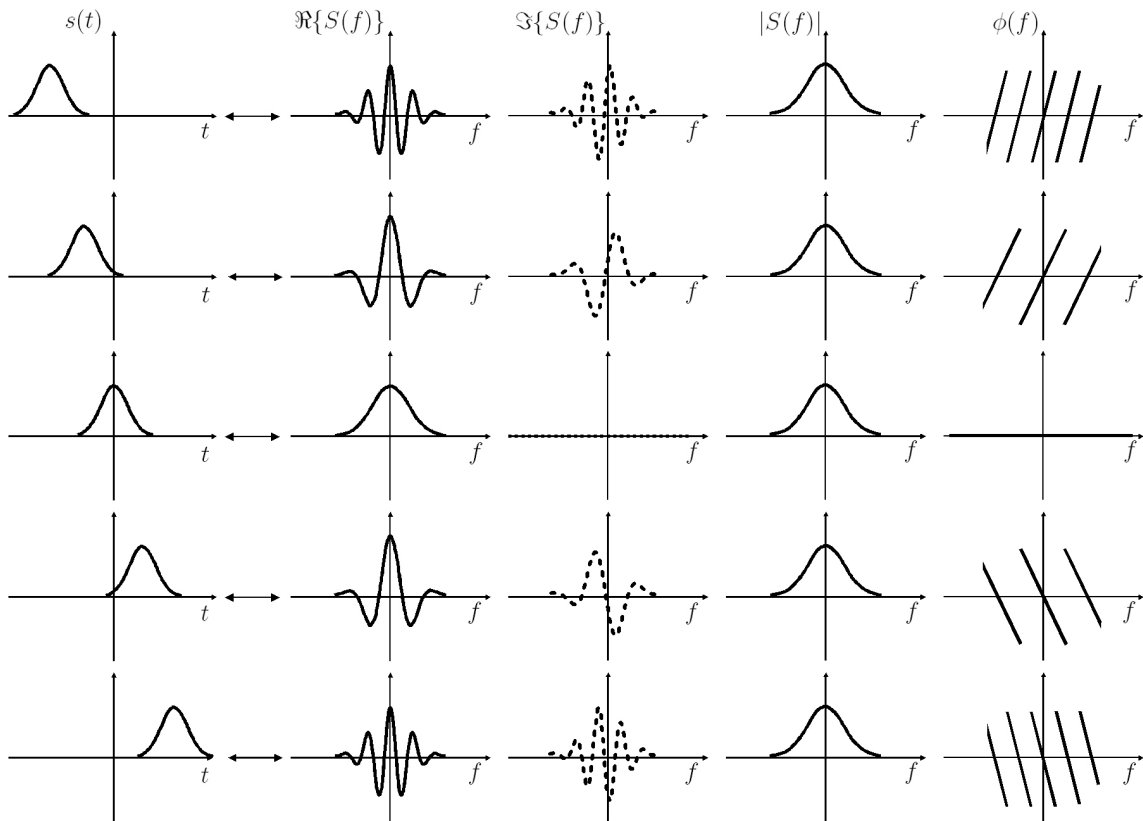
Příklad:

Najděte amplitudové spektrum superpozice dvou vzájemně posunutých totožných signálů

$$h(t) = s(t) + s(t - t_0).$$

Z vlastností linearity a posunutí máme pro Fourierovu transformaci superpozice

$$\mathcal{F}(h(t)) = H(f) = S(f)(1 + \exp(-i2\pi ft_0)).$$



Obrázek 3.8: Posunutá Gaussova funkce a její spektrum reprezentované reálnou a imaginární částí a dále modulem a fází. Jednotlivé řádky této „grafické tabulky“ odpovídají různým posunům.

Vyjádříme exponenciální funkci pomocí vztahu (D.8.1), čímž získáme reálnou a imaginární část. Amplitudové spektrum je tudíž

$$|H(f)| = |S(f)|[(1 + \cos(2\pi ft_0))^2 + \sin^2(2\pi ft_0)]^{1/2} = |S(f)|[2(1 + \cos(2\pi ft_0))]^{1/2},$$

kde jsme využili vztah (D.8). Odtud již snadnou úpravou s pomocí vzorce (D.8.5) pro kosinus dostaneme

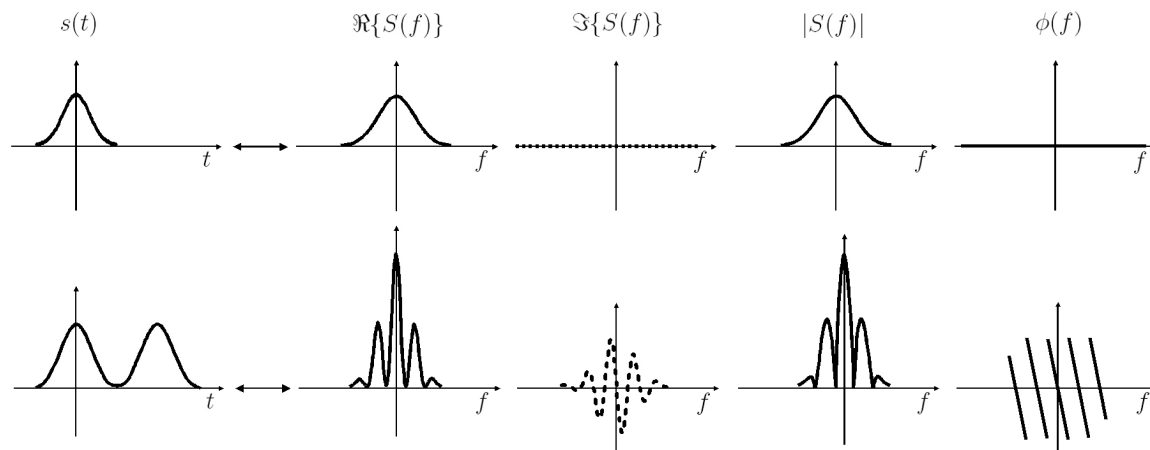
$$|H(f)| = 2|S(f)|\sqrt{\frac{1 + \cos(2\pi ft_0)}{2}} = 2|S(f)||\cos(\pi ft_0)|.$$

Amplitudové spektrum má tedy silně oscilační charakter, viz obrázek 3.9, kde minima odpovídají nulovým hodnotám funkce $|\cos(\pi ft_0)|$. Oscilace jsou tím rychlejší, čím větší je vzájemný posun superponovaných signálů $|t_0|$. Obálka amplitudového spektra superpozice má dvojnásobnou amplitudu oproti amplitudovému spektru původních samostatných signálů.

Modulace signálu

Komplementární operací k translaci je modulace signálu v časové oblasti. Jelikož již známe reciprocitu Fourierovy transformace, nepřekvapí nás, že modulace v časové oblasti je provázána translací spektra. Nechť f_0 je reálná konstanta. Pak

$$h(t) = s(t) \exp(i2\pi f_0 t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = S(f - f_0).$$



Obrázek 3.9: Spektrum signálu (nahore) a superpozice dvou vzájemně posunutých signálů (dole).

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s(t) \exp(i2\pi f_0 t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(i2\pi f_0 \tau) \exp(-i2\pi f \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(-i2\pi (f - f_0) \tau) d\tau \\ &= S(f - f_0), \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Platí tedy $s(t) \exp(i2\pi f_0 t) = \mathcal{F}^{-1}(S(f - f_0))$ a také $s(t) \exp(-i2\pi f_0 t) = \mathcal{F}^{-1}(S(f + f_0))$. Pomocí součtu a rozdílu těchto výrazů, s využitím Eulerových vzorců (D.8.2), snadno získáme tzv. **modulační teorémy**:

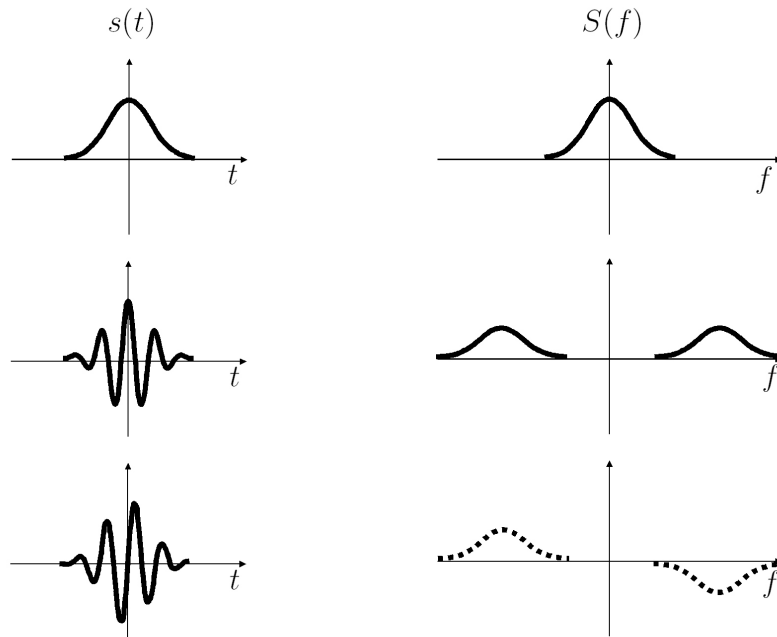
$$h(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \frac{1}{2}(S(f - f_0) + S(f + f_0)) \quad (3.32)$$

a

$$h(t) = s(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \frac{1}{2i}(S(f - f_0) - S(f + f_0)). \quad (3.33)$$

Přenasobíme-li tedy Fourierovský signál v časové oblasti kosinem, původní spektrum se „rozdvojí“, přičemž tyto dvě identické části se s poloviční amplitudou odsunou symetricky vzhledem k $f = 0$, jak je to znázorněno na obrázku 3.10 (uprostřed). Přenasobíme-li naopak sinem, budou vzájemně posunuté části spektra mít vůči sobě opačné znaménko. Faktor $1/i$ navíc představuje násobení $-i$, takže ve výsledku část spektra odsouvající se vlevo bude mít imaginární část rovnou polovině původní reálné části spektra, avšak s opačným znaménkem, a reálná bude rovna polovině původní imaginární části. U spektra posunujícího se vlevo, to bude přesně naopak. Obrázek 3.10 (dole), ilustruje tuto situaci pro zjednodušený případ reálné sudé funkce, jejíž spektrum je rovněž reálné a sudé. Všimněme si na tomto obrázku, že přenasobení sinem vytváří ze sudého reálného signálu lichý reálný signál a proto je jeho spektrum imaginární lichou funkcí frekvence, zatímco přenasobení kosinem zachovává sudý charakter původního reálného signálu, tudíž jeho spektrum je opět reálné a sudé.

Cvičení 3.8.5:



Obrázek 3.10: Ilustrace modulačních teorémů (čárkovaná čára označuje imaginární funkci).

Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $s(t) = \exp(-\beta^2 t^2) \cos(2\pi f_0 t)$ s využitím modulačního teorému pro kosinus a výsledku $\mathcal{F}(\exp(-\beta^2 t^2)) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\pi^2 \frac{f^2}{\beta^2}\right)$.

Cvičení 3.8.6:

Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $s(t) = \Pi_d(t) \cos(2\pi f_0 t)$, kde $\Pi_d(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq d/2 \\ 0 & |t| > d/2 \end{cases}$ je pravoúhelníková funkce délky d . Využijte modulačního teorému pro kosinus, výsledku cvičení 3.2.3 a změny měřítka.

Všimněme si také, že spektrum signálu z příkladu ilustrujícího operaci lineární kombinace na začátku této podkapitoly, přesně odpovídá modulačnímu teorému pro sinus.

Konečná diference

Konečná diference v bodě představuje rozdíl funkčních hodnot signálu v okolí centrovaném k tomuto bodu. Je závislá na velikosti tohoto intervalu. Označíme-li velikost tohoto okolí a , pak konečná diference je $\Delta_a s(t) = s(t + \frac{a}{2}) - s(t - \frac{a}{2})$. Význam konečné diference spočívá zejména v numerickém modelování derivace: $\frac{d}{dt} s(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Delta_a s(t)}{a}$. Vzhledem k Fourierově transformaci platí

$$h(t) = \Delta_a s(t) = s\left(t + \frac{a}{2}\right) - s\left(t - \frac{a}{2}\right) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = 2i \sin(\pi f a) S(f).$$

Jedná se vlastně o speciální případ superpozice dvou vzájemně posunutých signálů, které jsou posunuty zrcadlově vůči bodu t a jeden z nich má navíc opačné znamenko. Situaci ilustruje obrázek 3.11.

Důkaz:

Z linearity a posunutí signálu okamžitě máme

$$H(f) = S(f) \exp(i2\pi fa/2) - S(f) \exp(-i2\pi fa/2) = S(f)(\exp(i\pi fa) - \exp(-i\pi fa)).$$

Pomocí Eulerova vzorce pro sinus (D.8.2) pak máme

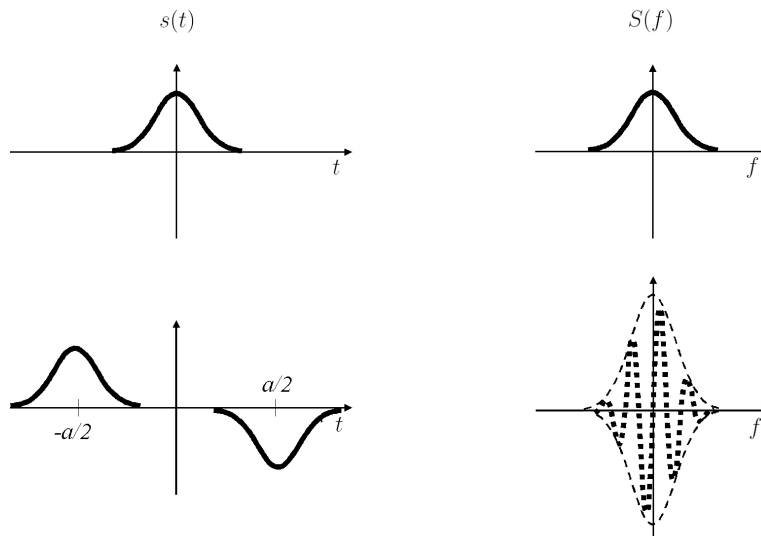
$$H(f) = 2iS(f) \sin(\pi fa), \quad \text{c.b.d.}$$

U konečné diference se také projevuje reciprocita Fourierovy transformace – je to vlastně komplementární operace k modulaci sinem.

Cvičení 3.8.7:

Odvod'te spektrum konečné diference z modulačního teorému pro sinus a z vlastnosti reciprocity Fourierovy transformace.

Operaci konečná diference můžeme použít opakovaně. Například druhá konečná diference je konečná diference aplikovaná na konečnou diferenci: $\Delta_a^2 s(t) = \Delta_a[\Delta_a s(t)] = \Delta_a s(t + \frac{1}{2}a) - \Delta_a s(t - \frac{1}{2}a) = s(t + a) - 2s(t) + s(t - a)$. Druhá konečná diference se používá k numerické aproximaci druhé derivace, $\frac{d^2}{dt^2} s(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Delta_a^2 s(t)}{a^2}$. Každé provedení operace konečná diference znamená ve spektru přenásobení faktorem $2i \sin(\pi fa)$, je tedy $\mathcal{F}(\Delta_a^2 s(t)) = -4 \sin^2(\pi fa) S(f)$ a podobně.



Obrázek 3.11: Ilustrace spektra konečné diference (čárkovaná čára označuje imaginární funkci).

Derivace

Předpokládejme, že Fourierova transformace $\frac{d}{dt} s(t)$ existuje, tj., že např. $\frac{d}{dt} s(t)$ je absolutně integrovatelná funkce. Pak

$$h(t) = \frac{d}{dt} s(t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = i2\pi f S(f).$$

Tato vlastnost tedy rozhodně nezaručuje existenci spektra derivace. Je ji třeba chápat tak, že pokud spektrum derivace existuje, je rovno původnímu spektru násobenému faktorem $i2\pi f$. Operací derivace se pak ve spektru posilují vyšší frekvence.

Důkaz:

Z definičního integrálu Fourierovy transformace dostaneme metodou per partes

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}s(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds(\tau)}{d\tau} \exp(-i2\pi f\tau) d\tau = [\exp(-i2\pi f\tau)s(\tau)]_{-\infty}^{\infty} + i2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau.$$

Vzhledem k tomu, že $s(t)$ je absolutně integrovatelná (jedna z definičních podmínek Fourierovského signálu standardního typu), musí být $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} s(t) = 0$, v důsledku čehož je výraz v hranatých závorkách roven 0. Pro spektrum derivace tedy máme

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}s(t)\right) = i2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau = i2\pi f S(f), \quad \text{c. b. d.}$$

Cvičení 3.8.8:

Ověřte, že ve spektru platí očekávaný vztah mezi konečnou diferencí a derivací, $h(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Delta_a s(t)}{a} \leftrightarrow H(f) = i2\pi f S(f) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2i \sin(\pi f a) S(f)}{a}$.

Derivaci můžeme provádět opakovaně a vytvářet derivace vyšších řádů. Každá derivace v časové oblasti má za následek násobení spektra faktorem $i2\pi f$. Souhrnně můžeme tedy psát

$$h(t) = \mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n}s(t)\right) \leftrightarrow H(f) = (i2\pi f)^n S(f). \quad (3.34)$$

Cvičení 3.8.9:

Pomocí spektra n -té derivace a reciprocity Fourierovy transformace najděte spektrum signálu $h(t) = t^n s(t)$ (za předpokladu, že toto spektrum existuje).

Konvoluce

Konvoluce spojitých signálů je definována v dodatku D.16, kde je též graficky znázorněna na obrázku D.5 a kde jsou vysvětleny její základní vlastnosti. Operace konvoluce zaujímá ve spektrálních metodách významné postavení. Uplatňuje se například v teorii lineárních časově invariantních systémů. Ta se v praxi používá při modelování účinků lineárních filtrů. V souvislosti s Fourierovou transformací platí pro konvoluci tzv. **konvoluční teorém**

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \leftrightarrow H(f) = F(f)G(f). \quad (3.35)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t) * g(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(\tau - u)du \right\} \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - u) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \right\} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp(-i2\pi fu) G(f) du = F(f)G(f), \quad \text{c.b.d} \end{aligned}$$

Tohoto vztahu se v praxi často využívá k výhodnému výpočtu konvoluce $f * g$ pomocí Fourierovy transformace a operace násobení: nejprve se najdou spektra funkcí f a g , tato spektra se vynásobí ve spektrální oblasti a inverzní Fourierova transformace tohoto součinu pak dává hledanou konvoluci. Výhodou tohoto postupu je, že numerický výpočet Fourierovy transformace je velmi rychlý v porovnání s výpočtem konvoluce, využívá-li se algoritmus tzv. rychlé Fourierovy transformace (viz kapitola 5).

Cvičení 3.8.10:

S využitím výsledku cvičení 3.2.4 najděte inverzní Fourierovu transformaci spektra $S(f) = \frac{1}{(\alpha + i2\pi f)^2}$.

Pomocí Fourierovy transformace derivace (pokud existuje) a konvoluce můžeme snadno dokázat vzorec (D.16.2) o derivaci konvoluce. Platí

$$\mathcal{F} \left(\frac{d}{dt}(f(t) * g(t)) \right) = i2\pi f F(f)G(f) = \begin{cases} (i2\pi f F(f))G(f) = \mathcal{F} \left(\frac{df(t)}{dt} * g(t) \right) \\ F(f)(i2\pi f G(f)) = \mathcal{F} \left(f(t) * \frac{dg(t)}{dt} \right) \end{cases},$$

neboť je jedno, ke kterému z činitelů ve spektrální oblasti přiřadíme multiplikativní faktor $i2\pi f$. Při derivování konvoluce $f * g$ v časové oblasti tedy nezáleží na tom, zda nejprve derivujeme f a tuto derivovanou funkci pak konvolujeme s g , či naopak s f konvolujeme derivovanou g , či zda derivujeme až celou konvoluci.

Na závěr poznamenejme, že spektrum posunutého signálu bychom okamžitě dostali jako speciální případ konvolučního teoremu. Násobení spektra faktorem $\exp(-i2\pi ft_0)$ odpovídá v časové oblasti konvoluce s $\delta(t - t_0)$, tedy signál posunutý o t_0 (viz dodatek D.17).

Násobení

Z hlediska Fourierovy transformace je protějškem ke konvoluci operace násobení. Platí

$$h(t) = f(t)g(t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = F(f) * G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)G(f - \nu)d\nu. \quad (3.36)$$

Důkaz je nejjednodušší provést pro inverzní Fourierovu transformaci, tj. dokazovat, že $f.g = \mathcal{F}^{-1}(F * G)$. V tom případě je důkaz zcela analogický důkazu provedenému výše pro konvoluci s tím rozdílem, že v exponentu bude opačné znaménko.

Cvičení 3.8.11:

Najděte spektrum součinu $g_1(t)g_2(t)$ na základě reciprocity Fourierovy transformace pomocí znalosti spektra konvoluce.

Cvičení 3.8.12:

Najděte konvoluci $\text{sinc}_\pi(t) * \text{sinc}_\pi(t)$ a pomocí ní spočtěte integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}_\pi^2(t) dt$.

Budeme-li v časové oblasti speciálně násobit faktorem $\exp(-i2\pi t f_0)$, dostaneme ve spektru konvoluci s $\delta(f - f_0)$, tj. translaci spektra.

Replikace

V odstavci 3.5 jsme odvodili spektrum vzorkovací funkce; jedná se opět o vzorkovací funkci (frekvence). Víme, že konvoluce signálu $s(t)$ se vzorkovací funkcí $\delta_T(t)$ v časové oblasti způsobí periodizaci (replikaci) této funkce a dá vzniknout T -periodické funkci $\tilde{s}(t)$. Nyní nás zajímá, jak se operace replikace projeví ve spektrální oblasti. Odpověď je jednoduchá: diskretizaci spektra. Jak víme, konvoluce dvou signálů v časové oblasti odpovídá součinu jejich spekter ve spektrální oblasti. Spektrum $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$ budeme tedy násobit vzorkovací funkcí $\frac{1}{T}\delta_{\frac{1}{T}}(f)$. Při tomto násobení se uplatní vzorkovací vlastnost vzorkovací funkce – dojde tedy k odebrání diskretních vzorků původního spektra (násobeného faktorem $\frac{1}{T}$) s krokem $\Delta f = \frac{1}{T}$.

$$h(t) = \tilde{s}(t) = s(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \frac{1}{T}S(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T}).$$

Tato situace pro nás není nijak nová, již jsme se s ní setkali v odstavci 3.3 při zkoumání vztahu Fourierovy řady a Fourierovy transformace spojitého signálu (viz též obrázek 3.2). Zde se pouze pro matematický popis daného jevu používá formalismus vzorkovací funkce.

Diskretizace

Jelikož v rámci Fourierovy transformace je protějškem ke konvoluci násobení, dostáváme pro vzorkovací funkci, že protějškem k replikaci je diskretizace. Provedeme-li diskretizaci v časové oblasti s krokem Δt , tj. přenásobíme-li signál $s(t)$ vzorkovací funkcí $\delta_{\Delta t}(t)$, projeví se to ve spektrální oblasti konvolucí spektra $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$ se vzorkovací funkcí $\frac{1}{\Delta t}\delta_{\frac{1}{\Delta t}}(f)$, tj. replikací původního spektra s periodou $1/\Delta t$:

$$h(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \tilde{H}(f) = S(f) * \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{\Delta t}).$$

Vidíme tedy, že při Fourierově transformaci je diskretizace v jedné oblasti (časové nebo spektrální) nerozlučně spojena s replikací v komplementární oblasti a naopak.

Klouzavý průměr

Metoda klouzavých průměrů se používá k vyhlazování funkčních hodnot za účelem odhalení případných trendů signálu či jiných „nízkofrekvenčních jevů“. Z matematického hlediska se jedná o jednoduchou konvoluci s pravoúhelníkovým oknem, normalizovanou šířkou tohoto okna.

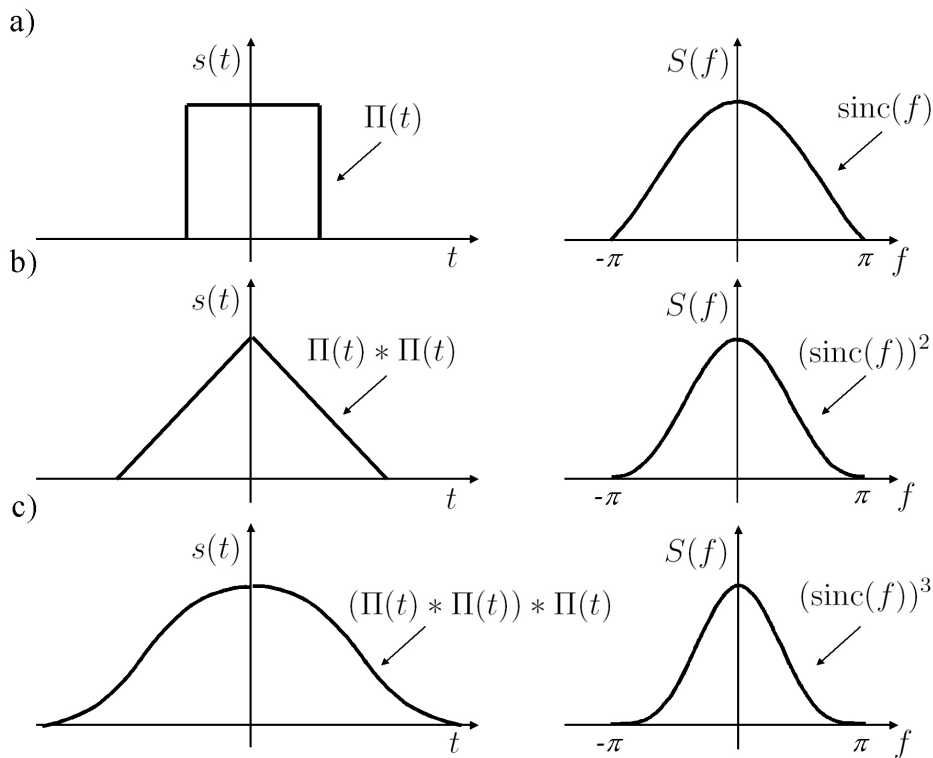
Jak je vysvětleno názorně na obrázku D.5, při konvoluci se jedna z konvoluovaných funkcí (v našem případě pravoúhelník o základně a) posouvá a přenásobuje druhou funkci. Integrálem z tohoto násobku a vydělením šířkou pravoúhelníkového okna získáme průměr funkce v místě odpovídajícím středu posunutého okna. Posouvání pravoúhelníkového okna při konvoluci dalo vzniknout názvu „klouzavý průměr“. Operace v časové oblasti tedy představuje integrál

$$h(t) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{t}{a}\right) * s(t) = \frac{1}{a} \int_{t-a/2}^{t+a/2} s(\tau) d\tau$$

Konvoluci s pravoúhelníkovým oknem odpovídá ve spektru násobení funkcí sinc. Máme tedy

$$h(t) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{t}{a}\right) * s(t) = \frac{1}{a} \int_{t-a/2}^{t+a/2} s(\tau) d\tau \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \text{sinc}(af) S(f).$$

Konvoluce má vždy za následek vyhlazení, tj. výsledný signál je hladší¹⁰ než původní konvoluované signály. Konvoluce vždy také rozšiřuje – délka jejího nosiče je součtem délek nosičů konvoluovaných funkcí.



Obrázek 3.12: Zhlazování pomocí klouzavého průměru aplikovaného na pravoúhelník o šířce 1, shodné s šířkou průměrovacího okna. Původní signál a jeho spektrum před průměrováním (a) jsou porovnány s výsledkem po jednoduchém (b) a dvojnásobném (c) průměrování.

Operaci klouzavého průměru můžeme provádět opakovaně. Každá další aplikace v časové oblasti má za následek další násobení spektra funkcí $\text{sinc}(af)$. Obrázek 3.12 ukazuje vliv této

¹⁰Hladkost se posuzuje počtem spojitých derivací, jak též uvidíme v odstavci 3.10.

operace na jednoduchém příkladu, kdy průměrovaným signálem je speciálně pravoúhelníková funkce o šířce 1, což je zároveň také šířka průměrovacího okna. V části a) je původní funkce a její spektrum, v části b) vidíme jednou zprůměrovaný signál a jeho spektrum a v části c) opětovně zprůměrovaný signál s jeho spektrem. Zhlazování a rozšiřování v časové oblasti je jasně patrné, ve spektrální oblasti naopak pozorujeme efektivní¹¹ zužování spektra.

Integrál

Zde máme na mysli „průběžný“ integrál, tak aby integrováním vznikl opět signál závisící obecně na t . Platí

$$h(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \frac{1}{i2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} \delta(f) S(0), \quad f \neq 0 \quad (3.37)$$

Pro $f = 0$ píšeme

$$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt.$$

Důkaz:

Důkaz je jednoduchý uvědomíme-li si, že daný integrál představuje vlastně konvoluci s Heavisideovou funkcí $u(t)$, neboť

$$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) u(t - \tau) d\tau = s(t) * u(t).$$

Fourierovu transformaci pak už snadno získáme jako součin spekter

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) &= \mathcal{F}(s(t)) \mathcal{F}(u(t)) = S(f) \left(\frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) \right) \\ &= \frac{1}{i2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} \delta(f) S(0), \end{aligned}$$

kde jsme použili známou vlastnost δ -funkce (D.17.4).

Cvičení 3.8.13:

Dokažte bez použití zobecněných funkcí (přímo z definice Fourierovy transformace), že pro signály $s(t)$ jejichž integrál na $(-\infty, \infty)$ je roven nule¹² je spektrum rovno $S(f)/i2\pi f$.

Zde je na místě připojit varovnou poznámku. Čtenář by mohl uvažovat tak, že je-li integrál inverzní operací k derivaci a spektrum derivace je dáno nasobením původního spektra faktorem

¹¹Zde je třeba zdůraznit slovo „efektivní“. Kvantitativní určení šířky spektra závisí na zvolené míře, viz odstavec 3.9. Pro některé definice šířky ke zužování spektra nemusí dojít (například pro ekvivalentní šířku zavedenou v 3.9.).

¹²V následující podkapitole uvidíme, že tento integrál je roven $S(0)$.

$i2\pi f$, musí být spektrum integrálu rovno původnímu spektru dělenému tímto faktorem. Chceme-li použít spektrum derivace k odvození Fourierovy transformace integrálu (dělením spektra faktorem $i2\pi f$), musíme být velmi obezřetní a mít na paměti, že derivováním se ztrácí informace o eventuální integrační konstantě. V důsledku toho může ve spektru integrálu odvozeném ze spektra derivace chybět případný člen obsahující δ -funkci (který se v (3.37) skutečně vyskytuje). Ukažme to na příkladu výpočtu spektra Heavisideovy funkce, pomocí spektra její derivace, tj. δ -funkce (viz (D.17.6)).

Příklad:

Najděte spektrum Heavisideovy funkce $u(t)$ pomocí spektra $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$, $\mathcal{F}(\delta(t)) = 1$.

Je-li $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$, pak musí platit, že $\mathcal{F}(\delta(t)) = 1 = i2\pi f\mathcal{F}(u(t))$. Odtud ovšem neplyne, že $\mathcal{F}(u(t)) = 1/i2\pi f$!

$$1 = i2\pi f\mathcal{F}(u(t)) \not\Rightarrow \mathcal{F}(u(t)) = \frac{1}{i2\pi f}.$$

Skutečně, $\mathcal{F}(u(t)) \neq 1/i2\pi f$, neboť Heavisideova funkce není lichá a nemůže tedy mít ryze imaginární liché spektrum. Navíc, z odstavce 3.5 víme, že $\mathcal{F}(u(t)) = 1/i2\pi f + \delta(f)/2$. Správná implikace je

$$1 = i2\pi f\mathcal{F}(u(t)) \implies \mathcal{F}(u(t)) = \frac{1}{i2\pi f} + a\delta(f),$$

kde $a \neq 0$ je libovolná konstanta. Vynásobíme-li tuto rovnici faktorem $i2\pi f$, dostaneme správnou rovnost

$$1 + i2\pi fa\delta(f) = 1 = i2\pi f\mathcal{F}(u(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) = \mathcal{F}(\delta(t)),$$

díky (D.17.4).

Korelace

Korelace dvou spojitých signálů je zavedena v appendixu D.18. Spektrum korelace snadno odvodíme s využitím vztahu korelace a konvoluce (D.18.2), $f(t) \star g(t) = \overline{f(-t)} * g(t)$. Pomocí (3.35), (3.28) a (3.30) okamžitě dostáváme tzv. korelační teoremy:

$$\begin{aligned} h(t) = f(t) \star g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau)} g(\tau + t) d\tau \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \overline{F(f)} G(f), \\ h(t) = g(t) \star f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\tau)} f(\tau + t) d\tau \quad \leftrightarrow \quad H(f) = F(f) \overline{G(f)}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Pro reálné signály můžeme díky (3.24) navíc speciálně psát

$$\begin{aligned} h(t) = f(t) \star g(t) &= \leftrightarrow \quad H(f) = \overline{F(f)} G(f) = F(-f) G(f), \\ h(t) = g(t) \star f(t) &= \leftrightarrow \quad H(f) = F(f) \overline{G(f)} = F(f) G(-f). \end{aligned}$$

Spektrum korelace se někdy nazývá vzájemné spektrum. Je obecně komplexní, jeho reálná část je tzv. kospektrum a imaginární části se říká kvadrurní spektrum.

Z korelačního teoremu plyne též tzv. Parsevalův teorem. Pozor, tato terminologie je poněkud zavádějící, neboť se nejedná o přímou analogii k Parsevalově rovnosti, kterou známe z teorie Fourierových řad.

Věta (Parsevalův teorém):

Je-li $S_1(f)$ Fourierovým spektrem signálu $s_1(t)$ a $S_2(f)$ Fourierovým spektrem signálu $s_2(t)$, platí

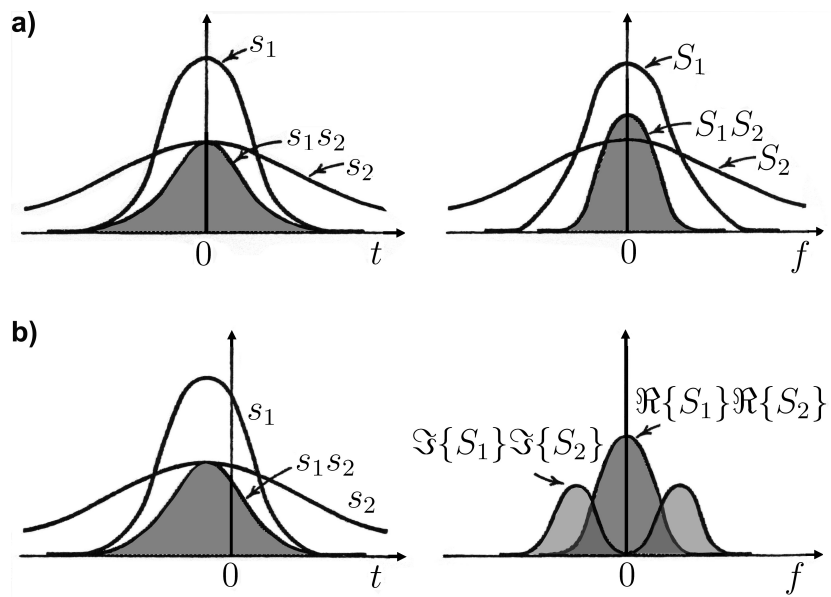
$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \overline{s_2(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) \overline{S_2(f)} df. \quad (3.39)$$

Důkaz:

Při důkazu využijeme toho, že násobení v časové oblasti odpovídá konvoluci v oblasti spektrální (viz (3.36)).

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \overline{s_2(t)} dt &= \mathcal{F}(s_1(t) \overline{s_2(t)}) \Big|_{f=0} = S_1(f) * \overline{S_2(-f)} \Big|_{f=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\phi) \overline{S_2(\phi - f)} d\phi \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\phi) \overline{S_2(\phi)} d\phi, \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Obrázek (3.13) ilustruje graficky Parsevalův teorém pro dva reálné signály. Podle teorému se musí velikost šedých ploch v levé a pravé části obrázku rovnat (v části b vpravo se musí uvažovat součet velikosti šedých ploch).



Obrázek 3.13: Ilustrace Parsevalova teorému: a) pro dvě reálné sudé funkce, b) pro dvě reálné funkce, které však nejsou sudé. Teorém zaručuje rovnost šedých ploch v levé a pravé části obrázku (podle Bracwella, 1978).

Autokorelace

Jak je vysvětleno v dodatku D.18, autokorelace představuje korelaci dvou identických funkcí, tedy případ korelace $f \star g$, kdy $f = g = s$:

$$s(t) \star s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s(\tau)} s(\tau + t) d\tau = \overline{s(-t)} * s(t).$$

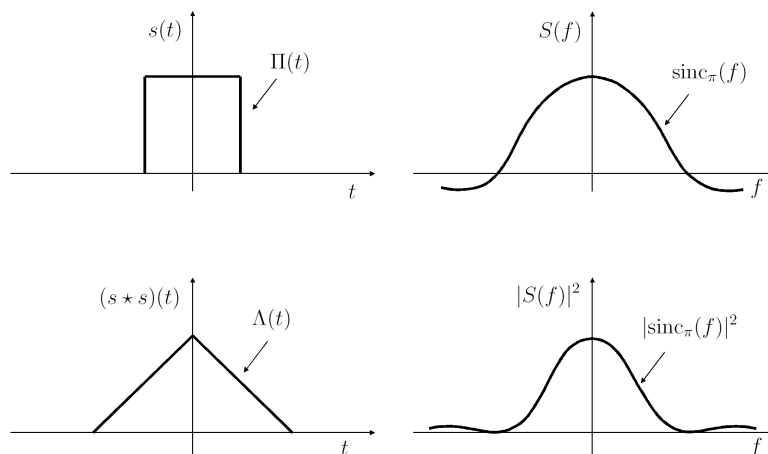
Pomocí spektra konvoluce anebo výše uvedeného spektra korelace okamžitě dostaneme tzv. **autokorelační teorém**:

$$h(t) = s(t) \star s(t) \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \overline{S(f)} S(f) = |S(f)|^2.$$

Platí tedy, že spektrum autokorelace je kvadrátem amplitudového spektra původní funkce. Toto spektrum se nazývá **výkonové spektrum**. Jsou v něm oproti amplitudovému spektru zvýrazněna frekvenční maxima. Můžeme z něj tedy snáze určit tzv. převládající frekvenci. Na druhé straně, podobně jako amplitudové spektrum, výkonové spektrum neobsahuje informaci o eventuálním posunu signálu v časové oblasti, tedy o poloze počátku časové osy.

Pro speciální případ reálné funkce $s(t)$ je autokorelace sudou funkcí času. Můžeme tedy pro výpočet jejího spektra použít kosinovou Fourierovu transformaci. Navíc můžeme v tomto případě speciálně psát $H(f) = S(-f)S(f)$.

Spektrum autokorelace (autokorelační, nebo též Wiener-Chinčinův, teorém) ilustruje obrázek 3.14 pro speciální případ pravoúhelníkové funkce $\Pi(t)$ v časové oblasti. Její autokorelace je trojúhelníková funkce $\Lambda(t)$ (jedná se vlastně o autokonvoluci, neboť pravoúhelníková funkce je sudá). Spektrem pravoúhelníkové funkce v levém horním rohu obrázku je reálná sudá funkce sinc. Spektrem autokorelace pak je $|\text{sinc}_\pi|^2 = \text{sinc}_\pi^2$



Obrázek 3.14: Ilustrace autokorelačního teorému na Fourierově páru pravoúhelník-sinc.

Autokorelační teorém lze využít k elementárnímu důkazu velmi důležitého **Rayleighova teorému**.

Věta (Rayleighův teorém):

Je-li $S(f)$ Fourierovým spektrem signálu $s(t)$, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (3.40)$$

Důkaz:

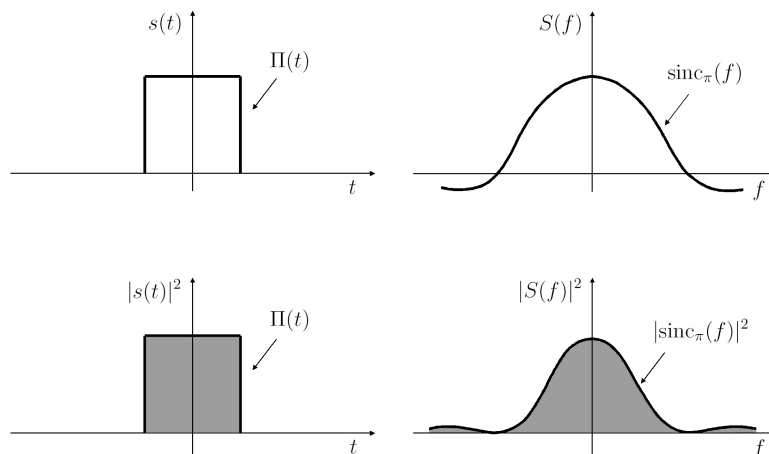
Teorém dostaneme okamžitě jakožto speciální případ Parsevalova teorému (3.39) při rovnosti $s_1(t) = s_2(t)$. Je rovněž snadné ho dokázat přímo:

$$s(t) \star s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s(\tau)} s(t + \tau) d\tau = \mathcal{F}^{-1}(|S(f)|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \exp(i2\pi ft) df.$$

Tato obecná rovnice musí platit pro všechna t , tedy i pro $t = 0$. Pro tento speciální případ okamžitě dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df, \quad \text{c.b.d.}$$

Poznamenejme, že terminologie je v souvislosti s tímto teorémem opět velmi nejednoznačná. Rovnici (3.40) se někdy též říká Parsevalův teorém. Tento název poukazuje na analogii s Parsevalovou rovností známou z teorie Fourierových řad (viz odstavec 2.4). Rayleighův teorém názorně ilustruje obrázek 3.15.



Obrázek 3.15: Ilustrace Rayleighova teorému na Fourierově páru prvoúhelník-sinc. Podle teorému se šedé plochy musí rovnat (pokračování funkce sinc k $\pm\infty$ není znázorněno).

3.9 Integrální vlastnosti Fourierovy transformace.

V tomto odstavci budeme na signál $s(t)$ v časové oblasti aplikovat různé integrální operace. Jelikož však vesměs půjde o určité integrály v mezích od $-\infty$ do ∞ , nebude výsledkem takové operace nějaká další funkce času t , nýbrž jistá konstantní hodnota (v případě, že daný integrál vůbec existuje). Nemá tedy smysl se ptát, co odpovídá dané operaci ve spektrální oblasti (z oddílu 3.5 ostatně víme, že konstantě odpovídá δ -funkce). Zde nás bude zajímat, zda lze hodnotu daného integrálu v časové oblasti vyčíslit pomocí spektrálních hodnot $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$. Na jeden takový případ jsme již narazili v minulé podkapitole v souvislosti s odvozením spektra průběžného integrálu. Platí totiž, že určitý integrál od $-\infty$ do ∞ ze signálu $s(t)$ je roven hodnotě jeho spektra na nulové frekvenci. Kromě tohoto případu zde uvedme ve stručném přehledu několik dalších důležitých integrálů, u nichž bývá často jejich vyčíslení pomocí spektrálních hodnot výhodnější než jejich přímý výpočet. Z důvodů symetrie uvedeme i analogické integrály ve frekvenční oblasti.

Určitý integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt = S(0). \quad (3.41)$$

Důkaz plyne okamžitě z definičního integrálu pro spektrum $S(f)$, dosadíme-li $f = 0$. Analogicky, z definice inverzní transformace při $t = 0$ bychom dokázali i reciproční vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df = s(0).$$

Cvičení 3.9.1:

Pomocí výsledku cvičení 3.2.4 spočtěte integrál $\int_0^{\infty} \exp(-\alpha t)dt$.

Uveďme tuto integrální vlastnost do souvislosti s některými poznatky z předchozích podkapitol. Tak například operací konečná diference vznikne signál, jehož plocha pod křivkou je nulová, neboť při této operaci odčítáme vertikálně převrácený signál a tudíž příspěvky nad a pod osou t se vyruší. Spektrum konečné diference by tedy mělo být rovno nule na nulové frekvenci. A skutečně: spektrum konečné diference získáme z původního spektra přenásobením funkcí sinus, která je na nulové frekvenci nulová. Dalším příkladem je Fourierovská reálná lichá funkce $s(t)$, jejíž spektrum je imaginární lichou funkcí frekvence rovnou nule pro $f = 0$ ($S(f) = iB(f)$, $B(0) = 0$, viz odstavec 3.6). To odpovídá tomu, že integrál z liché (integrovatelné) funkce je roven nule.

Moment prvního řádu

Momentem prvního řádu, někdy též zvaným prvním momentem, rozumíme integrál $\int_{-\infty}^{\infty} ts(t)dt$. Je zřejmé, že ne pro všechny integrovatelné funkce $s(t)$ první moment existuje (záleží na tom, zda funkce $s(t)$ ubývá k $\pm\infty$ rychleji než $1/|t|$). Pokud však existuje, platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} ts(t)dt = \frac{i}{2\pi} S'(0),$$

kde S' představuje derivaci funkce S podle frekvence f . Důkaz je stejně jednoduchý jako v předcházejícím případě, pouze při něm použijeme vzorec pro první derivaci spektra (viz cvičení 3.8.9) při volbě $f = 0$.

Cvičení 3.9.2:

Pomocí výsledku cvičení 3.2.4 spočtěte integrál $\int_0^{\infty} t \exp(-\alpha t) dt$.

Můžeme tedy zjednodušeně říct, že velikost prvního momentu je dána sklonem spektra v okolí nulové frekvence.

Pro první moment spektra dostaneme reciproční vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f S(f) df = -\frac{i}{2\pi} s'(0).$$

Vzorec opět nezaručuje existenci daného integrálu.

Moment druhého řádu (setrvačnosti)

Momentem druhého řádu, někdy též zvaným druhým momentem nebo též momentem setrvačnosti, rozumíme integrál $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 s(t) dt$. Pokud tento integrál existuje (tj. $s(t)$ ubývá rychleji než t^{-2}), pak platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 s(t) dt = -\frac{1}{4\pi^2} S''(0),$$

kde S'' je druhá derivace spektra podle frekvence. Je tedy velikost momentu setrvačnosti dána křivostí spektra v okolí nulové frekvence. Vzorec je důsledkem vzorce pro druhou derivaci spektra (cvičení 3.8.9) při $f = 0$.

Cvičení 3.9.3:

Najděte druhý moment funkce $s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \exp(-\alpha t), & \alpha > 0, \quad t \geq 0 \end{cases}$. Využijte výsledku cvičení 3.2.4.

Recipročně, pro spektrální oblast dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S(f) df = \frac{1}{4\pi^2} s''(0).$$

Druhou derivací s'' se zde rozumí derivace podle času.

Nekonečný druhý moment jak v časové tak spektrální oblasti odpovídá nekonečné křivosti v bodě 0 v komplementární oblasti, tj. signalizuje existenci hrotu příslušné funkce v nule.

Momenty vyšších řádů

Analogicky, pro momenty vyšších řádů, pokud existují, máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n s(t) dt = \frac{i^n}{(2\pi)^n} S^{(n)}(0), \quad (3.42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^n S(f) df = -\frac{i^n}{(2\pi)^n} s^{(n)}(0),$$

kde horní index (n) značí n -tou derivaci podle příslušné proměnné.

Příklad:

Předpokládejme funkci $s(t)$, jejíž všechny momenty jsou konečné. Odvoďte vzorec pro její Fourierovu transformaci pomocí Taylorova rozvoje a vztahu (3.42).

Pro Taylorův rozvoj spektra (viz dodatek D.13) můžeme psát

$$\begin{aligned} S(f) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^{(k)}(0) f^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-i2\pi)^k f^k \int_{-\infty}^{\infty} t^k s(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-i2\pi t f)^k \right] s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi f t) s(t) dt, \end{aligned}$$

což je definiční vzorec pro Fourierovu transformaci. Poslední rovnost využívá součtu řady (D.13.2) pro $h = -i2\pi t f$. Poznamenejme, že uvedený příklad samozřejmě nepředstavuje striktní odvození vzorce pro Fourierovu transformaci (3.7), neboť platnost (3.42), nezbytná pro toto „odvození“, je právě důsledkem platnosti (3.7).

Těžiště (centroid)

Těžištěm funkce se většinou rozumí integrální výraz $\int_{-\infty}^{\infty} t s(t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$. Zavádí se pro něj speciální označení $\langle t \rangle$. Pokud je $s(t)$ nezáporná funkce představující například nějakou měřenou fyzikální veličinu, pak $\langle t \rangle$ může představovat souřadnici „největší koncentrace“ této veličiny $s(t)$. Fyzikálním pohledem: je-li např. $s(t)$ hustota podél nějaké tyče (t by v tom případě byla délková souřadnice), je $\langle t \rangle$ poloha těžiště této tyče.

Z výše uvedených integrálních vlastností (první moment a určitý integrál) okamžitě dostaneme

$$\langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t s(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt} = \frac{i}{2\pi} \frac{S'(0)}{S(0)}.$$

Cvičení 3.9.4:

Najděte těžiště funkce $s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \exp(-\alpha t), & \alpha > 0, \quad t \geq 0 \end{cases}$. Využijte výsledků cvičení 3.9.1 a 3.9.2.

Těžiště můžeme hledat i ve spektrální oblasti. Tam dostaneme

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f S(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df} = \frac{-i s'(0)}{2\pi s(0)}.$$

Je zřejmé, že tato definice těžiště funkce se hodí hlavně pro nezáporné funkce. Definici nelze použít pro signály, které mají určitý integrál ve jmenovateli roven nule (tj. pro jejichž spektrum je $S(0) = 0$). Podobně těžiště ve spektrální oblasti nelze podle této definice určovat v případě signálů, které jsou nulové v počátku.

Pro funkce, které nabývají záporných hodnot se proto používá alternativní definice pomocí kvadrátů modulů

$$\langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt},$$

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f |S(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}$$

Hned dodejme, že pro reálný signál $s(t)$ (což je velmi častý případ v praktických aplikacích) je těžiště spektra podle definice s kvadrátem vždy rovno 0. Spektrum je totiž hermitovskou funkcí frekvence a jeho modul je sudý.

S obdobnou ambiguitou definic, kdy se místo signálu uvažuje kvadrát jeho modulu, se setkáme i v dalších částech této podkapitoly (např. u pojmů variance a disperze apod.). Při práci s literaturou je třeba vždy ověřit, jakou definici těžiště má ten který autor na mysli. Poloha těžiště na souřadné ose vyjde totiž v obou případech obecně různá. Stejná by byla pouze v případě, že by signál byl zrcadlově symetrický vůči poloze svého těžiště.

Příklad:

Najděte těžiště funkcí $s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \exp(-\alpha t), & \alpha > 0, t \geq 0 \end{cases}$ a $s(t) = \exp(-\alpha|t|)$, $\alpha > 0$ (viz cvičení 3.2.4 a 3.2.5) a porovnejte hodnoty podle obou definic.

Těžiště jednostranné exponenciální funkce podle první definice jsme počítali v minulém cvičení: $\langle t \rangle = \frac{1}{\alpha}$. Kvadrát této exponenciální funkce je

$$|\exp(-\alpha t)|^2 = (\exp(-\alpha t))^2 = \exp(-2\alpha t) = \exp(-\beta t), \quad \beta = 2\alpha.$$

Je tedy poloha těžiště podle druhé definice $\langle t \rangle = \frac{1}{2\alpha}$

Naproti tomu oboustranná exponenciála má těžiště v obou případech v nule (čitatel je v obou případech nulový neboť se integruje lichá funkce).

I hodnotu těžiště podle druhé definice můžeme alternativně vyjádřit pomocí spektrálních hodnot. Musíme však uvažovat nikoliv spektrum samotného signálu, ale spektrum kvadrátu

jeho modulu $\mathcal{F}(|s(t)|^2)$ (Pozor: to se nerovná amplitudovému spektru $|S(f)|^2$).

$$\langle t \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} = \frac{i}{2\pi} \frac{\left. \frac{d}{df} \mathcal{F}(|s(t)|^2) \right|_{f=0}}{\left. \mathcal{F}(|s(t)|^2) \right|_{f=0}}.$$

Tedy např. pro oboustrannou exponenciálu máme

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \frac{i}{2\pi} \frac{\left. \frac{d}{df} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi f^2} \right|_{f=0}}{\left. \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi f^2} \right|_{f=0}} \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{\left. \frac{-2\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi f^2)^2} 8\pi f \right|_{f=0}}{\left. \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi f^2} \right|_{f=0}} = 0. \end{aligned}$$

Analogicky pro těžiště kvadrátu, kde bychom pouze α nahradili 2α .

Ve spektrální oblasti se také můžeme vyhnout výpočtu těžiště přímo vyčíslováním integrálů v druhé definici. I zde můžeme alternativně využít hodnoty inverzní transformace výkonového spektra a její derivace v nule. Inverzní transformací výkonového spektra je autokorelační funkce. Platí tedy

$$\langle f \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f |S(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df} = \frac{-i (s \star s)'(0)}{2\pi (s \star s)(0)}.$$

Srovnáme-li formálně těžiště v časové a spektrální oblasti v obou definicích, vidíme, že narozdíl od první definice si ve druhé definici integrované hodnoty v obou oblastech vzájemně neodpovídají z hlediska Fourierovy transformace (kvadrát modulu v časové oblasti a výkonové spektrum tvoří Fourierův pár). Naproti tomu, v případě druhé definice je výraz ve jmenovateli zlomku identický v časové i spektrální oblasti v důsledku Rayleighova teorému.

Čtverec poloměru setrvačnosti (střední kvadratická odchylka)

Název střední kvadratická odchylka se používá zejména v oblasti zpracování dat. Příslušná hodnota se značí $\langle t^2 \rangle$ a je definována vztahem $\langle t^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s(t) dt$. Tuto hodnotu lze vyjádřit pomocí spektra signálu $s(t)$ a druhé derivace tohoto spektra na nulové frekvenci, neboť se jedná o podíl druhého momentu a určitého integrálu:

$$\langle t^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 s(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt} = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{S''(0)}{S(0)}.$$

Cvičení 3.9.5:

Najděte střední kvadratickou odchylku funkce $s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \exp(-\alpha t), & \alpha > 0, \quad t \geq 0 \end{cases}$. Využijte výsledků cvičení 3.9.1 a 3.9.3.

Příklad:

Najděte střední kvadratickou odchylku konvoluce dvou signálů $x * y$.

V čitateli dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^2(x(t) * y(t))dt &= -\frac{1}{4\pi^2}(X(f)Y(f))'' \Big|_{f=0} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}(X''(f)Y(f) + 2X'(f)Y'(f) + X(f)Y''(f)) \Big|_{f=0}, \end{aligned}$$

zatímco ve jmenovateli bude

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x(t) * y(t))dt = X(f)Y(f) \Big|_{f=0}.$$

Celkem tedy máme

$$\langle t^2 \rangle_{x*y} = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{X''(f)}{X(f)} + \frac{Y''(f)}{Y(f)} + 2\frac{X'(f)Y'(f)}{X(f)Y(f)} \right) \Big|_{f=0} = \langle t^2 \rangle_x + \langle t^2 \rangle_y + 2\langle t \rangle_x \langle t \rangle_y.$$

Je-li těžiště aspoň jedné z funkcí v počátku, pak je dokonce střední kvadratická odchylka konvoluce rovna součtu středních kvadratických odchylek konvoluovaných funkcí: $\langle t^2 \rangle_{x*y} = \langle t^2 \rangle_x + \langle t^2 \rangle_y$.

Střední kvadratická odchylka se někdy používá jako míra šířky signálu. Hodí se zejména pro funkce centrované k počátku a takové, které nemají plochu pod křivkou rovnou nule. Signál s větší hodnotou střední kvadratické odchylky chápeme v tomto smyslu jako „širší“.

Analogicky můžeme zavést také střední kvadratickou odchylku spektra

$$\langle f^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S(f)df}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{s''(0)}{s(0)}.$$

Jako míra šířky spektra je nevhodná pro signály necentrovány k počátku (neb na volbě počátku závisí její hodnota) a pro signály nulové v počátku je nedefinovaná.

Variance

Variance se standardně značí σ^2 a představuje střední kvadratickou odchylku vztaženou k centroidu

$$\sigma_{s(t)}^2 = \langle (t - \langle t \rangle)^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 s(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt} = \langle t^2 \rangle - 2 \langle t \rangle \langle t \rangle + \langle t \rangle^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2.$$

Z výše uvedených vzorců snadno odvodíme, že varianci lze vyjádřit pomocí spektra jako

$$\sigma_{s(t)}^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{S''(0)}{S(0)} + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{S'(0)}{S(0)} \right)^2.$$

Zajímavé je opět zmínit vztah ke konvoluci. Jelikož těžiště konvoluce je součtem těžišť obou konvoluovaných funkcí¹³, je variance konvoluce rovna součtu variancí daných dvou funkcí.

I variance někdy slouží jako míra šířky signálu, opět však selhává pro signály, pro které je $S(0) = 0$. Řada signálů má také nekonečnou varianci, zatímco jiné míry šířky jsou konečné. Rozhodně tedy nelze tuto míru šířky doporučit univerzálně.

Obdobně bychom mohli zavést varianci spektra $\sigma_{S(f)}^2$ a používat ji jako míru šířky spektra.

Cvičení 3.9.6:

Určete varianci funkce $s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \exp(-\alpha t), & \alpha > 0, t \geq 0 \end{cases}$. Využijte výsledků cvičení 3.9.4 a 3.9.5.

Další používanou mírou šířky je odmocnina z variance, σ , někdy též nazývaná směrodatná odchylka nebo standardní odchylka. Jak varianci, tak směrodatnou odchylku můžeme zavést i ve spektrální oblasti.

Ekvivalentní šířka

Další mírou šířky signálu, opět vhodnou pro nezáporné signály centrované k počátku a takové, které nemají $S(0) = 0$ je tzv. ekvivalentní šířka. Jedná se o integrální výraz

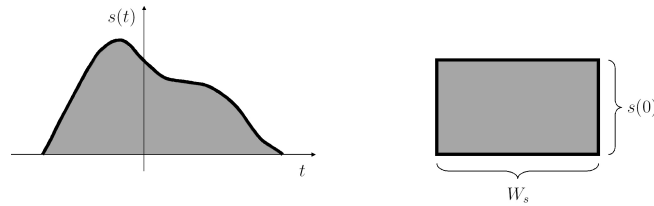
$$W_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt}{s(0)}.$$

Hodnota W_s představuje šířku obdélníka, který má plochu stejnou jako je plocha vymezená signálem $s(t)$ a výšku rovnou hodnotě $s(0)$, viz názorný obrázek 3.16.

Analogicky, ekvivalentní šířka signálu ve spektrální oblasti je dána výrazem

$$W_S = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df}{S(0)}.$$

¹³Jak snadno odvodíme v analogii k předcházejícímu příkladu, kde pouze v čitateli bude vystupovat výraz pro první derivaci spektra konvoluce namísto derivace druhé.



Obrázek 3.16: Ilustrace významu ekvivalentní šířky – šedé plochy jsou si rovny.

Jak vidíme z definičních vztahů, v časové oblasti nelze tuto míru šířky použít pro signály, jejichž hodnota je v počátku rovna nule a ve spektrální oblasti pro spektra, pro která je $S(0) = 0$, čemuž odpovídá nulový určitý integrál od $-\infty$ do ∞ v časové oblasti.

Pro ekvivalentní šířku signálu v časové a spektrální oblasti platí důležitý vztah, nazývaný **princip neurčitosti**.

$$W_s = \frac{S(0)}{s(0)} = \frac{S(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df} = \frac{1}{W_S} \Rightarrow W_s W_S = 1.$$

Je-li součin ekvivalentních šířek signálu a jeho spektra konstantní, znamená to, že nemůžeme nikdy docílit libovolně úzkého spektra a zároveň úzkého signálu v časové oblasti. Jakékoliv zúžení signálu je vykoupeno rozšířením jeho spektra a naopak. Přitom je jedno, jakým způsobem se rozšíření/zúžení signálu či naopak jeho spektra dosáhne (změnou měřítka, oříznutím, filtrací, konvolucí apod.). Princip neurčitosti má svoje nepříjemné důsledky pro numerické vyčíslování signálu z jeho spektra nebo naopak spektra ze signálu v čase, neboť numerické úsilí ušetřené zúžením signálu v jedné oblasti je kompenzováno zvýšenými numerickými náklady v oblasti komplementární.

Přestože koncept ekvivalentní šířky je poměrně názorný, neodráží často tato míra šířky naše intuitivní očekávání, neboť není příliš citlivá na rychlost ubývání signálu či spektra. Například řada signálů, se kterými jsme se již v těchto skriptech setkali, má překvapivě stejnou ekvivalentní šířku. Pro příklad použijme obrázky 3.15 a 3.14 (sloužící původně k jinému účelu). Tak např. z obrázku 3.15 je zřejmé, že ekvivalentní šířky $\text{sinc}_\pi(f)$ a $|\text{sinc}_\pi(f)|^2$ musí být stejné a navíc rovné šířce pravoúhelníkové funkce v levé části obrázku (je to důsledek Rayleighova teorému a principu neurčitosti). Obrázek 3.14 ukazuje rovnost ekvivalentních šířek $\text{sinc}_\pi(f)$ a $|\text{sinc}_\pi(f)|^2$ dokonce bez evokace Rayleighova teorému – pouze z rovnosti šířky pravoúhelníkové a trojúhelníkové funkce (stejná plocha a stejná hodnota v nule) a principu neurčitosti. Sloučením informace obsažené v obou obrázcích tedy můžeme konstatovat, že všechny čtyři funkce na obr. 3.14 mají stejnou ekvivalentní šířku.

Jak již bylo řečeno, ekvivalentní šířka má řadu nevýhod. Jednou z hlavních je to, že závisí na volbě počátku, která je však ve většině aplikací v zásadě libovolná anebo je určena nějakými vnějšími okolnostmi. Signál, který je například posunut vůči počátku tak, že v počátku má malou hodnotu, zatímco jinde nabývá výrazně vyšších hodnot, bude mít relativně velkou ekvivalentní šířku. Signál s maximální hodnotou v počátku bude mít naopak relativně nejmenší ekvivalentní šířku. Při vzájemném srovnávání různých signálů z hlediska šířky je toto třeba mít na paměti. Nevýhodu citlivosti na volbu počátku odstraňuje alternativní možnost pro zavedení ekvivalentní

šířky, a sice tzv. **autokorelační šířka**, což je ekvivalentní šířka autokorelace

$$W_{s \star s} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \star s(t) dt}{[s(t) \star s(t)]_{t=0}}.$$

Díky (3.41) můžeme autokorelační šířku psát alternativně jako

$$W_{s \star s} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s(\tau)} d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \overline{s(\tau)} d\tau}.$$

Ve jmenovateli je tedy hodnota autokorelace v bodě 0, která je vždy maximální bez ohledu na eventuální posun samotné autokorelované funkce vůči časovému počátku (viz dodatek D.18). Pro některé signály, např. pro pravoúhelníkovou funkci, jejíž autokorelací je trojúhelníková funkce se stejnou plochou pod křivkou a stejnou hodnotou v nule, je autokorelační šířka rovna ekvivalentní šířce. Pro většinu signálů je však autokorelační šířka větší než šířka ekvivalentní a nemá tak názorný „geometrický“ význam vztahující se k danému signálu. Pro účely relativního porovnávání šířky různých signálů je však vyhovující.

Jak víme z odstavce 3.8, spektrem autokorelace je výkonové spektrum. Ve spektrální oblasti je tedy autokorelační šířka dána výrazem

$$W_{|S|^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{|S(0)|^2}.$$

Stejně jako ekvivalentní šířka, ani tato šířka spektra není definována pro signály, pro jejichž spektrum je $S(0) = 0$. Pro ostatní signály platí princip neurčitosti ve tvaru

$$W_{s \star s} W_{|S|^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (s \star s)(t) dt}{(s \star s)(0)} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{|S(0)|^2} = \frac{|S(0)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}{|S(0)|^2} = 1.$$

Disperze

Další možností jak oceňovat šířku signálu je tzv. časová disperze Δt v časové oblasti a frekvenční disperze Δf ve spektrální oblasti. Jsou definovány pomocí vztahů

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}$$

a

$$(\Delta f)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f - \langle f \rangle)^2 |S(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}.$$

Opět poznamenejme, že pro reálné signály $s(t)$ se vzorec pro frekvenční disperzi zjednoduší, neboť těžiště $\langle f \rangle$ je rovno nule.

Z definičních vztahů vidíme, že kvadrát disperze je vlastně roven varianci kvadrátu modulu signálu, popřípadě spektra, tedy samotná disperze představuje směrodatnou odchylku kvadrátu modulu, $\Delta t = \sigma_{|s(t)|^2}$, $\Delta f = \sigma_{|S(f)|^2}$.

Pro časovou a frekvenční disperzi platí, že jejich součin nemůže klesnout pod jistou konstantní hodnotu:

Věta (Princip neurčitosti pro časovou a frekvenční disperzi):

Jestliže Δt je časová disperze funkce $s(t) \neq 0$ takové, že $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{|t|}s(t) = 0$, a Δf frekvenční disperze jejího spektra $S(f)$, pak pro jejich součin platí

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (3.43)$$

Rovnost platí pouze pro Gaussovu funkci $s(t) = C \exp(-\alpha(t - t_0)^2)$, $\alpha > 0$, $C \neq 0$.

Frekvenční disperzi můžeme definovat též pro úhlovou frekvenci, $\Delta \omega = 2\pi \Delta f$. Princip neurčitosti pak zapíšeme jako $\Delta t \Delta \omega \geq 1/2$.

Důkaz:

Podle předpokladu věty je $s(t)$ nenulová funkce a proto nemůže být ani časová ani frekvenční disperze rovna nule. Pokud by alespoň jedna z disperzí byla rovna ∞ , nerovnost (3.43) je samozřejmě splněna. Při důkazu se tedy zaměříme na signály s konečnými disperzemi. Z definičních vztahů vidíme, že jak časová, tak frekvenční disperze jsou invariantní vůči posunutí signálu (posunutí spektra), tj. nezávislé na volbě počátku na časové resp. frekvenční ose. Bez újmy obecnosti můžeme tedy pro zjednodušení důkazu předpokládat, že jak $\langle t \rangle$ tak $\langle f \rangle$ jsou rovny nule¹⁴.

Budeme uvažovat součin

$$(\Delta t)^2 (\Delta f)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |S(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df}. \quad (3.44)$$

Z Rayleighova teorému plyne, že výrazy ve jmenovateli obou zlomků jsou si rovny

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt.$$

Z odstavce 3.8 víme, že spektrum derivace je $\mathcal{F}(s'(t)) = i2\pi f S(f)$; pro kvadrát modulu tedy máme

$$|\mathcal{F}(s'(t))|^2 = i2\pi f S(f) \cdot (-i)2\pi f \overline{S(f)} = 4\pi^2 f^2 |S(f)|^2.$$

¹⁴Případná změna počátku na souřadné ose zde neovlivní disperzi signálu/spektra, měla by však vliv např. na jeho symetrii, jeho ekvivalentní šířku apod.

Rayleighův teorém pro derivaci nám tedy umožňuje přepsat čítelel druhého zlomku v (3.44)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 |S(f)|^2 df = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |s'(t)|^2 dt$$

Součin kvadrátů disperzí (3.44) je tedy

$$(\Delta t)^2 (\Delta f)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t(s(t))(\overline{ts(t)})) dt \int_{-\infty}^{\infty} s'(t) \overline{s'(t)} dt}{4\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt \right)^2}.$$

V důsledku Schwarzovy nerovnosti ve tvaru (D.12.3) dostaneme

$$\begin{aligned} (\Delta t)^2 (\Delta f)^2 &\geq \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} (ts(t) \overline{s'(t)} + \overline{ts(t)} s'(t)) dt \right)^2}{16\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt \right)^2} \\ &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} t \frac{d}{dt} (s(t) \overline{s(t)}) dt \right)^2}{16\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt \right)^2}. \end{aligned}$$

Integrál v čitateli vyjádříme metodou per partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \frac{d}{dt} (s(t) \overline{s(t)}) dt = [ts(t) \overline{s(t)}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt,$$

Poslední rovnost je důsledkem toho, že člen v hranatých závorkách musí být roven nule podle předpokladu dokazované věty.

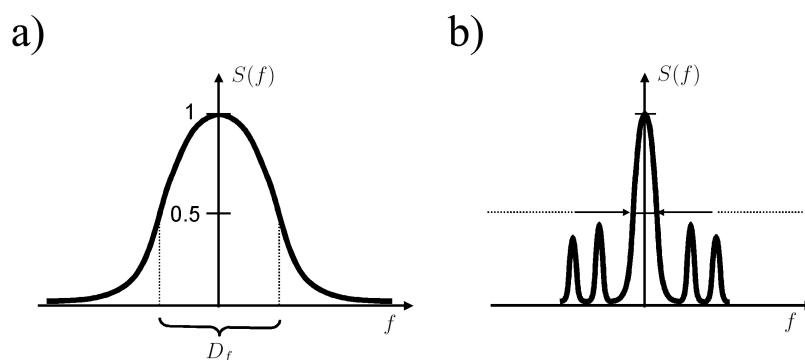
Celkem tedy dostáváme

$$(\Delta t)^2 (\Delta f)^2 \geq \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt \right)^2}{16\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{s(t)} dt \right)^2} = \frac{1}{16\pi^2} \Rightarrow \Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}, \quad \text{c.b.d.}$$

Princip neurčitosti se netýká pouze disperze nebo ekvivalentní (či autokorelační) šířky. Obdobné nerovnosti (resp. rovnosti) svazující součin šířky signálu a spektra s nějakou konstantou, která buď je tomuto součinu přímo rovna nebo jej omezuje zdola, platí pro všechny míry šířky signálu/spektra diskutované v tomto odstavci, jakož i všechny další, zde neuváděné. Princip neurčitosti je obecnou vlastností Fourierovy transformace a jednotlivé konkrétní formulace tohoto principu se liší pouze formálně – velikostí zmíněné konstanty.

Jak již bylo řečeno, existuje velmi mnoho různých způsobů jak kvantifikovat šířku signálu (nebo spektra). Mají své výhody i nevýhody, většinou jsou vhodné jen pro určitý typ signálů

a pro jiné signály nejsou použitelné. Univerzální míra šířky vhodná pro všechny typy signálů neexistuje. Vždy je třeba zvážit také konkrétní účel, pro který chceme šířku kvantifikovat. V některých aplikacích postačí mnohem hrubší a robustnější odhad šířky než ty, zavedené v tomto odstavci. Velmi rozšířeným způsobem je například měřit šířku spektra v polovině výšky maxima. Příslušná šířka D_f je tedy vzdálenost dvou frekvencí v okolí převládající frekvence, ve kterých amplituda dosahuje poloviny maximální hodnoty, viz obrázek 3.17a. Tuto šířku je možné odčítat i na výkonovém spektru (které zdůrazňuje frekvenční maxima). Někdy na amplitudovém spektru odečítáme v jiné výšce než je polovina maxima, např. ve výšce $S_{max}(f)/\sqrt{2} \approx 0.7S_{max}(f)$, což právě odpovídá polovině výšky výkonového spektra. V každém případě tento způsob měření šířky není vhodný pro signály s více maximy, zejména pokud vedlejší maxima nedosahují poloviny maxima hlavního (obrázek 3.17b).



Obrázek 3.17: Ilustrace šířky měřené v polovině maximální hodnoty. Typ signálu vhodný (a) a nevhodný (b) pro měření šířky tímto způsobem.

3.10 Vlastnosti Fourierovy transformace – ubývání spektra.

Uveďme tento odstavec známým Riemann-Lebesgueovým lemmatem. Můžeme jej formulovat například takto:

Věta (Riemann-Lebesgueovo lemma):

Jestliže je funkce $f(t) \in L_1(a, b)$, pak pro reálné α platí

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \exp(i\alpha t) dt = 0.$$

Důkaz tohoto známého lemmatu je možno najít v mnoha učebnicích matematické analýzy nebo například v knize Kadlec & Kufner (1969). Pro nás je důležité, že lemma platí i pro neomezené intervaly, tedy i pro funkce $f(t) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Označíme-li $s(t) = f(t)$ a $\alpha = -2\pi f$, plyne z Riemann-Lebesgueova lemmatu, že Fourierovo spektrum $S(f)$ ubývá pro frekvence blížíící se $\pm\infty$ ¹⁵:

$$\lim_{|f| \rightarrow \infty} S(f) = \lim_{|f| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i2\pi ft) dt = 0. \quad (3.45)$$

Lemma však neříká nic o tom, jak rychle spektrum s rostoucí frekvencí ubývá. Právě tato otázka je však klíčová v praktických aplikacích, kde potřebujeme spektrum vyčíslvat numericky. Při numerickém výpočtu nelze uvažovat interval $(-\infty, \infty)$, ale vždy se musíme omezit na nějaký konečný interval. Ubývá-li spektrum s rostoucí frekvencí rychleji, je větší šance, že se tímto „oříznutím“ dopustíme menší chyby.

Rychlost ubývání spektra úzce souvisí s hladkostí signálu v časové oblasti. Zjednodušeně řečeno, čím je signál hladší, tím rychleji jeho spektrum ubývá. Přitom hladkost funkce se posuzuje počtem jejích spojitých derivací — funkci mající spojitých n prvních derivací nazveme hladkou řádu n . Nespojitost v samotné funkci (např. u pravoúhelníkové funkce) se chápe jako nespojitost 0-té derivace; takovou funkci budeme pro účely dalšího výkladu označovat jako hladkou řádu -1.

O ubývání spektra platí důležitá věta:

Věta (O asymptotickém chování Fourierova spektra):

Jestliže je signál $s(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, spojitou funkcí včetně svých $n - 1$ derivací ($n \geq 1$) a jeho n -tá derivace $s^{(n)}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, pak $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$ ubývá při $|f| \rightarrow \infty$ alespoň jako $|f|^{-(n+1)}$, tj.

$$\lim_{|f| \rightarrow \infty} |f|^n S(f) = 0.$$

Důkaz:

Je-li $s^{(n)}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$, pak existuje její Fourierovo spektrum a podle Riemann-Lebesgueova lemmatu je limita tohoto spektra při $|f| \rightarrow \infty$ rovna 0. Spektrum n -té derivace je podle (3.34)

$$\mathcal{F}(s^{(n)}(t)) = (i2\pi f)^n S(f).$$

Limita tohoto výrazu při $|f| \rightarrow \infty$ tedy musí být 0. V důsledku toho i

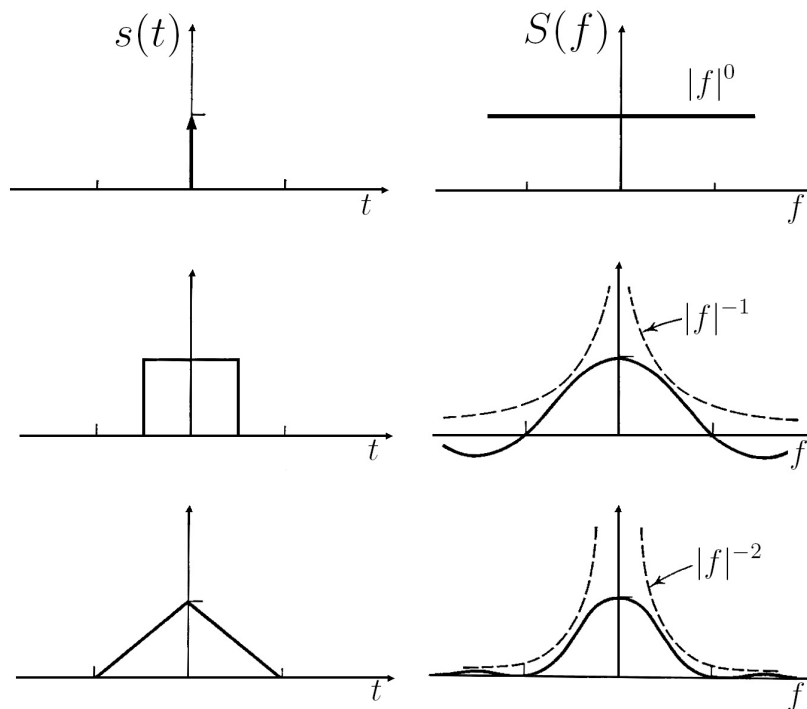
$$\lim_{|f| \rightarrow \infty} |f|^n S(f) = 0, \quad \text{c.b.d.}$$

Poznamenejme, že v důkazu jsme potřebovali absolutní integrovatelnost n -té derivace pouze kvůli existenci jejího spektra. Pokud zobecníme naše úvahy i na signály, které nejsou Fourierovské standardního typu, můžeme podmínku absolutní integrovatelnosti prostě nahradit podmínkou

¹⁵V praxi většinou pracujeme se signály primárně zadanými na konečném intervalu a rozšířenými na celý definiční obor doplněním nulami. Takové signály většinou patří i do třídy $L_2(-\infty, \infty)$ a ubývání spektra v tom případě plyne i z Rayleighova teorému, podobně jako jsme ubývání koeficientů Fourierovy řady odvodili z Parsevalovy rovnosti. Ostatně pro signály patřící do obou tříd (L_1 a L_2) je ubývání Fourierova (spojitého) spektra také dáno vztahem (3.11) a ubýváním Fourierových koeficientů.

existence spektra. Takovou podmínku pak budou splňovat i speciální signály probírané v odstavci 3.5.

Z výše uvedeného je zřejmé, že například pravoúhelníková funkce, která je dle naší terminologie hladká řádu -1 , má Fourierovo spektrum (funkce sinc) ubývající alespoň jako $|f|^{-1}$. Spektrum trojúhelníkové funkce (kvadrát funkce sinc), která je hladká řádu 0 (první derivace je nespojitá), ubývá jako $|f|^{-2}$, apod. Pro snadnější zapamatování přeformulujme výše uvedenou větu do jednoduchého pravidla: obsahuje-li k -tá derivace signálu δ -funkci (tj. $(k-1)$ -ní derivace je nespojitá a $(k-2)$ -há derivace obsahuje hrot), pak spektrum tohoto signálu ubývá jako $|f|^{-k}$ při $|f| \rightarrow \infty$. Toto pravidlo můžeme použít rovněž na speciální signály, jejichž Fourierovu transformaci jsme zavedli v odstavci 3.5. Pro ilustraci tohoto pravidla může dobře posloužit obrázek 3.18.



Obrázek 3.18: Asymptotické chování Fourierova spektra některých signálů (podle Bracwella, 1978): δ -funkce (nahore), pravoúhelníkové funkce (uprostřed) a trojúhelníkové funkce (dole).

Uvedenému pravidlu vyhovuje i Gaussova funkce ($\exp(-\pi t^2)$), jejímž spektrem je opět Gaussova funkce ($\exp(-\pi f^2)$). Gaussova funkce je spojitá včetně všech svých derivací. Ve spektrální oblasti Gaussova funkce ubývá rychleji než libovolná inverzní mocnina frekvence.

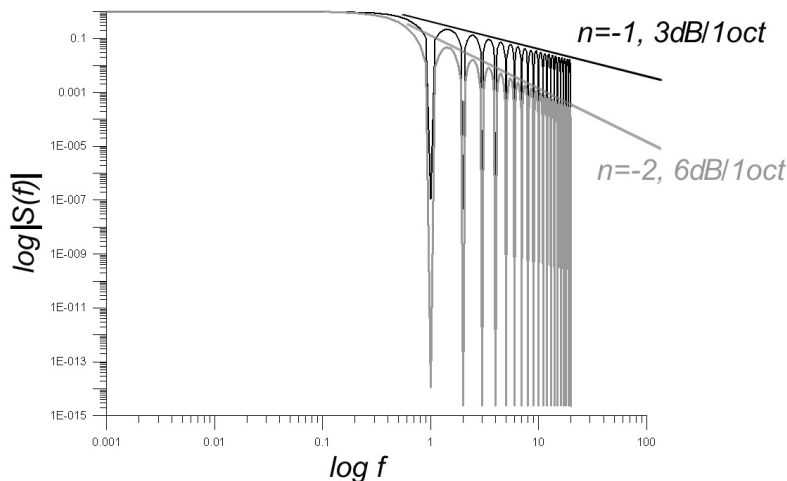
Jak známo, operace konvoluce $s(t)$ s nějakou jinou funkcí (různou od δ -funkce) vede k vyhlazení původního signálu. Speciálním příkladem byla operace „klouzavý průměr“ diskutovaná v odstavci 3.8. Vysvětlení je jednoduchým důsledkem zde probírané vlastnosti Fourierovy transformace. Předpokládejme konvoluci funkce f_1 , hladké řádu $k-2$, s funkcí f_2 , hladké řádu $m-2$. Spektrum $F_1(f) = \mathcal{F}(f_1(t))$ ubývá jako $|f|^{-k}$, zatímco spektrum $F_2(f) = \mathcal{F}(f_2(t))$ ubývá jako $|f|^{-m}$. Spektrum konvoluce $F_1 F_2 = \mathcal{F}(f_1(t) * f_2(t))$ pak ubývá jako $|f|^{-(k+m)}$. To znamená, že konvoluce v časové oblasti je hladká řádu $(k+m)-2$, je tedy hladší než původní funkce f_1 a f_2 .

Rychlost ubývání spektra se nejlépe posuzuje v tzv. log-log reprezentaci. Jedná se o grafické znázornění amplitudového spektra, kdy na vodorovné ose vynášíme $\log(f)$ místo f a na svislé

ose $\log(|S(f)|)$ místo $|S(f)|$. V této reprezentaci je pak ubývání spektra dáno sklonem (směrnicí) přímky ohraničující spektrum shora. Ubývá-li totiž spektrum s rostoucí frekvencí jako f^{-n} , je

$$\frac{d \log(|S(f)|)}{d \log(f)} = -n.$$

V souvislosti s logaritmickými osami se někdy používá tradiční terminologie, která má původ ve sdělovací technice. Tak například frekvenční rozsah se určuje v oktávách a dekádách. Rozsah jedné oktávy odpovídá nárůstu frekvence na dvojnásobek, $f \rightarrow 2f$, tedy např. z 2 na 4 Hz, nebo z 10 na 20 Hz. Jedna dekáda pak odpovídá nárůstu frekvence na desetinásobek, $f \rightarrow 10f$. Frekvenční rozsah 1 – 100 Hz tedy představuje rozsah 2 dekád. Rozsah 1 – 1000 Hz odpovídá 3 dekádám nebo též přibližně 10 oktávám ($2^{10} = 1024$). Rozsah na vertikální ose určujeme v decibelech (dB) definovaných jako $10 \log_{10}(|S(f)|^2/|S(f)|_{ref}^2) = 20 \log_{10}(|S(f)|/|S(f)|_{ref})$, kde $|S(f)|_{ref}$ představuje referenční hodnotu amplitudového spektra vůči níž nárůst amplitudy poměrujeme. Nárůstu amplitudy výkonového spektra na dvojnásobek, $|S(f)|^2 \rightarrow 4|S(f)|^2$, odpovídají přibližně 3 dB, neboť $\log_{10}(2) \approx 0.3$. Nárůst z hodnoty 0.001 na 1.024, tj. 2^{10} -krát, představuje přibližně 30 dB, apod. Spád spektra pravoúhelníkové funkce je tedy (v log-log spektru směrnice -1) 3 dB na oktávu. Naproti tomu spád spektra trojúhelníkové funkce (v log-log spektru směrnice -2) odpovídá 6 dB na oktávu nebo též 20 dB na dekádu (viz obrázek 3.19).



Obrázek 3.19: Ubývání amplitudového spektra pravoúhelníkové funkce $|\mathcal{F}(\Pi(f))| = |\text{sinc}_\pi(f)|$ (černě) a spektra trojúhelníkové funkce $|\mathcal{F}(\Lambda(f))| = |\text{sinc}_\pi(f)|^2$ (šedě) v log-log reprezentaci.

Závěrem tohoto odstavce poznamenejme, že z důvodů reciprocity Fourierovy transformace (vlastnost (3.26)) můžeme naopak z rychlosti ubývání signálu v časové oblasti při $|t| \rightarrow \infty$ usoudit na hladkost jejího spektra.

3.11 Časově a frekvenčně omezené sinály

Termín časově či frekvenčně omezený signál jsme již v tomto kurzu několikrát použili, přičemž jsme se spoléhali na intuitivní pochopení významu těchto pojmů. Tyto sinály se vyskytují v řadě praktických aplikací. Je to dáno jistými limity zařízení, kterými signál generujeme, měříme,

případně zpracováváme – měříme například pouze v určitém omezeném časovém intervalu, registrační zařízení má omezený frekvenční rozsah apod. Časově (frekvenčně) omezené signály mají zajímavé vlastnosti a splňují různé důležité teoremy, z nichž některé budou zmíněny v tomto odstavci. Z nich nejdůležitější (z hlediska praktických aplikací) je teorem Paley-Wienerův. Pro účely následujícího výkladu zdefinujeme nejprve přesně, co budeme rozumět časově (frekvenčně) omezeným signálem.

Definice:

Časově omezeným signálem nazveme signál $s(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, $t \in R$ (proměnná v časové oblasti), pro který existuje $\tau < \infty$ takové, že

$$s(t) = 0 \quad \text{pro} \quad |t| > \tau.$$

Frekvenčně omezeným signálem nazveme signál $s(t) \in L_2(-\infty, \infty)$, $t \in R$, pro který existuje $\sigma < \infty$ takové, že

$$S(f) = \mathcal{F}(s(t)) = 0 \quad \text{pro} \quad |f| > \sigma.$$

Připomeňme, že podmínka $s(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ znamená

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

Integrálnímu výrazu ve výše uvedené rovnici se někdy říká energie signálu – signály z $L_2(-\infty, \infty)$ mají tedy na množině R konečnou energii. Z Rayleighova teoremu okamžitě dostaneme, že i jejich spektra mají konečnou energii (ve spektrální oblasti):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df < \infty.$$

V definici frekvenčně omezeného signálu bychom tedy mohli namísto podmínky $s(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ alternativně požadovat $S(f) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Následující výklad se bude týkat frekvenčně omezených signálů. Ze symetrie (reciprocity) Fourierovy transformace je zřejmé, že dále uváděná tvrzení mají své „protějšky“ pro časově omezené signály.

V případě frekvenčně omezeného signálu se zjednodušuje výraz pro inverzní Fourierovu transformaci – signál z $L_2(-\infty, \infty)$ integruje se v konečných mezích

$$s(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} S(f) \exp(i2\pi ft) df.$$

V důsledku toho dostáváme, že spektrum frekvenčně omezeného signálu musí být absolutně integrovatelné (tj. $S(f) \in L_1(-\infty, \infty)$)

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |S(f)| df < \infty.$$

Důkaz plyne okamžitě ze Schwarzovy nerovnosti (dodatek D.12, rovnice (D.12.2)):

$$\left| \int_{-\sigma}^{\sigma} |S(f)| df \right|^2 \leq 2\sigma \int_{-\sigma}^{\sigma} |S(f)|^2 df = 2\sigma E,$$

kde E jsme označili konečnou energii signálu (spektra).

Frekvenčně omezený signál patří do třídy tzv. funkcí exponenciálního typu. Říkáme, že funkce $f(z)$ komplexní (ve speciálním případě reálné) proměnné z je funkcí exponenciálního typu A , existují-li dvě kladné konstanty C a A takové, že

$$|f(z)| \leq C \exp(A|z|).$$

Konkrétně, pro frekvenčně omezený signál platí věta

Věta (O exponenciálním typu frekvenčně omezeného signálu):

Frekvenčně omezený signál $s(t)$ s hraniční frekvencí σ a konečnou energií E splňuje podmínku

$$|s(t)| \leq \sqrt{2\sigma E} \exp(2\pi\sigma|t|).$$

Důkaz:

Jelikož nenulových hodnot spektrum dosahuje pouze pro $|f| \leq \sigma$, můžeme pro exponenciální faktor v integrandu inverzní Fourierovy transformace psát

$$|\exp(i2\pi ft)| \leq \exp(2\pi\sigma|t|)$$

a proto $|s(t)|$ můžeme shora odhadnout jako

$$|s(t)| \leq \int_{-\sigma}^{\sigma} |S(f) \exp(-i2\pi ft)| df \leq \exp(2\pi\sigma|t|) \int_{-\sigma}^{\sigma} |S(f)| df \leq \sqrt{2\sigma E} \exp(2\pi\sigma|t|), \quad \text{c.b.d.}$$

Dá se také snadno dokázat (viz např. Papoulis, A: Signal Analysis, McGraw-Hill, 1984), že frekvenčně omezený signál je celistvou funkcí, tj. funkcí holomorfní v každém bodě celé komplexní roviny při rozšíření proměnné t do komplexního oboru. Termín holomorfní znamená, že funkce je komplexně diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru. Funkce, která je jejím zúžením na reálnou osu je pak nekonečněkrát diferencovatelná v reálném oboru a lze ji rozvinout do Taylorova rozvoje (dodatek D.13).¹⁶

Dosavadní výklad lze shrnout do jednoduchého tvrzení: Je-li signál s konečnou energií frekvenčně omezený, pak je celistvou funkcí exponenciálního typu (přesněji řečeno jejím zúžením na reálnou osu). Následující věta zahrnuje i opačnou implikaci:

¹⁶Holomorfní funkce se někdy nazývají též analytické. Zde však dáme přednost pojmu holomorfní, abychom předešli záměně s termínem „analytický signál“, viz odstavec 3.13.

Věta (Paley-Wienerův teorém):

Signál $s(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ (tj. signál s konečnou energií) je frekvenčně omezený, tj. jeho Fourierova transformace existuje a platí, že $S(f) = \mathcal{F}(s(t)) = 0$ pro $|f| > \sigma$ právě tehdy, když $s(t)$ je zúžením celistvé funkce exponenciálního typu $2\pi\sigma$ na reálnou osu.

Důkaz netriviální části tohoto tvrzení (tj., že každé zúžení celistvé funkce exponenciálního typu představuje frekvenčně omezený signál s konečnou energií) lze opět najít například v knize Papoulis, A: Signal Analysis, McGraw-Hill, 1984. Jak už bylo řečeno, analogická ekvivalence platí i pro komplementární oblast, tj. spektrum s konečnou energií je spektrem časově omezeného signálu (nulového mimo interval $(-\tau, \tau)$) právě tehdy, když je zúžením celistvé funkce exponenciálního typu $2\pi\tau$ na reálnou osu.

Paley-Wienerův teorém má zásadní důsledky pro praktické aplikace zejména pokud jde o případný výskyt tzv. efektu alias (překrývání) při periodizaci signálu. Znamená totiž, že platí ekvivalence mezi konečným nosičem v jedné oblasti a celistvostí signálu exponenciálního typu v komplementární oblasti. To mimo jiné znamená, že žádný signál nemůže být zároveň časově i frekvenčně omezený. O celistvých funkcích je totiž známo, že jsou-li nulové na nějakém intervalu, musí být nulové všude. Každý časově omezený signál má tedy vždy spektrum s neomezeným nosičem a každé frekvenčně omezené spektrum je spektrem signálu s neomezeným nosičem v časové oblasti (viz např. Fourierův pár $\text{sinc}_\pi(f) = \mathcal{F}(\Pi(t))$). Jedná se o jakousi další formu principu neurčitosti ve spektrální analýze.

3.12 Hilbertova transformace a spektrum kauzálních funkcí

Ve spektrální analýze nás často zajímá vztah mezi reálnou a imaginární částí spektra. Pro tzv. kauzální signály (viz dále) je tento vztah dán Hilbertovou transformací, a proto jí věnujeme tento odstavec. Hilbertova transformace také umožňuje definovat tzv. analytické signály (viz odstavec 3.13). Tyto signály, kromě řady dalších užitečných vlastností, mohou být využity pro efektivní vyčíslení Fourierovy transformace.

Hilbertova transformace je transformace převádějící signál v časové oblasti na jiný signál v časové oblasti (transformací tedy nepřecházíme do oblasti spektrální), přičemž se tato transformace zavádí pouze pro reálné signály. Její definici a základní vlastnosti najde čtenář v dodatku D.19. V kompaktní formě můžeme Hilbertovu transformaci definovat předpisem (viz (D.19.1)):

$$\mathcal{H}(s(t)) = \frac{1}{\pi t} * s(t),$$

zatímco inverzní Hilbertova transformace je dána jako (viz (D.19.3)):

$$\mathcal{H}^{-1}(s(t)) = -\frac{1}{\pi t} * s(t).$$

Odtud již snadno vyplývá, že provedeme-li Hilbertovu transformaci signálu $s(t)$, $h(t) = \mathcal{H}(s(t))$, bude Fourierovo spektrum Hilbertovy transformace souviset se spektrem $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$ následujícím způsobem:

Věta (O Fourierově transformaci Hilbertovy transformace):

Je-li $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$ Fourierovým spektrem signálu $s(t)$, pak

$$H(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{H}(s(t))\} = -i \operatorname{sgn}(f)S(f)$$

je Fourierovým spektrem jeho Hilbertovy transformace.

Důkaz:

Větu dokážeme jednoduše pomocí spektra konvoluce

$$\mathcal{F}(h(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi t} * s(t)\right) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi t}\right) \mathcal{F}(s(t)) = -i \operatorname{sgn}(f)S(f), \quad \text{c.b.d.}$$

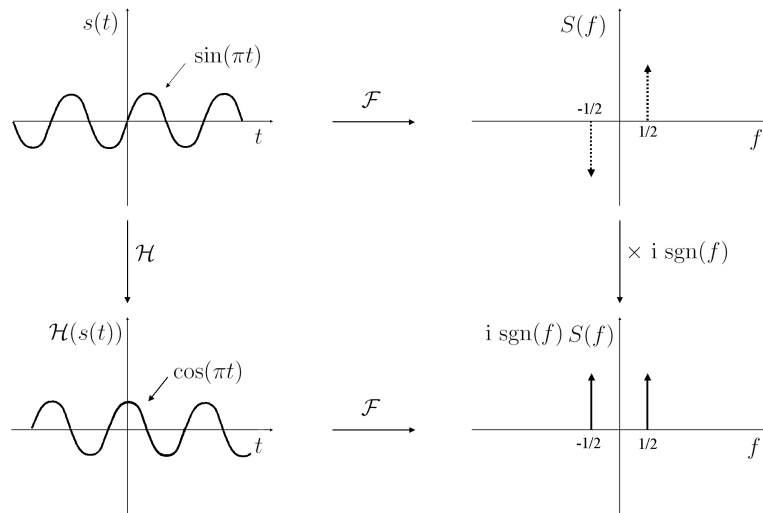
Poslední rovnost je důsledkem (3.19) a reciprocity Fourierovy transformace, tedy:

$$\mathcal{F}(\operatorname{sgn}(t)) = \frac{-i}{\pi f} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\operatorname{sgn}(f)) = \frac{i}{\pi t}.$$

Poznamenejme, že pro Fourierovu transformaci definovanou s opačným znaménkem v exponentu bychom museli tvrzení věty modifikovat na $H(f) = i \operatorname{sgn}(f)S(f)$. V každém případě je však zřejmé, že signál a jeho Hilbertova transformace mají stejné amplitudové spektrum, neboť multiplikativní faktor $i \operatorname{sgn}(f)$ má za následek pouze změnu fáze o $\pm\pi/2$ (pro kladné frekvence o $\pi/2$, pro záporné o $-\pi/2$). Dovedeme-li tuto úvahu ještě dále, zjistíme, že signál a jeho Hilbertova transformace mají stejnou autokorelaci, neboť jsou-li si rovna amplitudová spektra, jsou si rovna i spektra výkonová. Snadno také nahlédneme, že Hilbertova transformace sudé reálné funkce je reálná lichá funkce a naopak. Spektrum reálné sudé funkce času je totiž reálná sudá funkce frekvence a jejím přenásobením faktorem $i \operatorname{sgn}(f)$ se z ní stane imaginární lichá funkce frekvence, což v časové oblasti odpovídá právě reálné liché funkci. Tyto závěry odvozené ze spektra Hilbertovy transformace dobře ilustruje obrázek 3.20 na příkladu Hilbertova páru $\mathcal{H}(\sin(\pi t)) = \cos(\pi t)$ (viz dodatek D.19). Poznamenejme, že mezi funkcemi sinus a kosinus je fázový posun právě $\pi/2$; obrázek tak může zároveň sloužit jako ilustrace translačního teorému (3.31).

Přenásobení Fourierova spektra nějakého signálu faktorem $i \operatorname{sgn}(f)$ nepředstavuje z numerického hlediska příliš náročnou operaci. Nabízí se tedy možnost počítat Hilbertovu transformaci daného signálu výpočtem jeho spektra, přenásobením zmíněným faktorem a přechodem do časové oblasti inverzní Fourierovou transformací. Pro mnohé signály může být tato cesta efektivnější než přímý numerický výpočet integrálu definujícího Hilbertovu transformaci v časové oblasti (je-li do výpočtu zapojen algoritmus rychlé Fourierovy transformace, viz kapitola 5). V následujícím odstavci 3.13 si však ukážeme ještě efektivnější způsob numerického výpočtu Hilbertovy transformace s využitím tzv. analytického signálu.

Výše uvedená věta nám také umožní snadno dokázat některé vlastnosti Hilbertovy transformace uvedené v dodatku D.19. Tak například rovnost energií signálu a jeho Hilbertova obrazu je jednoduchým důsledkem Rayleighova teorému pro reálné funkce $\int_{-\infty}^{\infty} (s(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\overline{S(f)} df$.



Obrázek 3.20: Hilbertova transformace $\mathcal{H}(\sin(\pi t)) = \cos(\pi t)$ v časové a spektrální oblasti.

Pro kvadrát Hilbertovy transformace $h(t) = \mathcal{H}(s(t))$ dostaneme na základě stejného teorému

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (h(t))^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn}(f) S(f) (-i \operatorname{sgn}(f)) \overline{S(f)} df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \overline{S(f)} df \\ &\Downarrow \\ \int_{-\infty}^{\infty} (s(t))^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (h(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Rovněž ortogonalitu signálu a jeho Hilbertovy transformace na $(-\infty, \infty)$ lze snadno dokázat ze znalosti spektra $H(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{H}(s(t))\} = \mathcal{F}(h(t))$. Uvažme konvoluci $s(t) * h(-t)$. Jakožto reálnou funkci ji můžeme vyjádřit inverzní Fourierovou transformací pomocí (3.25)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(\tau - t) d\tau = 2\Re \left\{ \int_0^{\infty} S(f) [i \operatorname{sgn}(-f) S(-f)] \exp(i2\pi ft) df \right\},$$

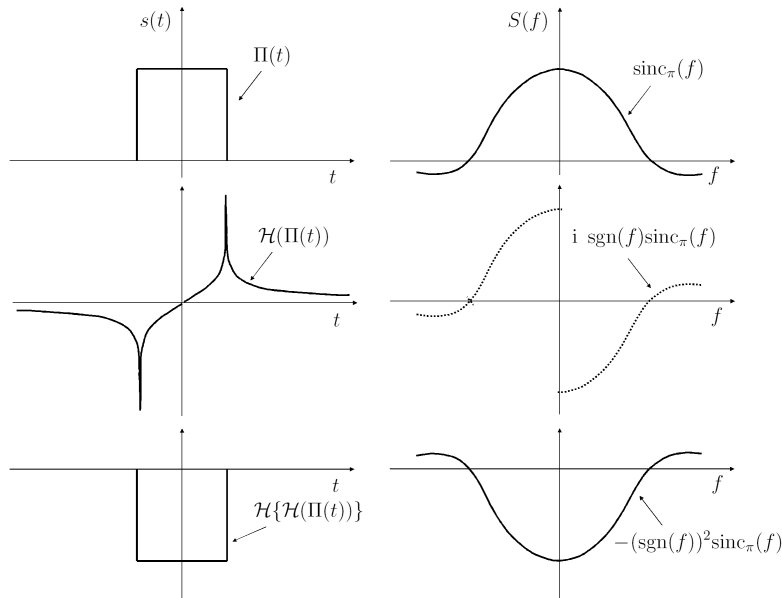
kde jsme použili (3.30). Tato rovnost musí platit i pro $t = 0$, tudíž

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(\tau) d\tau = -2\Re \left\{ \int_0^{\infty} i S(f) \overline{S(f)} df \right\},$$

přičemž jsme využili (3.24). Jelikož však $S(f) \overline{S(f)} = |S(f)|^2$ a reálná část ryze imaginární funkce je nulová, z čehož už okamžitě plyne

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(\tau) d\tau = 0.$$

Provedeme-li Hilbertovu transformaci opakovaně, tj. vytvoříme-li $g(t) = \mathcal{H}(h(t)) = \mathcal{H}\{\mathcal{H}(s(t))\}$, dává (3.12) okamžitě, že $g(t) = -s(t)$, neboť ve spektrální oblasti znamená opakovaná Hilbertova



Obrázek 3.21: Hilbertova transformace pravoúhelníkové funkce v časové (vlevo) a spektrální (vpravo) oblasti. Pravoúhelníková funkce a její Fourierovo spektrum (nahore), pravoúhelníková funkce po aplikaci Hilbertovy transformace a odpovídající spektrum (uprostřed), pravoúhelníková funkce po dvojnásobné aplikaci Hilbertovy transformace a odpovídající spektrum (dole).

transformace dvojnásobným násobením faktorem $i \operatorname{sgn}(f)$, tedy změnou znaménka. Na příkladu pravoúhelníkové funkce ukazuje tuto vlastnost obrázek 3.21. Přesný původní signál bychom dostali čtyřnásobnou aplikací Hilbertovy transformace.

Jelikož Hilbertovu transformaci zavádíme pro reálné funkce, můžeme při vyjádření Hilbertova páru využít alternativní vyjádření inverzní Fourierovy transformace (3.25). Je tedy

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{H}(s(t)) = 2\Re \left\{ \int_0^{\infty} \mathcal{F}(h(t)) \exp(i2\pi ft) \, df \right\} = -2\Re \left\{ \int_0^{\infty} i \operatorname{sgn}(f) S(f) \exp(i2\pi ft) \, df \right\} \\ &= -2\Re \left\{ i \int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) \, df \right\} = 2\Im \left\{ \int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) \, df \right\}. \end{aligned}$$

Obdobně bychom postupovali i pro inverzní Hilbertovu transformaci. Pro Hilbertův pár můžeme tedy souhrnně psát alternativní vyjádření

$$\begin{aligned} s(t) &= -2\Re \left\{ \int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) \, df \right\}, \\ h(t) &= 2\Im \left\{ \int_0^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) \, df \right\}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Výklad o Hilbertově transformaci nám pomůže pochopit další důležitou vlastnost Fourierovy transformace — speciální symetrii spektra reálných kauzálních funkcí. Kauzální funkcí rozumíme funkci, která nabývá nenulových hodnot pouze pro $t \geq 0$, případně $t \geq t_0$ (změna počátku časové osy není pro následující výklad podstatná). Takové funkce se často vyskytují v praktických aplikacích. Odpovídají „fyzikálnímu“ principu, kdy následek nepředbíhá příčinu. Jindy je kauzální dána pouze okolnostmi měření signálu, který je pak následně podroben spektrální analýze (měření začíná až v určitém okamžiku, před tímto okamžikem doplňujeme signál nulami).

Pro spektrum kauzální funkce platí věta:

Věta (O Fourierově transformaci reálné kauzální funkce):

Předpokládejme reálný signál $s(t)$ a jeho Fourierovo spektrum $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$. Signál $s(t)$ je kauzální právě tehdy, když reálná a imaginární část jeho spektra tvoří Hilbertův pár, přesněji

$$s(t) = 0, t < 0 \Leftrightarrow \Im\{S(f)\} = -\mathcal{H}(\Re\{S(f)\}). \quad (3.47)$$

Důkaz:

Věta má tvar ekvivalence, musíme ji tedy dokázat oběma směry. Nejprve dokážeme, že je-li $\Im\{S(f)\} = -\mathcal{H}(\Re\{S(f)\}) = -\frac{1}{\pi f} * \Re\{S(f)\}$, je inverzní Fourierova transformace $s(t) = \mathcal{F}^{-1}(S(f))$ kauzální funkcí času. Napíšeme $s(t)$ ve tvaru inverzní Fourierovy transformace¹⁷ a využijeme předpokládaný vztah mezi reálnou a imaginární částí spektra

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(i2\pi ft) df = \int_{-\infty}^{\infty} (\Re\{S(f)\} + i\Im\{S(f)\}) \exp(i2\pi ft) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Re\{S(f)\} - \frac{i}{\pi f} * \Re\{S(f)\} \right) \exp(i2\pi ft) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Re\{S(f)\} * \left[\delta(f) - \frac{i}{\pi f} \right] \right) \exp(i2\pi ft) df. \end{aligned}$$

Výraz v hranatých závorkách představuje spektrum dvojnásobku Heavisideovy funkce $u(t)$, $\delta(f) - i/\pi f = \mathcal{F}(2u(t))$, viz (3.20). Konvoluce ve spektrální oblasti odpovídá násobení v oblasti časové, tudíž

$$s(t) = 2\mathcal{F}^{-1}(\Re\{S(f)\})u(t),$$

tedy signál $s(t)$ je díky násobení Heavisideovou funkcí nutně kauzální, c.b.d. Nyní je třeba dokázat obrácenou implikaci: je-li reálný signál kauzální, jeho spektrum má výše uvedenou symetrii. Jak víme, každý signál můžeme rozložit na sudou a lichou část, $s(t) = e(t) + o(t)$, kde $e(t) = \frac{1}{2}(s(t) + s(-t))$ a $o(t) = \frac{1}{2}(s(t) - s(-t))$. Jelikož my předpokládáme kauzální signál, musí se sudá a lichá část navzájem odečíst pro $t < 0$, přičemž ani $e(t)$ ani $o(t)$ nejsou pro záporné časy nulové. Musí tedy platit

$$o(t) = \operatorname{sgn}(t)e(t),$$

a máme tedy

$$s(t) = (1 + \operatorname{sgn}(t))e(t).$$

Fourierova transformace takového signálu je tedy

$$S(f) = \left(\delta(f) - \frac{i}{\pi f} \right) * \mathcal{F}(e(t)) = \mathcal{F}(e(t)) - \frac{i}{\pi f} * \mathcal{F}(e(t)).$$

¹⁷Mohli bychom použít některý z alternativních tvarů z tabulky 3.3, neboť signál $s(t)$ je reálný, není to však nutné.

Funkce $e(t)$ je reálná a sudá, její spektrum je tedy také reálné (a sudé) a představuje tedy reálnou část spektra $S(f)$, $\Re\{S(f)\}$. Jeho imaginární část je pak

$$\Im\{S(f)\} = -\frac{1}{\pi f} * \Re\{S(f)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re\{S(\xi)\}}{f - \xi} d\xi, \quad \text{c.b.d.}$$

Napišeme-li spektrum jako $S(f) = A(f)/2 - iB(f)/2$, viz odstavec 3.4, platí

$$B(f) = \mathcal{H}(A(f)), \quad A(f) = \mathcal{H}^{-1}(B(f)). \quad (3.48)$$

Tyto vztahy se nazývají Kramers-Kronigovy relace¹⁸. Jsou to důležité podmínky kauzality v časové oblasti a uplatňují se při zkoumání řady fyzikálních procesů.

Cvičení 3.12.1:

Ověřte, že Heavisideova funkce vyhovuje Kramers-Kronigovým podmínkám kauzality.

Ne vždy lze platnost Kramers-Kronigových vztahů provést tak jednoduchým způsobem jako v předchozím cvičení. Následující příklad ukazuje další, standardní, metodu výpočtu pomocí konturních integrálů v komplexní rovině.

Příklad:

Ověřte platnost Kramers-Kronigových podmínek kauzality pro funkci ze cvičení 3.2.4, tj. „pravos-
tranné“ exponenciály $s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \exp(-\alpha t), & \alpha > 0, \quad t \geq 0 \end{cases}$.

Ze cvičení 3.2.4 víme, že spektrum dané funkce je

$$S(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}.$$

Jeho reálná a imaginární část jsou tedy

$$\Re\{S(f)\} = \frac{A(f)}{2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}, \quad \Im\{S(f)\} = -\frac{B(f)}{2} = -\frac{2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Je tedy třeba ověřit, že

$$\frac{2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2)(f - \xi)} d\xi. \quad (3.49)$$

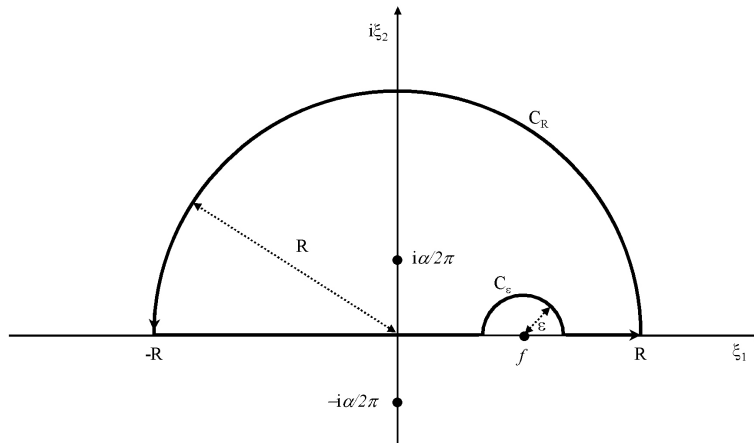
K výpočtu tohoto integrálu použijeme reziduovou větu, viz dodatek D.14. Reálnou proměnnou ξ rozšíříme na proměnnou komplexní: $\xi = \xi_1 + i\xi_2$. Integrand má jednoduché póly v bodech $\xi = f$ a $\xi = \pm i\alpha/2\pi$. Zvolme integrační cestu analogicky k obrázku D.3, pouze s tím rozdílem, že „obejdeme“ pól na reálné ose. Zvolenou integrační cestu ukazuje obrázek 3.22. Skládá se z

¹⁸Kdybychom je chtěli přeformulovat pro $\Re\{S(f)\}$ a $\Im\{S(f)\}$, byla by role Hilbertovy transformace přímé a inverzní prohozena, neboť např. $\Im\{S(f)\} = -\mathcal{H}(\Re\{S(f)\}) = \mathcal{H}^{-1}(\Re\{S(f)\})$.

půlkružnice C_R v horní polorovině o poloměru R a středu $[0, 0]$, půlkružnice C_ϵ v horní polorovině o poloměru ϵ a středu $[f, 0]$ a lineárních úseků podél reálné osy od $-R$ do $f - \epsilon$ a od $f + \epsilon$ do R . Sjednocením těchto částí získáme uzavřenou křivku C , kterou orientujeme proti směru hodinových ručiček. Integrand splňuje předpoklady reziduové věty a pro integrál můžeme tudíž psát

$$\oint_C \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2)(f - \xi)} d\xi = i2\pi \operatorname{Res}_{\xi = \frac{i\alpha}{2\pi}} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2)(f - \xi)}, \quad (3.50)$$

neboť uvnitř integrační cesty se nachází jediný pól v bodě $\xi = i\alpha/2\pi$.



Obrázek 3.22: Integrační cesta pro výpočet integrálu v rovnici (3.50).

Reziduum v (3.50) spočteme snadno jako limitu

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{i\alpha}{2\pi}} \left(\xi - \frac{i\alpha}{2\pi}\right) \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2)(f - \xi)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{i\alpha}{2\pi}} \frac{\frac{\alpha}{i2\pi}(\alpha + i2\pi\xi)}{(\alpha + i2\pi\xi)(\alpha - i2\pi\xi)(f - \xi)} \\ &= \frac{\alpha}{i2\pi} \frac{1}{(\alpha - i2\pi \frac{i\alpha}{2\pi})(f - \frac{i\alpha}{2\pi})} \\ &= \frac{1}{2(i2\pi f + \alpha)}. \end{aligned}$$

Integrál v (3.50) je tedy

$$\oint_C \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi = \frac{i\pi}{(i2\pi f + \alpha)}. \quad (3.51)$$

Křivkový integrál na levé straně rovnice rozepíšeme jako součet

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi + \int_{C_\epsilon} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi \\ + \int_{-R}^{f-\epsilon} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi + \int_{f+\epsilon}^R \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi = \frac{i\pi}{2(i2\pi f + \alpha)}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Rovnice (3.52) zůstává v platnosti i pro $R \rightarrow \infty$ a $\epsilon \rightarrow 0$. V tom případě první člen v (3.52) jde k nule a součet třetího a čtvrtého konverguje k integrálu (3.49) ve smyslu Cauchyovy hlavní

hodnoty. Dostáváme tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi = \frac{i\pi}{i2\pi f + \alpha} - \int_{C_\epsilon} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi.$$

Zbývá tedy určit integrál po křivce C_ϵ . Ten je roven polovině integrálu po uzavřené kružnici o poloměru ϵ a se středem v bodě $\xi = f$. Ten je podle residuové věty roven

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi = -i2\pi \operatorname{Res}_{\xi=f} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)}$$

(znaménko minus na pravé straně je důsledkem obcházení pólu po směru hodinových ručiček). Residuum v bodě $\xi = f$ spočteme snadno jako limitu

$$\operatorname{Res}_{\xi=f} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} = \lim_{\xi \rightarrow f} (\xi - f) \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 \xi^2)(f - \xi)} = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)(f - \xi)} d\xi &= \frac{i\pi}{i2\pi f + \alpha} - \frac{i\pi\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \\ &= i\pi \left(\frac{1}{i2\pi f + \alpha} - \frac{\alpha}{(\alpha + i2\pi f)(\alpha - i2\pi f)} \right) = \frac{\pi(2\pi f)}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}, \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Povšimněme si ještě jedné zajímavé vlastnosti spektra kauzální funkce z předešlého příkladu. Zatímco imaginární část spektra ubývá s rostoucí frekvencí jako f^{-1} , jeho reálná část ubývá rychleji¹⁹, jako f^{-2} . Takové asymptotické chování spektra můžeme očekávat i u jiných kauzálních funkcí, které mají nespojitost v nule, tj. $\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) \neq 0$. Podrobnější diskuse tohoto jevu jde však již nad rámec našeho kurzu.

3.13 Fourierova transformace analytických signálů

Analytický signál definujeme jako komplexní funkci jejíž imaginární část je rovna Hilbertově transformaci části reálné. Předpokládejme reálný signál $s(t)$, pak odpovídající analytický signál je (viz (D.12))

$$s^{(A)}(t) = s(t) + i\mathcal{H}(s(t)).$$

Rozšíření reálného signálu $s(t)$ výše uvedeným způsobem můžeme chápat jako další ze série standardních matematických operací, jejichž vliv na Fourierovo spektrum jsme zkoumali v odstavci 3.8. Spektrum analytického signálu je v jednoduchém vztahu ke spektru jeho reálné části:

¹⁹Což není v rozporu s pravidlem v kapitole 3.10, které implikuje úbytek alespoň jako f^{-1} .

Věta (O Fourierově transformaci analytického signálu):

Je-li $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$ Fourierovým spektrem a $s^{(A)}(t)$ analytickým signálem odpovídajícím signálu $s(t) \in R$, pak

$$s^{(A)}(t) = s(t) + i\mathcal{H}(s(t)) \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{F}(s^{(A)}(t)) = (1 + \operatorname{sgn}(f))S(f) = \begin{cases} 2S(f) & f > 0 \\ S(f) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} . \quad (3.53)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s^{(A)}(t)) &= \mathcal{F}(s(t) + i\mathcal{H}(s(t))) = \mathcal{F}(s(t)) + i\mathcal{F}\{\mathcal{H}(s(t))\} = S(f) + i(-i \operatorname{sgn}(f)S(f)) \\ &= (1 + \operatorname{sgn}(f))S(f), \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Výraz za posledním rovnítkem je roven součinu spektra původního signálu (reálné části analytického signálu) a dvojnásobku Heavisideovy funkce $u(f)$. Můžeme tedy psát

$$\mathcal{F}(s^{(A)}(t)) = 2u(f)S(f).$$

Fourierovo spektrum analytického signálu je tedy nulové pro záporné frekvence. Opět se zde projevuje reciprocita Fourierovy transformace, neboť jak víme z předchozího odstavce, je-li naopak spektrum analytickým signálem proměnné f , je signál v časové oblasti nulový pro záporné časy (kauzální).

Grafickou ilustraci spektra analytického signálu odpovídajícího tzv. Gáborovu signálu (viz (D.19)) najde čtenář na obrázku 3.23. Poznamenejme, že konkrétně spektrum Gáborova signálu je reálné a tudíž je reálné i spektrum celého analytického signálu (obecně je spektrum analytického signálu samozřejmě komplexní). Obrázek může zároveň sloužit jako další demonstrace modulačních teorémů z odstavce 3.8.

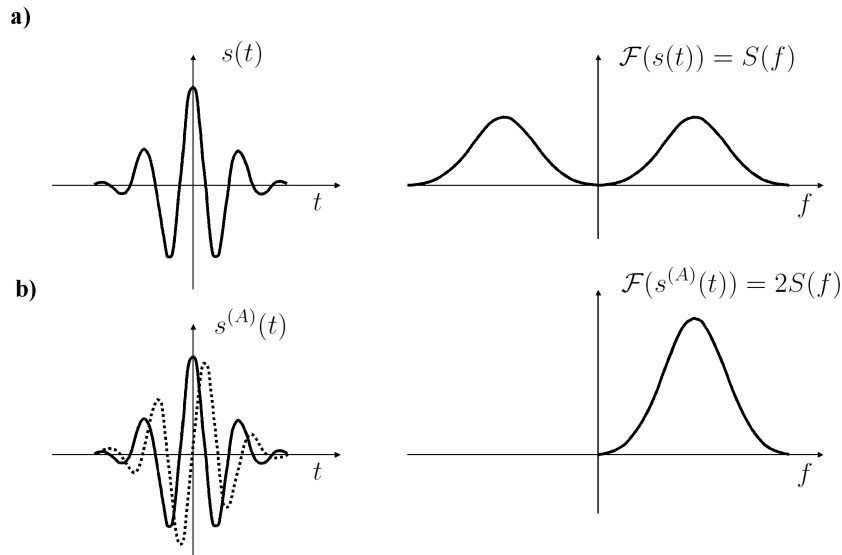
Fakt, že spektrum analytického signálu je na záporných frekvencích nulové, má nesmírný význam z numerického hlediska. Vlastnost (3.53), také umožňuje snadný numerický výpočet analytického signálu (a potažmo Hilbertovy transformace) ve spektrální oblasti, neboť oříznutí spektra (odstranění záporných frekvencí) a zdvojnásobení spektrálních hodnot pro $f > 0$ je z numerického hlediska velmi jednoduchá operace. Vysvětleme si tuto ideu pro případ výpočtu Hilbertovy transformace $\mathcal{H}(s(t))$. Postup má následující 3 základní kroky:

- Výpočet Fourierova spektra $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$

- Oříznutí a zdvojnásobení spektrálních hodnot: $\mathcal{F}(s(t)) \rightarrow \mathcal{F}(s^{(A)}(t)) = \begin{cases} 2S(f) & f > 0 \\ S(f) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$

- Inverzní Fourierova transformace, imaginární část: $\mathcal{H}(s(t)) = \Im\{\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(s^{(A)}(t))]\}$.

Vlastnost (3.53) také usnadňuje důkazy některých vlastností analytického signálu, zmíněných v dodatku D.12, ve spektrální oblasti.



Obrázek 3.23: Gáborův signál (část a, vlevo) a jeho Fourierovo spektrum (část a, vpravo) spolu s odpovídajícím analytickým signálem (část b, vlevo) a jeho Fourierovým spektrem (část b, vpravo). Tečkovaně je vyznačena imaginární část analytického signálu.

Příklad:

Najděte spektrum posunutého analytického signálu $\mathcal{F}(s^{(A)}(t - t_0))$, kde t_0 je reálná konstanta, a pomocí něho dokažte (D.20.5) pro $a = 1$, tj. že $s^{(A)}(t - t_0) = \delta^{(A)}(t - t_0) * s(t)$, kde $\delta^{(A)}(t - t_0) = \delta(t - t_0) + i \frac{1}{\pi(t - t_0)}$.

Řešení je velmi snadné. Spektrum posunutého analytického signálu musí být rovno

$$\mathcal{F}(s^{(A)}(t - t_0)) = \mathcal{F}(s^{(A)}(t)) \exp(-2\pi f t_0),$$

přičemž exponenciální faktor představuje podle cvičení 3.5.1 a tabulky 3.2 spektrum posunuté δ -funkce. V časové oblasti odpovídá součinu spekter konvoluce příslušných časových signálů. Je tedy

$$s^{(A)}(t - t_0) = s^{(A)}(t) * \delta(t - t_0) = s(t) * \delta^{(A)}(t - t_0),$$

kde poslední rovnost je důsledkem vlastnosti (D.20.7).

V oblasti zpracování dat se analytické signály využívají zejména pro výpočet obálky signálu v časové oblasti a pro výpočet tzv. okamžité frekvence. Reprezentujme analytický signál pomocí modulu a fáze

$$s^{(A)}(t) = |s^{(A)}(t)| \exp(i\psi(t)),$$

kde

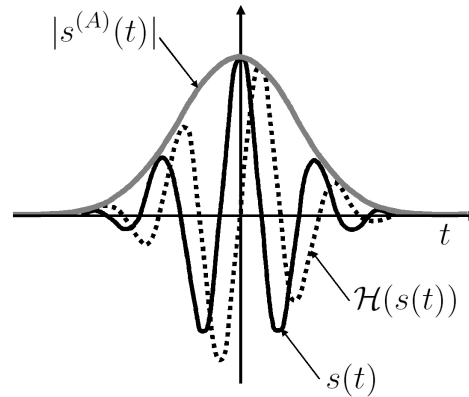
$$|s^{(A)}(t)| = [s(t)^2 + (\mathcal{H}(s(t)))^2]^{1/2}$$

a

$$\psi(t) = \arg(s^{(A)}(t)) = \arctan\left(\frac{\mathcal{H}(s(t))}{s(t)}\right).$$

V případě fáze se opět jedná o hlavní hodnotu argumentu v intervalu $(-\pi, \pi)$, podobně jako u fázového spektra. Fáze $\psi(t)$ analytického signálu se nazývá **fázogram**.

Modul analytického signálu představuje **obálku**²⁰ generujícího signálu. Je to zároveň i obálka jeho Hilbertovy transformace, jak ukazuje obrázek 3.24 na příkladu Gáborova signálu.



Obrázek 3.24: Gáborův signál (černá plná čára), jeho Hilbertova transformace (černá tečkovaná čára) a jejich společná obálka (šedá plná čára), která zároveň představuje modul analytického signálu.

Věta (O obálce signálu):

Předpokládejme reálný signál $s(t)$ generující analytický signál $s^{(A)}(t) = s(t) + i\mathcal{H}(s(t))$, kde $\mathcal{H}(s(t))$ je Hilbertova transformace signálu $s(t)$. Pak modul analytického signálu $|s^{(A)}(t)| = [s(t)^2 + (\mathcal{H}(s(t)))^2]^{1/2}$ představuje obálku jak signálu $s(t)$, tak jeho Hilbertovy transformace $\mathcal{H}(s(t))$.

Důkaz:

Uvažujme funkci

$$f(\alpha, t) = \Re\{\exp(i\alpha)s^{(A)}(t)\} = s(t)\cos(\alpha) - \mathcal{H}(s(t))\sin(\alpha), \quad (3.54)$$

kde α je reálný parametr. Speciálně, pro $\alpha = 0$, $f(0, t) = s(t)$ a pro $\alpha = -\pi/2$, $f(-\pi/2, t) = \mathcal{H}(s(t))$. Rovnici (3.54) můžeme též přepsat jako

$$f(\alpha, t) = \Re\{|s^{(A)}(t)|\exp(i(\alpha + \psi(t)))\} = |s^{(A)}(t)|\cos(\alpha + \psi(t)). \quad (3.55)$$

Najdeme-li obálku $f(\alpha, t)$, najdeme tím zároveň i obálku jak $s(t)$, tak $\mathcal{H}(s(t))$. Pro měnící se α , reprezentuje (3.55) jednoparametrický systém křivek, viz dodatek (D.21), jehož obálku

²⁰Pojem obálka je vysvětlen v dodatku D.21.

najdeme standardním způsobem: najdeme takové α , aby $\partial f(\alpha, t)/\partial \alpha = 0$ a to pak dosadíme do (3.55). Máme tedy

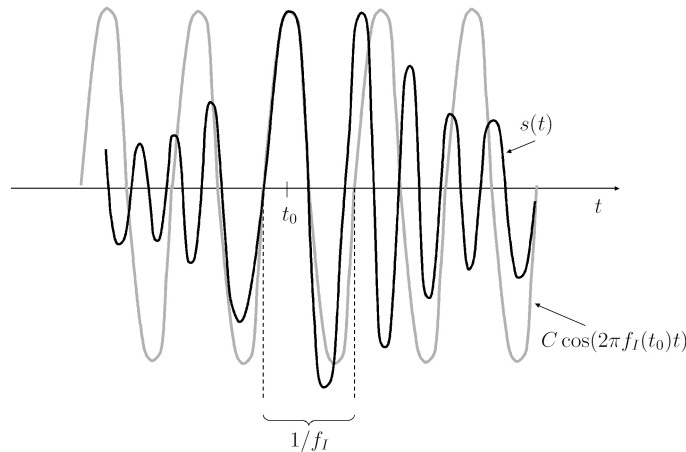
$$\frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha} = -|s^{(A)}(t)| \sin(\alpha + \psi(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\psi(t).$$

Obálka je tedy dána rovnicí

$$f^E(t) = f(\alpha, t) \Big|_{\alpha = -\psi(t)} = |s^{(A)}(t)|, \quad \text{c.b.d.}$$

Kromě obálky se při zpracování reálných dat často využívá i fázogram analytického signálu. Slouží k určení tzv. **okamžité frekvence** (nebo též lokální frekvence). Tato problematika spadá nikoliv do spektrální analýzy (kde se v principu určuje frekvenční obsah signálu jako celku — Fourierovo spektrum), ale do tzv. časově-frekvenční analýzy, která není předmětem tohoto kurzu, a proto se o okamžitou frekvenci zmíníme pouze stručně.

Protože frekvenční zastoupení u konkrétního signálu $s(t)$ se obecně s časem mění, je důležité v mnoha aplikacích znát, jaká frekvence odpovídá danému okamžiku na časové ose. Objasněme si zde nejjednodušší metodu určování takové okamžité frekvence²¹. Využívá se aproximace signálu nejjednodušším harmonickým signálem v daném bodě, jak je ukázáno na obrázku 3.25.



Obrázek 3.25: Aproximace $s(t)$ v bodě t_0 harmonickým signálem s frekvencí f_I , který je reálnou částí příslušného analytického signálu.

Předpokládejme, že v okolí t_0 je signál $s(t)$ lokálně harmonický, tj. příslušný analytický signál lze aproximovat jako

$$s^{(A)}(t) \approx C \exp(i2\pi f_I(t_0)t). \quad (3.56)$$

Zároveň však máme

$$s^{(A)}(t) = |s^{(A)}(t)| \exp(i\psi(t)).$$

²¹Není to zdaleka metoda jediná, v časově-frekvenční analýze se používá řada alternativních metod odpovídajícím různým definicím okamžité frekvence.

V okolí bodu t_0 můžeme analytický signál aproximovat Taylorovým rozvojem (dodatek D.13). Pro pomalu se měnící obálku dostaneme

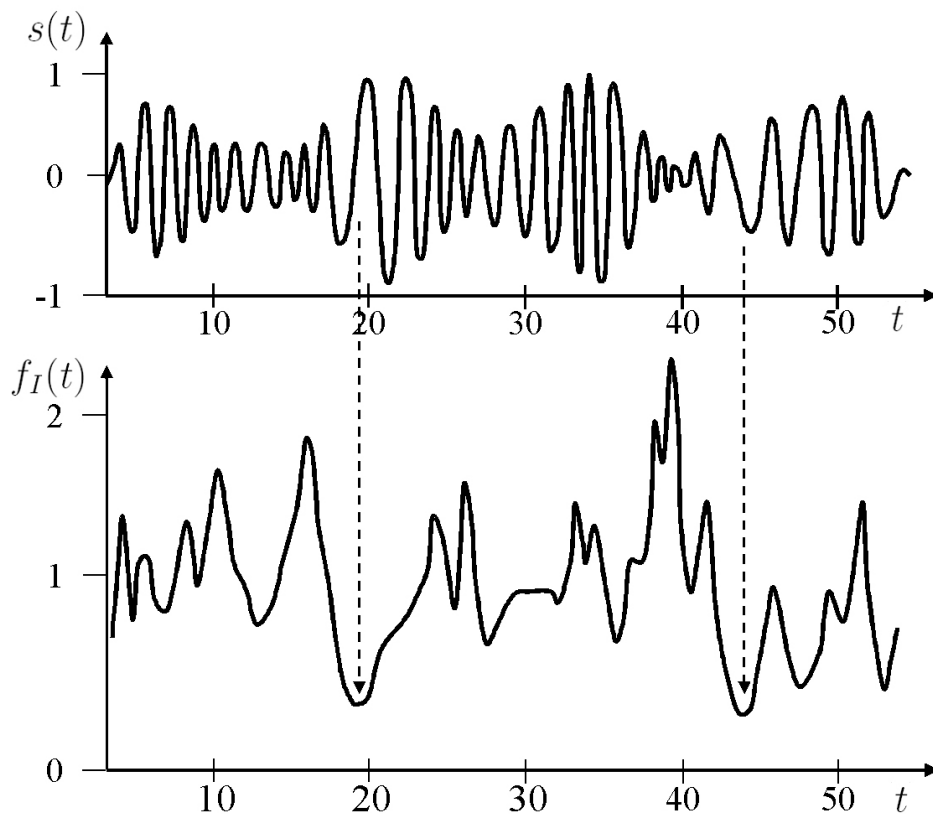
$$s^{(A)}(t) \approx |s^{(A)}(t_0)| \exp \left(i\psi(t_0) + i \left. \frac{d\psi(t)}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \dots \right) \approx \tilde{C} \exp \left(i \left. \frac{d\psi(t)}{dt} \right|_{t=t_0} t \right). \quad (3.57)$$

Porovnáním obou aproximací okamžitě dostaneme hledaný vztah pro okamžitou frekvenci

$$f_I \approx \frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\psi(t)}{dt} \right|_{t=t_0}. \quad (3.58)$$

Okamžitá frekvence je tedy dána časovou derivací fázogramu. Problém nastane, je-li fázogram v nějakém bodě nespojitý. Kromě skutečných nespojitostí „fyzikálního“ původu může fázogram obsahovat i řadu formálních skoků o $\pm 2\pi$ (z důvodů definice hlavní hodnoty argumentu; tyto skoky lze odstranit například formálním převedením fázogramu na válcovou plochu).

Obrázek 3.26 poskytuje ukázkou reálných dat a časového průběhu okamžité frekvence.



Obrázek 3.26: Reálný signál (nahore) a odpovídající průběh okamžité frekvence (dole).

Kromě zpracování dat mají analytické signály velký význam i v teoretické oblasti, např. při modelování vlnových procesů. Řešení příslušné pohybové rovnice se předpokládá ve tvaru analytického signálu a při výpočtech se široce využívá výhodných vlastností tohoto signálu. K

reálné části (která nese vlastní fyzikální význam řešení daného problému) se přechází až v samém závěru výpočtu ²².

3.14 Dvoudimenzionální Fourierova transformace spojitého signálu

V praxi často pracujeme s vícedimenzionálními signály, tj. signály závislémi na více proměnných. Rozšíříme tedy Fourierovu transformaci spojitého signálu na vícedimenzionální případ. Nejširší aplikace má dvoudimenzionální Fourierova analýza. Uplatňuje se zejména při zpracování obrazu (např. fotografií).

V analogii k dvojnásobné Fourierově řadě probírané v odstavci 2.11, definujme dvoudimenzionální (2-D) Fourierův pár.

Definice: (2-D Fourierova transformace spojitého signálu pro obyčejnou frekvenci)

Fourierovou transformací (spektrém) spojitého signálu $s(t_1, t_2)$ nazveme funkci $S(f_1, f_2)$

$$S(f_1, f_2) = \mathcal{F}\{s(t_1, t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp\{-i2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)\} dt_1 dt_2. \quad (3.59)$$

Inverzní Fourierovou transformací odpovídající spektru $S(f_1, f_2)$ je

$$s(t_1, t_2) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f_1, f_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(f_1, f_2) \exp\{i2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)\} df_1 df_2. \quad (3.60)$$

Tyto vzorce bychom snadno odvodili, kdybychom signál $s(t_1, t_2)$ podrobili nejprve jednodimenzionální Fourierově transformaci, např. pro proměnnou t_1 , a na výsledek znovu aplikovali jednodimenzionální transformaci pro proměnnou t_2 . Analogicky, inverzní 2-D transformaci bychom dostali dvojí po sobě následující jednodimenzionální inverzní transformací.

Poznamenejme, že přestože z důvodů konzistence značení s předcházejícími odstavci používáme proměnné t_1, t_2 v oblasti vzorů transformace („časové“), sotva budou obě proměnné mít význam času. V problematice zpracování seismických dat se můžeme setkat s kombinací čas-hloubka, většinou se ale jedná o dvě prostorové souřadnice. Proto budeme v souvislosti s dvoudimenzionální Fourierovou transformací užívat termín prostorová oblast (namísto časová). Ve spektrální oblasti pak mají odpovídající proměnné význam tzv. prostorové frekvence²³.

I ve dvoudimenzionálním případě se často místo obyčejné frekvence používá frekvence úhlová. Vzorec pro přímou transformaci zůstává stejný jako (3.59), pouze místo f_1, f_2 píšeme tradičně

²²Tento postup však nelze aplikovat, pokud řešení vstupuje do nějakých nelineárních výrazů.

²³Někdy se užívá termín vlnové číslo.

ω_1, ω_2 a v exponentu není faktor 2π . Vzorec pro inverzní transformaci je

$$s(t_1, t_2) = \mathcal{F}^{-1}\{S(\omega_1, \omega_2)\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1, \omega_2) \exp\{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)\} d\omega_1 d\omega_2. \quad (3.61)$$

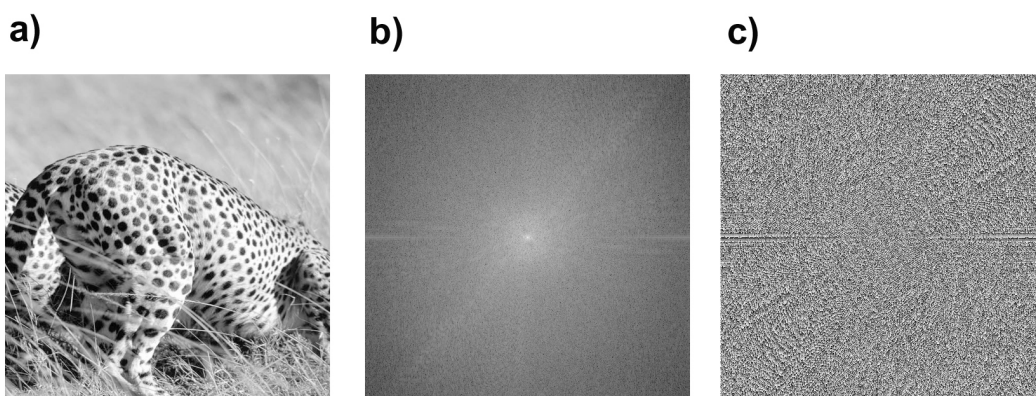
Aby výše uvedené formální vzorce definující 2-D Fourierovu přímou a inverzní transformaci popisovaly vzájemně jednoznačné přiřazení mezi signálem a jeho spektrem je třeba požadovat splnění určitých podmínek. Už jenom existence příslušných násobných integrálů je obecně podmíněna absolutní integrovatelností signálu respektive spektra, tj. pro signál v prostorové oblasti požadujeme, aby

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty,$$

což zkráceně zapíšeme $s(t_1, t_2) \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Obdobně pro spektrum.

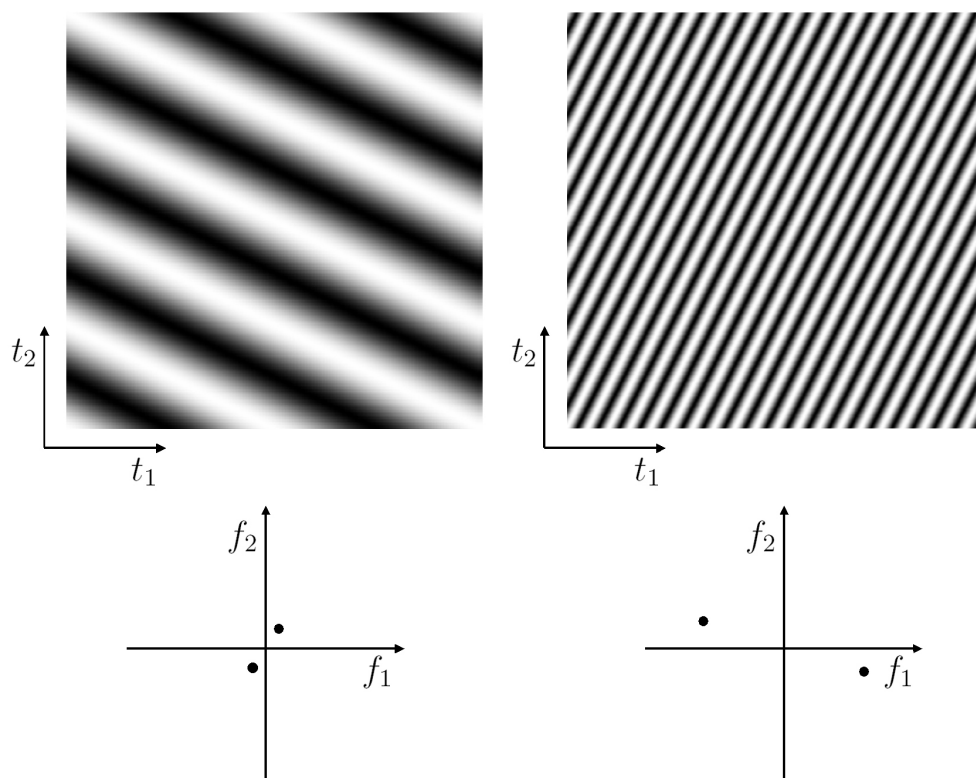
Podobně jako v odstavci 3.2, kde k tomu, aby existovala inverzní Fourierova transformace postačovalo splnění Dirichletových podmínek, i v 2-D případě platí (3.60) a (3.61), splňuje-li signál $s(t_1, t_2)$ Dirichletovy podmínky (či některou jejich slabší variantu) pro každou proměnnou. Jedná se o podmínky postačující, ze kterých existují výjimky (tj. i některé speciální signály, které tyto podmínky nesplňují, mohou vystupovat ve Fourierových párech).

Jak signál, tak spektrum jsou obecně komplexní. V analogii k jednodimenzionálnímu případu komplexní spektrum nejčastěji reprezentujeme modulem (amplitudovým spektrem, $|S(f_1, f_2)|$) a hlavní hodnotou argumentu (fázovým spektrem, $\phi(f_1, f_2)$). Jako ukázka zde slouží obrázek 3.27. Přestože tento obrázek je ve skutečnosti digitální a byl zpracován metodou diskrétní Fourierovy transformace (viz kapitola 5), zde slouží pro účely výkladu modelem Fourierovy transformace spojitého signálu. Při dostatečně jemném rozlišení obrázku (odpovídajícím dostatečně hustému vzorkování spojitého signálu) předpokládáme, že můžeme spojitý signál diskrétním dobře aproximovat. Detailně je souvislost diskrétní Fourierovy transformace a transformace spojitého signálu diskutována právě v kapitole 5. Obrázek mimo jiné ukazuje ubývání amplitudového spektra s rostoucí frekvencí, tj. směrem od středu obrázku (spektrum samozřejmě pokračuje do $\pm\infty$ v obou spektrálních souřadnicích; obrázek ukazuje jen výřez).



Obrázek 3.27: Fotografie geparda (a) modelem 2-D spojitého signálu. Odpovídající amplitudové spektrum ukazuje část b a fázové spektrum část c (podle Gonzales & Woods, 2002). Obě spektra pokračují do $\pm\infty$, obrázek ukazuje pouze výřez okolo centrálního bodu $[0,0]$.

Pro reálné signály platí, že $S(-f_1, -f_2) = \overline{S(f_1, f_2)}$. V takovém případě má (3.60) názornou „geometrickou“ interpretaci. Podobně jako jsme v odstavci 2.11 chápali dvojnásobnou exponenciální Fourierovu řadu jako superpozici početně mnoha funkcí typu „vlnitý plech“, i zde se jedná o superpozici (tentokrát integrální) funkcí $\cos(2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2) + \phi(f_1, f_2))$. Odpovídají vždy součtu dvou protilehlých (vůči bodu $[f_1 = 0, f_2 = 0]$ zrcadlově symetrických) harmonických složek. Přímky konstantní fáze svírají s osou t_1 úhel $\arctan(f_2/f_1)$. Perioda kosinu je $1/f_1$ ve směru osy t_1 a $1/f_2$ ve směru osy t_2 ; kolmo na přímky konstantní fáze je perioda $(\sqrt{f_1^2 + f_2^2})^{-1}$. Obrázek 3.28 ukazuje 2 příklady takových funkcí (pro dvě různé dvojice f_1, f_2). Ve spodní části obrázku vidíme v rovině (f_1, f_2) dvojici bodů, jejichž poloha vyznačuje, které 2 harmonické složky v součtu tvoří daný 2-D kosinus. V integrální superpozici je pak tento kosinus vážen faktorem $2|S(f_1, f_2)|$, jehož polovinu můžeme odečíst z amplitudového spektra v daném bodě (tj. pro danou dvojici f_1, f_2). Fázové spektrum v daném bodě pak udává fázový posun tohoto 2-D kosinu.



Obrázek 3.28: Dvě konkrétní realizace funkcí typu „vlnitý plech“, které se skládají v integrální superpozici při inverzní 2-D Fourierově transformaci. Bližší vysvětlení viz text.

Pro 2-D Fourierovu transformaci platí důležitá vlastnost, které říkáme **separabilita**.

Věta (O separabilitě 2-D Fourierovy transformace):

Je-li $s(t_1, t_2)$ násobným signálem, tj. $s(t_1, t_2) = s_1(t_1)s_2(t_2)$, pak pro jeho Fourierovu transformaci platí

$$S(f_1, f_2) = \mathcal{F}(s(t_1, t_2)) = \mathcal{F}(s_1(t_1))\mathcal{F}(s_2(t_2)).$$

Důkaz je triviální, plyne okamžitě z konstrukce 2-D Fourierovy transformace postupnou dvojí aplikací transformace jednodimenzionální, jak je popsáno v úvodu tohoto odstavce.

Vlastnosti 2-D Fourierovy transformace jsou analogické jako v případě signálů jedné proměnné. Zmíňme například reciprocitu

$$S(f_1, f_1) = \mathcal{F}(s(t_1, t_2)) \quad \Leftrightarrow \quad s(-f_1, -f_2) = \mathcal{F}(S(t_1, t_2)).$$

Dále uveďme v krátkém přehledu alespoň nejdůležitější operace v prostorové oblasti a jejich důsledky v oblasti spektrální. Až na jednu výjimku (rotace) jsou to všechno zřejmá zobecnění vlastností, které známe pro signály jedné proměnné. Použité značení je analogické, jako v odstavci 3.8, tedy velkým písmenem se značí signál ve spektrální, zatímco malým v časové oblasti. Operací vzniká nový Fourierův pár $H(f_1, f_2) = \mathcal{F}(h(t_1, t_2))$.

Translace

$$h(t_1, t_2) = s(t_1 - a, t_2 - b) \quad \Leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = S(f_1, f_2) \exp(-2\pi i (af_1 + bf_2)).$$

Translaci je samozřejmě možné provést i jen v jedné proměnné, příslušná modifikace vzorce je zřejmá.

Modulace

$$h(t_1, t_2) = s(t_1, t_2) \exp(2\pi i (at_1 + bt_2)) \quad \Leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = S(f_1 - a, f_2 - b).$$

Speciálně můžeme modulovat kosinem nebo sinem i pouze v jedné proměnné. Pak bychom v analogii k modulačním teorémům v odstavci 3.8 dostali

$$\begin{aligned} h(t_1, t_2) = s(t_1, t_2) \cos(2\pi at_1) &\quad \Leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = \frac{1}{2}S(f_1 + a, f_2) + \frac{1}{2}S(f_1 - a, f_2) \\ h(t_1, t_2) = s(t_1, t_2) \sin(2\pi at_1) &\quad \Leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = \frac{1}{2i}S(f_1 + a, f_2) - \frac{1}{2i}S(f_1 - a, f_2) \end{aligned}$$

a obdobně pro druhou proměnnou.

Rotace

Uvažme rotaci o úhel γ (ve směru hodinových ručiček) v prostorové oblasti. Rotací přejde sloupcový vektor $\mathbf{t} = (t_1, t_2)^T$, kde T v horním indexu značí transpozici, na vektor $\mathbf{t}' = (t_1 \cos(\gamma) + t_2 \sin(\gamma), -t_1 \sin(\gamma) + t_2 \cos(\gamma))^T = \mathbf{R}\mathbf{t}$, kde matice rotace je

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Tím vznikne nový signál $h(t_1, t_2)$. Platí

$$h(t_1, t_2) = s(t'_1, t'_2) \quad \Leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = S(f_1 \cos(\gamma) + f_2 \sin(\gamma), -f_1 \sin(\gamma) + f_2 \cos(\gamma)) = S(f'_1, f'_2).$$

Tato vlastnost nemá analogii v jednodimenzionálním případě, proto se u ní zastavme podrobněji. Stručně se dá shrnout takto: natočíme-li (příslušnou transformací souřadnic) signál v prostorové oblasti o nějaký úhel γ , odpovídající spektrum bude v rovině (f_1, f_2) oproti původnímu spektru natočeno o stejný úhel ve stejném směru. Důkaz je jednoduchý, využívá neomezenosti integračního oboru. Použijeme-li ve spektrální oblasti řádkový vektor $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, můžeme Fourierovu transformaci před rotací zapsat v kompaktním tvaru

$$S(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{t}) \exp(-i2\pi\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}) dt_1 dt_2,$$

kde $\mathbf{f} \cdot \mathbf{t} = f_1 t_1 + f_2 t_2$ znamená skalární součin v R^2 . Spektrum rotovaného signálu pak musí být

$$H(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{R} \cdot \mathbf{t}) \exp(-i2\pi\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{t}') \exp(-i2\pi\mathbf{f} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{t}') dt'_1 dt'_2,$$

kde k integračním proměnným t'_1, t'_2 jsme mohli přejít díky tomu, že integrujeme přes celou rovinu a můžeme tedy integrovat v libovolných dvou navzájem kolmých směrech. Označíme-li $\mathbf{f}' = \mathbf{f} \cdot \mathbf{R}^{-1}$ dostáváme

$$H(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{t}') \exp(-i2\pi\mathbf{f}' \cdot \mathbf{t}') dt'_1 dt'_2 = S(\mathbf{f}') = S(\mathbf{f} \cdot \mathbf{R}^{-1}), \quad \text{c.b.d.},$$

kde předposlední rovnost plyne ze srovnání se vzorcem pro spektrum nerotovaného signálu.

Projekce do jedné souřadné osy

V porovnání s ostatními operacemi se projekce liší zejména tím, že z 2D signálu vzniká signál jedné proměnné a též odpovídající spektrum je jednodimenzionální. Přesto má dobrý smysl se ptát, v jakém vztahu je toto spektrum k původnímu 2D spektru. Operací projekce do souřadné osy budeme rozumět integraci přes jednu proměnnou v časové oblasti. Ve spektrální oblasti pak dostaneme řez původního 2D spektra ve směru kolmém na odpovídající frekvenci, tj. např. pro projekci do souřadné osy t_1

$$h(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) dt_2 \quad \leftrightarrow \quad H(f_1) = S(f_1, f_2) \Big|_{f_2=0}.$$

Důkaz je jednoduchý

$$\begin{aligned} H(f_1, f_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) dt_2 \right\} \exp(-i2\pi t_1 f_1) dt_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp(-i2\pi t_1 f_1) \left\{ \exp(-i2\pi t_2 f_2) \Big|_{f_2=0} \right\} dt_2 dt_1 \\ &= S(f_1, 0) \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Čtenáři jistě neuniklo, že tato vlastnost je jistým rozšířením integračního vzorce (3.41) na případ funkce dvou proměnných.

V kombinaci s rotací (natočením souřadných os) snadno zjistíme, že můžeme uvažovat projekci do obecného směru a té musí ve spektru odpovídat řez v tomto obecném směru²⁴.

Změna měřítka

$$h(t_1, t_2) = s(\alpha t_1, \beta t_2) \quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = \frac{1}{|\alpha\beta|} S\left(\frac{f_1}{\alpha}, \frac{f_2}{\beta}\right).$$

Zrcadlení

$$\begin{aligned} h(t_1, t_2) = s(-t_1, t_2) &\quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = S(-f_1, f_2) \\ h(t_1, t_2) = s(t_1, -t_2) &\quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = S(f_1, -f_2) \\ h(t_1, t_2) = s(-t_1, -t_2) &\quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = S(-f_1, -f_2). \end{aligned}$$

Derivace

$$\begin{aligned} h(t_1, t_2) = \frac{\partial s(t_1, t_2)}{\partial t_1} &\quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = 2\pi i f_1 S(f_1, f_2) \\ h(t_1, t_2) = \frac{\partial s(t_1, t_2)}{\partial t_2} &\quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = 2\pi i f_2 S(f_1, f_2) \\ h(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 s(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &\quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = -4\pi^2 f_1 f_2 S(f_1, f_2), \end{aligned}$$

Obecně

$$h(t_1, t_2) = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right)^m s(t_1, t_2) \quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = (2\pi i f_1)^n (2\pi i f_2)^m S(f_1, f_2).$$

Konvoluce

$$h(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau_1, \tau_2) s_2(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = S_1(f_1, f_2) S_2(f_1, f_2)$$

Korelace a autokorelace

$$\begin{aligned} h(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s_1(\tau_1, \tau_2)} s_2(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = \overline{S_1(f_1, f_2)} S_2(f_1, f_2) \\ h(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s_1(\tau_1, \tau_2)} s_1(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad \leftrightarrow \quad H(f_1, f_2) = |S_1(f_1, f_2)|^2 \end{aligned}$$

Spektrum autokorelace je tedy opět kvadrát amplitudového spektra, tj. výkonové spektrum.

V případě 2-D Fourierovy transformace rovněž platí Rayleighův i Parsealův teorém, příslušné vzorce jsou přímočarým zobecněním vzorců (3.39) a (3.40) pro dvě proměnné.

Z integrálních vlastností uveďme:

²⁴Projekce do obecného směru má blízko ke konceptu tzv. Radonovy transformace široce využívané například v medicíně při rekonstrukci obrazu pomocí CT tomografie. Podrobnější informace o Radonově transformaci může čtenář najít např. v knize Gonzales a Woods, 2008.

Určitý integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = S(0, 0).$$

Těžiště

$$\langle t_1 \rangle = \frac{-1}{2\pi i S(0, 0)} \left. \frac{\partial S(f_1, f_2)}{\partial f_1} \right|_{f_1=0, f_2=0}, \quad \langle t_2 \rangle = \frac{-1}{2\pi i S(0, 0)} \left. \frac{\partial S(f_1, f_2)}{\partial f_2} \right|_{f_1=0, f_2=0},$$

kde $\langle t_1 \rangle$ a $\langle t_2 \rangle$ představují souřadnice bodu těžiště v rovině (t_1, t_2) .

První momenty

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_1 s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \left. \frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial S(f_1, f_2)}{\partial f_1} \right|_{f_1=0, f_2=0} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_2 s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \left. \frac{-1}{2\pi i} \frac{\partial S(f_1, f_2)}{\partial f_2} \right|_{f_1=0, f_2=0}. \end{aligned}$$

Díky linearitě integrálu můžeme výše uvedené vzorce zobecnit zavedením libovolného úhlu rotace γ v rovině (t_1, t_2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t_1 \cos(\gamma) + t_2 \sin(\gamma)) s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{-1}{2\pi i} \left[\begin{aligned} &\left. \cos(\gamma) \frac{\partial S(f_1, f_2)}{\partial f_1} \right|_{f_1=0, f_2=0} \\ &+ \left. \sin(\gamma) \frac{\partial S(f_1, f_2)}{\partial f_2} \right|_{f_1=0, f_2=0} \end{aligned} \right].$$

Druhé momenty

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_1^2 s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \left. \frac{-1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 S(f_1, f_2)}{\partial f_1^2} \right|_{f_1=0, f_2=0} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_2^2 s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \left. \frac{-1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 S(f_1, f_2)}{\partial f_2^2} \right|_{f_1=0, f_2=0} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_1 t_2 s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \left. \frac{-1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 S(f_1, f_2)}{\partial f_1 \partial f_2} \right|_{f_1=0, f_2=0} \end{aligned}$$

a z linearity také

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t_1^2 + t_2^2) s(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{-1}{4\pi^2} \left[\left. \frac{\partial^2 S(f_1, f_2)}{\partial f_1^2} + \frac{\partial^2 S(f_1, f_2)}{\partial f_2^2} \right] \right|_{f_1=0, f_2=0}.$$

Ekvivalentní šířka

$$W_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) dt_1 dt_2}{s(0, 0)} = \frac{S(0, 0)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(f_1, f_2) df_1 df_2} = \frac{1}{W_S},$$

Z rovnice též plyne platnost principu neurčitosti: $W_s W_S = 1$.

Výše uvedené integrální výrazy lze snadno přepsat i pro spektrum. Důkazy jsou jednoduché, plynou přímo z definice 2-D Fourierovy transformace.

Věnujme nyní pozornost případným symetriím spektra v rovině f_1, f_2 . Už jsme zmínili, že spektrum reálného signálu pro záporné frekvence je jen komplexně sdružené ke spektru v kladných frekvencích. V jednodimenzionálním případě jsme v odstavci 3.4 dokázali, že pro reálný signál v časové oblasti, je reálná část spektra sudou funkcí frekvence (stejně jako amplitudové a výkonové spektrum), zatímco imaginární část spektra je lichou funkcí frekvence (stejně jako fázové spektrum). Pro 2-D reálný signál v prostorové oblasti je otázka symetrii poněkud složitější a spíše než o sudých a lichých funkcích bude lépe mluvit o symetrických a antisymetrických funkcích.

Rozepišme spektrum reálného 2-D signálu na části $A(f_1, f_2)$ a $B(f_1, f_2)$ (s analogickým značením jako v odstavci 3.4) $S(f_1, f_2) = A(f_1, f_2)/2 - iB(f_1, f_2)/2$, kde funkce A a B jsou pro reálný signál reálné a jsou dány vzorci

$$A(f_1, f_2) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) [\cos(2\pi f_1 t_1) \cos(2\pi f_2 t_2) - \sin(2\pi f_1 t_1) \sin(2\pi f_2 t_2)] dt_1 dt_2$$

$$B(f_1, f_2) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) [\cos(2\pi f_1 t_1) \sin(2\pi f_2 t_2) + \sin(2\pi f_1 t_1) \cos(2\pi f_2 t_2)] dt_1 dt_2.$$

Pro reálnou část spektra platí, že je symetrická v následujícím smyslu

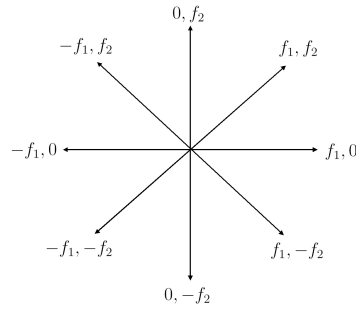
$$\begin{aligned} A(f_1, 0) &= A(-f_1, 0) \\ A(0, f_2) &= A(0, -f_2) \\ A(f_1, f_2) &= A(-f_1, -f_2) \\ A(-f_1, f_2) &= A(f_1, -f_2). \end{aligned}$$

Stejně symetrie bychom dostali i pro amplitudové spektrum (viz obrázek 3.27b) a výkonové spektrum, které je kvadrátem amplitudového. Analogicky, imaginární část je antisymetrická v následujícím smyslu

$$\begin{aligned} B(f_1, 0) &= -B(-f_1, 0) \\ B(0, f_2) &= -B(0, -f_2) \\ B(f_1, f_2) &= -B(-f_1, -f_2) \\ B(-f_1, f_2) &= -B(f_1, -f_2). \end{aligned}$$

Podobné vzorce bychom mohli napsat i pro fázi. Pro snadnější zapamatování může posloužit schema směrů symetrie na obrázku 3.29.

Navzdory poněkud komplikovanějšímu zápisu jsou tyto symetrie zřejmými analogiemi symetrií v 1-D případě a i jejich důkazy jsou zcela analogické. Dvoudimenzionální Fourierova transformace však může vykazovat ještě jednu velmi důležitou symetrii, která z principiálních důvodů v 1-D případě nemůže mít obdobu. Jedná se o radiální symetrii spektra v rovině (f_1, f_2) odpovídajícího



Obrázek 3.29: Možné směry symetrií (antisymetrií) spektra v rovině (f_1, f_2) .

radiálně symetrickému signálu v prostorové oblasti. Radiální symetrií zde rozumíme symetrii vůči natočení, kdy funkční hodnota závisí pouze na vzdálenosti od počátku coby středu rotace (často nazývané radius), a nikoliv na úhlu natočení. V tomto smyslu bychom také mohli hovořit o rotační symetrii.

Věta (O radiální symetrii v 2-D Fourierově transformaci):

Je-li $s(t_1, t_2) = s(r)$, kde $r = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$ radiálně symetrický signál v prostorové oblasti, pak jeho spektrum $S(f_1, f_2) = S(q)$, kde $q = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ je radiálně symetrickým signálem ve spektrální oblasti.

Tato věta není překvapením uvědomíme-li si, že radiálně symetrický signál můžeme získat rotací o libovolný úhel procházející interval $(0, 2\pi)$, přičemž stejná rotace bude probíhat ve spektrální rovině. Zde však provedeme podrobný důkaz abychom získali explicitní vztah mezi spektrem radiálně symetrického signálu a tímto signálem.

Důkaz:

Uvažme transformaci souřadnic $t_1, t_2 \rightarrow r, \theta$

$$t_1 = r \cos(\theta), \quad t_2 = r \sin(\theta), \quad r \in (0, \infty), \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

Díky radiální symetrii závisí signál v těchto nových souřadnicích pouze na r . Provedme analogickou transformaci souřadnic i ve spektrální oblasti, $f_1, f_2 \rightarrow q, \Theta$

$$f_1 = q \cos(\Theta), \quad f_2 = q \sin(\Theta), \quad q \in (0, \infty), \quad \Theta \in (0, 2\pi).$$

Přepíšme vzorec pro 2-D Fourierovo spektrum v těchto souřadnicích

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, t_2) \exp\{-i2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)\} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{\infty} s(r) \left[\int_0^{2\pi} \exp(-i2\pi q r \cos(\theta - \Theta)) d\theta \right] r dr \\ &= \int_0^{\infty} s(r) \left[\int_0^{2\pi} \exp(-i2\pi q r \cos(\alpha)) d\alpha \right] r dr, \end{aligned}$$

kde při substituci $\alpha = \theta - \Theta$ jsme mohli ponechat původní meze díky 2π -periodicitě integrandu. Výraz v hranatých závorkách je roven 2π -násobku Besselovy funkce prvního druhu $J_0(2\pi q r)$ (viz

dodatek D.15, rovnice (D.15.3)). Máme tedy

$$S(f_1, f_2) = 2\pi \int_0^{\infty} s(r) J_0(2\pi qr) r dr = S(q), \quad \text{c.b.d.} \quad (3.62)$$

Pro radiálně symetrické signály tedy vlastně 2-D Fourierova transformace přechází na transformaci jednodimenzionální. Tato transformace má speciální název – **Hankelova transformace** (nultého řádu). Poznamenejme, že pro inverzní Fourierovu transformaci bychom analogickým odvozením dospěli ke zcela shodnému vyjádření $s(r)$ pomocí $S(q)$, tedy Hankelova transformace je symetrická (vzorce pro přímou a inverzní transformaci jsou totožné). Vlastnosti Hankelovy transformace v podstatě kopírují vlastnosti 2-D Fourierovy transformace. V případě operací je třeba vyloučit ty, které by narušily radiální symetrii (posunutí, modulace)

Příklad:

Najděte 2D spektrum signálu

$$s(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{v kruhu } t_1^2 + t_2^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Signál je radiálně symetrický a jeho 2D spektrum je podle (3.62)

$$S(q) = 2\pi \int_0^{\infty} s(r) J_0(2\pi qr) r dr = 2\pi \int_0^a J_0(2\pi qr) r dr = \frac{1}{q} \int_0^a 2\pi qr J_0(2\pi qr) dr.$$

Zaveďme substituci $y = 2\pi qr$. Pak

$$S(q) = \frac{1}{2\pi q^2} \int_0^{2\pi qa} y J_0(y) dy.$$

Podle rovnice (D.15.6) z dodatku D.15 pro Besselovy funkce prvního druhu platí

$$\frac{d}{dy}(y J_1(y)) = y J_0(y).$$

Pro spektrum tedy dostáváme

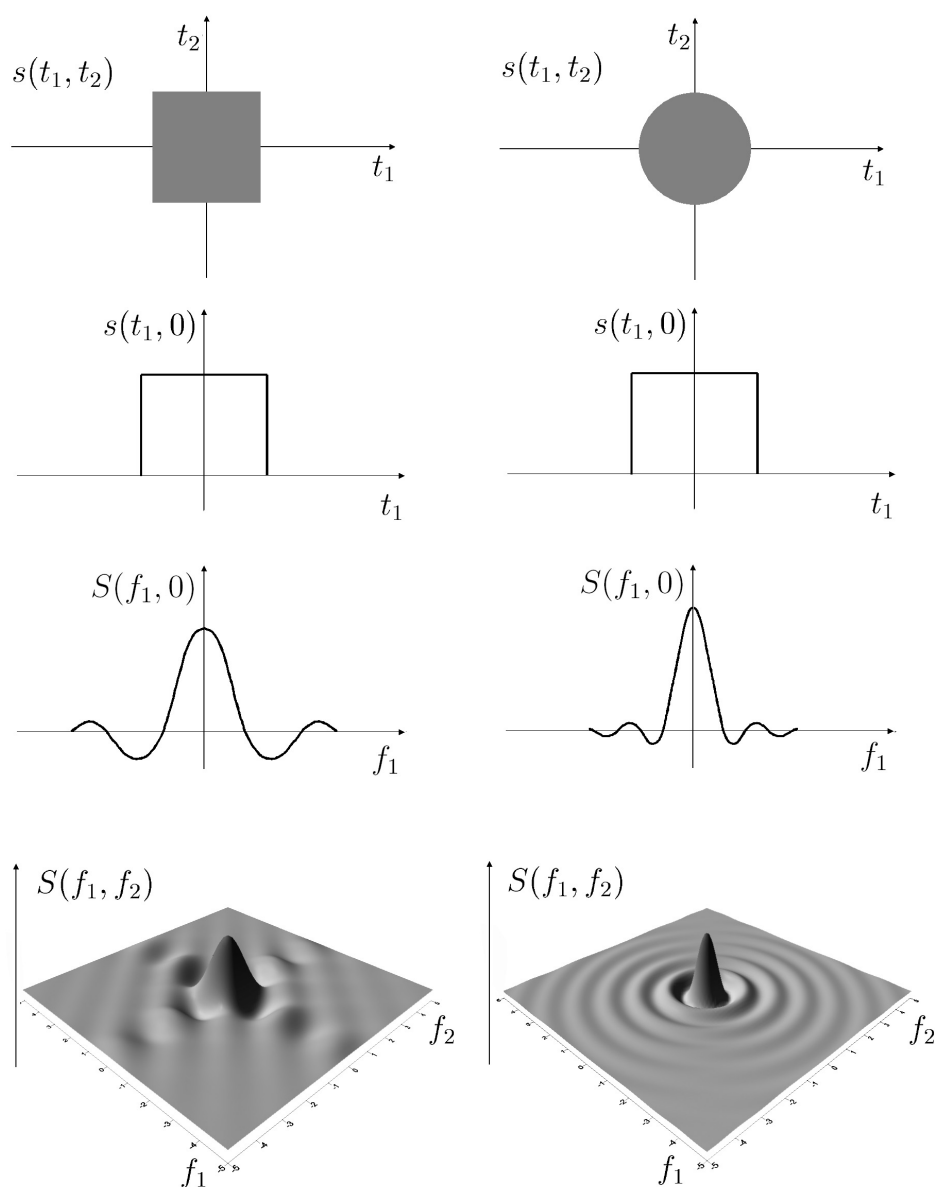
$$S(q) = \frac{1}{2\pi q^2} [y J_1(y)]_0^{2\pi qa} = \frac{a}{q} J_1(2\pi qa),$$

neboť $J_1(0) = 0$.

Obrázek 3.30 srovnává 2-D Fourierovu transformaci radiálně symetrického a nesymetrického signálu. Oba signály mají stejný řez v rovinách $t_1 = 0$ a $t_2 = 0$, odpovídající 1-D řezy spektra se však liší.

Obrázek názorně ilustruje, že obecně

$$\mathcal{F}(s(t_1, 0)) \neq S(f_1, 0), \quad \mathcal{F}(s(0, t_2)) \neq S(0, f_2),$$



Obrázek 3.30: Srovnání dvoudimenzionální Fourierovy transformace signálu bez radiální symetrie (vlevo) a signálu s radiální symetrií (vpravo). Shora dolů: signál v rovině (t_1, t_2) (šedá barva odpovídá hodnotě 1 a bílá hodnotě 0), řez signálu pro $t_2 = 0$, řez spektra pro $f_2 = 0$, spektrum v rovině (f_1, f_2) . Poznamenejme, že v obou případech je spektrum reálné.

tj. řez 2-D spektra např. v rovině $f_2 = 0$ obecně neodpovídá spektru jednodimenzionálního signálu, který by vznikl řezem $s(t_1, t_2)$ v rovině $t_2 = 0$. Signál na obrázku 3.30 vlevo, u kterého řez spektra v rovině $f_2 = 0$ představuje spektrum odpovídajícího jednodimenzionálního signálu, patří do kategorie násobných signálů a uplatňuje se u něj vlastnost separability (viz rovnice (4.9)).

3.15 Základy lineární filtrace

Filtrem budeme rozumět lineární časově invariantní systém, do něhož vstupuje komplexní signál $f_i(t)$ (input) a vystupuje obecně jiný komplexní signál $f_o(t)$ (output), viz schema na obrázku 3.31.



Obrázek 3.31: Signál $f_i(t)$ vstupuje do lineárního filtru. Výstupem (výsledkem filtrace) je signál $f_o(t)$. Signály jsou obecně komplexní, speciálně může být jeden z nich nebo oba reálné.

Takový systém budeme reprezentovat operátorem L :

$$L(f_i(t)) = f_o(t).$$

Tento zápis interpretujeme tak, že operátor L působí nějakým konkrétním způsobem na signál f_i proměnné t (nikoliv jen na jednu funkční hodnotu pro jedno dané t) a výsledkem tohoto působení je nový signál proměnné t , $f_o(t)$. Z tohoto pohledu by tedy bylo správnější užívat značení $L(f_i)(t)$, avšak vzhledem k tomu, že značení ve výše uvedené rovnici se široce používá, budeme jej užívat i v tomto kurzu. Může představovat například nějaký fyzikální proces, popsany příslušnou lineární diferenciální rovnicí, nebo vliv měřicího přístroje apod. Operátor L definujeme tak, že musí být lineární

$$L(a_1 f_{i1}(t) + a_2 f_{i2}(t)) = a_1 L(f_{i1}(t)) + a_2 L(f_{i2}(t)) = a_1 f_{o1}(t) + a_2 f_{o2}(t),$$

kde a_1, a_2 jsou nějaké reálné nebo komplexní konstanty, a časově invariantní

$$L(f_i(t+h)) = f_o(t+h),$$

kde h představuje libovolný reálný časový posun. Časová invariance znamená, že časový odstup dvou událostí na vstupu je stejný jako časový odstup těchto dvou událostí na výstupu – nic se neříká o případném časovém posunu mezi vstupem a výstupem. Časová invariance je podmíněna tím, že vlastnosti systému (filtru), včetně jeho parametrů a charakteristik probíraných v následujícím textu, se s časem nemění.

Z „fyzikálních“ důvodů většinou klademe na filtr ještě další přirozený požadavek: stabilitu. Je-li vstup omezený, musí být omezený i výstup

$$|f_i(t)| \leq A \quad \forall t \Rightarrow \exists B > 0, |f_o(t)| \leq B \quad \forall t.$$

Filtr je jednoznačně určen, je-li znám vztah mezi f_o a f_i . Tento vztah většinou kvantifikujeme pomocí tzv. charakteristik filtru, což jsou odezvy filtru na některé speciální vstupy (harmonický signál, δ -funkce, Heavisideova funkce apod.). Tyto charakteristiky pochopitelně nejsou nezávislé – známe-li jednu z nich, ostatní z ní můžeme dopočítat.

První charakteristikou filtru, kterou zde probereme, je tzv. **impulzní odezva** $i(t)$, tj. $f_o(t)$ pro $f_i(t) = \delta(t)$. Jak nám znalost $i(t)$ pomůže najít výstup $f_o(t)$ odpovídající obecnému vstupu $f_i(t)$?

Věta (O impulzní odezvě lineárního filtru):

Je-li $i(t) = L(\delta(t))$ impulzní odezvou lineárního časově invariantního filtru, pak pro obecný výstup $f_o(t) = L(f_i(t))$ platí

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau)i(t - \tau)d\tau = f_i(t) * i(t).$$

Obecný výstup je tedy jednoznačně určen konvolucí obecného vstupu a impulzní odezvy.

Důkaz:

Díky vlastnostem δ -funkce (viz dodatek D.17), můžeme každý obecný vstup napsat pomocí konvoluce s δ -funkcí

$$f_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

Z linearity systému pak plyne, že obecný výstup musí být dán jako

$$f_o(t) = L(f_i(t)) = L\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau)L(\delta(t - \tau))d\tau.$$

Je-li $i(t) = L(\delta(t))$, musí být díky časové invarianci $i(t - \tau) = L(\delta(t - \tau))$ pro každé τ . Máme tedy

$$f_o(t) = L(f_i(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tau)i(t - \tau)d\tau = f_i(t) * i(t), \quad \text{c.b.d}$$

Poznamenejme, že na Hilbertovu transformaci definovanou v dodatku D.19 a diskutovanou v odstavci 3.12 se z tohoto hlediska můžeme dívat jako na speciální filtr s impulzní odezvou $1/\pi t$.

Další velmi často používanou charakteristikou filtru je tzv. **přenosová funkce**. Tato funkce úzce souvisí s odezvou filtru na harmonický signál.

Věta (O odezvě na harmonický signál):

Předpokládejme obecně komplexní harmonický signál s úhlovou frekvencí ω_0 , $\exp(i\omega_0 t)$. Pro odezvu na tento signál platí

$$f_o(t) = L(\exp(i\omega_0 t)) = k \exp(i\omega_0 t),$$

kde konstanta $k = f_o(0)$.

Funkce $\exp(i\omega_0 t)$ představuje tedy vlastní funkci filtru a konstanta k je pak odpovídající vlastní číslo (obecně komplexní)²⁵.

Důkaz:

Díky časové invarianci musí platit

$$L(\exp(i\omega_0(t+h))) = f_o(t+h),$$

kde h je libovolný časový posun. Zároveň však z linearity máme

$$L(\exp(i\omega_0(t+h))) = L(\exp(i\omega_0 h) \exp(i\omega_0 t)) = \exp(i\omega_0 h) L(\exp(i\omega_0 t)) = \exp(i\omega_0 h) f_o(t).$$

Tudíž

$$f_o(t+h) = \exp(i\omega_0 h) f_o(t).$$

Tato rovnost musí platit pro každé t , tedy i pro $t=0$:

$$f_o(h) = f_o(0) \exp(i\omega_0 h).$$

V této rovnici h je libovolné reálné číslo mající rozměr času – můžeme jej tedy chápat jako proměnnou a pro větší názornost bez újmy obecnosti přeznačit $h \rightarrow t$; $f_o(t) = f_o(0) \exp(i\omega_0 t)$, c.b.d.

Konstanta k je konstantou (vzhledem k času) při fixovaném ω_0 . Pro jinou frekvenci harmonického signálu by obecně vyšla tato konstanta jiná. Chápeme-li frekvenci jako proměnnou, k je funkcí této frekvence, $k(\omega)$. Funkci $k(\omega)$ budeme značit $T(\omega)$ a nazývat přenosovou funkcí²⁶ filtru. Výstup filtru pro obecný harmonický vstup je tedy možné psát jako funkci času i frekvence

$$L(\exp(i\omega t)) = T(\omega) \exp(i\omega t). \quad (3.63)$$

Vyjádříme-li přenosovou funkci $T(\omega)$ pomocí modulu a fáze, $T(\omega) = |T(\omega)| \exp(i\theta(\omega))$, pak $|T(\omega)|$ se nazývá **zisk filtru** a $\theta(\omega)$ je tzv. **fázové zpoždění filtru**.

Příklad:

Najděte výstup $f_o(t)$ filtru (lineárního časově invariantního systému), který je odezvou na vstupující $f_i(t) = C \cos(\omega t + \beta)$.

Kosinus je reálnou částí exponenciální funkce, můžeme proto psát

$$L(\cos(\omega t)) = \Re\{T(\omega) \exp(i\omega t)\} = |T(\omega)| \cos(\omega t + \theta(\omega)).$$

Díky linearitě a časové invarianci filtru pak můžeme psát

$$L(C \cos(\omega t + \beta)) = C |T(\omega)| \cos(\omega t + \beta + \theta(\omega)).$$

Vidíme tedy, že z filtru vystupuje opět kosinus, avšak s obecně modifikovanou amplitudou ($C|T(\omega)|$) a fázovým posunem vůči vstupnímu signálu o $\theta(\omega)$, viz schematický obrázek 3.32. Důležitým poznatkem je, že filtr nemění frekvenci (periodu) kosinu. Obdobné závěry bychom dostali i pro sinus.

²⁵Je konstantní pouze v proměnné t , obecně závisí na hodnotě parametru ω_0 .

²⁶Anglicky „transfer function“.



Obrázek 3.32: Signál $f_i(t) = C \cos(\omega t)$ vstupuje do lineárního filtru. Výstupem (výsledkem filtrace) je signál $f_o(t) = C|T(\omega)| \cos(\omega t + \theta(\omega))$, kde $T(\omega)$ je přenosová funkce filtru a $\theta(\omega)$ jeho fázové zpoždění. Frekvence (perioda) vstupujícího a vystupujícího harmonického signálu jsou stejné.

Speciálním vstupem $f_i(t)$, pro který můžeme okamžitě určit výstup $f_o(t)$ pomocí vztahu (3.63), je konstantní funkce:

$$f_i(t) = C \exp(i\omega t) \Big|_{\omega=0} \Rightarrow f_o(t) = C T(\omega) \exp(i\omega t) \Big|_{\omega=0} = CT(0).$$

Výstupem filtru, který je odezvou na vstupující konstantní funkci, je tedy opět konstantní funkce, $L(C) = CT(0)$.

Abychom však mohli o přenosové funkci mluvit jako o charakteristice filtru, musíme pomocí ní být schopni spočítat výstup $f_o(t)$ pro obecný vstup $f_i(t)$.

Věta (O přenosové funkci):

Předpokládejme filtr (lineární časově invariantní systém) s přenosovou funkcí $T(\omega)$, do kterého vstupuje obecný vstup $f_i(t)$, pro něž existuje Fourierova transformace. Pro odezvu na obecný vstup $f_i(t)$ platí

$$f_o(t) = \mathcal{F}^{-1}(T(\omega)\mathcal{F}(f_i(t))) = \mathcal{F}^{-1}(T(\omega)F_i(\omega)). \quad (3.64)$$

Důkaz:

Každý takový obecný vstup můžeme zapsat pomocí inverzní Fourierovy transformace (v případě úhlové frekvence použijeme vztah (3.4)) jeho spektra $F_i(\omega)$. Díky linearitě filtru pak obecný výstup je

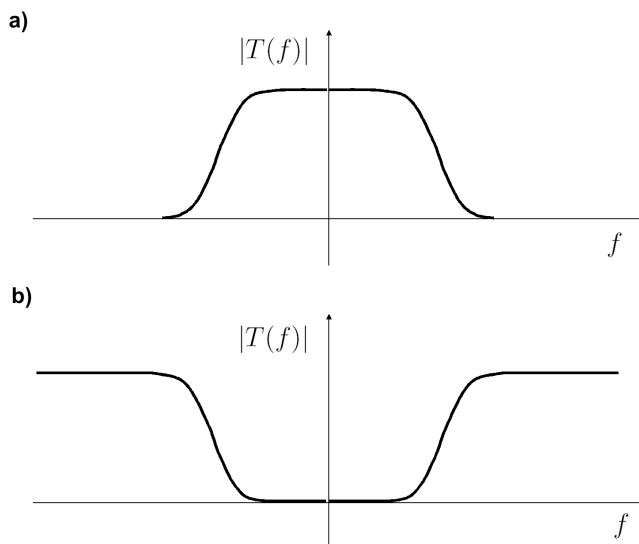
$$f_o(t) = L \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) L(\exp(i\omega t)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\omega) T(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Spektrum výstupního signálu je tedy

$$F_o(\omega) = \mathcal{F}(f_o(t)) = T(\omega)F_i(\omega), \quad \text{c.b.d.} \quad (3.65)$$

Podle tvaru přenosové funkce (přesněji řečeno jejího modulu) můžeme rozlišit, zda filtr je nízkofrekvenční (tj. představuje tzv. nízkofrekvenční propust) nebo vysokofrekvenční (vysokofrekvenční

propustí). V prvním případě filtr propouští nízké frekvence²⁷ a vysoké potlačuje²⁸ a ve druhém případě je tomu naopak. Oba případy ilustruje obrázek 3.33, který představuje vždy jednu konkrétní realizaci daného typu filtru (v detailním tvaru přenosové funkce se jednotlivé konkrétní vysokofrekvenční a nízkofrekvenční propusti liší). Některé ukázky tohoto typu filtrace dat poskytuje obrázek 3.34. Dobře je zde vidět, jak nízkofrekvenční propust způsobuje odstraněním vysokých frekvencí vyhlazení dat. Často se používají také pásmové filtry, které propouštějí nebo naopak potlačují pouze frekvence v určitém rozsahu.



Obrázek 3.33: Zisk filtru $|T(f)|$, který funguje jako nízkofrekvenční (a) nebo vysokofrekvenční (b) propust.

Z (3.65) a (3.15) je zřejmé, že přenosová funkce musí být Fourierovou transformací impulzní odezvy.

Věta (O vztahu přenosové funkce a impulzní odezvy):

Předpokládejme filtr (lineární časově invariantní systém) s přenosovou funkcí $T(\omega)$ a impulzní odezvou $i(t)$. Pak přenosová funkce a impulzní odezva jsou ve vztahu Fourierovy transformace

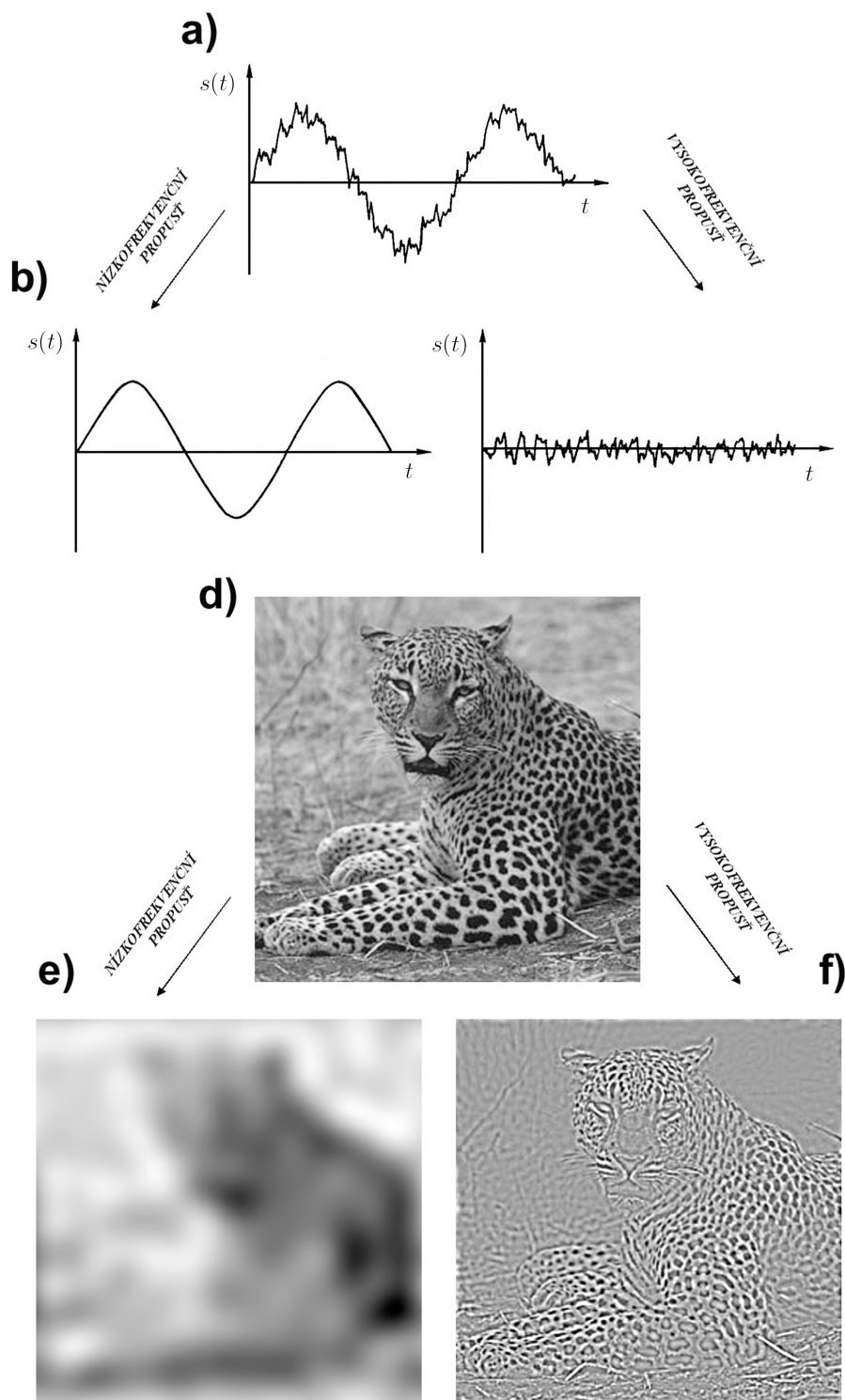
$$T(\omega) = \mathcal{F}(i(t)), \quad i(t) = \mathcal{F}^{-1}(T(\omega)). \quad (3.66)$$

Důkaz:

Díky jednoznačnosti Fourierovy transformace stačí dokázat pouze jednu z rovností (3.66). Důkaz druhé rovnosti je přímočařejší a jednodušší, a proto jej ponecháme do cvičení. Zde se zaměříme na důkaz první rovnosti, který stojí na rovnici (3.63). Nechť do filtru vstupuje $f_i(t) = \exp(i\omega_0 t)$. Odpovídající Fourierovo spektrum vstupu je podle cvičení 3.5.1 $F_i(\omega) = \mathcal{F}(f_i(t)) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$.

²⁷Co lze ještě považovat za nízkou frekvenci je samozřejmě relativní, závisí na konkrétní aplikaci.

²⁸Proto se takový filtr někdy alternativně nazývá vysokofrekvenční zadrž.



Obrázek 3.34: Ukázky vysokofrekvenční a nízkofrekvenční filtrace: a, d původní data, b, e data po aplikaci nízkofrekvenční propusti, c, f data po aplikaci vysokofrekvenční propusti. (Obrázky d – f jsou digitální, zde jsou však pro účely výkladu modelem transformace spojitého signálu.)

Pro spektrum výstupu pak musí platit

$$\mathcal{F}(f_o(t)) = \mathcal{F}(f_i(t) * i(t)) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)\mathcal{F}(i(t)) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)I(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)I(\omega_0).$$

Výstupní signál v časové oblasti je pak inverzní transformací tohoto výrazu

$$f_o(t) = L(\exp(i\omega_0 t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_o(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = I(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \exp(i\omega t) d\omega = I(\omega_0) \exp(i\omega_0 t)$$

pro libovolné ω_0 . Porovnáním s (3.63) dostáváme

$$I(\omega) = \mathcal{F}(i(t)) = T(\omega), \quad \text{c.b.d.}$$

Chceme-li tedy určit výstup z filtru odpovídající obecnému vstupu, máme na výběr minimálně dvě možnosti. Známe-li impulzní odezvu, můžeme v časové oblasti provést konvoluci vstupu s touto impulzní odezvou. Alternativně můžeme filtraci provést ve spektrální oblasti: najdeme Fourierovo spektrum vstupu, přenásobíme jej přenosovou funkcí (spektrém impulzní odezvy) a inverzní Fourierovou transformací získáme požadovaný výstup. Situaci schematicky ukazuje obrázek 3.35. Je-li k dispozici efektivní algoritmus pro výpočet Fourierovy transformace (viz odstavec 5), je tento druhý způsob většinou výhodnější²⁹ a proto se v praxi často používá. Jedná se o důležitou praktickou aplikaci Fourierovy transformace.

Cvičení 3.15.1:

Dokažte přímým odvozením druhou rovnost v (3.66).

Příklad:

Jaká musí být přenosová funkce filtru, který zachovává tvar signálu (tj. výstup je oproti vstupu pouze posunutý v čase a přenásobený konstantou)?

Podle zadání musí tedy platit, že

$$f_o(t) = K f_i(t - t_0).$$

Spektrum výstupu je tedy podle (3.31) a samozřejmě i pomocí (3.27)

$$F_o(\omega) = K F_i(\omega) \exp(-i\omega t_0), \quad F_i(\omega) = \mathcal{F}(f_i(t)).$$

Přenosová funkce je tedy

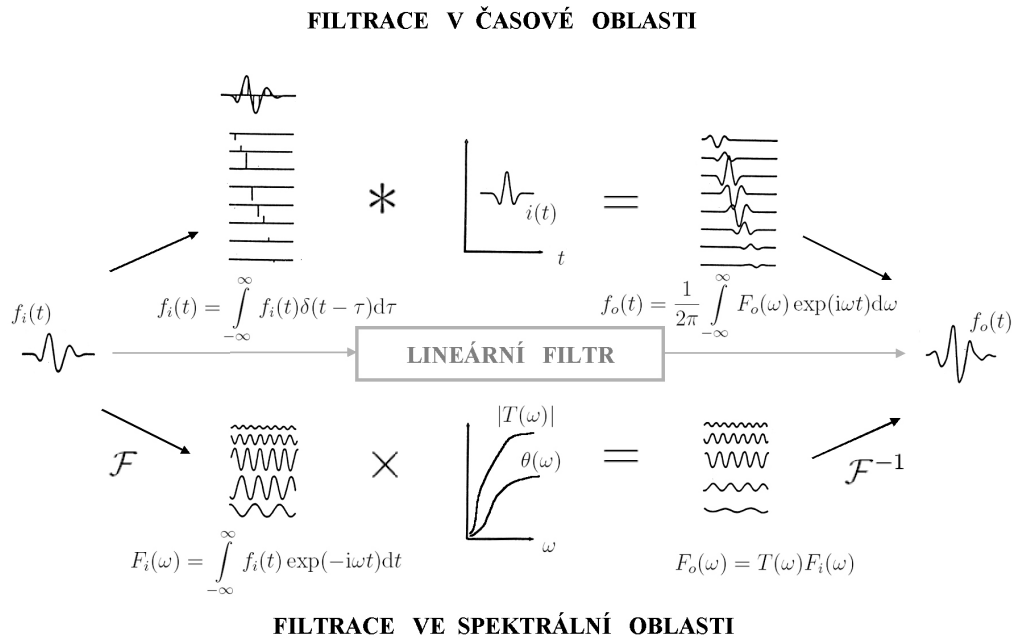
$$T(\omega) = K \exp(-i\omega t_0) = |T(\omega)| \exp(i\theta(\omega)), \quad |T(\omega)| = K, \quad \theta(\omega) = -\omega t_0.$$

Filtr musí tedy mít konstantní zisk a lineární fázové zpoždění. Někdy se takovým filtrům říká filtry s lineární fází.

Důležitou skupinou jsou tzv. kauzální filtry. Jsou definovány následující podmínkou

$$f_i(t) = 0, \quad t < 0 \quad \Rightarrow \quad f_o(t) = 0, \quad t < 0. \quad (3.67)$$

²⁹Záleží však na velikosti nosiče impulzní odezvy a přenosové funkce, případně na délce intervalu, na kterém lze tyto charakteristiky považovat za efektivně nenulové.



Obrázek 3.35: Schema filtrace v časové a frekvenční oblasti.

Takový filtr tedy zachovává kauzalitu – vstupuje-li kauzální vstup, vystupuje kauzální výstup. Jak poznáme, že daný filtr je kauzální? Máme v principu 2 možnosti. Impulzní odezva takového filtru musí rovněž být kauzální funkcí času, neboť se jedná o dezvu na δ -funkci, která podmínku kauzality splňuje. Druhou možností, spíše však teoretickou, by bylo ověřit, že přenosová funkce vyhovuje Kramers-Kronigovým relacím. V praxi je pochopitelně většinou jednodušší první postup. V případě kauzálních filtrů se díky kauzalitě impulzní odezvy zjednodušuje vzorec pro výpočet obecného výstupu. Konkrétně, vstupuje-li nekauzální vstup, je výstup dán jako

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^t f_i(\tau) i(t - \tau) d\tau$$

Vstupuje-li kauzální signál, máme dokonce

$$f_o(t) = \int_0^t f_i(\tau) i(t - \tau) d\tau.$$

Impulzní odezva a přenosová funkce jsou možná nejznámější, nikoliv však jediné charakteristiky filtru. Často se používá i odezva na Heavisideovu funkci $h(t) = L(u(t))$. Důvod pro použití této charakteristiky je její snadná měřitelnost – je to např. odezva na zapnutí nějakého zařízení.

Stejně jako impulzní odezva a přenosová funkce nejsou nezávislé (je mezi nimi vztah Fourierovy transformace), i odezva na Heavisideovu funkci není nezávislá a je svázána s těmito charakteristikami následujícími vztahy:

Věta (O vztazích mezi charakteristikami filtru):

Předpokládejme filtr (lineární časově invariantní systém) s přenosovou funkcí $T(\omega)$ a impulzní odezvou $i(t)$. Pak pro odezvu na Heavisideovu funkci platí

$$h(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = T(0). \quad (3.68)$$

Ve spektrální oblasti pak platí vztah

$$H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)) = \frac{1}{i\omega} T(\omega) + \pi T(0) \delta(\omega). \quad (3.69)$$

Poznamenejme, že pro kauzální filtr dokonce máme $h(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$.

Důkaz:

Odezva $h(t)$ musí být konvolucí Heavisideovy funkce s impulzní odezvou

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau,$$

kde poslední rovnost je důsledkem kauzality Heavisideovy funkce. V limitě pro $t \rightarrow \infty$ z toho okamžitě plyne pomocí (3.41)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i(\tau) d\tau = T(0), \quad \text{c.b.d.}$$

Spektrální vztah se pak dostane přímo ze vzorce pro spektrum integrálu (3.37).

Důsledkem této věty je též užitečný vztah $i(t) = \frac{dh(t)}{dt}$. Změříme-li odezvu na Heavisideovu funkci (která je v praxi snáze měřitelná), jejím zderivováním získáme impulzní odezvu. Provedeme-li „derivování“ ve spektrální oblasti, tj. násobíme-li spektrum $H(\omega)$ faktorem $i\omega$, dostaneme přenosovou funkci: $T(\omega) = i\omega H(\omega)$.

Známe-li odezvu na Heavisideovu funkci, není nutné přecházet k impulzní odezvě či přenosové funkci. Obecný výstup filtru můžeme určit přímo s pomocí odezvy $h(t)$ a jejího spektra, pomocí následující věty

Věta (O odezvě na Heavisideovu funkci):

Předpokládejme filtr (lineární časově invariantní systém) s přenosovou funkcí $T(\omega)$ a odezvou na Heavisideovu funkci $h(t) = L(u(t))$. Pak pro odezvu na obecný vstup, který má konečnou limitu pro $t \rightarrow -\infty$, platí

$$f_o(t) = \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} f_i(t) \right) T(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f_i'(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (3.70)$$

kde f_i' označuje derivaci. Ve spektrální oblasti pak platí vztah

$$F_o(\omega) = i\omega H(\omega) F_i(\omega), \quad (3.71)$$

kde $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t))$, $F_i(\omega) = \mathcal{F}(f_i(t))$, a $F_o(\omega) = \mathcal{F}(f_o(t))$.

Důkaz:

Označme K konečnou limitu f_i v $-\infty$. Obecný vstup pak můžeme psát jako

$$f_i(t) = K + \int_{-\infty}^t f_i'(\tau) d\tau = K + \int_{-\infty}^{\infty} f_i'(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

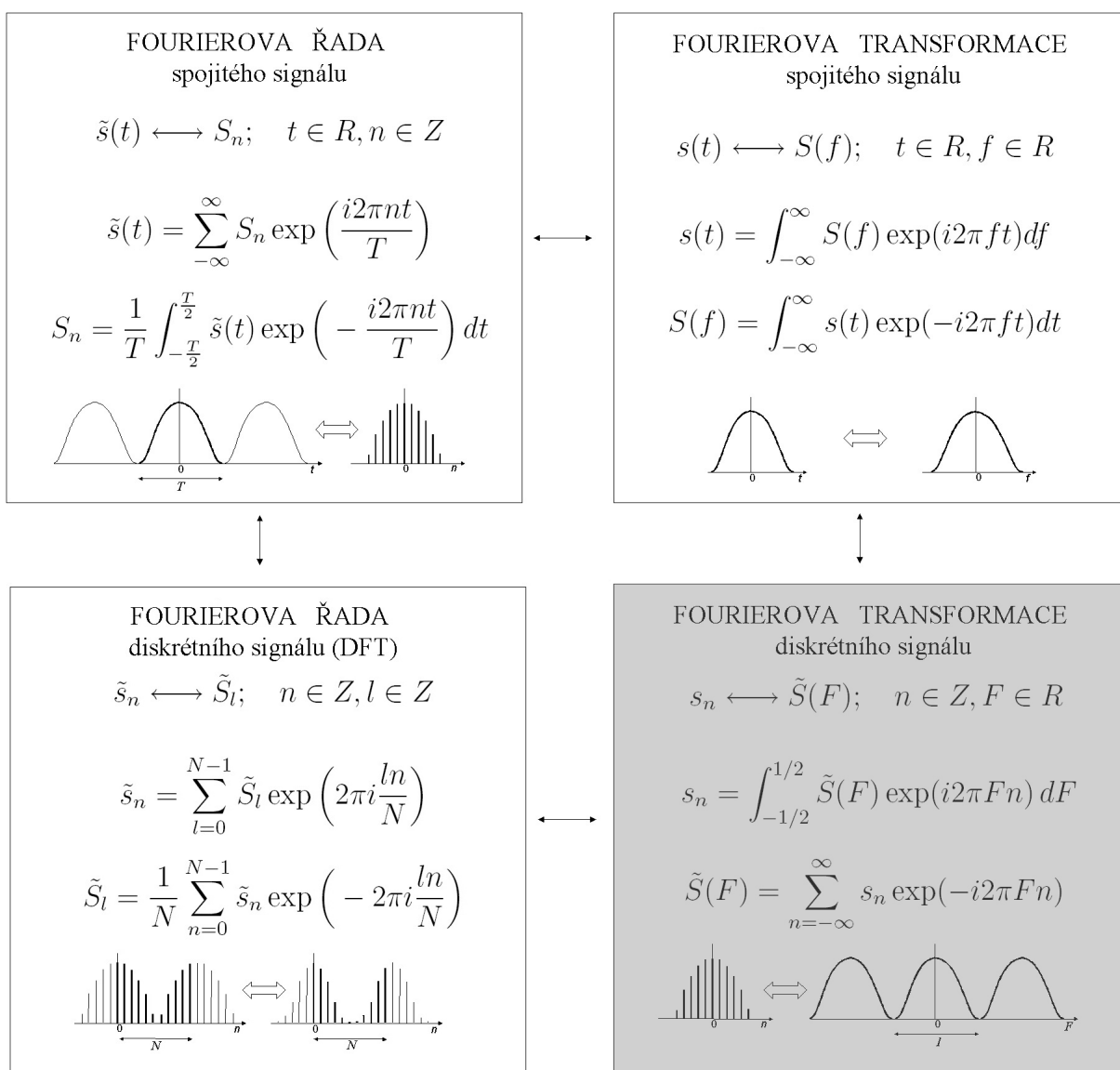
Obecný výstup je pak

$$f_o(t) = L(f_i(t)) = KT(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f_i'(\tau) L(u(t - \tau)) d\tau = KT(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f_i'(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad \text{c.b.d.}$$

Spektrální vztah (3.71) je přímým důsledkem (3.69) a (3.65).

Kapitola 4

FOURIEROVA TRANSFORMACE DISKRÉTNÍHO SIGNÁLU

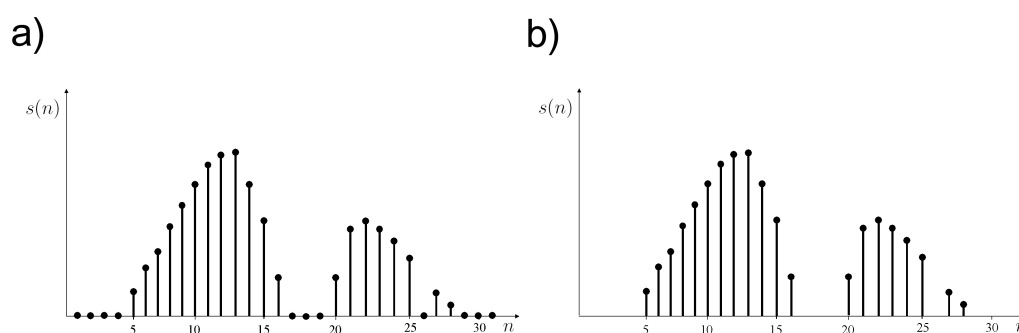


V předcházejících kapitolách jsme v časové oblasti uvažovali spojité signály. V praxi ovšem většinou signál neznáme pro časy z reálného oboru, ale spíše v nějakých diskretních bodech. Také pro účely zpracování za pomoci výpočetní techniky je třeba pracovat s diskretními a nikoliv spojitými signály. Proto je důležité i v oblasti teoretické přejít ke spektrální analýze diskretních signálů a dobře vyjasnit vztahy mezi Fourierovskými transformacemi diskretních signálů a jejich spojitých protějšků, tj. spojitých signálů, ze kterých signály diskretní vznikly příslušným vzorkováním.

Začneme s Fourierovou transformací diskretního signálu. Tato transformace přiřazuje diskretnímu neperiodickému signálu v časové oblasti spojitý periodický signál ve spektrální oblasti. Opět se zde vlastně projevuje „dualita“ diskretizace a periodizace diskutovaná v předcházející kapitole. Tato transformace nemá velký význam pro praktické výpočty, neboť spektrum je spojitým signálem a výpočetní technika s takovými signály neumí pracovat. Má však velký význam teoretický jako jakýsi logický předstupeň Fourierovy řady diskretního signálu (nebo též diskretní Fourierovy transformace) probírané v následující kapitole. Velmi důležitou aplikací této transformace je tzv. vzorkovací teorém, viz odstavec 4.5.

4.1 Definice Fourierovy transformace diskretního signálu.

Vyjasněme nejprve, co přesně budeme rozumět diskretním signálem. Podle definice v kapitole 1.2 je diskretní signál obecně komplexní funkce celočíselné proměnné: $s(n)$; $n \in \mathbb{Z}$. Pro účely definice Fourierovy transformace diskretního signálu specifikujme ještě dále, že $n \in \mathbb{Z}$ tvoří po sobě jdoucí posloupnost celých čísel. Na obrázku 4.1a je znázorněn příklad takového signálu v porovnání s obrázkem 4.1b, který naší specifikaci neodpovídá. Vzdálenost „vzorků“¹ na vodorovné ose je tedy vždy 1.



Obrázek 4.1: Specifikace diskretního signálu, a) příklad diskretního signálu používaného pro Fourierovu transformaci, b) obecnější typ diskretního signálu.

¹Tento pojem zde není zcela namístě, neboť se zatím nejedná o diskretizaci původně spojitého signálu.

Definice: (Fourierova transformace diskretního signálu pro úhlovou frekvenci)

Fourierovou transformací (spektrém) diskretního signálu $s(n)$ nazveme funkci $\tilde{S}(\Omega)$

$$\tilde{S}(\Omega) = \mathcal{F}[s(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \exp(-i\Omega n). \quad (4.1)$$

Inverzní Fourierovou transformací odpovídající spektru $\tilde{S}(\Omega)$ je

$$s(n) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{S}(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}(\Omega) \exp(i\Omega n) d\Omega. \quad (4.2)$$

Porovnáme-li vzorec pro přímou transformaci diskretního a spojitého signálu vidíme, že vzorec (4.1) je zřejmou diskretní analogií vzorce (3.5), kde pouze spojitý signál $s(t)$ je nahrazen diskretním $s(n)$ (tj. místo proměnné t máme proměnnou n) a tím pádem integrál je přirozeně nahrazen sumou. Záměrně zde používáme jiný symbol pro proměnnou ve frekvenční oblasti (než tradiční ω , které jsme používali dosud), abychom zdůraznili rozdíl mezi úhlovou frekvencí spojitého a diskretního signálu. To je důležité zejména tehdy, zkoumáme-li vztah Fourierovy transformace obou typů signálu (viz odstavec 4.4). Jak uvidíme dále, obě frekvence mají také jiný fyzikální rozměr.

Z numerického hlediska se dokonce na vzorec (4.1) můžeme dívat jako na aproximaci vzorce definujícího spektrum spojitého signálu (3.5), pokud příslušný integrál vyjádříme pomocí lichoběžníkového pravidla (obrázek 4.2). Rozdělme integrační obor na intervaly délky Δt

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} s(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Aproximací lichoběžníkovým pravidlem dostaneme

$$S(\omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \Delta t [s(n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) + s((n+1)\Delta t) \exp(-i\omega(n+1)\Delta t)].$$

Jelikož se díky nekonečným mezím vlastně jedná o součet dvou identických sum, můžeme psát

$$S(\omega) \approx \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t).$$

Použijeme-li substituci

$$\Omega = \omega \Delta t, \quad (4.3)$$

označíme-li $\tilde{S}(\Omega) = \frac{1}{\Delta t} S(\omega \Delta t)$ a ztotožníme-li vzorky $s(n\Delta t)$ s hodnotami diskretního signálu $s(n)$, dostaneme definiční vzorec Fourierovy transformace diskretního signálu

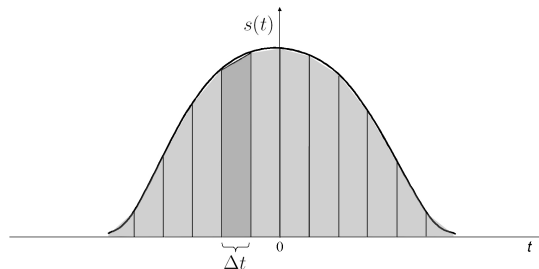
$$\tilde{S}(\Omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \exp(-i\Omega n)$$

ve tvaru aproximace. Tudíž tvar vzorce (4.1) je přirozenou diskretní analogií vzorce (3.5) i s ohledem na jeho numerický výpočet. Tuto úvahu můžeme dovést ještě dále a uvědomit si souvislost přesnosti výpočtu příslušného integrálu lichoběžníkovým pravidlem a vztahu spektra diskretního a spojitého signálu. Tento vztah je podrobně diskutován v odstavci 4.4 a je, jak již víme, dán periodizací spektra spojitého signálu s případným efektem alias. Můžeme tedy říci, že chyba diskretizace při uplatnění numerického výpočtu integrálu Fourierovy transformace v časové oblasti je spjata s efektem alias v oblasti spektrální.

Alternativně můžeme spektrum diskretního signálu vyjádřit i pomocí úhlové frekvence spojitého signálu² ω . Přepočtení mezi oběma frekvencemi je dán vzorcem (4.3) a spektrum (4.1) vyjádřené pomocí ω je tedy

$$\tilde{S}(\omega) = \mathcal{F}[s(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \exp(-i\omega\Delta tn).$$

Ze vzorečku (4.3) je také zřejmé, že je-li jednotkou úhlové frekvence spojitého signálu (ω) radián za sekundu, je jednotkou úhlové frekvence diskretního signálu (Ω) radián na vzorek, neboť časový krok měříme v sekundách na vzorek.



Obrázek 4.2: Aproximace integrálu z funkce $s(t)$ lichoběžníkovým pravidlem při diskretizačním kroku Δt . Součet šedých lichoběžníků se přibližně rovná ploše pod křivkou.

Jaké jsou podmínky existence Fourierovy transformace diskretního signálu? Souhrnně lze říci, že řada (4.1) musí mít konečný součet, přesněji řečeno, posloupnost částečných součtů

$$\tilde{S}_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^N s(n) \exp(-i\Omega n) \quad (4.4)$$

musí v nějakém smyslu při $N \rightarrow \infty$ konvergovat ke konečnému číslu $\tilde{S}(\Omega)$. Z teorie řad je známo, že součet na pravé straně (4.1) existuje a dává spojitou funkci $\tilde{S}(\Omega)$ (ve smyslu spojitosti matematické funkce, nikoliv jen spojitosti signálu), pokud platí

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)| < \infty.$$

V tomto případě se jedná o stejnoměrnou konvergenci částečných součtů (4.4). Existence součtu bez spojitosti dané funkce je zajištěna již při slabší podmínce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2 < \infty.$$

²V jaké proměnné danou funkci vyjadřujeme je formální a je to věcí dohody, musíme však vždy odpovídajícím způsobem upravit příslušné funkční vztahy.

Částečné součty pak konvergují ve smyslu L_2 normy:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{S}(\Omega) - \tilde{S}_N(\Omega)|^2 d\Omega = 0.$$

Spektrum pak může být v některých bodech (na množině míry nula) nespojité. V praxi většinou pracujeme se signály s omezeným nosičem, například takovými jako na obrázku 1.2, a pro ně jsou podmínky existence Fourierovy transformace bez problémů splněny.

Důležitým rysem této transformace je, že v sumě na pravé straně v (4.1) sčítáme exponenciály, které jsou 2π -periodické v proměnné Ω . Tedy i jejich součet, spektrum $\tilde{S}(\Omega)$ je 2π -periodický spojitý signál (což také značíme vlnkou nad symbolem S). Jedná se tedy o vzájemně jednoznačné přiřazení mezi diskretním neperiodickým signálem v časové oblasti a spojitým periodickým signálem ve spektrální oblasti. Vzájemnou jednoznačnost přiřazení ověříme snadno s využitím periodicity exponenciál a jejich ortogonality na intervalu délky periody. Vynásobme $\tilde{S}(\Omega)$ faktorem $\exp(i\Omega m)$ a integrujme od $-\pi$ do π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}(\Omega) \exp(i\Omega m) d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \exp(-i\Omega n) \exp(i\Omega m) d\Omega.$$

Předpokládejme, že můžeme prohodit pořadí sumace a integrace (např. řada konverguje stejnoměrně), pak

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}(\Omega) \exp(i\Omega m) d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i\Omega(n-m)) d\Omega.$$

Spočtěme integrál na pravé straně, nejprve pro $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i\Omega 0) d\Omega = 2\pi.$$

Pro $n - m = l \neq 0$ máme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i\Omega l) d\Omega = \left[\frac{\exp(-i\Omega l)}{-il} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\exp(-i\pi l)}{il} + \frac{\exp(i\pi l)}{il} = \frac{1}{il} (\cos(\pi l) - \cos(\pi l) + 2 \sin(\pi l)) = 0,$$

kde předposlední rovnost je důsledkem (D.8.1) a poslední rovnost platí neboť sinus celočíselných násobků π je roven 0. Souhrnně tedy máme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i\Omega(n-m)) d\Omega = 2\pi \delta_{nm},$$

kde δ_{nm} je tzv. Kroneckerovo δ ($\delta_{nm} = 1$ pro $n = m$ a $\delta_{nm} = 0$ pro $n \neq m$). Celkem tedy dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}(\Omega) \exp(i\Omega m) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) 2\pi \delta_{nm} = 2\pi s(m),$$

odkud již okamžitě plyne vzorec pro inverzní transformaci (4.2). Obráceně, kdybychom do tohoto vzorce dosadili za spektrum $\tilde{S}(\Omega)$ výraz (4.1), dostaneme po stejných úpravách

$$s(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)\delta_{nm} = s(n),$$

čímž je důkaz vzájemné jednoznačnosti dokončen.

Podobně jako v případě Fourierovy transformace spojitého signálu, i zde můžeme Fourierovu transformaci definovat alternativně pro obyčejnou frekvenci F namísto úhlové Ω , $\Omega = 2\pi F = 2\pi f\Delta t$, kde f je obyčejná frekvence spojitého signálu.

Definice: (Fourierova transformace diskretního signálu pro obyčejnou frekvenci)

Fourierovou transformací (spektrem) diskretního signálu $s(n)$ nazveme funkci $\tilde{S}(F)$

$$\tilde{S}(F) = \mathcal{F}[s(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \exp(-i2\pi Fn). \quad (4.5)$$

Inverzní Fourierovou transformací odpovídající spektru $\tilde{S}(F)$ je

$$s(n) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{S}(F)] = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{S}(F) \exp(i2\pi Fn) dF. \quad (4.6)$$

Poznamenejme také, že v obyčejné frekvenci F je perioda spektra rovna jedné³. V případě spojitých signálů jsme obyčejnou frekvenci preferovali z důvodů symetrie vzorců pro přímou a inverzní transformaci. Pro diskretní signály však máme vzorce pro přímou a inverzní transformaci zcela rozdílné (jeden obsahuje sumaci, druhý integrál) i pro obyčejnou frekvenci, a proto budeme v této kapitole z důvodů jednoduššího zápisu používat frekvenci úhlovou. Úhlová frekvence se také v souvislosti s tímto typem transformace vyskytuje nejčastěji v literatuře. Modifikace vzorců probíraných v následujících odstavcích pro obyčejnou frekvenci je jednoduchá.

Srovnáním (4.5) s (2.16) vidíme, že až na znaménko v exponentu (které je záležitostí konvence, jak víme) představuje přímá Fourierova transformace diskretního signálu vlastně Fourierovu řadu spojitého signálu $\tilde{S}(F)$ s periodou 1 a inverzní Fourierova transformace diskretního signálu pak není nic jiného, než vzorec pro příslušný Fourierův koeficient. Na Fourierovu transformaci diskretního signálu se tedy můžeme dívat jako na Fourierovu řadu, u které jsou však časová a spektrální oblast prohozeny.

Příklad:

Najděte spektrum funkce

$$s(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |n| \leq N \\ 0 & \text{pro } |n| > N \end{cases}$$

³Správně bychom pro označení spektra v obyčejné a úhlové frekvenci měli použít různé symboly. Protože však nebudeme obě reprezentace používat zároveň a nebezpečí záměny tedy nehrozí, vystačíme s jedním symbolem, např. \tilde{S} .

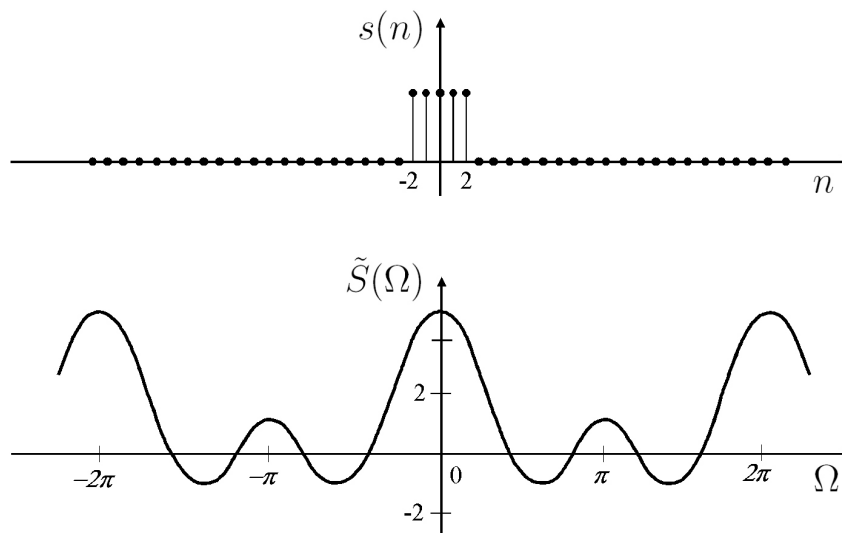
Jedná se o diskretní obdobu pravoúhelníkové funkce. Její spektrum je podle (4.1)

$$\tilde{S}(\Omega) = \sum_{n=-N}^N \exp(-i\Omega n) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(n\Omega),$$

kde jsme využili (D.8.1) a fakt, že kosinus je funkce sudá, zatímco sinus lichá. S pomocí vzorce (D.9.4) pak dostáváme

$$\tilde{S}(\Omega) = 1 + \frac{\sin((N + 1/2)\Omega)}{\sin(\Omega/2)} - 1 = \frac{\sin((N + 1/2)\Omega)}{\sin(\Omega/2)}.$$

Pro $N = 2$ je spektrum diskretní pravoúhelníkové funkce znázorněno na obrázku 4.3. Z výkladu v předcházející kapitole je čtenáři zřejmé, že funkce na obrázku 4.3 dole vznikne nasčítáním periodických opakování funkce sinc (Pozor: jde o nasčítání, proto se tato funkce nerovná funkci sinc ani v intervalu $(-\pi, \pi)$).



Obrázek 4.3: Fourierova transformace diskretní pravoúhelníkové funkce, nenulové v intervalu $\langle -N, N \rangle$, pro $N = 2$.

Zobecnění na dvoudimenzionální případ je jednoduché. Definujme

Definice: (2-D Fourierova transformace diskrétního signálu pro úhlovou frekvenci)

Fourierovou transformací (spektrem) diskrétního signálu $s(n_1, n_2)$ nazveme funkci $\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2)$

$$\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) = \mathcal{F}[s(n_1, n_2)] = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s(n_1, n_2) \exp(-i\Omega_1 n_1 - i\Omega_2 n_2). \quad (4.7)$$

Inverzní Fourierovou transformací odpovídající spektru $\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2)$ je

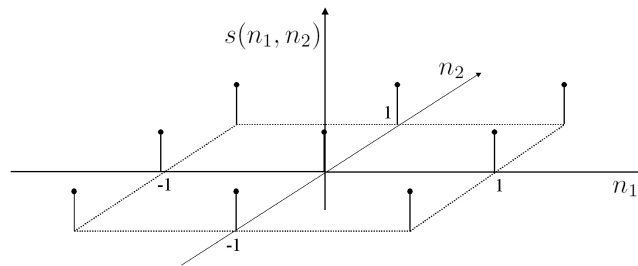
$$s(n_1, n_2) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2)] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) \exp(i\Omega_1 n_1 + i\Omega_2 n_2) d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (4.8)$$

Příklad:

Najděte spektrum $\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2)$ funkce

$$s(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \leq n_1 \leq 1, -1 \leq n_2 \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Signál je schematicky znázorněn na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: 2-D diskrétní signál rovný jedné pouze pro $-1 \leq n_1 \leq 1, -1 \leq n_2 \leq 1$, jinde nulový.

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) &= \sum_{n_1=-1}^1 \sum_{n_2=-1}^1 \exp(-i\Omega_1 n_1 - i\Omega_2 n_2) \\ &= 1 + \exp(-i\Omega_1) + \exp(-i\Omega_2) + \exp(i\Omega_1) + \exp(i\Omega_2) \\ &\quad + \exp(-i\Omega_1 - i\Omega_2) + \exp(-i\Omega_1 + i\Omega_2) + \exp(i\Omega_1 - i\Omega_2) + \exp(+i\Omega_1 + i\Omega_2) \\ &= (1 + 2 \cos(\Omega_1))(1 + 2 \cos(\Omega_2)). \end{aligned}$$

Srovnáním s předcházejícím 1-D příkladem pro $N = 1$ vidíme, že i pro 2-D diskrétní signály se uplatňuje vlastnost separability, kterou známe z minulé kapitoly.

Věta (O separabilitě 2-D Fourierovy transformace diskrétního signálu):

Je-li $s(n_1, n_2)$ násobným signálem, tj. $s(n_1, n_2) = s_1(n_1)s_2(n_2)$, pak pro jeho Fourierovu transformaci platí

$$\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) = \mathcal{F}(s(n_1, n_2)) = \mathcal{F}(s_1(n_1))\mathcal{F}(s_2(n_2)). \quad (4.9)$$

Důkaz opět plyne jednoduše z konstrukce 2-D Fourierovy transformace postupnou dvojí aplikací transformace jednodimenzionální.

Podobně jako u předcházejících transformací, i spektrum diskrétního signálu je obecně komplexní. Reprezentujeme ho nejčastěji amplitudovým $|\tilde{S}(\Omega)|$ a fázovým $\tilde{\phi}(\Omega)$ spektrem, jejichž definice jsou stejné jako v případě spojitých signálů.

4.2 Vlastnosti Fourierovy transformace diskrétního signálu.

Vlastnosti Fourierovy transformace diskrétního signálu jsou analogické vlastnostem transformace signálu spojitého. Shrňme je proto pouze ve stručném přehledu, viz tabulka 4.1.

Jejich důkazy lze snadno provést přímo z definice dané transformace. Provedme zde pro ukázkou jen dva z nich: důkaz, že konvoluce dvou diskrétních signálů se transformuje na součin jejich spekter a důkaz Parsevalova teorému. Konvoluce diskrétních (neperiodických) signálů $f(n)$ a $g(n)$ je definována vztahem

$$f(n) * g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m).$$

Zápis $f(n) * g(n)$ je třeba správně chápat jako n -tý prvek diskrétní posloupnosti $f * g$, tedy $(f * g)(n)$. Příklad takové konvoluce pro dva jednoduché diskrétní signály ukazuje obrázek 4.5. Důkaz výše uvedeného tvrzení provedeme přímo z definice Fourierovy transformace diskrétního signálu.

Důkaz (spektrum konvoluce):

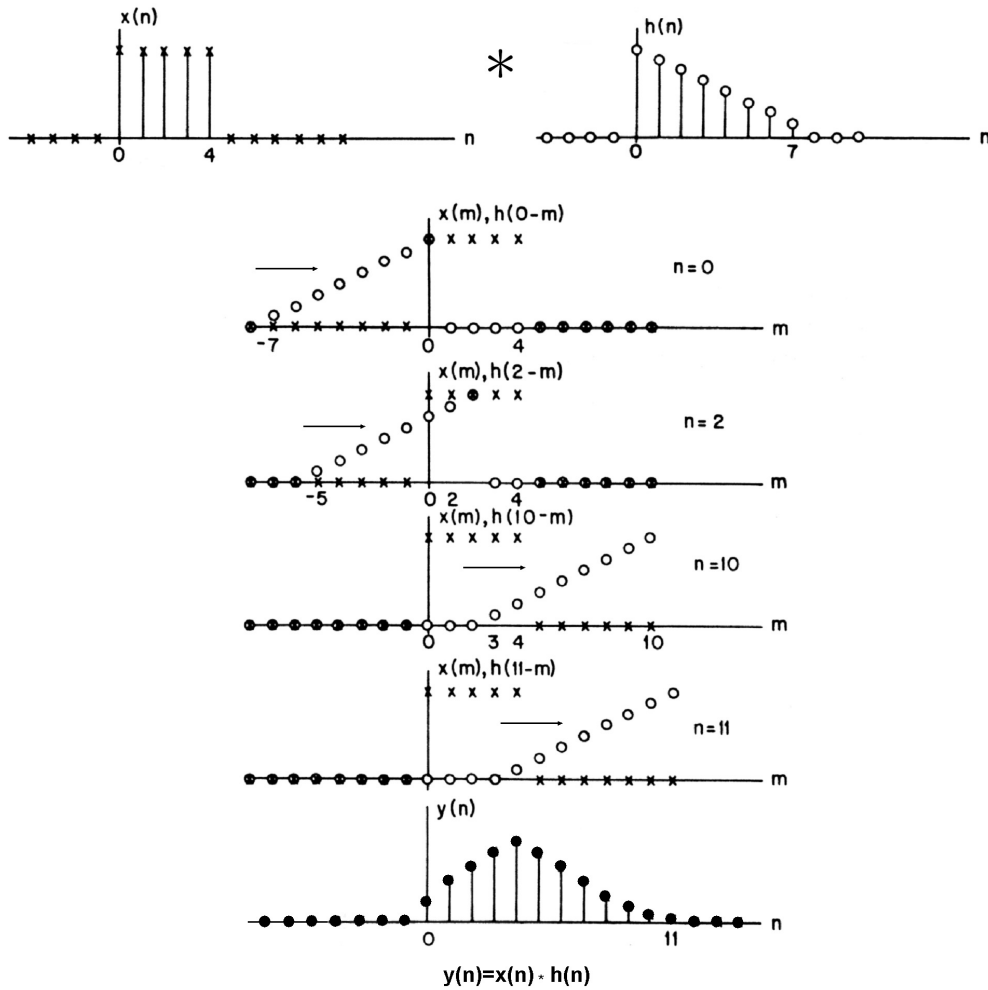
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(n) * g(n)) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m) \right) \exp(-i\Omega n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m) \exp(-i\Omega(n-m) + m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m) \exp(-i\Omega m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) \exp(-i\Omega k) \\ &= \tilde{F}(\Omega)\tilde{G}(\Omega), \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

V důkazu jsme použili substituci $k = n - m$, která však neovlivní nekonečné sumační meze. Také jsme předpokládali možnost prohození pořadí sumací.

Cvičení 4.2.1:

VLASTNOST	DISKRÉTNÍ SIGNÁL	FOURIEROVO SPEKTRUM
lin. kombinace	$\alpha f(n) + \beta g(n), \alpha, \beta \in C$	$\alpha \tilde{F}(\Omega) + \beta \tilde{G}(\Omega)$
posunutí	$s(n - m)$	$\tilde{S}(\Omega) \exp(-im\Omega)$
modulace	$s(n) \exp(in\Omega_0)$	$\tilde{S}(\Omega - \Omega_0)$
zrcadlení	$s(-n)$	$\tilde{S}(-\Omega)$
komplexní sdružení	$\bar{s}(n)$	$\overline{\tilde{S}}(-\Omega)$
derivace spektra	$-ins(n)$	$\frac{\partial \tilde{S}(\Omega)}{\partial \Omega}$
konvoluce	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n - m)$	$\tilde{F}(\Omega)\tilde{G}(\Omega)$
násobení	$f(n)g(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(\xi)\tilde{G}(\Omega - \xi)d\xi$
korelace	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{f}(n)g(n + m)$	$\overline{\tilde{F}}(\Omega)\tilde{G}(\Omega)$
autokorelace	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{s}(n)s(n + m)$	$\overline{\tilde{S}}(\Omega)\tilde{S}(\Omega) = \tilde{S}(\Omega) ^2$
Parsevalův teorém	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\bar{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(\Omega)\overline{\tilde{G}}(\Omega)d\Omega$	
Rayleighův teorém	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}(\Omega) ^2 d\Omega$	

Tabulka 4.1: Nejdůležitější vlastnosti Fourierovy transformace diskrétního signálu.



Obrázek 4.5: Příklad konvoluce dvou diskretních signálů (podle Rabiner & Gold, 1975).

Spočtěte diskretní konvoluci $h_n = f_n * g_n$, kde $h_n, g_n \neq 0$ pro $0 \leq n < 4$ a nenulové prvky tvoří čtveřice $[1, 2, 3, 4]$ a $[0, 1, 2, 3]$.

Důkaz (Parsevalův teorém):

Pomocí spektra součinu a spektra komplexně sdruženého signálu máme

$$\mathcal{F}(f(n)\bar{g}(n)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(\xi) \bar{G}(-\Omega + \xi) d\xi.$$

Zároveň víme, že

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(n)\bar{g}(n)) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\bar{g}(n) \exp(-i\Omega n) \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\bar{g}(n) = \mathcal{F}(f(n)\bar{g}(n)) \Big|_{\Omega=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(\xi) \bar{G}(\xi) d\xi \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Podobně jako pro spojité signály, můžeme i zde pomocí vlastností modulace formulovat užitečné tzv. modulační teoremy

$$\begin{aligned} h(n) = s(n) \cos(\Omega_0 t) &\leftrightarrow \tilde{H}(f) = \frac{1}{2}(\tilde{S}(\Omega - \Omega_0) + \tilde{S}(\Omega + \Omega_0)) \\ h(n) = s(n) \sin(\Omega_0 t) &\leftrightarrow \tilde{H}(f) = \frac{1}{2i}(\tilde{S}(\Omega - \Omega_0) - \tilde{S}(\Omega + \Omega_0)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Shrňme ještě nejdůležitější symetrie Fourierovy transformace diskrétního signálu. Čtenáře jistě nepřekvapí, že jsou zcela analogické symetriím, které již známe z předcházejících kapitol.

Rozepišme jak signál v časové oblasti $s(n)$, tak jeho spektrum $S(\Omega)$ na reálnou a imaginární část

$$s(n) = \Re\{s(n)\} + i\Im\{s(n)\}, \quad S(\Omega) = \Re\{S(\Omega)\} + i\Im\{S(\Omega)\}.$$

Dále pak definujme pro signál (spektrum) tzv. sudou část $e(n)$ ($E(\Omega)$) a lichou část $o(n)$ ($O(\Omega)$) běžným způsobem.

$$\begin{aligned} e(n) &= \frac{1}{2}[s(n) + s(-n)] \\ o(n) &= \frac{1}{2}[s(n) - s(-n)] \\ E(\Omega) &= \frac{1}{2}[S(\Omega) + S(-\Omega)] \\ O(\Omega) &= \frac{1}{2}[S(\Omega) - S(-\Omega)]. \end{aligned}$$

Jak diskrétní signál, tak spojité spektrum můžeme tedy rozepsat pomocí sudé a liché části

$$s(n) = e(n) + o(n), \quad S(\Omega) = E(\Omega) + O(\Omega),$$

kde, jak je zřejmé z definic, pro sudé části platí

$$e(n) = e(-n), \quad E(\Omega) = E(-\Omega)$$

a pro liché

$$o(n) = -o(-n), \quad O(\Omega) = -O(-\Omega).$$

Sudou i lichou část jak signálu tak spektra také můžeme rozložit na reálnou a imaginární část: např. $e(n) = \Re\{e(n)\} + i\Im\{e(n)\}$ a podobně ostatní. Základní symetrie Fourierovy transformace diskrétního signálu jsou pak shrnuty v tabulce 4.2.

Pro snadnější zapamatování některých z těchto symetrií se opět může hodit grafická pomůcka:

$$\begin{array}{ccccccc} s(n) & = & o(n) & + & e(n) & = & \Re\{o(n)\} & + & i\Im\{o(n)\} & + & \Re\{e(n)\} & + & i\Im\{e(n)\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \swarrow & & \searrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{S}(\Omega) & = & \tilde{O}(\Omega) & + & \tilde{E}(\Omega) & = & \Re\{\tilde{O}(\Omega)\} & + & i\Im\{\tilde{O}(\Omega)\} & + & \Re\{\tilde{E}(\Omega)\} & + & i\Im\{\tilde{E}(\Omega)\} \end{array}$$

Důkazy symetrií plynou okamžitě z linearitě a spektra zrcadlení či komplexně sdruženého signálu.

Pro reálný signál $\Im\{s(n)\} = 0$ a $\overline{s(n)} = s(n)$, z čehož okamžitě plyne:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(-\Omega) &= \overline{\tilde{S}(\Omega)}, \\ \Re\{\tilde{S}(\Omega)\} &= \Re\{\tilde{S}(-\Omega)\} \\ \Im\{\tilde{S}(\Omega)\} &= -\Im\{\tilde{S}(-\Omega)\} \\ |\tilde{S}(\Omega)| &= |\tilde{S}(-\Omega)| \\ \tilde{\phi}(\Omega) &= -\tilde{\phi}(-\Omega), \quad \tilde{\phi}(0) = 0. \end{aligned}$$

Diskrétní signál	Fourierovo spektrum
$s(n)$	$S(\Omega)$
$\Re\{s(n)\}$	$\frac{1}{2}[S(\Omega) + \bar{S}(-\Omega)]$
$i\Im\{s(n)\}$	$\frac{1}{2}[S(\Omega) - \bar{S}(-\Omega)]$
$\frac{1}{2}[s(n) + \bar{s}(-n)]$	$\Re\{S(\Omega)\}$
$\frac{1}{2}[s(n) - \bar{s}(-n)]$	$i\Im\{S(\Omega)\}$
$e(n)$	$E(\Omega)$
$o(n)$	$O(\Omega)$
$\frac{1}{2}[e(n) + \bar{e}(n)]$	$\frac{1}{2}[E(\Omega) + \bar{E}(\Omega)]$
$\frac{1}{2}[o(n) + \bar{o}(n)]$	$\frac{1}{2}[O(\Omega) - \bar{O}(\Omega)]$
$\frac{1}{2}[e(n) - \bar{e}(n)]$	$\frac{1}{2}[E(\Omega) - \bar{E}(\Omega)]$
$\frac{1}{2}[o(n) - \bar{o}(n)]$	$\frac{1}{2}[O(\Omega) + \bar{O}(\Omega)]$

Tabulka 4.2: Nejdůležitější symetrie Fourierovy transformace diskrétního signálu.

Také Fourierova transformace 2D diskretních signálů má analogické vlastnosti, jaké jsme probírali v minulé kapitole. Tabulka 4.3 shrnuje v přehledné formě nejdůležitější z nich. Jedná se o zřejmé zobecnění vlastností 1D transformace. Čtenář si jistě povšimne, že 2D případ nabízí i některé další vlastnosti, které v 1D případě nelze z principiálních důvodů uvažovat (separabilita, transpozice, zrcadlení, projekce apod.). S analogiemi všech těchto vlastností jsme se již setkali v odstavci 3.14 pro případ spojitých signálů.

Cvičení 4.2.2:

Dokažte vlastnost projekce z tabulky 4.3.

Pro 2D DFT opět platí zcela analogické symetrie jako v případě 2D Fourierovy transformace, probírané v předcházející kapitole. Hlavní směry těchto symetrií ukazuje obrázek 3.29.

4.3 Lineární filtrace diskretních signálů.

V odstavci 3.15 jsme se seznámili se základy teorie lineárních, časově invariantních systémů (filtrů). Systémy s analogickými vlastnostmi (linearita, časová invariance, popřípadě stabilita) můžeme zavést i pro diskretní signály.

Uvažujme lineární filtr do něhož vstupuje komplexní signál $f_i(n)$ a vystupuje obecně jiný komplexní signál $f_o(n)$, viz schema na obrázku 4.6.



Obrázek 4.6: Signál $f_i(n)$ vstupuje do lineárního filtru. Výsledkem filtrace je signál $f_o(n)$. Signály jsou obecně komplexní, speciálně může být jeden z nich nebo oba reálné.

Takový systém budeme reprezentovat operátorem L :

$$L(f_i(n)) = f_o(n),$$

kde označení $L(f_i(n))$ chápeme ve smyslu $L(f_i)(n)$, operátor tedy nepůsobí jen na jeden konkrétní (n -tý) vzorek signálu f_i .

Systém je kompletně popsán některou ze svých charakteristik. Tou může být například impulzní odezva $h(n)$, tj. výstup filtru pro vstupující δ -funkci. V diskretní reprezentaci rozumíme δ -funkcí signál

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Znázornění diskretní δ -funkce čtenář nalezne např. na obrázku 4.15 vpravo. Je-li $h(n) = L(\delta(n))$, pak obecný výstup $f_o(n) = L(f_i(n))$ je dán diskretní konvolucí s impulzní odezvou

$$f_o(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_i(k)h(n-k).$$

VLASTNOST	2D DISKRÉTNÍ SIGNÁL	2D FOURIEROVO SPEKTRUM
separabilita	$s(n_1, n_2) = f(n_1)g(n_2)$	$\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) = \tilde{F}(\Omega_1)\tilde{G}(\Omega_2)$
lin. kombinace	$\alpha f(n_1, n_2) + \beta g(n_1, n_2), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$	$\alpha \tilde{F}(\Omega_1, \Omega_2) + \beta \tilde{G}(\Omega_1, \Omega_2)$
posunutí	$s(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$	$\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) \exp(-i\Omega_1 m_1 - \Omega_2 m_2)$
modulace	$s(n_1, n_2) \exp(i\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2)$	$\tilde{S}(\Omega_1 - \xi_1, \Omega_2 - \xi_2)$
transpozice	$s(n_2, n_1)$	$\tilde{S}(\Omega_2, \Omega_1)$
zrcadlení	$s(-n_1, n_2)$	$\tilde{S}(-\Omega_1, \Omega_2)$
	$s(n_1, -n_2)$	$\tilde{S}(\Omega_1, -\Omega_2)$
	$s(-n_1, -n_2)$	$\tilde{S}(-\Omega_1, -\Omega_2)$
komplexní sdružení	$\bar{s}(n_1, n_2)$	$\bar{\tilde{S}}(-\Omega_1, -\Omega_2)$
reálný signál	$s(n_1, n_2) = \bar{s}(n_1, n_2)$	$\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) = \bar{\tilde{S}}(-\Omega_1, -\Omega_2)$
derivace spektra	$-in_1 s(n_1, n_2)$	$\frac{\partial \tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial \Omega_1}$
	$-in_2 s(n_1, n_2)$	$\frac{\partial \tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial \Omega_2}$
	$-n_1 n_2 s(n_1, n_2)$	$\frac{\partial^2 \tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial \Omega_1 \partial \Omega_2}$
konvoluce	$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} f(m_1, m_2)g(n_1-m_1, n_2-m_2)$	$\tilde{F}(\Omega_1, \Omega_2)\tilde{G}(\Omega_1, \Omega_2)$
násobení	$f(n_1, n_2)g(n_1, n_2)$	$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(\xi_1, \xi_2)\tilde{G}(\Omega_1-\xi_1, \Omega_2-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2$
korelace	$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \bar{f}(n_1, n_2)g(n_1+m_1, n_2+m_2)$	$\bar{\tilde{F}}(\Omega_1, \Omega_2)\tilde{G}(\Omega_1, \Omega_2)$
autokorelace	$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \bar{s}(n_1, n_2)s(n_1+m_1, n_2+m_2)$	$\bar{\tilde{S}}(\Omega_1, \Omega_2)\tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) = \tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) ^2$
projekce	$p(n_1) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s(n_1, n_2)$	$\tilde{P}(\Omega_1) = \tilde{S}(\Omega_1, 0)$
	$q(n_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} s(n_1, n_2)$	$\tilde{Q}(\Omega_2) = \tilde{S}(0, \Omega_2)$
Parsevalův teorém	$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2)\bar{g}(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}(\Omega_1, \Omega_2)\bar{\tilde{G}}(\Omega_1, \Omega_2)d\Omega_1 d\Omega_2$	
Rayleighův teorém	$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s(n_1, n_2) ^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}(\Omega_1, \Omega_2) ^2 d\Omega_1 d\Omega_2$	

Tabulka 4.3: Nejdůležitější vlastnosti 2D Fourierovy transformace diskrétního signálu.

Důkaz:

Každý diskrétní signál, tedy i vstup filtru, můžeme reprezentovat pomocí diskrétní konvoluce s δ -funkcí:

$$f_i(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_i(k)\delta(n-k).$$

Díky linearitě a časové invarianci filtru pak okamžitě dostáváme

$$f_o(n) = L(f_i(n)) = L\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_i(k)\delta(n-k)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_i(k)L(\delta(n-k)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_i(k)h(n-k), \quad \text{c.b.d.}$$

Chceme-li tedy určit výstup z filtru pro obecný vstup, postupujeme v následujících krocích:

- provedeme zrcadlení impulzní odezvy $h(k) \rightarrow h(-k)$
- impulzní odezvu posuneme o n vzorků $h(-k) \rightarrow h(-(k-n)) = h(n-k)$
- násobíme posloupnosti $f_i(k)$ a $h(n-k)$ a sečteme pro všechna k .

Vlastnosti impulzní odezvy určují vlastnosti filtru. Tak například impulzní odezva kauzálního filtru (generujícího kauzální výstup pro libovolný kauzální vstup) musí být také kauzální, tj. musí splňovat $h(n) = 0$ pro $n < 0$. Stabilita filtru (ohraňovaný výstup pro ohráňovaný vstup) je zase dána absolutní sumovatelností impulzní odezvy, tj. podmínkou $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$.

Podle nosiče impulzní odezvy také často dělíme filtry na tzv. FIR filtry (zkratka z anglického „finite impulse response“), pro které platí, že existují dvě po sobě jdoucí přirozená čísla $N_1 \leq N_2$ taková, že $h(n) = 0$ pro $n < N_1$ nebo $n > N_2$, a tzv. IIR filtry (infinite impulse response), pro které zmíněná podmínka neplatí.

Fourierovým spektrem impulzní odezvy je v případě neperiodických diskrétních signálů spojitý signál 2π -periodický v proměnné Ω : $\tilde{T}(\Omega) = \mathcal{F}(h(n))$. V analogii s odstavcem 3.15 jej budeme opět nazývat frekvenční odezvou nebo též přenosovou funkcí. Frekvenční odezva je jednou z dalších často používaných charakteristik filtru. Obecný výstup lze získat jako inverzní Fourierovu transformaci součinu spektra vstupu s přenosovou funkcí.

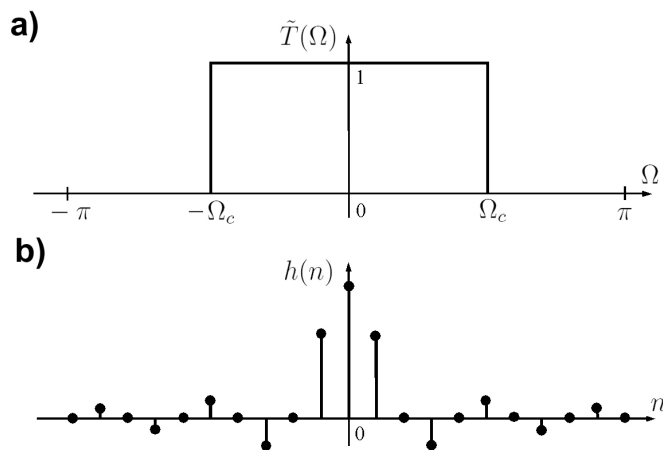
Uveďme jako příklad filtr, který představuje tzv. ideální nízkofrekvenční propust⁴. Jeho frekvenční odezva je na obrázku 4.7a. Obr. 4.7b znázorňuje část jeho impulzní odezvy – jedná se o IIR filtr, tedy impulzní odezva pokračuje do $\pm\infty$. Tyto charakteristiky jsou dány vztahy

$$\tilde{T}(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \text{pro } \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases}, \quad h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} \exp(i\Omega n) d\Omega = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}_{\pi} \left(\frac{\Omega_c n}{\pi} \right) \quad (4.11)$$

Dá se ukázat, že impulzní odezva $h(n)$ v rovnici (4.11) není absolutně sumovatelná. Přesto je filtr stabilní, tj. vždy produkuje omezený výstup.

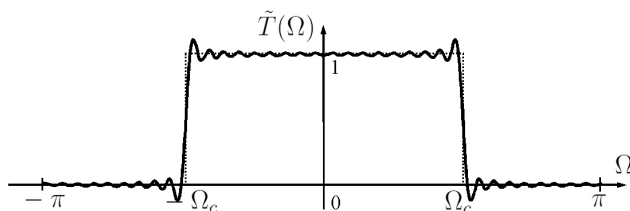
Tento filtr patří do kategorie IIR filtrů, neboť nosič impulzní odezvy je neomezený. V praktických aplikacích však často impulzní odezvu modifikujeme oříznutím, tj. pracujeme s konečným počtem vzorků. Taková impulzní odezva pak je vždy absolutně sumovatelná. Oříznutím tedy obecně dojde ke stabilizaci filtru (u filtru, který před oříznutím stabilní nebyl). V případě

⁴Nízkofrekvenční propust by představoval i např. filtr s přenosovou funkcí na obrázku ??, pokud by se tato vešla do intervalu $(-\pi, \pi)$, nejednalo by se však o ideální nízkofrekvenční propust.



Obrázek 4.7: Frekvenční odezva (přenosová funkce) (a) a impulzní odezva (b) ideální nízkofrekvenční propusti pro hraniční frekvenci $\Omega_c = \pi/2$.

takového oříznutí se však u ideální nízkofrekvenční propusti setkáme s jevem analogickým Gibbsovu jevu z odstavce 2.7: frekvenční odezva bude vykazovat v okolí bodů ω_c a $-\omega_c$ „překmit“ funkční hodnoty o cca 9%. Tato diference není v principu odstranitelná přihráním dalších vzorků impulzní odezvy. Obrázek 4.8 ukazuje frekvenční odezvu FIR verze filtru z obrázku 4.7, modifikovaného ponecháním pouze 71 vzorků (symetricky okolo nuly) impulzní odezvy.



Obrázek 4.8: Frekvenční odezva FIR verze ideální nízkofrekvenční propusti s hraniční frekvencí $\Omega_c = \pi/2$ pro $h(n) \neq 0$ pouze pro $n \leq 35$.

Cvičení 4.3.1:

Najděte impulzní odezvu ideální vysokofrekvenční propusti definované přenosovou funkcí

$$\tilde{H}_{vf}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |\Omega| < \pi - \Omega_c \\ 1 & \text{pro } \pi - \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} .$$

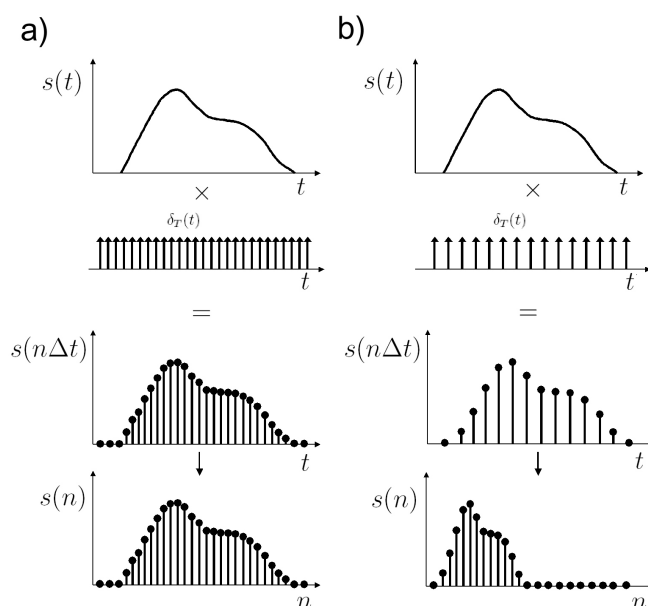
Použijte znalost nízkofrekvenční propusti (4.11) a vlastnost modulace (translace spektra).

4.4 Vztah Fourierovy transformace spojitého a diskrétního signálu.

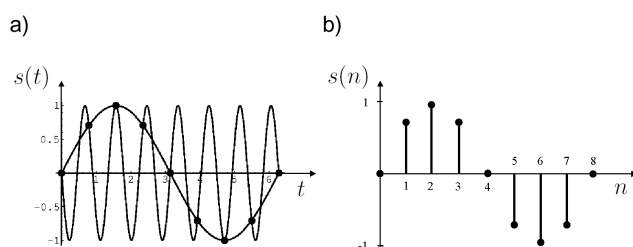
Až dosud jsme o Fourierově transformaci diskrétního signálu hovořili jako o svébytném matematickém objektu definovaném v odstavci 4.1, který má vlastnosti diskutované v odstavci 4.2, aniž

bychom zkoumali, jaký je vztah příslušného diskrétního signálu k nějakému odpovídajícímu spojitému signálu. Pokud se na diskrétní signál začneme dívat jako na diskrétní podobu spojitého signálu (vzniklou vzorkováním spojitého signálu), má smysl se ptát, jaký je vztah mezi spektrem diskrétního a spojitého signálu.

Vyjasněme nejprve, jak vzniká diskrétní signál vzorkováním. Z minulé kapitoly víme, že vzniká přenásobením vzorkovací funkcí, nicméně záleží na tom, jakou konkrétní vzorkovací funkcí násobíme (jak daleko od sebe jsou příslušné δ -funkce). Obrázek 4.9 ukazuje dva různé diskrétní signály vzniklé z téhož spojitého signálu různým vzorkováním. Naopak, stejný diskrétní signál může odpovídat různým spojitým signálům, jak ukazuje obrázek 4.10 na příkladu funkcí $\sin(t)$ a $\sin(-7t)$.



Obrázek 4.9: Vznik diskrétního signálu vzorkováním (diskretizací) spojitého signálu. Různý vzorkovací krok v části a) a b) vede k různým diskrétním signálům. V části a) je vzorkovací krok roven jedné.



Obrázek 4.10: Vznik diskrétního signálu vzorkováním (diskretizací) spojitého signálu. Dva různé spojitě signály (rychleji oscilující funkce $\sin(-7t)$ a pomaleji oscilující funkce $\sin(t)$) v části a) dávají při počtu 8 vzorků na intervalu $(0, 2\pi)$ stejný diskrétní signál v části b).

Jelikož násobení v časové oblasti odpovídá konvoluce v oblasti spektrální a spektrum vzorkovací funkce je opět vzorkovací funkce, musí být spektrum diskrétního signálu periodické, neboť

při konvoluci původního spektra (odpovídajícího spojitému signálu) se vzorkovací funkcí se uplatní její replikační vlastnost. Vzorkovací krok zde hraje zásadní roli: jak v časové oblasti (s jiným vzorkovacím krokem vznikne jiný diskrétní signál, viz obrázek 4.9 vlevo a vpravo dole), tak ve spektrální oblasti (různým diskrétním signálům pak odpovídají různá spektra; perioda spektra je převrácenou hodnotou vzorkovacího kroku).

Uvažme spojité signál $s(t)$ a jemu odpovídající Fourierovo spektrum⁵ $S(\omega) = \mathcal{F}(s(t))$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Pro inverzní Fourierovu transformaci máme

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Nechť ekvidistantním vzorkováním s krokem Δt vznikne ze spojitého signálu signál diskrétní $s_n = s(n\Delta t)$ (záměrně zde používáme alternativní označení diskrétního signálu s_n namísto $s(n)$, abychom předešli možné záměně se spojitém signálem — i přes stejné funkční hodnoty se oba signály stále liší svojí proměnnou). Musí tedy platit

$$s_n = s(n\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega n\Delta t) d\omega.$$

Substitucí $\phi = \omega \Delta t$ přejde tento integrál na tvar

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta t} S\left(\frac{\phi}{\Delta t}\right) \exp(in\phi) d\phi.$$

Poznamenejme, že exponenciály v integrandu jsou periodické s periodou 2π – bude tedy výhodné rozdělit integrační obor na intervaly délky 2π : $I(l) = \langle -\pi + 2\pi l, \pi + 2\pi l \rangle$, kde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Pak můžeme psát

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi+2\pi l}^{\pi+2\pi l} \frac{1}{\Delta t} S\left(\frac{\phi}{\Delta t}\right) \exp(in\phi) d\phi.$$

Výhodou tohoto postupu je, že nyní můžeme substitucí $\Omega = \phi - 2\pi l$ převést všechny integrály v sumě na stejné meze od $-\pi$ do π a využít periodicity exponenciál $\exp(\Omega + 2\pi l) = \exp(\Omega)$.

Dostaneme

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\Delta t} S\left(\frac{\Omega + 2\pi l}{\Delta t}\right) \exp(in\Omega) d\Omega.$$

Předpokládejme, že řada konverguje stejnoměrně a lze tedy prohodit pořadí sumace a integrace a psát

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{\Omega + 2\pi l}{\Delta t}\right) \exp(in\Omega) d\Omega.$$

⁵Budeme uvažovat úhlovou frekvenci s ohledem na preferovanou definici Fourierovy transformace diskrétního signálu.

Tato rovnice už je ve tvaru inverzní Fourierovy transformace diskretního signálu (4.2), za předpokladu, že

$$\tilde{S}(\Omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{\Omega + 2\pi l}{\Delta t}\right). \quad (4.12)$$

Vyjádřením v úhlové frekvenci spojitého signálu ω dostáváme (s využitím (4.3))

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S\left(\omega + \frac{2\pi l}{\Delta t}\right). \quad (4.13)$$

Rovnice (4.13) reprezentuje vztah mezi Fourierovým spektrem spojitého signálu a signálu, který vznikl jeho diskretizací s krokem Δt (pro větší přehlednost zde vyjadřujeme obě spektra ve stejné proměnné). Tento výsledek shrnuje následující věta.

Věta (O vztahu Fourierovy transformace spojitého a diskretního signálu):

Je-li s_n diskretní signál vzniklý vzorkováním spojitého signálu $s(t)$ s krokem Δt , pak jeho Fourierova transformace $\tilde{S}(\omega) = \mathcal{F}(s_n)$ je dána periodizací Fourierovy transformace $S(\omega) = \mathcal{F}(s(t))$

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S\left(\omega + \frac{2\pi l}{\Delta t}\right).$$

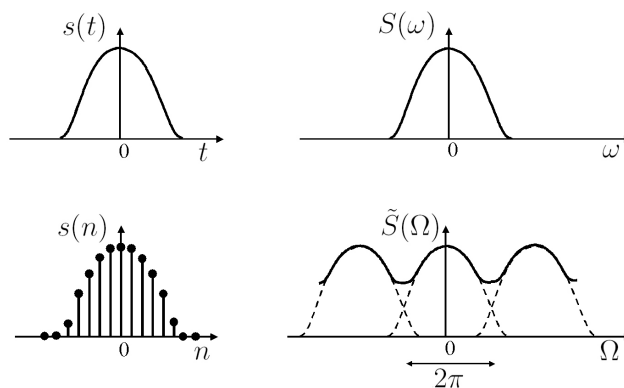
Poznamenejme pro úplnost, že zcela obdobným odvozením bychom dospěli i ke vztahu Fourierovy transformace spojitého a diskretního signálu vyjádřenému v obyčejné namísto úhlové frekvenci

$$\tilde{S}(F) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{F + l}{\Delta t}\right) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S\left(f + \frac{l}{\Delta t}\right), \quad (4.14)$$

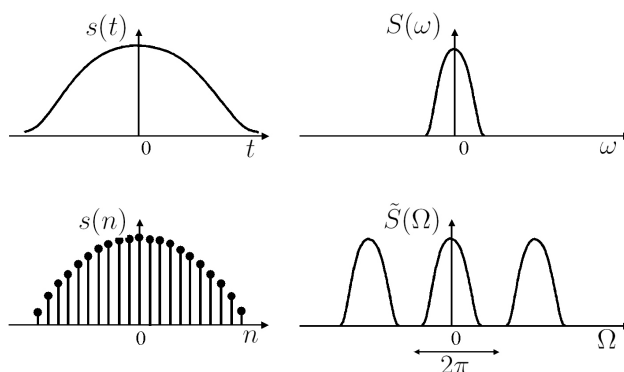
ve kterém, narozdíl od (4.13), symboly S a \tilde{S} označují spektra příslušných signálů pro obyčejnou frekvenci. Při periodizaci spektra se můžeme setkat s překrýváním vzájemně posunutých spekter spojitého signálu. Situaci ilustrují obrázky 4.11 a 4.12. Na prvním z nich k překrývání při periodizaci dochází. Tento nežádoucí jev nazýváme efekt alias. Zda k tomuto efektu dojde nebo ne závisí na tom, jestli je původní spojitý signál frekvenčně omezený (tj. spektrum má omezený nosič) a dále je-li délka intervalu, na kterém je spektrum nenulové, menší než 2π (perioda ve spektrální oblasti pro úhlovou frekvenci) popřípadě 1 (perioda ve spektrální oblasti pro obyčejnou frekvenci).

Cvičení 4.4.1:

Dokažte vztah (4.13) mezi spektrem spojitého a diskretního signálu s použitím formalismu vzorkovací funkce.



Obrázek 4.11: Diskrétní signál (vlevo dole) vzniklý vzorkováním spojitého signálu (vlevo nahoře), spektrum diskrétního signálu (vpravo dole) a spektrum spojitého signálu (vpravo nahoře). Spektrum diskrétního signálu je periodizací spektra původního spojitého signálu. Při periodizaci může dojít k překrývání.



Obrázek 4.12: Diskrétní signál (vlevo dole) vzniklý vzorkováním spojitého signálu (vlevo nahoře), spektrum diskrétního signálu (vpravo dole) a spektrum spojitého signálu (vpravo nahoře). Spektrum diskrétního signálu je periodizací spektra původního spojitého signálu. V tomto případě nedochází při periodizaci k překrývání.

4.5 Vzorkovací teorém.

Mějme spojitý signál $s(t)$, který navzorkujeme se vzorkovacím krokem Δt . Vznikne tak diskrétní signál $s_n = s(n\Delta t)$. Zavedme tzv. **úhlovou Nyquistovu frekvenci**⁶

$$\omega_N = \frac{\pi}{\Delta t}.$$

Tato frekvence je tedy jednoznačně určena vzorkovacím krokem v časové oblasti. Proč je tato frekvence důležitá? Dvojnásobek Nyquistovy frekvence určuje délku intervalu ve spektrální oblasti, na kterém může být spektrum původního spojitého signálu nenulové, aniž by při periodizaci docházelo k efektu alias. Jinak řečeno: je-li maximální frekvence ω_{max} zastoupená

⁶V dalším textu se již pro jednoduchost zápisů omezíme pouze na úhlové frekvence.

ve spektru⁷ spojitého signálu menší (popřípadě rovna) ω_N , nedojde při periodizaci následkem vzorkování v časové oblasti k překrývání. Tento případ odpovídá obrázku 4.12. Perioda spektra diskrétního signálu je rovna $2\pi/\Delta t$ v proměnné ω , což odpovídá periodě 2π v proměnné $\Omega = \omega\Delta t$. Jde tedy o to, aby spektrum spojitého signálu v proměnné ω , $S(\omega)$ bylo nulové vně intervalu $\langle -\pi/\Delta t, \pi/\Delta t \rangle = \langle -\omega_N, \omega_N \rangle$.

Za této podmínky při periodizaci nedochází k překrývání a v rámci jedné periody platí mezi spektrem spojitého a diskrétního signálu zjednodušený vztah

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{\Delta t} S(\omega). \quad (4.15)$$

Čtenáře jistě nepřekvapí, že se nám zde vlastně uplatňuje vlastnost změny měřítka (3.29). Vždyť také podle naší definice Fourierovy transformace diskrétního signálu vzorkovací krok obecné délky Δt v navzorkované funkci $s(n\Delta t)$ převádíme na krok 1 v samotném diskrétním signálu (viz obrázek 4.9 vpravo).

Zopakujme ještě jednou podmínky, za kterých platí vzorec (4.15)

- spektrum spojitého signálu je frekvenčně omezené (podmínka nutná, nikoliv však postačující)
- vzorkovací krok v časové oblasti je dostatečně malý, aby $\omega_{max} \leq \omega_N$, tj. krok musí vyhovovat podmínce $\Delta t \leq \pi/\omega_{max}$, kde $\omega_{max} = \max(|\omega_{min}^-|, \omega_{max}^+)$

Pokud je spektrum frekvenčně omezené, můžeme v principu vždy určit hraniční vzorkovací krok (Nyquistovo vzorkování) pro splnění výše uvedených podmínek. Na druhé straně, v praktických aplikacích nebývá často možné z nejrůznějších důvodů dostatečně malého vzorkovacího kroku dosáhnout.

Jsou-li splněny výše uvedené předpoklady, lze spektrum spojitého signálu jednoznačně rekonstruovat ze spektra diskrétního signálu pomocí vzorce (4.15). Pak ovšem je znalost spektra diskrétního signálu (který představuje spočetnou množinu hodnot) rovnocenná znalosti spektra spojitého signálu (který je dán nespočetnou množinou hodnot). To ale znamená, že hodnoty spojitého signálu ležící mezi vzorky diskrétního signálu již nenesou žádnou dodatečnou informaci a spojitý signál lze jednoznačně rekonstruovat pomocí diskrétního signálu inverzní Fourierovou transformací.

Výše uvedená úvaha je základem odvození tzv. **vzorkovacího teorému**, což je vlastně interpolační vzorec umožňující interpolovat mezi vzorky $s(n\Delta t)$. Vzorkovací teorém se někdy též nazývá Shannonův teorém, případně Nyquist-Shannonův, Shannon-Whittakerův, nebo WKS-teorém (zkratka jmen Whittaker, Kotelnikov, Shannon).

Věta (Vzorkovací teorém pro neperiodické signály):

Předpokládejme frekvenčně omezený spojitý signál $s(t)$, jehož Fourierovo spektrum $S(\omega)$ je nulové vně intervalu $\langle \omega_{min}^-, \omega_{max}^+ \rangle$. Je-li s_n diskrétní signál vzniklý vzorkováním spojitého signálu $s(t)$ s krokem Δt , $\Delta t < \pi/\omega_{max}$, kde $\omega_{max} = \max(|\omega_{min}^-|, \omega_{max}^+)$, pak hodnoty spojitého signálu $s(t)$ lze rekonstruovat z hodnot diskrétního signálu s_n pomocí vzorce

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta t} (t - n\Delta t) \right). \quad (4.16)$$

⁷To znamená, že za touto frekvencí je spektrum nulové.

Poznamenejme, že za výše uvedených předpokladů je tato interpolace zcela přesná, nejedná se o aproximaci hodnot (jako tomu bývá u některých jiných typů interpolací).

Důkaz:

Za výše uvedených podmínek platí, že spektrum spojitého signálu můžeme vyjádřit v intervalu $\langle -\pi/\Delta t, \pi/\Delta t \rangle$ jako

$$S(\omega) = \Delta t \tilde{S}(\omega), \quad (4.17)$$

kde \tilde{S} je spektrum diskrétního signálu. Výraz (4.17) dosadíme do vzorce pro inverzní Fourierovu transformaci spojitého signálu:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \Delta t \tilde{S}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \end{aligned}$$

Za \tilde{S} dosadíme ze vzorce (4.1) pro Fourierovu transformaci diskrétního signálu

$$s(t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \exp(-in\Delta t\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \exp(i\omega(t - n\Delta t)) d\omega.$$

Po výpočtu integrálu v poslední rovnici (s rozkladem exponenciály podle vzorce (D.8.1) a uvážením sudosti funkce kosinus) dostaneme

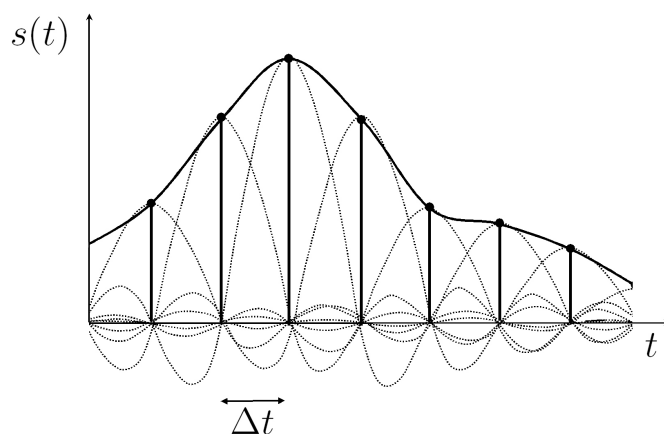
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)\right)}{\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - n\Delta t)\right), \quad \text{c.b.d}$$

Vzorec (4.16) představuje konvoluci diskrétního signálu s_n se spojitým signálem sinc. Důvod je zřejmý: při „ztotožnění“ spektra diskrétního signálu se spektrem spojitého signálu se omezujeme na základní interval délky jedné periody, tj. de facto spektrum diskrétního signálu přenásobujeme pravoúhelníkovou funkcí.

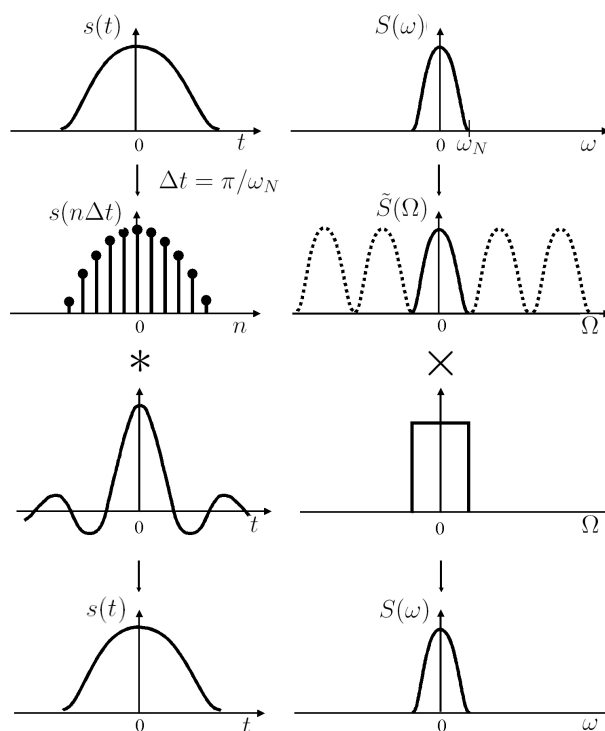
Na obrázku 4.13 vidíme názorně, jak se spojitý signál dostává podle vzorce (4.16) nasčítáváním posunuté funkce sinc. Obrázek 4.14 demonstruje právě odvozený vzorkovací teorém pro hraniční Nyquistovo vzorkování.

I při použití Nyquistova vzorkování stále můžeme přesně zrekonstruovat původní spojitý signál s výjimkou eventuální harmonické složky o frekvenci ω_N . Jak víme z odstavce 3.5, např. spektrum sinu obsahuje dvě δ -funkce s navzájem opačným znaménkem, které se při periodizaci s periodou $2\omega_N$ právě odečtou. To také odpovídá tomu, že $\sin(\omega_N t)$ by byl při vzorkování $\Delta t = \pi/\omega_N$ navzorkován přesně ve svých nulových hodnotách a tím pádem přítomnost takové sinové složky ve spojitém signálu nelze při daném vzorkování zjistit. To je také důvod, proč ve výše uvedené větě uvádíme krok $\Delta t < \pi/\omega_{max}$ (a nikoli \leq). Pokud se na vzorkovací teorém díváme jako na metodu interpolace, je „přípustný“ vzorkovací krok za splnění výše uvedených podmínek většinou mnohem větší, než vyžadují jiné metody interpolace.

V jistém smyslu extrémní příklad hraničního Nyquistova vzorkování umožňuje funkce $\operatorname{sinc}_\pi(t)$ na obrázku 4.15. I při použití kroku $\Delta t = 1$ můžeme sinc zpětně rekonstruovat, neboť jeho spektrem je pravoúhelník délky 2π (v úhlových frekvencích; pro obyčejnou frekvenci by byla



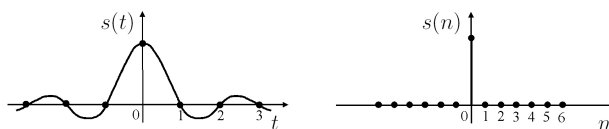
Obrázek 4.13: Grafická ilustrace vzorce (4.16).



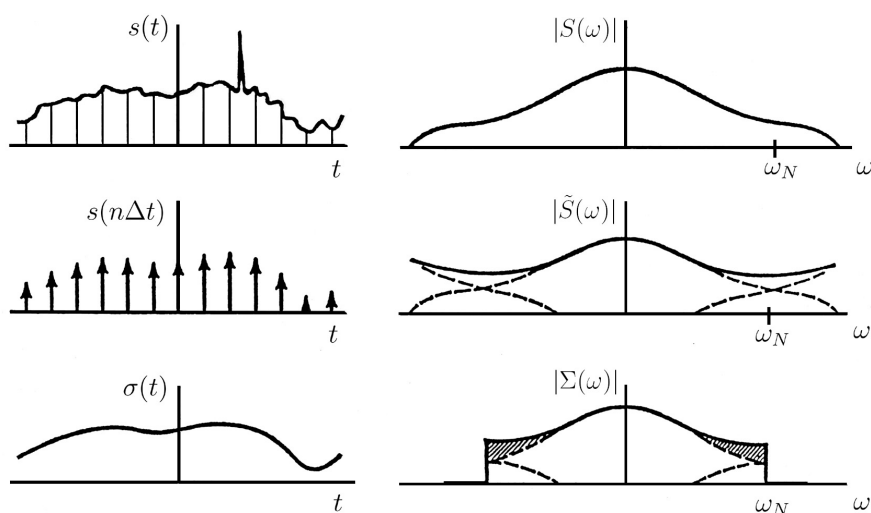
Obrázek 4.14: Ilustrace vzorkovacího teorému. Signál v časové oblasti je navzorkován s krokem $\Delta t = \pi/\omega_N$, který je maximální možný s ohledem na eliminaci efektu alias ve spektrální oblasti. Z diskrétního signálu je pak na základě vzorkovacího teorému zpět rekonstruován původní spojitý signál. Rekonstrukce je zcela přesná.

délka rovna jedné). Při periodizaci s periodou 2π tedy k překrývání nedochází. Poznamenejme, že periodizací vznikne konstantní funkce, která je spektrem $\delta(t)$. Omezením na jednu „periodu“ délky 2π ve spektru pak dostaneme v časové oblasti konvoluci δ -funkce s funkcí sinc, jejímž výsledkem je rekonstruovaná funkce sinc.

Jak již bylo řečeno, jsou-li splněny předpoklady věty o vzorkovacím teorému (frekvenční omezenost a dostatečně husté vzorkování v časové oblasti), je interpolace pomocí vzorce (4.16)

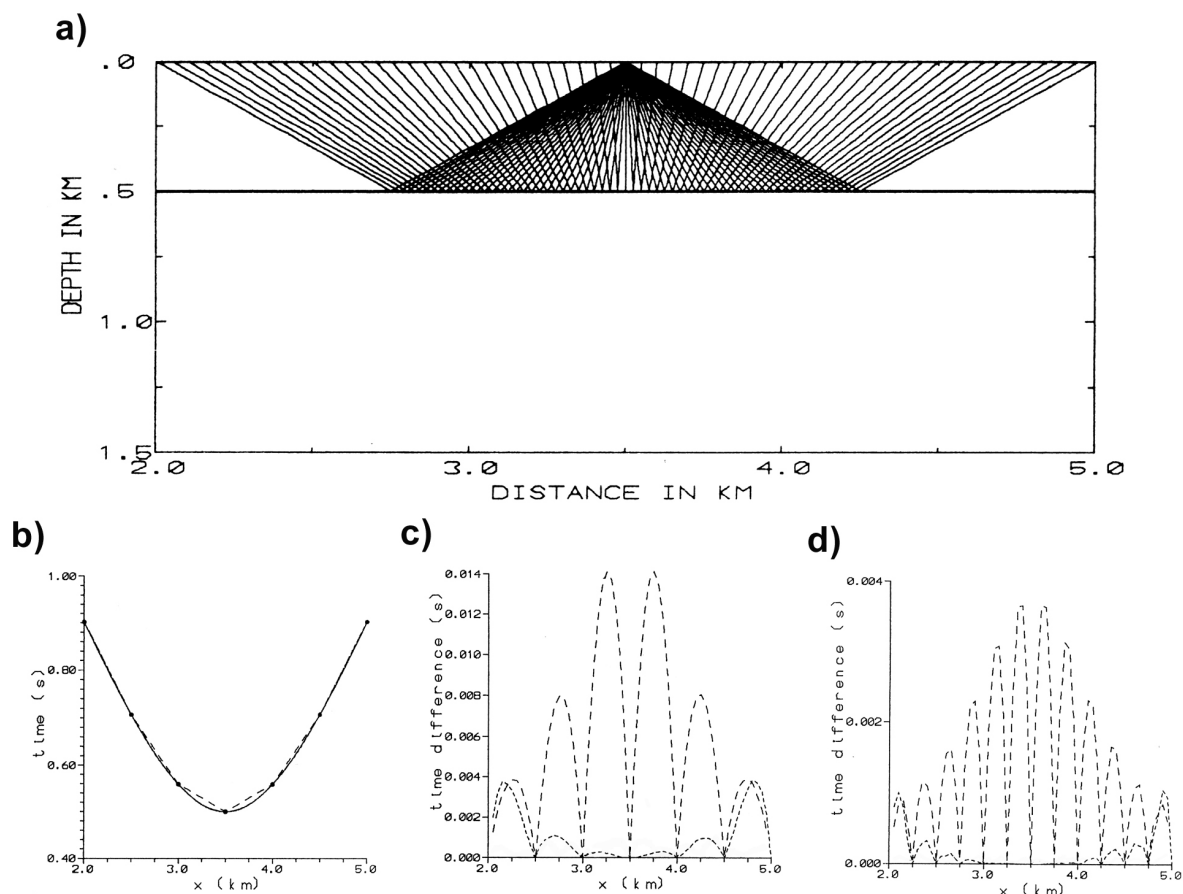
Obrázek 4.15: Hraniční Nyquistovo vzorkování funkce $\text{sinc}_\pi(t)$.

zcela přesná. V praxi se však s takovou situací setkáme zřídka a proto používáme vzorkovací teorém i pro signály, které buď nejsou frekvenčně omezené nebo jsou-li, pak maximální frekvence ve spektru zastoupená převyšuje frekvenci Nyquistovu (tj. vzorkování není dostatečně husté). Pokud jejich spektrum ubývá „rychle“ a spektrální hodnoty pro vysoké frekvence jsou relativně malé, pak efekt alias ve spektrální oblasti sice existuje, ale jeho vliv se projeví relativně méně a často vede pouze ke snížení přesnosti této metody interpolace — tedy interpolant již není zcela přesnou rekonstrukcí původního spojitého signálu, nicméně v hrubých rysech ho vystihuje. Někdy se tohoto postupu využívá záměrně k vyhlazení původního signálu, neboť efekt alias potlačí vysokofrekvenční rysy tohoto signálu, viz ilustrace na obrázku 4.16. Poznamenejme, že už samotný obrázek oříznutého spektra na obrázku 4.16 vpravo dole jasně signalizuje, že k efektu alias ve spektrální oblasti s velkou pravděpodobností dochází, neboť spektrální hodnoty nejdou k nule na krajích intervalu periody. Abychom měli jistotu, že se nejedná o speciální případ spektra frekvenčně omezeného, které nespojitě přechází z nenulové hodnoty na nulu právě na hranici intervalu periody (a odpovídá hraničnímu Nyquistovu vzorkování), stačilo by zmenšit alespoň o něco vzorkovací krok v časové oblasti. V případě, že k efektu alias nedocházelo, spektrum by zůstalo beze změny, jen zvětšení periody by vedlo k tomu, že na krajích intervalu periody by se již objevila nula. V opačném případě by změna kroku vedla ke změně spektra a to nejen v krajních bodech, ale i uvnitř intervalu periody.



Obrázek 4.16: Vyhlazení funkce podvzorkováním a použitím vzorkovacího teorému (podle Bracwella, 1978). V levé části jsou původní spojitý signál, vzorkovaný signál a vyhlazený spojitý signál v časové oblasti, vpravo pak odpovídající amplitudová spektra.

Obrázek 4.16 ukazuje, že podvzorkování signálu může vést k aproximaci⁸ původního signálu při rekonstrukci pomocí vzorkovacího teorému. Největší chybu aproximace v tomto případě obdržíme v okolí ostrého maxima signálu $s(t)$, které není v aproximovaném (vyhlazeném) signálu $\sigma(t)$ přítomno. Přesnost aproximace by se však výrazně nezlepšila ani v případě, že by jeden ze vzorků „padl“ do zmíněného maxima. Pak by sice toto maximum bylo správně rekonstruováno, ale přesnost by byla výrazně ovlivněna díky oscilacím integrandu v okolí tohoto maxima. Prudká změna funkční hodnoty od jednoho vzorku ke druhému by totiž vedla k jevu, který je analogií Gibsova jevu v okolí nespojitosti funkce (viz odstavec 2.7).

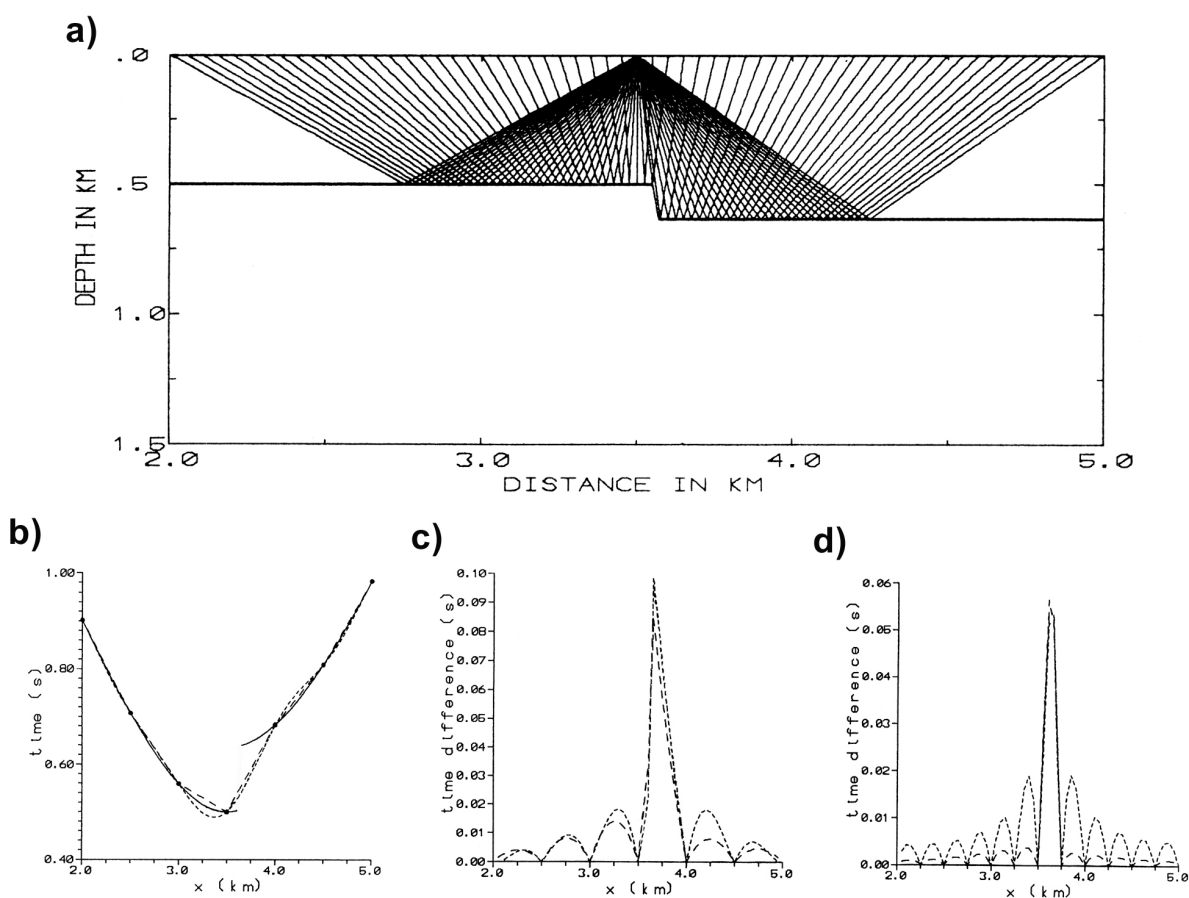


Obrázek 4.17: Ukázka interpolace hodochrony odražené vlny pro případ hladkého odrážejícího rozhraní (podle Brokešová, 1996). Část a) ukazuje paprskový diagram pro daný seismický profil, část b) referenční hodochronu (plnou čarou), hodochronu interpolovanou lineárně (čárkovaně s dlouhými čárkami) a pomocí vzorkovacího teorému (čárkovaně s krátkými čárkami) při vzorkovacím kroku 500m podél profilu. Část c) ukazuje chybu těchto dvou interpolací pro vzorkovací krok 500m, část d) pak tuto chybu při kroku 250m.

Takové chování integrandu dobře ilustruje srovnání obrázků 4.17 a 4.18. Na prvním z nich jsou v části a) znázorněny seismické paprsky odpovídající odražené vlně na seismickém profilu. Paprsky vycházejí z bodového zdroje a každý končí v jednom přijímači profilu. Hodnoty času příchodu vlny v tomto hustém systému přijímačů jsou na obrázku 4.17b znázorněny pro lepší

⁸Aproximaci v lepším případě — silný vliv efektu alias by mohl vést k úplné deformaci původního spojitého signálu.

orientaci spojitou plnou čarou jakožto funkce polohy na profilu (tato křivka představuje tzv. hodochronu). Přijímače byly následně decimovány (ponechán každý desátý). Časy příchodu v těchto přijímačích slouží k interpolaci do ostatních přijímačů dvěma metodami: lineární interpolací (čárkovaná čára s dlouhými čárkami) a pomocí vzorkovacího teorému (čárkovaná čára s krátkými čárkami). V části c je znázorněna chyba těchto interpolantů vzhledem k referenčnímu řešení. Část d ukazuje tuto chybu při dvojnásobně hustém vzorkování (ponechán každý pátý přijímač). Vidíme, že při jemnějším vzorkování je chyba interpolace menší. V každém případě je však Fourierovská interpolace řádově přesnější vzhledem k interpolaci lineární, která má největší chybu v místech největší křivosti hodochrony. Poznamenejme, že podmínkou pro úspěšné použití Fourierovské interpolace hodochrony je relativně rychlé ubývání jejího spektra. Ubývání spektra závisí na hladkosti signálu v časové oblasti. Proto byla hodochrona mimo zájmový interval extrapolována tak, aby hladce nabyla nulových hodnot. Extrapolace však přesto vnesla relativně prudší změny funkčních hodnot za hranicemi zájmového intervalu, což má za následek nárůst chyby Fourierovské interpolace na okrajích profilu.



Obrázek 4.18: Ukázka interpolace hodochrony odražené vlny pro případ odražejícího rozhraní, které obsahuje skok v hloubce (podle Brokešová, 1996). Část a) ukazuje paprskový diagram pro daný seismický profil, část b) referenční hodochronu (plnou čarou), hodochronu interpolovanou lineárně (čárkovaně s dlouhými čárkami) a pomocí vzorkovacího teorému (čárkovaně s krátkými čárkami) při vzorkovacím kroku 500m podél profilu. Část c) ukazuje chybu těchto dvou interpolací pro vzorkovací krok 500m, část d) pak tuto chybu při kroku 250m.

Ještě markantněji ukazuje vliv prudké změny funkční hodnoty od jednoho vzorku k druhému obrázek 4.18. Jedná se o stejný seismický profil a stejný numerický experiment, avšak zde obsahuje odrážející rozhraní „schod“, což má za následek nespojitost hodochrony. Pomiňme bezprostřední okolí nespojitosti hodochrony, kde pochopitelně musí být chyba každé interpolace značná. Vidíme však, že v tomto případě je chyba Fourierovské interpolace na obrázku 4.18c větší nebo alespoň srovnatelná s chybou lineární interpolace na celém seismickém profilu. Porovnání s obrázkem 4.17c ukazuje, že chyba Fourierovské interpolace vzrostla v důsledku nespojitosti ve středu profilu minimálně o jeden řád a to i na okrajích tohoto profilu. Obrázek 4.18d demonstruje, že ani zmenšení vzorkovacího kroku tuto skutečnost příliš neovlivní a chyba Fourierovské interpolace v okolí nespojitosti hodochrony (které v daném příkladu zahrnuje vlastně celý profil) zůstává stejná. Jedná se o analogii Gibsova jevu, se kterým jsme se setkali v případě konečných Fourierových řad. Ani tam přidání dalších členů řady nevedlo ke kvalitativní změně chování součtu řady v okolí bodu nespojitosti.

Na závěr tohoto odstavce uveďme ještě pro úplnost formou věty vzorkovací teorém pro 2D případ.

Věta (2D vzorkovací teorém pro neperiodické signály):

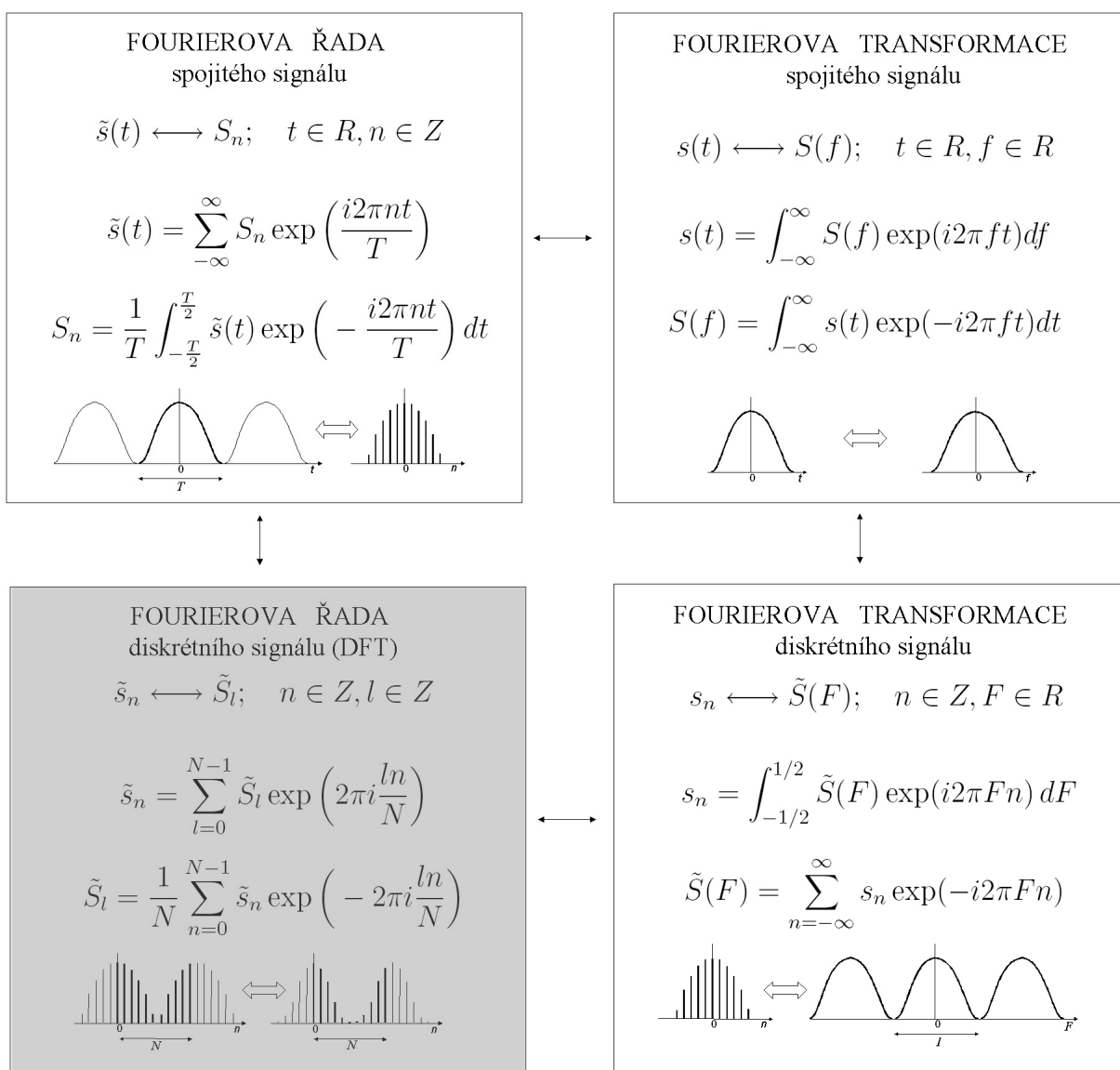
Předpokládejme frekvenčně omezený spojitý signál $s(t_1, t_2)$, jehož Fourierovo spektrum $S(\omega_1, \omega_2)$ je nenulové na intervalu $\langle \omega_{1,min}^-, \omega_{1,max}^+ \rangle \times \langle \omega_{2,min}^-, \omega_{2,max}^+ \rangle$. Je-li s_{n_1, n_2} diskrétní signál vzniklý vzorkováním spojitého signálu $s(t_1, t_2)$ s krokem Δt_1 v proměnné t_1 a Δt_2 v proměnné t_2 , $\Delta t_i < \pi/\omega_{i,max}$, kde $\omega_{i,max} = \max(|\omega_{i,min}^-|, \omega_{i,max}^+)$, $i = 1, 2$, pak hodnoty spojitého signálu $s(t_1, t_2)$ lze rekonstruovat z hodnot diskrétního signálu s_{n_1, n_2} pomocí vzorce

$$s(t_1, t_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s_{n_1, n_2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta t_1} (t_1 - n_1 \Delta t_1) \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\Delta t_2} (t_2 - n_2 \Delta t_2) \right). \quad (4.18)$$

Praktické využití tohoto teorému není však tak rozšířené, jak by se čtenář mohl domnívat. Například při zpracování digitálních fotografií (změna rozlišení apod.) se více uplatňují interpolační metody založené na tzv. diskrétní Fourierově transformaci (viz kapitola 5, zejména odstavce 5.7).

Kapitola 5

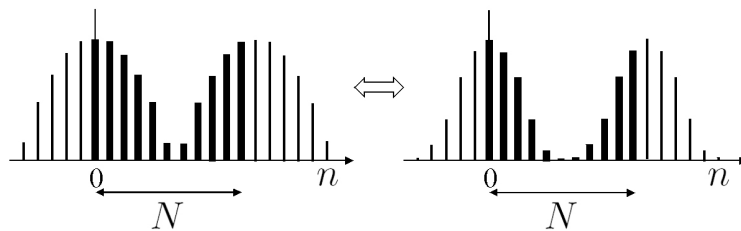
FOURIEROVA ŘADA DISKRÉTNÍHO SIGNÁLU — DFT



Fourierova řada diskrétního signálu je poslední z řady čtyř Fourierovských transformací probíraných v tomto kurzu. Má úzký vztah jak k Fourierově řadě spojitého signálu, tak k Fourierově transformaci diskrétního signálu a potažmo také k Fourierově transformaci spojitého signálu. Všechny tyto souvislosti probereme v této kapitole.

Fourierova řada diskrétního signálu je transformace přiřazující diskrétnímu signálu diskrétní spektrum (množinu Fourierových koeficientů). Jak víme z předcházejících kapitol, diskretizace signálu jde ruku v ruce s periodizací v komplementární oblasti. Protože jak v časové, tak ve spektrální oblasti je signál diskrétní, musí být v obou oblastech také periodický. Jedná se tedy o vzájemně jednoznačné přiřazení dvou diskrétních periodických signálů.

Omezme se při tomto přiřazení jen na jednu periodu jak v časové, tak spektrální oblasti (což můžeme díky periodicitě vždy udělat bez újmy obecnosti). Pokud je počet vzorků na jednu periodu v časové oblasti (řekněme N) roven počtu vzorků na jednu periodu ve spektrální oblasti, dostaneme tak přiřazení mezi dvěma N -ticemi diskrétních hodnot. Tomuto přiřazení říkáme **diskrétní Fourierova transformace** (DFT). Rozdíl mezi Fourierovou řadou diskrétního signálu a DFT je tedy pouze formální, je to vlastně rozdíl v úhlu pohledu na tentýž matematický objekt: buď sobě přiřazujeme dvě N -tice diskrétních hodnot, nebo dva N -periodické diskrétní signály (tedy spočetné množiny periodicky se opakujících diskrétních hodnot). Tuto situaci schematicky ilustruje obrázek 5.1. Je to podobná situace s jakou jsme se setkali v kapitole 2 při studiu Fourierovy řady spojitého signálu: signál jsme mohli chápat jako periodický (od samého počátku, případně zperiodizovaný až po sečtení příslušné Fourierovy řady), $\tilde{s}(t)$, anebo jsme se mohli omezit jen na interval jedné periody a uvažovat signál $s(t)$. V obou případech jsme dostali stejné vzorce pro koeficienty řady, tedy i stejné vlastnosti z hlediska symetrií spektra, operací v časové oblasti apod.

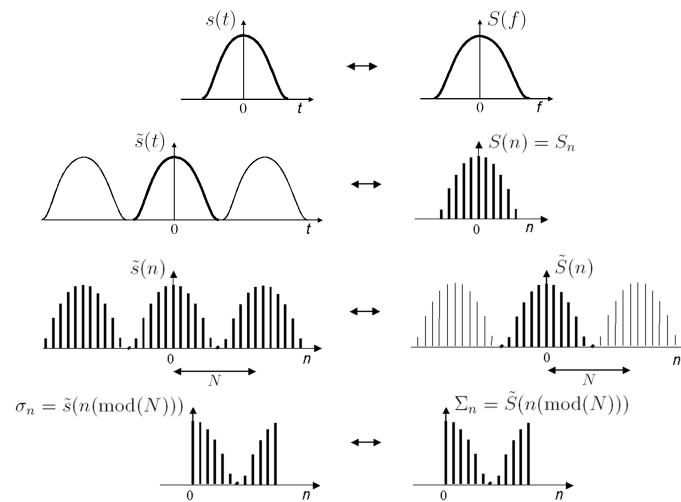


Obrázek 5.1: Dvojitý úhel pohledu na Fourierovu řadu diskrétního signálu: přiřazení dvou N -periodických diskrétních signálů nebo dvou N -tic diskrétních hodnot (DFT).

Diskrétní Fourierova transformace má nesmírný význam zejména z numerického hlediska. Umožňuje, za určitých podmínek, numerický výpočet Fourierovy transformace spojitého signálu, jakož i Fourierovy řady spojitého signálu a Fourierovy transformace diskrétního signálu. Je to dáno tím, že použití výpočetní techniky je jednodušší pro diskrétní reprezentaci signálu jak v časové, tak spektrální oblasti (počítač v minulosti dokonce ani neuměl pracovat s „analogovými“, tj. spojitými signály). Diskrétní charakter signálu bývá také důsledkem metody získávání měřených dat – odečet hodnot v určitých okamžicích apod. Podmínky, za kterých je možné DFT použít k výpočtu ostatních transformací jsou dány právě zde diskutovanými vztahy mezi těmito transformacemi.

K zavedení Fourierovy řady diskrétního signálu (resp. DFT) můžeme v principu dospět dvěma cestami na základě znalosti předcházejících Fourierovských transformací probíraných v tomto kurzu. Vyjděme z Fourierovy transformace spojitého signálu. Diskretizací spektra (a tím pádem

periodizací signálu v časové oblasti) dostaneme Fourierovu řadu spojitého signálu. Pokud dále diskretizujeme periodický signál v časové oblasti, dojde k periodizaci Fourierových koeficientů v oblasti spektrální. Dostaneme tím přiřazení, které již představuje Fourierovu řadu diskrétního signálu. Je-li počet vzorků na periodu v časové i spektrální oblasti stejný¹, např. N , a omezíme-li se na jednu periodu v obou oblastech, konkrétně na vzorky 0 až $N - 1$, přejdeme k DFT. Tento postup zachycuje graficky obrázek 5.2. Obrázek je pouze schematický, nezobrazuje přesně vztahy jednotlivých transformací — např. multiplikativní faktor $1/T$ ve vztahu Fourierovy transformace a Fourierových koeficientů (viz odstavec 3.3) je pominut. Podobně není znázorněn multiplikativní faktor $1/N$ ve vztahu mezi Fourierovou řadou spojitého a diskrétního signálu (odstavec 5.5). Poznamenejme, že při periodizaci v časové oblasti (diskretizaci spektra) může případně dojít k efektu alias v důsledku čehož diskrétní signál v časové oblasti nebude odpovídat diskrétní reprezentaci původního spojitého signálu.

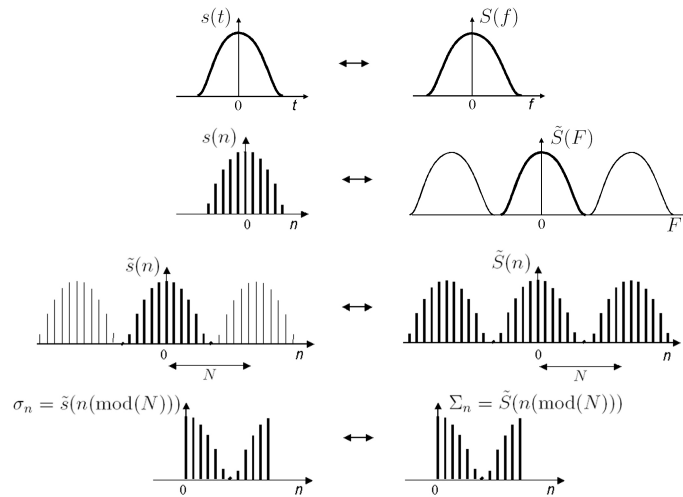


Obrázek 5.2: Grafické znázornění odvození Fourierovy řady diskrétního signálu a DFT z Fourierovy transformace spojitého signálu postupnou diskretizací spektra a následně signálu v časové oblasti. Shora dolů: Fourierova transformace spojitého signálu, Fourierova řada spojitého signálu, Fourierova řada diskrétního signálu, DFT. Výraz $n(\text{mod}N)$ představuje hodnotu $n - mN$, kde m je takové, aby $n - mN$ bylo v intervalu $(0, N - 1)$.

Alternativně můžeme k Fourierově řadě diskrétního signálu (a DFT) dospět tak, že bychom ve Fourierově páru „spojitý signál – spojité spektrum“ ($S(f) = \mathcal{F}(s(t))$) nejprve diskretizovali signál v časové oblasti (jak víme z předcházející kapitoly, dostali bychom Fourierovu transformaci diskrétního signálu) a následně pak periodické spektrum, čímž by zároveň došlo k periodizaci diskrétního signálu v časové oblasti. Tento druhý způsob znázorňuje schematicky obrázek 5.3. Opět by mohlo při první diskretizaci (v časové oblasti) dojít k efektu alias ve spektru.

Vzhledem k těsné souvislosti Fourierovy řady diskrétního signálu a DFT, budeme nadále v této kapitole hovořit již jen o DFT, která má bezprostřední praktické aplikace. Rozdíl je, jak již víme, více-méně formální a projeví se ve specifickém zápisu některých vzorců. Nejprve budeme diskutovat vlastnosti této transformace jakožto svébytného matematického objektu se zaměřením na různé matematické operace aplikované na diskrétní signál, N -tici vzorků, aniž bychom se

¹Jiným typem Fourierovy řady diskrétního signálu, která nemá stejný počet vzorků na periodu v obou oblastech, se v tomto kurzu zabývat nebudeme.



Obrázek 5.3: Grafické znázornění odvození Fourierovy řady diskrétního signálu a DFT z Fourierovy transformace spojitého signálu postupnou diskretizací signálu v časové oblasti a následně spektra. Shora dolů: Fourierova transformace spojitého signálu, Fourierova transformace diskrétního signálu, Fourierova řada diskrétního signálu, DFT. Výraz $n(\text{mod}N)$ představuje hodnotu $n - mN$, kde m je takové, aby $n - mN$ bylo v intervalu $(0, N - 1)$.

zabývali „původem“ takových N -tic. Potom se soustředíme na souvislost této transformace s ostatními Fourierovskými transformacemi, tj. budeme studovat případy, kdy N -tice zúčastněné v transformaci vzešly z původně spojitých signálů.

5.1 Definice diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

Definice: (Diskrétní Fourierova transformace)

Diskrétní Fourierovou transformací signálu $s_n = s(n), n = 0, 1, \dots, N - 1$ nazveme diskrétní signál $S_l = S(l), l = 0, 1, \dots, N - 1$

$$S_l = \mathcal{DFT}[s_n]_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(-i2\pi \frac{nl}{N}\right). \quad (5.1)$$

Inverzní diskrétní Fourierovou transformací odpovídající spektru $S_l, l = 0, 1, \dots, N - 1$ je diskrétní signál $s_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$

$$s_n = \mathcal{DFT}^{-1}[S_l]_n = \sum_{l=0}^{N-1} S_l \exp\left(i2\pi \frac{nl}{N}\right). \quad (5.2)$$

DFT (a též Fourierova řada diskrétního signálu) je přirozenou diskrétní analogií Fourierovy řady spojitého signálu. Ke vzorci pro přímou transformaci bychom dospěli snadno nahrazením spo-

jitého signálu diskretním (a tudíž integrálu sumou v mezích délky periody N) ve vzorci pro koeficient Fourierovy exponenciální řady (2.17). Podobně jako v předešlé kapitole, i zde bychom ke vzorci pro přímou transformaci mohli také dospět vyjádřením integrálu v (2.17) numericky pomocí lichoběžníkového pravidla. Vzorec pro inverzní DFT je zase aproximací vzorce pro inverzní Fourierovu transformaci diskretního signálu, vyjádříme-li lichoběžníkovým pravidlem integrál v (4.2). Je zřejmé, že chyba kvadratury příslušného integrálu (v daném případě lichoběžníkovým pravidlem) v jedné oblasti je svázána s efektem alias v komplementární oblasti.

Výše uvedená definice má řadu alternativních variant: někteří autoři řadí multiplikativní faktor $1/N$ k inverzní namísto přímé transformaci², případně uvažují symetricky faktor $1/\sqrt{N}$ u obou vzorců. Někdy také bývá prohozeno znaménko u exponentu, tj. u přímé transformace $+$ a u inverzní $-$. Na tyto možné odlišnosti musí dát čtenář velký pozor při přejímání výsledků, případně výpočetních programů na realizaci transformace, od jiných autorů³.

Často se též používá speciální notace používající veličiny $w_N = \exp(-i2\pi/N)$. Výraz w_N představuje primitivní kořen N -té odmocniny z jedné. DFT a inverzní DFT pak zapíšeme jako

$$S_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n w_N^{nl}, \quad s_n = \sum_{l=0}^{N-1} S_l w_N^{-nl}.$$

Uspořádáme-li N -tice s_n a S_l do sloupcových vektorů \mathbf{s} a \mathbf{S} , můžeme DFT zapsat v maticové formě

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \overline{\mathbf{W}} \mathbf{S}, \quad W_{nk} = w_N^{nk},$$

kde pruhem označujeme komplexní sdružení. Matice \mathbf{W} se někdy nazývá matice DFT nebo též Vandermondova matice. Z její konstrukce je zřejmé, že je symetrická $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$, tj. $W_{kn} = \exp(-i2\pi kn/N) = \exp(-i2\pi nk/N) = W_{nk}$, a platí pro ni $N\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^{-1}$. Jednou z výhod alternativní symetrické definice DFT, uvažující faktor $1/\sqrt{N}$ u obou vzorců je, že dává unitární matici DFT.

Sloupce matice \mathbf{W} jsou tvořeny vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\{\mathbf{N}\}\mathbf{k}} &= (1, w_N^k, w_N^{2k}, \dots, w_N^{(N-1)k})^T \\ &= (1, \exp(-i\frac{2\pi k}{N}), \exp(-2i\frac{2\pi k}{N}), \dots, \exp(-(N-1)i\frac{2\pi k}{N}))^T, \end{aligned}$$

kde $k = 0, 1, \dots, N-1$. Těmto vektorům říkáme báze DFT. Jsou vytvořeny vzorkováním funkcí $\exp(-i2\pi kt)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ v bodech $t = n/N$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Na obrázku 5.4 jsou znázorněny pro případ $N = 8$. Jedná se o komplexní veličiny, a proto obrázek ukazuje zvlášť reálnou (vlevo) a imaginární (vpravo) část. Každý řádek v obrázku odpovídá jednomu z osmi sloupcových vektorů. Vzhledem k symetrii matice \mathbf{W} se stejné hodnoty nacházejí i v jejích řádcích.

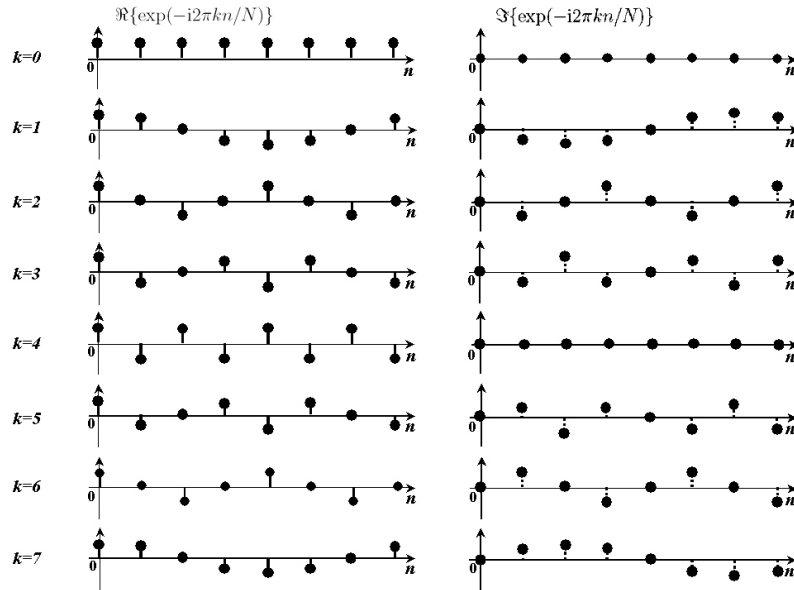
Vektory $\mathbf{w}_{\{\mathbf{N}\}\mathbf{k}}$ tvoří ortogonální bázi prostoru C^N (N -tic komplexních čísel). Jsou ortogonální ve skalárním součinu

$$(\mathbf{w}_{\{\mathbf{N}\}\mathbf{k}}, \mathbf{w}_{\{\mathbf{N}\}\mathbf{m}}) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{2\pi kn}{N}\right) \exp\left(i\frac{2\pi mn}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi n(m-k)}{N}\right) = N\delta_{km}.$$

Poznamenejme, že různé znaménko v exponentu v první rovnosti je důsledkem toho, že při skalárním násobení v komplexním oboru je jeden z násobených vektorů komplexně sdružený.

²Tak je tomu např. i v programu Matlab.

³V široce rozšířené knize Numerických receptů (Press a kol., 1997) obsahujících řadu subroutin je v definici DFT použito jak opačné znaménko v exponentu, tak faktor $1/N$ je řazen k inverzní transformaci.



Obrázek 5.4: Reálná (vlevo, plnou čarou) a imaginární (vpravo, čárkovaně) část DFT báze pro $N = 8$.

Poslední rovnost je odvozena v dodatku D.22 s využitím částečného součtu geometrické řady. Rovnice platí, násobíme-li skalárně vektor $\mathbf{w}_{\{N\}k}$ s libovolným vektorem báze, tedy i s $\mathbf{w}_{\{N\}0}$, jehož prvky jsou identicky rovné jedné. To znamená, že součet prvků tvořících báze vektor při $k \neq 0$ musí být roven nule — srovnej součty prvků v jednotlivých řádcích (kromě $k = 0$) na obrázku 5.4.

Součin dvou celých čísel v exponenciálách, které tvoří prvky matice \mathbf{W} , je opět celé číslo. Můžeme tedy psát $W_{kn} = \exp(-i2\pi kn/N) = \exp(-i2\pi m/N)$, $m \in Z$ odkud je již zřejmá N -periodicta těchto veličin:

$$\exp(-i2\pi m/N) = \exp(-i2\pi(m + jN)/N) = \exp(-i2\pi m/N) \exp(-i2\pi jN/N), \quad \forall j \in Z.$$

Prvky matice DFT a tudíž i báze vektory DFT jsou tedy N -periodické diskretní signály (konkrétně jejich reálné části diskretní kosiny a imaginární diskretní siny).

Vidíme tedy přímo z definice, že signál $S_l, l = 0, 1, \dots, N - 1$ lze N -periodicky rozšířit při zachování definičního vzorce (5.1) na celý definiční obor Z ($\tilde{S}(l) = S_{n+jN} = S_n, \forall j \in Z$), aniž bychom evokovali možnou souvislost s periodickým opakováním koeficientů Fourierovy řady původně spojitého signálu, naznačenou v úvodním odstavci této kapitoly (obrázek 5.2). Obdobně je z definice zřejmá N -periodicta signálu daného inverzní DFT, $\tilde{s}(n) = s_{l+jN} = s_l, \forall j \in Z$. To umožňuje také další možnosti alternativních definic DFT, spočívající v různých mezích uvažovaných sum při zachování délky intervalu N . Dříve byly např. často preferovány definice uvažující \sum_1^N namísto \sum_0^{N-1} . Bylo to dáno hlavně tím, že některé programovací jazyky používané v minulosti neumožňovaly nulový index pole. V dnešní době nečiní programovacím jazykům problém ani záporný index pole a proto se často můžeme setkat se sumami $\sum_{-N/2}^{(N/2)-1}$ pro N sudé⁴, a $\sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2}$ pro N liché.

⁴Jak uvidíme později, při numerické realizaci DFT bývá N nejen sudé, ale dokonce rovno mocnině dvou.

Zastavme se ještě u vzorce pro inverzní DFT. Jak již bylo řečeno, můžeme ho formulovat na základě analogie se vzorcem pro inverzní Fourierovu transformaci diskretního signálu (případně odvodit pomocí aproximace lichoběžníkovým pravidlem) a následně odvodit, že se jedná o vzájemně jednoznačné přiřazení, anebo ho můžeme odvodit přímo ze vzorce pro přímou DFT. Postupujeme tak, že (5.1) vynásobíme faktorem $\exp(i2\pi lm/N)$ a uvážíme sumu přes l od 0 do $N - 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} S_l \exp\left(i2\pi \frac{lm}{N}\right) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(-i2\pi \frac{ln}{N}\right) \exp\left(i2\pi \frac{lm}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-i2\pi \frac{l(n-m)}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n N \delta_{nm} = s_m, \quad \text{c.b.d.,} \end{aligned}$$

kde jsem opět využili (D.22.2) z dodatku D.22. Analogicky bychom dokázali vzájemnou jednoznačnost DFT a inverzní DFT dosazením (5.1) za S_l do vzorce (5.2).

Definice na začátku tohoto odstavce, stejně jako diskuse v úvodu kapitoly, naznačuje mnoho souvislostí a analogií DFT a ostatních Fourierovských transformací probíraných v tomto kurzu. Existují však také podstatné rozdíly. Jeden rozdíl spočívá v tom, že při DFT se nemění typ signálu ani proměnná — v „časové“ oblasti pracujeme s diskretním signálem proměnné n a délky N a stejně tak v oblasti „spektrální“. Oba signály jsou si naprosto rovnocenné a na první pohled nerozlišitelné. Další rozdíl, podstatnější z teoretického i praktického hlediska, je dán konečností obou sum v definici DFT. Součet konečného počtu členů v těchto sumách existuje vždy a je konečný^{Footnote}Pro omezené hodnoty vzorků ($< \pm\infty$). Nepotřebujeme tedy žádné speciální podmínky existence dané transformace spočívající v omezení třídy signálů, se kterými pracujeme. U ostatních transformací jsme takové podmínky vždy formulovali — signály musely být například integrovatelné s kvadrátem, nebo absolutně integrovatelné či absolutně sčítatelné. K zajištění existence inverzních transformací jsme dokonce potřebovali podmínky ještě silnější, např. Dirichletovy. To vše u DFT odpadá — koeficienty lze spočítat vždy pomocí konečného počtu operací sčítání.

Příklad:

Spočítejte $\mathcal{DFT}[5, 3 - 2i, -7, 3 + 2i]$.

Obecný předpis pro výpočet koeficientů DFT dává pro tento příklad

$$\begin{aligned} S_l &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 s_n \exp(-i2\pi ln/4) \\ &= \frac{1}{4} [5 + (3 - 2i) \exp(-i2\pi l/4) - 7 \exp(-i2\pi 2l/4) + (3 - 2i) \exp(-i2\pi 3l/4)]. \end{aligned}$$

Dosazením za l postupně $l = 0, 1, 2, 3$ pak dostaneme jednotlivé koeficienty:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{4} [5 + (3 - 2i) - 7 + (3 + 2i)] = 1 \\ S_1 &= \frac{1}{4} [5 + (3 - 2i) \exp(-i2\pi/4) - 7 \exp(-i2\pi 2/4) + (3 - 2i) \exp(-i2\pi 3/4)] \\ &= \frac{1}{4} [5 - i(3 - 2i) + 7 + i(3 + 2i)] = 2 \\ S_2 &= \frac{1}{4} [5 + (3 - 2i) \exp(-i2\pi 2/4) - 7 \exp(-i2\pi 4/4) + (3 - 2i) \exp(-i2\pi 6/4)] \\ &= \frac{1}{4} [5 - (3 - 2i) - 7 - (3 + 2i)] = -2 \\ S_3 &= \frac{1}{4} [5 + (3 - 2i) \exp(-i2\pi 3/4) - 7 \exp(-i2\pi 6/4) + (3 - 2i) \exp(-i2\pi 9/4)] \\ &= \frac{1}{4} [5 + i(3 - 2i) + 7 - i(3 + 2i)] = 4. \end{aligned}$$

Souhrnně tedy máme $\mathcal{DFT}[5, 3 - 2i, -7, 3 + 2i] = [1, 2, -2, 4]$.

Cvičení 5.1.1:

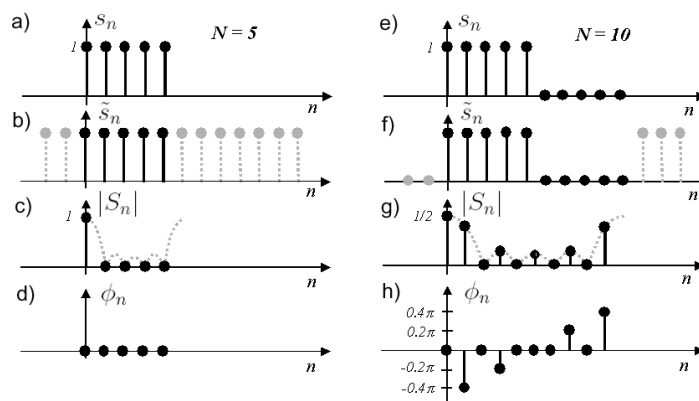
Najděte diskrétní Fourierovu transformaci čtveřic $[1, 0, 0, 0]$ a $[1, 1, 1, 1]$.

Obě N -tice zúčastněné v DFT (a inverzní DFT) jsou obecně komplexní. Nazveme-li $\mathcal{DFT}[s_n]$ DFT-spektrum signálu s_n , pak toto spektrum je obecně komplexní i v případě reálného signálu s_n . Reprezentujeme ho buď reálnou a imaginární částí anebo modulem $|S_n|$ (amplitudovým DFT-spektrum) a hlavní hodnotou argumentu ϕ_n (fázovým DFT-spektrum).

$$|S_n| = \sqrt{(\Re\{S_n\})^2 + (\Im\{S_n\})^2}, \quad \phi_n \equiv \arg S_n \in (-\pi, \pi),$$

kde hlavní hodnota argumentu se určuje stejným způsobem jako u Fourierových koeficientů spojitého signálu, tj. podle tabulky 2.1.

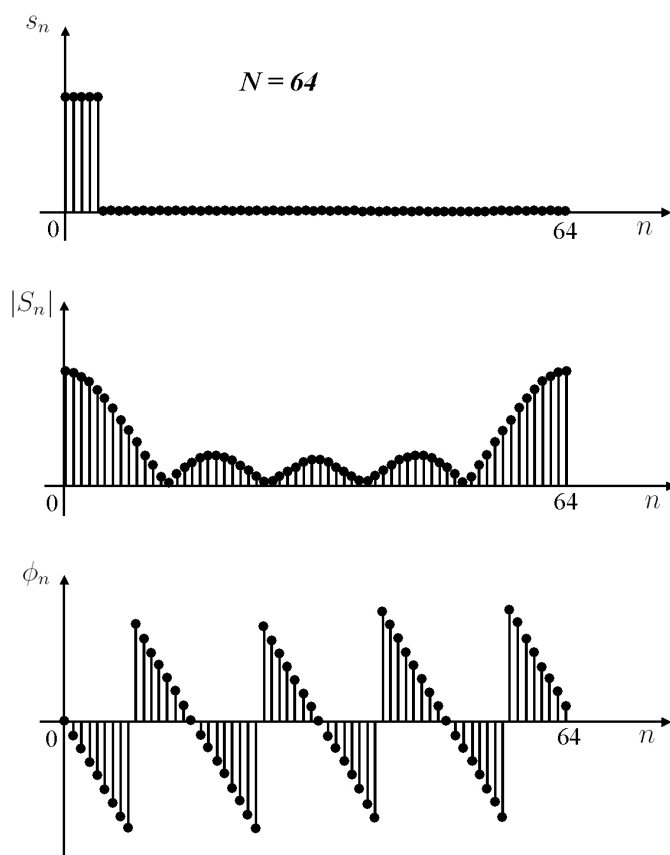
Obrázek 5.5 ukazuje dva příklady DFT pětivzorkové pravoúhelníkové funkce pro dvě hodnoty počtu vzorků na periodu (5 a 10 bodů). Názornější představu o DFT pravoúhelníkové funkce dává obrázek 5.6, ukazující DFT pravoúhelníkové funkce stejné délky, ale pro $N = 64$.



Obrázek 5.5: Diskrétní Fourierova transformace pravoúhelníkové funkce délky $n = 5$ pro $N = 5$ (vlevo) a $N = 10$ (vpravo). Signál s_n před transformací (a,e), N -periodické opakování $\tilde{s}(n)$ (b,f), amplitudové spektrum DFT $|S_n|$ (c,g – pro názornost je čárkovatě znázorněna pomocná křivka Fourierovy transformace diskrétního signálu normaliovaná faktorem $1/N$), fázové spektrum DFT ϕ_n (d,h).

5.2 Vlastnosti DFT — symetrie

Symetrii DFT budeme rozumět rysy, které lze popsat pomocí sudých a lichých funkcí. V zápisu příslušných vlastností půjde tedy o zrcadlení vzhledem k proměnné n . V případě Fourierovy řady diskrétního signálu, je zrcadlení $\tilde{s}(n) \rightarrow \tilde{s}(-n)$ přirozenou operací, která nepotřebuje zvláštní vysvětlování ani speciální zápis. V souvislosti s DFT se však jedná o tzv. **cyklické zrcadlení**, které zapisujeme pomocí výrazu $(-n) \bmod N$, kde $\bmod N$ čteme jako modulo N . Operace $\bmod N$ dává nejen celočíselný zbytek po dělení N , ale zároveň zajistí, že index bude ležet v intervalu



Obrázek 5.6: Diskrétní Fourierova transformace pravoúhelníkové funkce délky $n = 5$ pro $N = 64$. Shora dolů: signál s_n před transformací, amplitudové spektrum DFT $|S_n|$, fázové spektrum DFT ϕ_n .

$\langle 0, N - 1 \rangle$. Libovolné celé číslo n lze jednoznačně vyjádřit jako $n = k + mN$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Takové k pak definujeme jako

$$k \equiv n \pmod{N}.$$

Takže např.

$$\begin{aligned} (-1) \pmod{6} &= 5 & \dots & (m = 1), \\ 3 \pmod{5} &= 3, & \dots & (m = 0), \\ 33 \pmod{16} &= 1 & \dots & (m = 2), \end{aligned}$$

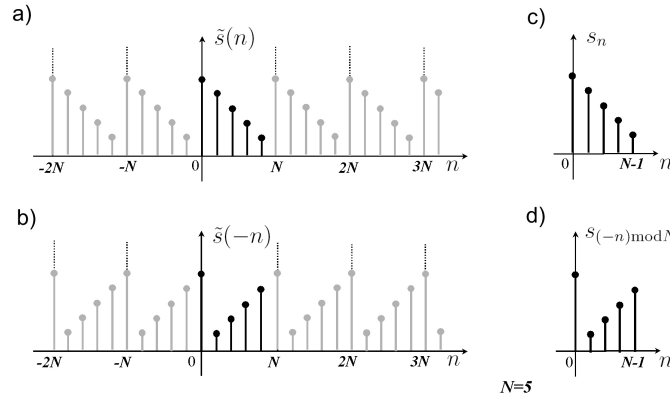
a podobně.

Cyklické zrcadlení

Jedná se o operaci, která vytvoří ze signálu $s_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$ signál $h_n = s_{(-n) \pmod{N}}, n = 0, 1, \dots, N - 1$. Příklad cyklického zrcadlení pro jeden konkrétní signál o délce 5 vzorků je v tabulce 5.1 a graficky znázorněn na obrázku 5.7.

Cyklické zrcadlení můžeme tedy slovy popsat jako operaci, při které ponecháme vzorek s_0 , zatímco pro k od 1 do $N - 1$ vzorky s_k zaměníme se vzorky s_{N-k} . Z obrázku 5.7 je zřejmé, že je to ekvivalentní postupu, při kterém bychom signál s_n nejprve periodicky rozšířili na $\tilde{s}(n)$,

n	0	1	2	3	4
$(-n) \bmod 5$	0	4	3	2	1
s_n	5	4	3	2	1
$s_{(-n) \bmod 5}$	5	1	2	3	4

Tabulka 5.1: Cyklické zrcadlení pětice $[5,4,3,2,1]$.

Obrázek 5.7: Operace zrcadlení N -periodického signálu a sekvence délky N , se kterou pracuje DFT: a) N -periodický signálu $\tilde{s}(n)$, b) jeho zrcalový obraz, c) signál $s_n, n \in (0, N - 1)$ a d) jeho zrcalový obraz v cyklickém zrcadlení d).

tento běžným způsobem zrcadlově převrátili a následně se omezili opět na vzorky s indexem 0 až $N - 1$.

Uvažme DFT pár $S_l = \mathcal{DFT}[s_n], l, n = 0, 1, \dots, N - 1$. Jak se operace cyklické zrcadlení, aplikovaná na signál s_n , projeví ve spektrální oblasti? Projeví se rovněž cyklickým zrcadlením:

$$s_{(-n) \bmod N} \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} S_{(-l) \bmod N}. \quad (5.3)$$

Důkaz:

Rozšířme nejprve N -periodicky $s_{(-n) \bmod N}$ na celý definiční obor, tj. přejdeme k $\tilde{s}(-n)$. Přímo z definičního vzorce dostaneme koeficienty Fourierovy řady tohoto diskrétního signálu

$$\mathcal{DFT}[\tilde{s}(-n)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}(-n) \exp\left(-i2\pi \frac{ln}{N}\right).$$

Použijeme-li substituci $k = -n$, můžeme psát

$$\mathcal{DFT}[\tilde{s}(-n)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}(k) \exp\left(i2\pi \frac{lk}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}(k) \exp\left(-i2\pi \frac{(-l)k}{N}\right) = \tilde{S}_{-l}.$$

Omezíme-li se v obou oblastech pouze na základní interval $(0, N - 1)$, dostaneme

$$\mathcal{DFT}[s_{(-n) \bmod N}] = S_{(-l) \bmod N}, \quad \text{c.b.d.}$$

Komplexní sdružení

Uvažme opět DFT pár $S_l = \mathcal{DFT}[s_n]$, $l, n = 0, 1, \dots, N-1$. Uvažujeme-li komplexně sdružený signál namísto s_n , platí

$$\bar{s}_n \xleftrightarrow{DFT} \bar{S}_{(-l) \bmod N}. \quad (5.4)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathcal{DFT}[\bar{s}_n] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{s}_n \exp\left(-i2\pi \frac{ln}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{s_n \exp\left(i2\pi \frac{ln}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{N} \overline{\sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(i2\pi \frac{ln}{N}\right)} = \frac{1}{N} \overline{\sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(-i2\pi \frac{(-l)n}{N}\right)} \\ &= \bar{S}_{(-l) \bmod N}, \text{ c.b.d.} \end{aligned}$$

Spojením komplexního sdružení a cyklického zrcadlení můžeme také snadno zjistit, čemu odpovídá komplexně sdružené spektrum:

$$\bar{s}_{(-n) \bmod N} \xleftrightarrow{DFT} \bar{S}_l. \quad (5.5)$$

DFT reálného signálu

Pro reálný signál platí $s_n = \bar{s}_n$. Z rovnice (5.4) a z toho, že DFT je vzájemně jednoznačné přiřazení pak okamžitě dostaneme

$$s_n = \bar{s}_n \quad \Leftrightarrow \quad S_l = \bar{S}_{(-l) \bmod N}.$$

Platí tedy důležitá věta:

Věta (O DFT reálného signálu):

Jestliže je signál s_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$ reálný, pak pro jeho DFT spektrum platí

$$S_l = \bar{S}_{(-l) \bmod N}. \quad (5.6)$$

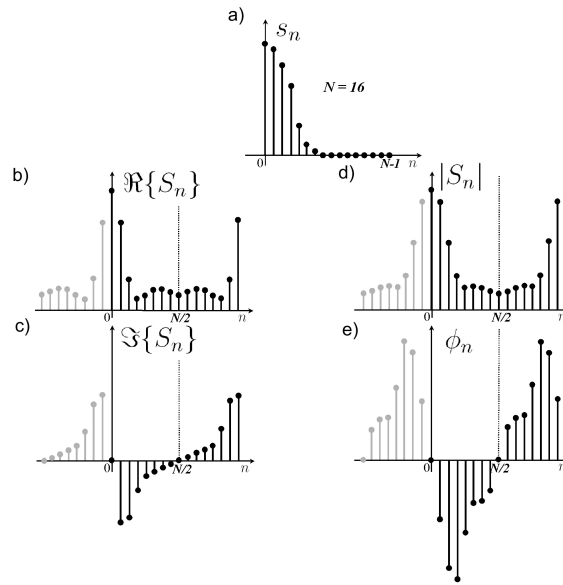
Navíc reálná část jeho DFT spektra a amplitudové DFT spektrum jsou funkce cyklicky sudé, zatímco imaginární část jeho DFT spektra a fázové DFT spektrum jsou funkce cyklicky liché

$$\begin{aligned} \Re\{S_l\} &= \Re\{S_{(-l) \bmod N}\} \\ \Im\{S_l\} &= -\Im\{S_{(-l) \bmod N}\} \\ |S_l| &= |S_{(-l) \bmod N}| \\ \phi_l &= -\phi_{(-l) \bmod N} \end{aligned} \quad (5.7)$$

a koeficient S_0 je reálný, tj. $\phi_0 = 0$. Pro sudé N je navíc reálný i vzorek $S_{N/2}$, tj. $\phi_{N/2} = 0$.

Slovně shrnuto: DFT spektrum reálného signálu je signál **cyklicky hermitovský**. Vztahy (5.7) jsou triviálním důsledkem (5.6). Reálnost S_0 je dána tím, že podle definice je S_0 aritmetickým průměrem vzorků s_n , které jsou dle předpokladu reálné. Reálnost $S_{N/2}$ je důsledkem toho, že pro sudé N je $(-N/2) \bmod N = N/2$ a tudíž díky (5.6) je $S_{N/2} = \bar{S}_{N/2}$.

Symetrie DFT reálného signálu jsou ilustrovány na obrázku 5.8. Na obrázku je dobře patrná i symetrie kolem $N/2$ (pro N sudé).



Obrázek 5.8: Ilustrace symetrií DFT spektra reálného signálu: a) reálný signál s_n , reálná (b) a imaginární (c) část jeho DFT spektra $S_n = \mathcal{DFT}[s_n]$, d) amplitudové DFT spektrum $|S_n|$, e) fázové DFT spektrum ϕ_n . Pro lepší názornost jsou šedou barvou zakresleny odpovídající hodnoty pro N -periodický signál \tilde{s}_n .

Kdybychom každý vzorek reálného signálu násobili imaginární jednotkou, dostali bychom ryze imaginární signál. Čtenář snadno nahlédne, že jeho spektrum by se stalo cyklicky antihermitovské, tj. mělo by naopak lichou reálnou a sudou imaginární část.

DFT cyklicky sudého a lichého signálu

Každý obecný signál $s_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$ můžeme rozepsat na cyklicky sudou a lichou část:

$$s_n = e_n + o_n,$$

kde

$$e_n = \frac{1}{2}[s_n + s_{(-n) \bmod N}], \quad (5.8)$$

$$o_n = \frac{1}{2}[s_n - s_{(-n) \bmod N}]. \quad (5.9)$$

Naopak libovolný cyklicky sudý signál (lichý) můžeme doplnit libovolným cyklicky lichým (sudým) signálem a interpretovat jej jako sudou (lichou) část signálu, který je roven jejich součtu. Můžeme tedy každý sudý⁵ signál vyjádřit ve tvaru (5.8) a lichý ve tvaru (5.9).

Z konstrukce (5.8) a (5.9) je jasné, jaké musí být DFT spektrum takových signálů. Je-li $S_l, l = 0, 1, \dots, N - 1$ DFT spektrem signálu $s_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$, pak s využitím vlastnosti

⁵Označení „cyklicky“ již pro zkrácení vynecháváme.

(5.3) a linearity sumace v definici DFT můžeme psát

$$e_n = \frac{1}{2}[s_n + s_{(-n)\bmod N}] \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{2}[S_l + S_{(-l)\bmod N}] = E_l, \quad l = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.10)$$

$$o_n = \frac{1}{2}[s_n - s_{(-n)\bmod N}] \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{2}[S_l - S_{(-l)\bmod N}] = O_l, \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.11)$$

Je tedy DFT spektrem sudého signálu opět sudý signál a lichého lichý. Pokud je sudý signál s_n navíc reálný, je jeho DFT spektrum reálné a sudé (neboť obecně lichá imaginární část hermitovského spektra musí být nulová, má-li být spektrum sudé). Podobně, je-li lichý signál s_n navíc reálný, je jeho DFT spektrum ryze imaginární a liché. Obdobné symetrie bychom našli i pokud by sudý/lichý signál s_n byl navíc ryze imaginární. Pro snadnější zapamatování dobře poslouží grafická pomůcka (analogická té, kterou jsme používali i u ostatních Fourierovských transformací):

$$\begin{array}{rcccccccc} s_n & = & o_n & + & e_n & = & \Re\{o_n\} & + & i\Im\{o_n\} & + & \Re\{e_n\} & + & i\Im\{e_n\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \swarrow & & \searrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_l & = & O_l & + & E_l & = & \Re\{O_l\} & + & i\Im\{O_l\} & + & \Re\{E_l\} & + & i\Im\{E_l\} \end{array}$$

Ze schématu jasně vidíme, kromě symetrií, o kterých již byla řeč, že např. DFT spektrum ryze imaginárního signálu je antihermitovské.

Nejdůležitější ze symetrií diskutovaných v tomto odstavci shrnuje tabulka 5.2. Kdybychom jednotlivé její řádky popsali slovy, dostali bychom tabulku 2.2. Jak víme, zcela analogické symetrie platí i pro Fourierovu transformaci. V předcházejících kapitolách jsme tyto symetrie odvozovali pomocí kosinové a sinové transformace. Stejný postup bychom mohli aplikovat i pro DFT, ale z důvodů omezeného rozsahu tohoto kurzu zde sinovou a kosinovou DFT nezavádíme. Poznamenejme, že i pro jiné Fourierovské transformace by zmíněné symetrie bylo možné odvodit analogickým postupem, jaký jsme použili v tomto odstavci.

Z tabulky i z řádkového schématu je též dobře vidět, že každé DFT spektrum S_l lze rozdělit na hermitovskou část S_l^H a antihermitovskou část S_l^A , které představují DFT reálné a imaginární části signálu s_n

$$S_l^H = \mathcal{DFT}[\Re\{s_n\}] = \frac{1}{2}[S_l + \bar{S}_{(-l)\bmod N}], \quad (5.12)$$

$$S_l^A = \mathcal{DFT}[\Im\{s_n\}] = \frac{1}{2}[S_l - \bar{S}_{(-l)\bmod N}]. \quad (5.13)$$

Studium takových symetrií má velký význam nejen z teoretického, ale i z výpočetního hlediska. Můžeme jich například využít při výpočtu DFT reálných signálů. Běžné programy pro výpočet DFT jsou navrženy pro komplexní signály a v případě reálných signálů bychom museli na místo imaginární části dosadit nuly. Můžeme ale s výhodou využít symetrií DFT a místou dvou výpočtů DFT pro dva reálné signály x_n a y_n počítat DFT pouze jednou pro komplexní signál $c_n = x_n + iy_n$. Jeho spektrum pak snadno rozložíme na hermitovskou a antihermitovskou část, $C_l = C_l^H + C_l^A$, podle vzorců (5.12) a (5.13), čímž dostaneme $C_l^H = \mathcal{DFT}[x_n]$ a $C_l^A = \mathcal{DFT}[y_n]$ s polovičními numerickými náklady.

$s_n, n = 1, 2, \dots, N - 1$	$S_l, l = 1, 2, \dots, N - 1$
$\Re\{s_n\} = \frac{1}{2}[s_n + \bar{s}_n]$	$\frac{1}{2}[S_l + \bar{S}_{(-l)\bmod N}]$
$\text{i}\Im\{s_n\} = \frac{1}{2}\text{i}[s_n - \bar{s}_n]$	$\frac{1}{2}[S_l - \bar{S}_{(-l)\bmod N}]$
$e_n = \frac{1}{2}[s_n + s_{(-n)\bmod N}]$	$E_l = \frac{1}{2}[S_l + S_{(-l)\bmod N}]$
$o_n = \frac{1}{2}[s_n - s_{(-n)\bmod N}]$	$O_l = \frac{1}{2}[S_l - S_{(-l)\bmod N}]$
$\frac{1}{2}[e_n + \bar{e}_n]$	$\frac{1}{2}[E_l + \bar{E}_l]$
$\frac{1}{2}[o_n + \bar{o}_n]$	$\frac{1}{2}[O_l - \bar{O}_l]$
$\frac{1}{2}[e_n - \bar{e}_n]$	$\frac{1}{2}[E_l - \bar{E}_l]$
$\frac{1}{2}[o_n - \bar{o}_n]$	$\frac{1}{2}[O_l + \bar{O}_l]$

Tabulka 5.2: Některé symetrie signálu při DFT.

Všechny dosud uvažované symetrie nezávisí na konkrétní definici DFT — je jedno, zda faktor $1/N$ je u přímé nebo inverzní transformace, a je také jedno, jaké znaménko uvažujeme v exponentu.

Na závěr tohoto odstavce zmiňme ještě symetrii ve smyslu reciprocity (duality) DFT. Jedná se o analogii vlastnosti (3.26), se kterou jsme se setkali v 3.7. Tato symetrie v matematickém zápisu již závisí na konkrétní definici DFT.

Reciprocita

Dvojnásobnou aplikací DFT dostaneme původní signál cyklicky zrcadlený a normalizovaný faktorem $1/N$:

$$S_n = \mathcal{DFT}[s_n] \Leftrightarrow \frac{1}{N}s_{(-n)\bmod N} = \mathcal{DFT}[S_n] \quad (5.14)$$

Důkaz:

Nejprve si uvědomíme, že $(-n)\bmod N = -n + mN$, kde m je vhodné celé číslo, které zaručí, že hodnota $(-n)\bmod N$ leží v intervalu $\langle 0, N - 1 \rangle$. Pak díky N -periodicitě DFT báze platí

$$\exp\left(-i2\pi\frac{ln}{N}\right) = \exp\left(i2\pi\frac{l(-n)\bmod N}{N}\right)$$

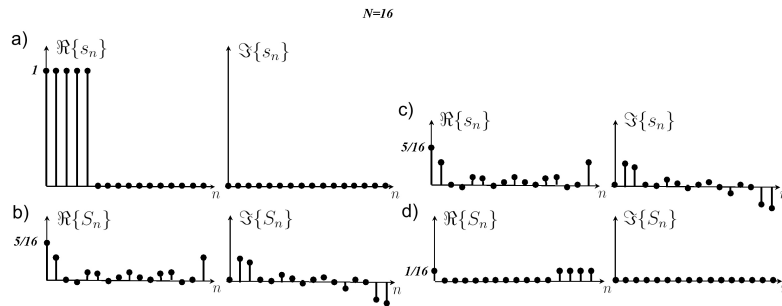
a můžeme tudíž psát

$$\begin{aligned} \mathcal{DFT}[S_n] &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} S_l \exp\left(-i2\pi \frac{ln}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} S_l \exp\left(i2\pi \frac{l(-n) \bmod N}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \mathcal{DFT}^{-1}[S_l] \Bigg|_{l=(-n) \bmod N} = \frac{1}{N} S_{(-n) \bmod N} \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Alternativně můžeme reciprocitu zapsat také jako

$$S_n = \mathcal{DFT}[s_n] \quad \Leftrightarrow \quad s_n = \mathcal{DFT}[N S_{(-n) \bmod N}].$$

Reciprocitu DFT ilustruje obrázek 5.9 na příkladu pětibodové pravoúhelníkové funkce při $N = 16$. Dvojnásobnou aplikací DFT dostaneme stejnou pravoúhelníkovou funkci, avšak s šestnáctkrát menší amplitudou a navíc cyklicky zrcadlenou.



Obrázek 5.9: Ilustrace reciprocity DFT: a) reálná a imaginární část signálu s_n , b) reálná a imaginární část signálu $S_n = \mathcal{DFT}[s_n]$, c) reálná a imaginární část signálu $s_n = S_n$, d) reálná a imaginární část DFT spektra signálu $s_n = S_n$, tj. $\mathcal{DFT}[S_n] = \mathcal{DFT}[\mathcal{DFT}(s_n)]$.

5.3 Vlastnosti DFT — operace se signálem

Řada operací probíraných v tomto odstavci má svou jasnou analogii v operacích prováděných ať už s diskrétním či spojitým signálem v předcházejících kapitolách. I jejich projevy ve spektrální oblasti jsou analogické, pouze formální zápis může být v některých případech odlišný⁶ (v indexu je třeba použít modulo N apod.). S některými operacemi, typickými pro práci s DFT, jsme se dosud nesetkali - např. rozšiřování počtu vzorků doplněním nulami různým způsobem. Jiné operace naopak nelze z principiálních důvodů na diskrétní signály aplikovat (např. derivace). U většiny zde zmiňovaných operací (kromě lineární kombinace, posunutí a modulace) závisí příslušné vzorce na přijaté definici DFT. Proto se čtenář může u jiných autorů setkat s formálními rozdíly týkajícími se například faktoru $1/N$.

Signál vzniklý příslušnou operací ze signálu s_n (případně f_n a g_n) budeme ve shodě s předcházejícími kapitolami značit h_n a budeme zkoumat vztah jeho DFT spektra H_l k DFT spektru S_l (případně F_l a G_l). Podle konvence používané v této kapitole musejí indexy l a n vždy nabývat hodnot $0, 1, 2, \dots, N - 1$.

⁶Kdybychom namísto DFT uvažovali Fourierovu řadu diskrétního signálu, byla by analogie ještě zřetelnější.

Lineární kombinace

$$h_n = \alpha f_n + \beta g_n \quad \xleftrightarrow{DFT} \quad H_l = \alpha F_l + \beta G_l,$$

pro libovolné komplexní konstanty α a β .

Důkaz je triviální, plyne z linearity sumace v definičním vztahu DFT.

Suma vzorků

Jedná se o diskretní analogii integrálu ze signálu. Pro součet všech vzorků v N -tici s_n platí

$$\sum_{n=0}^{N-1} s_n = N S_0.$$

Důkaz plyne okamžitě z (5.1) po dosazení $l = 0$. Podobně pokud posčítáme všechny vzorky ve spektru, dostaneme

$$\sum_{l=0}^{N-1} S_l = s_0.$$

Důkaz opět plyne okamžitě z (5.2) po dosazení $n = 0$.

Cyklické posunutí

Cyklické posunutí signálu se od normálního posunutí liší tím, že bere v úvahu konečnou délku signálu v rozsahu 0 až $N - 1$. Nejlépe se cyklické posunutí s_n dá vysvětlit pomocí posunutí periodicky prodlouženého signálu \tilde{s}_n nebo pomocí představy o rozvinutí signálu s_n na válcovou plochu. Obrázek 5.10 ukazuje příklad cyklického posunutí signálu $[0,1,2,3,4,5,6,7]$ o dva vzorky doprava.

Matematicky zapíšeme cyklické posunutí jako $s_{(n-m)\bmod N}$. Pro DFT platí

$$s_{(n-m)\bmod N} \quad \xleftrightarrow{DFT} \quad S_l \exp\left(-i2\pi \frac{ml}{N}\right). \quad (5.15)$$

Využijeme-li pro zkrácení značení z odstavce 5.1, $w_N = \exp(-i2\pi/N)$, můžeme psát

$$\mathcal{DFT}[s_{(n-m)\bmod N}] = S_l w_N^{ml}.$$

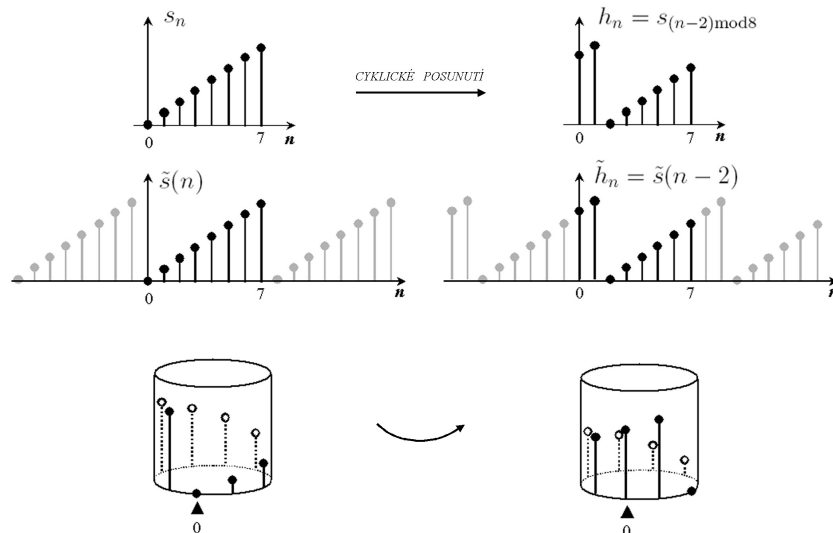
Násobení faktorem w_N^{ml} se nazývá modulací. Cyklické posunutí signálu je tedy doprovázeno modulací jeho DFT spektra.

Důkaz:

$$\mathcal{DFT}[s_{(n-m)\bmod N}] = \sum_{n=0}^{N-1} s_{(n-m)\bmod N} \exp\left(-i2\pi \frac{nl}{N}\right).$$

Uvědomíme-li si, že $(n-m)\bmod N = (n-m) + jN$, $j \in \mathbb{Z}$ a zavedeme-li substituci $k = (n-m)\bmod N$, pak můžeme s uvážením N -periodicity sčítanců v sumě psát

$$\begin{aligned} \mathcal{DFT}[s_{(n-m)\bmod N}] &= \sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp\left(-i2\pi \frac{(m+k)l}{N}\right) \\ &= \exp\left(-i2\pi \frac{ml}{N}\right) \sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp\left(-i2\pi \frac{kl}{N}\right) = S_l \exp\left(-i2\pi \frac{ml}{N}\right), \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$



Obrázek 5.10: Ilustrace cyklického posunutí signálu s_n pro $N = 8$. Původní signál konečné délky a tentýž signál cyklicky posunutý o dva vzorky doprava (nahore), periodické prodloužení původního signálu a jeho posunutí o dva vzorky doprava (uprostřed), cyklické posunutí signálu konečné délky na válcové ploše (dole).

Dodejme, že podobně jako u ostatních Fourierovských transformací přináší modulace spektra dodatečný lineární přírůstek do fázového spektra, nijak však neovlivňuje spektrum amplitudové. Kladný posun signálu (posun doprava) způsobuje lineární pokles fáze, zatímco záporný posun (doleva) lineární nárůst. Tento dodatečný lineární pokles respektive nárůst bývá často maskován skoky o 2π z důvodů zachování fázového spektra v rozsahu $(-\pi, \pi)$.

Modulace

Z důvodů reciprocity DFT je jasné, že modulace signálu $s_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$ se musí projevit cyklickým posunutím jeho DFT spektra, tj.

$$s_n \exp\left(i2\pi \frac{mn}{N}\right) \xleftrightarrow{DFT} S_{(l-m) \bmod N} \quad (5.16)$$

Zkráceně tedy můžeme psát

$$\mathcal{DFT}[s_n w_N^{-mn}] = S_{(l-m) \bmod N}.$$

Důkaz by se provedl pro inverzní DFT posunutého spektra naprosto analogickým způsobem jako při důkazu spektra cyklicky posunutého signálu.

Cyklická konvoluce

V analogii ke konvoluci spojitých periodických signálů (2.33) v odstavci 2.8 definujeme tzv. periodickou diskretní konvoluci neboli konvoluci diskretních periodických signálů $\tilde{f}(n)$ a $\tilde{g}(n)$ jako diskretní periodický signál $\tilde{h}(n)$

$$\tilde{h}(n) = \tilde{f}(n) * \tilde{g}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}(m) \tilde{g}(n - m),$$

kde výraz za prvním rovnítkem je třeba chápat jako signál $(\tilde{f} * \tilde{g})(n)$. Odtud je již jen krůček k definici tzv. cyklické konvoluce, která se používá v souvislosti s DFT. Budeme ji značit speciálním symbolem \odot . Cyklickou konvolucí dvou signálů $f_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$ a $g_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$ rozumíme signál $h_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$ daný vzorcem

$$h_n = f_n \odot g_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{(n-m) \bmod N}. \quad (5.17)$$

(Opět by zde bylo přesnější značení $(f \odot g)_n$.) Při výpočtu cyklické konvoluce se tedy jeden z konvoluovaných signálů musí cyklicky zrcadlit. Oba signály vzájemně vynásobíme a sečtením získáme h_0 . V dalším kroku cyklicky zrcadlený signál posuneme cyklicky o 1 vzorek doprava a opět vynásobíme s druhým signálem a sečteme, čímž spočteme h_1 . Postup opakujeme až do výpočtu h_{N-1} , při kterém je zrcadlený signál posunut o $N - 1$ vzorků doprava.

Příklad:

Pomocí definičního vztahu najděte cyklickou konvoluci $\mathbf{h} = \mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ kde $\mathbf{f} = [1, 2, 3, 4]$ a $\mathbf{g} = [0, 1, 2, 3]$.

$$\begin{aligned} h_0 : \quad & \begin{array}{l} f_m = [1, 2, 3, 4] \\ g_{(0-m) \bmod 4} = [0, 3, 2, 1] \end{array} \Rightarrow h_0 = \frac{1}{4}(0 + 6 + 6 + 4) = \frac{16}{4} \\ h_1 : \quad & \begin{array}{l} f_m = [1, 2, 3, 4] \\ g_{(1-m) \bmod 4} = [1, 0, 3, 2] \end{array} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{4}(1 + 0 + 9 + 8) = \frac{18}{4} \\ h_2 : \quad & \begin{array}{l} f_m = [1, 2, 3, 4] \\ g_{(2-m) \bmod 4} = [2, 1, 0, 3] \end{array} \Rightarrow h_2 = \frac{1}{4}(2 + 2 + 0 + 12) = \frac{16}{4} \\ h_3 : \quad & \begin{array}{l} f_m = [1, 2, 3, 4] \\ g_{(3-m) \bmod 4} = [3, 2, 1, 0] \end{array} \Rightarrow h_3 = \frac{1}{4}(3 + 4 + 3 + 0) = \frac{10}{4}. \end{aligned}$$

Cyklickou konvoluci můžeme také zapsat v kompaktním maticovém tvaru

$$\mathbf{h} = \frac{1}{N} \hat{\mathbf{F}} \mathbf{g},$$

kde řádky $N \times N$ matice $\hat{\mathbf{F}}$ tvoří cyklicky zrcadlený řádkový vektor \mathbf{f}^T a každý následující řádek je oproti předchozímu cyklicky posunut o jeden vzorek doprava

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} f_0 & f_{(N-1) \bmod N} & f_{(N-2) \bmod N} & \cdots & f_1 \\ f_1 & f_0 & f_{(N-1) \bmod N} & \cdots & f_2 \\ & & \vdots & & \\ f_{(N-1) \bmod N} & f_{(N-2) \bmod N} & f_{(N-3) \bmod N} & \cdots & f_0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Cyklická konvoluce je komutativní, $f_n \odot g_n = g_n \odot f_n$. V maticovém zapisu můžeme alternativně psát $\mathbf{h} = \frac{1}{N} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{f}$, kde matice $\hat{\mathbf{G}}$ je tvořena analogickým způsobem k (5.18) pomocí vektoru \mathbf{g} .

Někteří autoři definují cyklickou konvoluci bez faktoru $1/N$. Souvisí to s jejich definicí DFT, která se právě tímto faktorem liší od definice používané v tomto kurzu. Jde o to, aby DFT spektrum konvoluce bylo skutečně rovno součinu DFT spekter konvoluovaných signálů, jak tvrdí

tzv. konvoluční teorém

$$f_n \odot g_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{(n-m) \bmod N} \stackrel{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} F_l G_l \quad (5.19)$$

Důkaz:

$$\mathcal{DFT}[f_n \odot g_n] = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{(n-m) \bmod N} \exp\left(-i2\pi \frac{ln}{N}\right).$$

V exponentu k n přičteme a odečteme m , abychom mohli přejít k součinu dvou sum

$$\mathcal{DFT}[f_n \odot g_n] = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-i2\pi \frac{lm}{N}\right) \sum_{n=0}^{N-1} g_{(n-m) \bmod N} \exp\left(-i2\pi \frac{l(n-m)}{N}\right).$$

V druhé sumě provedeme substituci $k = (n - m) \bmod N$. Díky N -periodicitě exponenciál stejně jako vzorků v cyklickém posunutí můžeme i po substituci zachovat původní meze a psát

$$\mathcal{DFT}[f_n \odot g_n] = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \exp\left(-i2\pi \frac{lm}{N}\right) \sum_{k=0}^{N-1} g_k \exp\left(-i2\pi \frac{lk}{N}\right) = F_l G_l, \quad \text{c.b.d.}$$

Tato vlastnost DFT, tj. že převádí konvoluci diskretních signálů na součin jejich diskretních spekter, nachází široké uplatnění v problematice lineární filtrace. O lineární filtraci diskretních signálů jsme se již zmiňovali v odstavci 4.3. V případě DFT je jediný (zato však podstatný) rozdíl v tom, že nejen impulzní odezva, ale i přenosová funkce je diskretní. Navíc jsou obě tyto charakteristiky N -periodické, což umožňuje zjednodušení výpočtů z důvodu omezení na konečný počet (N) vzorků.

Konvoluční teorém nabízí další alternativu výpočtu cyklické konvoluce: přechodem do spektrální oblasti, vynásobením DFT spekter a inverzní DFT. Tento způsob výpočtu může být velmi efektivní, zejména počítáme-li konvoluci mnohavzorkových signálů numericky za použití metody rychlé Fourierovy transformace (viz odstavce 5.4).

Cvičení 5.3.1:

Najděte cyklickou konvoluci $\mathbf{h} = \mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ kde $\mathbf{f} = [1, 2, 3, 4]$ a $\mathbf{g} = [0, 1, 2, 3]$ (tj. stejných signálů jako v předcházejícím příkladu) pomocí čtyřbodové DFT.

V kapitole 4 jsme se setkali s jinou definicí konvoluce dvou diskretních signálů. Pro rozlišení s cyklickou konvolucí probíranou zde ji nazýváme konvolucí lineární. Vyjasněme vztah mezi oběma konvolucemi. Obrázek 5.11 ukazuje názorný příklad srovnání pro konvoluci dvou kauzálních pravoúhelníkových signálů, o délce 5 a 10 vzorků. Pro výpočet cyklické konvoluce bylo použito $N=12$.

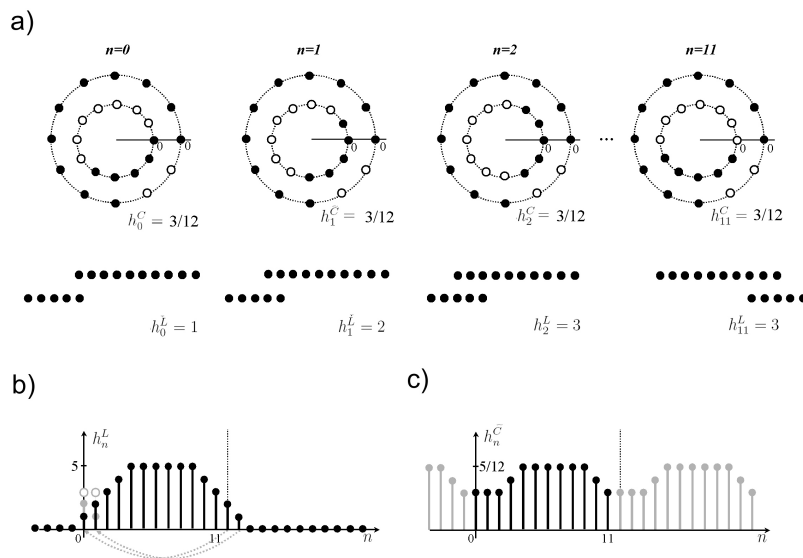
Obrázek jasně demonstruje vztah obou typů konvoluce. Je zřejmé, že cyklická a lineární konvoluce se obecně liší, neboť cyklická konvoluce může být zatížena efektem alias. Za jakých podmínek mohou cyklická a lineární konvoluce vést ke stejnému výsledku v intervalu $\langle 0, N - 1 \rangle$? Tyto podmínky jsou dvě a slovně je lze popsat takto: 1) oba konvoluované signály musí mít

konečnou délku, tj. musí mít konečný počet nenulových vzorků, řekněme N_1 a N_2 . Jejich lineární konvoluce pak má také konečnou délku, $N_1 + N_2 - 1$. 2) Počet bodů N pro výpočet cyklické konvoluce (a zároveň též její perioda) nesmí být menší než $N_1 + N_2 - 1$. V příkladu na obrázku 5.11 by se tedy obě konvoluce v základním intervalu rovnaly, pokud by pro výpočet cyklické konvoluce bylo použito alespoň $N = 14$ vzorků. Při počtu $N = 12$, použitým v obrázku, je délka periody cyklické konvoluce menší než délka N -periodicky se opakující lineární konvoluce. Díky tomu vzniká efekt alias, při kterém $h_0^C = \frac{1}{12}(h_0^L + h_{12}^L)$ a $h_1^C = \frac{1}{12}(h_1^L + h_{13}^L)$. Tento příklad také ukazuje, jakým způsobem můžeme počítat cyklickou konvoluci signálů konečné délky, známe-li jejich konvoluci lineární.

Cvičení 5.3.2:

Najděte cyklickou konvoluci $\mathbf{h} = \mathbf{f} \odot \mathbf{g}$, kde $\mathbf{f} = [1, 2, 3, 4]$ a $\mathbf{g} = [0, 1, 2, 3]$ (tj. stejných signálů jako v předcházejícím cvičení) pomocí jejich lineární konvoluce s využitím cvičení 4.2.1.

Naopak, pokud bychom znali pouze cyklickou konvoluci dvou signálů, jejich lineární konvoluci nelze rekonstruovat (bez znalosti původních signálů). Nicméně vztah cyklické a lineární konvoluce nabízí výhodnou možnost výpočtu lineární konvoluce signálů konečné délky z jejich konvoluce cyklické (s případným využitím DFT, tj. přechodem do spektrální oblasti) za předpokladu, že N je dostatečně velké, aby se do tohoto počtu vzorků lineární konvoluce „vešla“ a nedošlo tak k efektu alias. K tomu je třeba zahrnout do konvoluovaných signálů vhodný počet nulových vzorků,



Obrázek 5.11: Srovnání cyklické (h_n^C) a lineární (h_n^L) konvoluce dvou pravoúhelníkových signálů. Část a) naznačuje způsob výpočtu obou typů konvoluce pro 4 vzájemná posunutí signálu jak cyklická (nahore), tak lineární (dole). Ve schématech označují plné kroužky body s hodnotou signálu 1 a prázdné kroužky označují nulové body (u lineární konvoluce nejsou nulové body vyznačeny, oba signály pokračují nulami od $-\infty$ do $+\infty$). Část b) ukazuje výsledek lineární konvoluce — signál se čtrnácti nenulovými vzorky. V části c) vidíme výsledek cyklické konvoluce — periodický signál s periodou $N = 12$.

aby jejich celková délka byla N . Opět platí, že tento způsob výpočtu lineární konvoluce pomocí cyklické s využitím rychlé Fourierovy transformace je při větším počtu vzorků efektivnější než výpočet lineární konvoluce přímo z definice.

Cvičení 5.3.3:

Najděte lineární konvoluci $\mathbf{h} = \mathbf{f} * \mathbf{g}$ kde $\mathbf{f} = [1, 2, 3, 4]$ a $\mathbf{g} = [0, 1, 2, 3]$ (tj. stejných signálů jako v předcházejícím cvičení a také ve cvičení 4.2.1) pomocí cyklické konvoluce.

Prostý součin

Komplementární operací k cyklické konvoluci je (až na faktor $1/N$) součin, neboť díky reciprocitě DFT musí platit

$$f_n g_n \xleftrightarrow{DFT} \sum_{m=0}^{N-1} F_m G_{(l-m) \bmod N}. \quad (5.20)$$

I bez znalosti reciprocity by bylo jednoduché (5.20) dokázat. Mohli bychom například postupovat zcela analogicky jako při důkazu (5.19), avšak s použitím inverzní DFT.

Operace násobení se mimo jiné používá při úpravě signálu přenásobením vhodným „oknem“, tedy diskrétním signálem, který je většinou na části intervalu $\langle 0, N-1 \rangle$ nulový. Po přenásobení i původní signál nabyde na části intervalu $\langle 0, N-1 \rangle$ nulových hodnot, dojde tedy fakticky k jeho oříznutí při zachování celkového počtu vzorků.

Cyklická korelace

Cyklickou korelaci dvou signálů $f_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ a $g_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ budeme značit $f_n \otimes g_n$. Definujeme ji jako signál $h_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ daný vzorcem

$$h_n = f_n \otimes g_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}_m g_{(n+m) \bmod N}. \quad (5.21)$$

Z definice je zřejmé, že navzdory tradičnímu označení $f_n \otimes g_n$ by bylo lépe používat $(f \otimes g)_n$.

Provedeme-li substituci $m = (-k) \bmod N = -k + jN, j \in Z$, můžeme korelaci přepsat do tvaru

$$f_n \otimes g_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}_{(-k) \bmod N} g_{(n-k) \bmod N},$$

což je vlastně cyklická konvoluce signálu \mathbf{g} s cyklicky zrcadleným a komplexně sdruženým signálem \mathbf{f} . Odtud již snadno odvodíme, s využitím (5.5), tzv. korelační teorém o DFT cyklické korelace

$$f_n \otimes g_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}_m g_{(n+m) \bmod N} \xleftrightarrow{DFT} \bar{F}_l G_l. \quad (5.22)$$

Speciálně pro reálné signály můžeme využít (5.6) a DFT spektrum jejich cyklické korelace psát jako

$$DFT[f_n \otimes g_n] = \bar{F}_l G_l = F_{(-l) \bmod N} G_l. \quad (5.23)$$

Je zřejmé, že na rozdíl od cyklické konvoluce není cyklická korelace komutativní.

Cvičení 5.3.4:

Najděte cyklickou korelaci $\mathbf{h} = \mathbf{f} \otimes \mathbf{g}$, kde $\mathbf{f} = [1, 2, 3, 4]$ a $\mathbf{g} = [0, 1, 2, 3]$ 1) pomocí cyklické konvoluce, 2) s využitím DFT.

Cyklická autokorelace

Cyklickou autokorelací rozumíme cyklickou korelaci dvou identických signálů, tj.

$$h_n = s_n \otimes s_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{s}_m s_{(n+m) \bmod N}. \quad (5.24)$$

Pro její DFT platí (Wiener-Chinčinův teorém)

$$s_n \otimes s_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{s}_m s_{(n+m) \bmod N} \xleftrightarrow{DFT} \bar{S}_l S_l = |S_l|^2. \quad (5.25)$$

DFT spektrum autokorelace nazýváme výkonové DFT spektrum, neboť se jedná se o kvadrát amplitudového spektra. Výkonové (stejně jako amplitudové) spektrum není citlivé na posunutí signálu (před provedením autokorelace).

Speciálně pro reálné signály můžeme s využitím (5.6) psát

$$\mathcal{DFT}[s_n \otimes s_n] = \bar{S}_l S_l = |S_l|^2 = S_{(-l) \bmod N} S_l. \quad (5.26)$$

Skalární součin (Parsevalův teorém)

N -tice vzorků představuje vlastně N -dimenzionální komplexní vektor. Skalárním součinem tohoto vektoru s jiným vektorem dostaneme hodnotu, která je rovna skalárnímu součinu jejich DFT spekter násobenému faktorem N . Uvažme signály \mathbf{f} a \mathbf{g} , se složkami $f_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ a $g_n, n = 0, 1, \dots, N-1$, jejichž spektra \mathbf{F} a \mathbf{G} mají složky $F_l, l = 0, 1, \dots, N-1$ a $G_l, l = 0, 1, \dots, N-1$. Pro skalární součin můžeme psát

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \bar{g}_n = N \sum_{l=0}^{N-1} F_l \bar{G}_l = N(\mathbf{F}, \mathbf{G}). \quad (5.27)$$

Tento vzorec se většinou uvádí jakožto Parsevalův teorém pro DFT. Název je však poněkud zavádějící, neboť s Parsevalovou rovností známou z teorie Fourierových řad souvisí jen ve speciálním případě rovnosti násobených vektorů.

Důkaz:

Důkaz lze provést snadno s využitím znalosti cyklické korelace a jejího DFT spektra. Platí

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \bar{g}_n = N \left. g_l \otimes f_l \right|_{l=0} = N \mathcal{DFT}^{-1}[F_k \bar{G}_k] \Big|_{l=0} = N \sum_{k=0}^{N-1} F_k \bar{G}_k = N(\mathbf{F}, \mathbf{G}), \quad \text{c.b.d.}$$

Suma kvadrátů modulů (Rayleighův teorém)

Sečteme-li kvadráty modulů všech N vzorků signálu s_n , dostaneme součet kvadrátů modulů všech N vzorků DFT spektra S_l násobený faktorem N

$$\sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2 = N \sum_{l=0}^{N-1} |S_l|^2. \quad (5.28)$$

Jedná se o analogii Rayleighova teorému (3.40) z odstavce 3.8. Důkaz je analogický jako v případě Parsevalova teorému, jehož je Rayleighův teorém speciálním případem, neboť $\sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2 = (\mathbf{s}, \mathbf{s})$.

Následující operace mají společné to, že specifickým způsobem přidávají nové vzorky do původního signálu a zvětšují tak celkový počet vzorků z N na N' .

Roztažení signálu

Jedná se o jistou analogii změny měřítka, zde však signál přidáním jistého počtu nul mezi jednotlivé vzorky původního signálu můžeme pouze rozšířit, nikoliv zúžit.

Definujme roztažení signálu pomocí faktoru L , kde L je přirozené číslo, jako operaci, při které se signál s_n o N vzorcích rozšíří na signál h_m o LN vzorcích přidáním $L - 1$ nul mezi každé dva sousední vzorky signálu s_n :

$$h_m = \begin{cases} s_{m/L} & \text{pro } m = 0, L, 2L, \dots, (N-1)L \\ 0 & \text{pro } m \neq 0, L, 2L, \dots, (N-1)L \end{cases}. \quad (5.29)$$

Například N -tici $[1, 2, 3, 4]$ rozšíříme faktorem 3 na $3N$ -tici $[1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4, 0, 0]$. Tento příklad je znázorněn na obrázku 5.12a, b vlevo.

DFT spektrum roztaženého signálu představuje LN -tici, jejichž prvních N vzorků tvoří N -tice DFT spektra původního signálu a ostatní vzorky jsou $(L - 1)$ -násobným opakováním tohoto původního spektra (viz obrázek 5.12b vpravo). Operace roztažení tedy dává vzniknout DFT páru $H_l = \mathcal{DFT}[h_m]$, kde h_m je dáno vzorcem (5.29) a H_l lze zapsat jako

$$H_l = \begin{cases} S_l, & \text{pro } l = 0, 1, \dots, N-1 \\ S_{l-N}, & \text{pro } l = N, N+1, \dots, 2N-1 \\ \vdots & \\ S_{l-(L-1)N}, & \text{pro } l = (L-1)N, (L-1)N+1, \dots, LN-1 \end{cases}. \quad (5.30)$$

S využitím formalismu modulo můžeme tuto vlastnost spektra stručně zapsat jako

$$H_l = S_{l \bmod N}.$$

Důkaz:

Důkaz plyne přímo z definice DFT.

$$H_k = \sum_{m=0}^{LN-1} h_m \exp\left(-i2\pi \frac{mk}{LN}\right).$$

Jelikož přidání vzorků jsou nuly, jejich vliv v sumě se nijak neprojeví. Můžeme tedy přejít k sumě přes původní vzorky, které mají v signálu h_m celočíselné indexy $n = m/L$.

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \exp\left(-i2\pi \frac{nLk}{LN}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(-i2\pi \frac{nk}{N}\right) = S_{k \bmod N} \quad \text{c.b.d.}$$

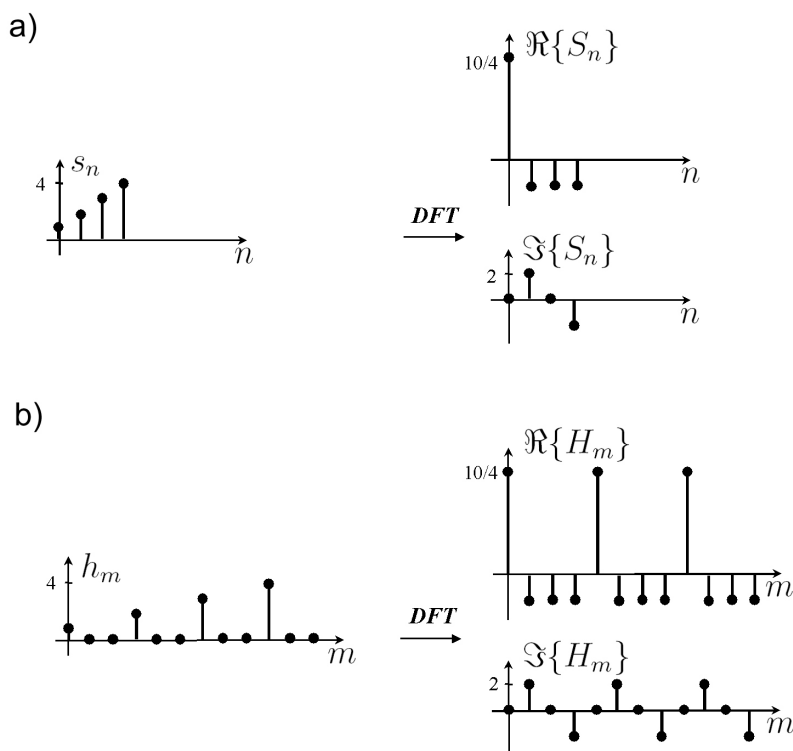
Doplnění nulami

S operací doplnění nulami jsme se již setkali v souvislosti s výpočtem lineární konvoluce pomocí cyklické konvoluce s využitím DFT (FFT, Fast Fourier Transform). Tato operace se využívá nejčastěji ze dvou důvodů: kvůli doplnění na nějaký požadovaný počet vzorků (např. na nejbližší mocninu dvou pro použití v algoritmu rychlé Fourierovy transformace – viz odstavec 5.4) nebo kvůli interpolaci (zvýšení „rozlišovací schopnosti“) v komplementární oblasti. Zde nás bude zajímat hlavně tento druhý způsob, při kterém nedoplňujeme jakýkoliv počet nul, ale N -tice původních vzorků se doplní na LN -tici přidáním právě $(L - 1)N$ nul, kde L je přirozené číslo.

V případě signálu, který je vstupem DFT (signál v časové oblasti), se nuly doplňují nejčastěji na jeho konec, tj. za vzorek s indexem $N - 1$. Tento způsob je vhodný například tehdy, je-li původní N -tice diskretizací nějakého kauzálního signálu, tj. N -tice neobsahuje nenulové vzorky odpovídající záporným časům. Tak například pro $L = 2$ vznikne ze čtveřice $[1, 2, 3, 4]$ touto operací signál o osmi vzorcích $[1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0]$. Předpokládejme obecnou N -tici s_n a LN -tici h_m vzniklou z ní doplněním $(L - 1)N$ nul. Pro její DFT spektrum máme

$$H_l = \frac{1}{LN} \sum_{m=0}^{LN-1} h_m \exp\left(-i2\pi \frac{ml}{LN}\right) = \frac{1}{LN} \sum_{m=0}^{N-1} s_m \exp\left(-i2\pi \frac{ml}{LN}\right),$$

neboť obecně nenulových může být pouze prvních N vzorků (některé z nich mohou také být



Obrázek 5.12: Roztažení signálu (vlevo) a jeho vliv na DFT spektrum (vpravo, nahoře reálná část, dole imaginární část): a) signál před roztažením, b) signál po roztažení.

nulové). Platí

$$H_l = \frac{1}{L} S_{l/L}, \quad l = 0, L, 2L, \dots, LN - L, \quad (5.31)$$

tedy každý L -tý vzorek nového spektra odpovídá (až na faktor $1/L$) jednomu vzorku původního spektra při zachování jejich pořadí.

Pro ilustraci této operace může posloužit série obrázků 5.5 – 5.6. Vidíme z nich i to, že hodnoty ostatních spektrálních koeficientů (kromě výše uvedených) jsou vlastně interpolací spočtenou na základě spojitého (periodického) spektra diskrétního (neperiodického) signálu. O využití DFT pro interpolaci pojednává odstavec 5.7.

Pro signály, které představují diskretizaci nekauzálních signálů, popřípadě pro signály ve spektrální oblasti (spektra v N -tici od 0 do $N - 1$ obecně obsahují vzorky odpovídající záporným frekvencím – např. spektrum reálného signálu v levém okolí vzorku $N - 1$ obsahuje komplexně sdružené vzorky z pravého okolí bodu nula), je třeba nuly doplňovat jiným způsobem: za vzorek $(N - 1)/2$ pro N liché a za vzorek $(N/2) - 1$ pro N sudé. Tomuto způsobu budeme říkat centrální doplnění nulami. Z výše uvedené čtveřice bychom tedy touto operací získali signál $[1, 2, 0, 0, 0, 3, 4]$. I při centrálním doplnění nulami platí pro spektrum (5.31), tj. vzorky nového spektra s indexy $l = 0, L, 2L, \dots, LN - L$ odpovídají spektru původní N -tice. Díky periodicitě DFT spektra můžeme totiž ve shora uvedeném odvození bez újmy obecnosti uvažovat meze od $-N/2$ do $(N/2) - 1$ pro sudé, případně od $-(N - 1)/2$ do $(N - 1)/2$ pro liché (což je přirozenější při centrálním doplnění nul) a přitom dospět k téměř výsledku. Ostatní vzorky nového spektra však vyjdou jinak, neboť při centrálním doplnění nul de facto „interpolujeme“⁷ spektrum jiného signálu než při pouhém připojení nul. Dvojí způsob doplnění nul a jeho důsledky ve spektrální oblasti ilustruje obrázek 5.13.

5.4 Algoritmus rychlé Fourierovy transformace (FFT)

Jak je zřejmé z definice DFT a jak jsme ostatně viděli i na příkladu výpočtu DFT v odstavci 5.1, k vyčíslení N koeficientů DFT klasickým postupem je třeba $N \times N$ operací násobení. Numerickou náročnost standardního výpočtu DFT tedy můžeme odhadnout jako $\approx N^2$ (při zanedbání numerických nákladů na vytvoření mocnin v matici DFT). Algoritmus rychlé Fourierovy transformace (FFT, z anglického Fast Fourier Transform) je algoritmus umožňující snížit numerickou náročnost výpočtu DFT na $\approx 2N \log_2 N$. Algoritmus byl objeven v šedesátých letech 20. století a jeho autory jsou J. W. Cooley a J. W. Tukey. Byl ve své době revolucí ve výpočtu Fourierovských transformací.

Abychom získali představu, jak velké urychlení výpočtu algoritmus představuje, uvažme například, že máme milion vzorků⁸, tedy $N = 10^6$. Náklady na klasický výpočet by tedy byly $\approx 10^{12}$, zatímco náklady úměrné $2N \log_2 N$ pouze $\approx 10^7$, což je rozdíl 5 řádů! Představme si hypotetický počítač, který by 10^7 operací násobení provedl za 10 vteřin. Klasický výpočet DFT by na takovém počítači trval více než 11 dní. I když jsou dnešní počítače daleko rychlejší než náš hypotetický počítač a v budoucnu jejich výkon stále poroste, nic to nemění na relativním poměru numerických nároků na oba způsoby výpočtu. Výkonnější výpočetní technika pouze umožňuje uvažovat stále větší počet vzorků při zachování „rozumného“ výpočetního času.

⁷O interpolaci bychom správně měli mluvit pouze v případě, že signály v DFT chápeme jako diskrétní reprezentace spojitých signálů. V tomto odstavci však zatím příslušné N -tice a LN -tice tímto způsobem neinterpretujeme.

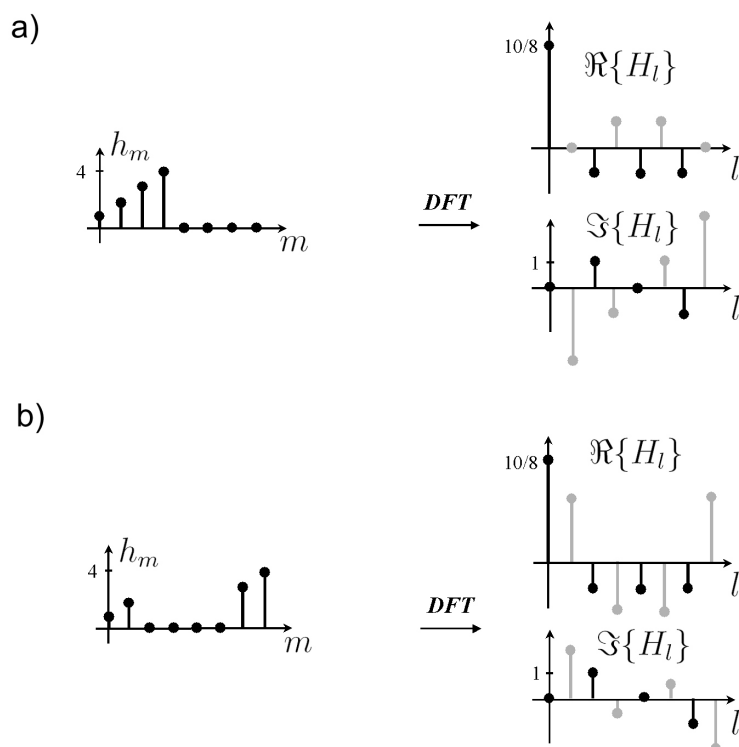
⁸V zájmu jednoduchosti a názornosti této úvahy zde neuvažujeme, že počet vzorků musí být roven mocnině dvou, viz dále. Při relativním srovnání numerické náročnosti FFT a klasického výpočtu DFT tato skutečnost nehraje zásadní roli.

V praxi je běžnější pracovat s počty vzorků v řádu tisíců až desetitisíců. Pro takové objemy dat si můžeme udělat představu o srovnání numerické náročnosti klasického výpočtu DFT a algoritmu FFT z grafu na obrázku 5.14.

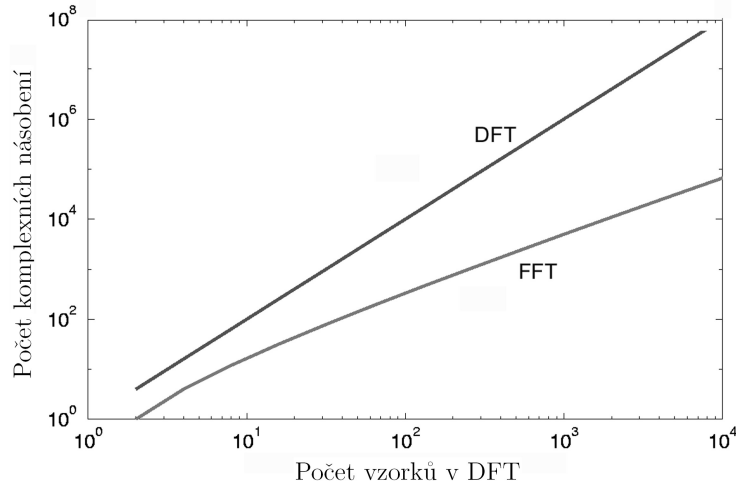
Enormní zrychlení výpočtu, které algoritmus umožňuje, je podmíněno formálním omezením na počet vzorků v DFT — N musí být mocninou 2, jak uvidíme dále⁹. V praxi to nepředstavuje vážný problém, nejčastěji se skutečný počet vzorků, vzešlých například z nějakého měření, prostě doplní nulami, aby se dosáhlo počtu rovného nejbližší vyšší mocnině dvou. Při velkém počtu vzorků to však může klást větší paměťové nároky.

Základní idea FFT spočívá v tom, že se sčítají zvlášť vzorky se sudým a zvlášť s lichým indexem. Předpokládejme DFT pro N vzorků, kde $N = 2^L$, a rozdělme ji na dvě sumy (pro

⁹Existují i další alternativní algoritmy FFT, pracující s jiným počtem vzorků, např. mocninou 3 a podobně. Algoritmus založený na mocninách dvou je však nejrozšířenější, a proto pod pojmem FFT máme v tomto kurzu na mysli právě tento přístup.



Obrázek 5.13: Doplnění nulami signálu z obrázku 5.12a: a) přidáním nul za poslední vzorek signálu, b) centrálním doplněním nulami. Ve spektru (vpravo) se objevují nové vzorky (znázorněny šedou barvou); vzorky s indexy $l = 0, 2, 4, 6$ odpovídají podle (5.31) spektrálním vzorkům z obrázku 5.12a.



Obrázek 5.14: Odhad numerických nároků (měřených počtem komplexních násobení) FFT v porovnání s klasickým výpočtem DFT v závislosti na počtu vzorků.

zkrácení zápisu využijeme notaci $w_N = \exp(-i2\pi/N)$

$$\begin{aligned} S_l &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n w_N^{nl} = \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{(N/2)-1} s_{2m} w_N^{2ml} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} s_{2m+1} w_N^{(2m+1)l} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{(N/2)-1} s_{2m} w_N^{2ml} + w_N^l \sum_{m=0}^{(N/2)-1} s_{2m+1} w_N^{2ml} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{(N/2)-1} s_{2m} (w_N^2)^{ml} + w_N^l \sum_{m=0}^{(N/2)-1} s_{2m+1} (w_N^2)^{ml} \right). \end{aligned}$$

Pro w_N^2 platí

$$w_N^2 = (\exp(-i2\pi/N))^2 = \exp(-i2\pi/(N/2)) = w_{N/2}.$$

Díky tomu můžeme psát

$$S_l = \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{(N/2)-1} s_{2m} w_{N/2}^{ml} + w_N^l \sum_{m=0}^{(N/2)-1} s_{2m+1} w_{N/2}^{ml} \right) = \frac{1}{N} (S_l^E + w_N^l S_l^O),$$

kde vzorky S_l^E a S_l^O , $l = 0, 1, \dots, N-1$ jsou počítány pomocí DFT pro $N/2$ sudých a $N/2$ lichých vzorků (tj. vzorků se sudým a lichým indexem). Vzorky S_l^E a S_l^O jsou periodické s periodou $N/2$, tj.

$$S_{l+N/2}^E = S_l^E, \quad S_{l+N/2}^O = S_l^O$$

a platí

$$w_N^{l+N/2} = w_N^l w_N^{N/2} = w_N^l \exp(-i\pi) = -w_N^l. \quad (5.32)$$

Díky tomu můžeme pro $S_l = \mathcal{DFT}[s_n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ psát

$$S_k = \frac{1}{N} (S_k^E + w_N^k S_k^O), \quad S_{k+N/2} = (S_k^E - w_N^k S_k^O) \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (5.33)$$

kde $S_k^E = \mathcal{DFT}[s_{2m}]$ a $S_k^O = \mathcal{DFT}[s_{2m+1}]$, při $m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Obrázek 5.15 ukazuje názorně schema výpočtu pro příklad $N = 8$.

Abychom si lépe uvědomili podstatu algoritmu, uveďme konkrétní příklad.

Příklad:

Najděte DFT N -tice $[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ pomocí metody FFT znázorněné schematicky na obrázku 5.15.

Dekompozici na sudé a liché vzorky provedeme pomocí nahrazení nulou sudých resp. lichých vzorků následujícím způsobem

$$[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] = [2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0] + [0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9].$$

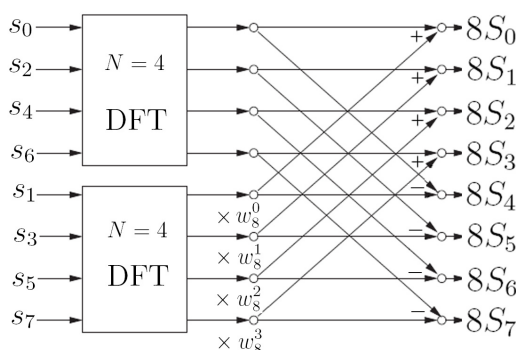
První N -tice na pravé straně vlastně představuje roztažení signálu $[2, 4, 6, 8]$, zatímco druhá roztažení signálu $[3, 5, 7, 9]$ s cyklickým posunem o jeden vzorek doprava. Nechť je $\mathcal{DFT}[2, 4, 6, 8] = [A, B, C, D]$ a $\mathcal{DFT}[3, 5, 7, 9] = [E, F, G, H]$. Pak (pomocí (5.30) a (5.15))

$$\begin{aligned} \mathcal{DFT}[2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0] &= [A, B, C, D, A, B, C, D] \\ \mathcal{DFT}[3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, 0] &= [E, F, G, H, E, F, G, H] \\ \mathcal{DFT}[0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9] &= [E, w_8^1 F, w_8^2 G, w_8^3 H, w_8^4 E, w_8^5 F, w_8^6 G, w_8^7 H] \\ &= [E, w_8^1 F, w_8^2 G, w_8^3 H, -E, -w_8^1 F, -w_8^2 G, -w_8^3 H], \end{aligned}$$

kde jsme spektrum posunutého signálu násobili modulačními faktory, což vlastně představuje rotaci v komplexní rovině, viz názorný obrázek D.14. Záměrně jsme zde nepočítali DFT příslušných N -tic, ale ponechali jsme spektra v symbolickém označení jednotlivých vzorků písmeny, aby byla lépe patrná manipulace s těmito vzorky. Výsledné DFT spektrum pak získáme sečtením a lze ho zapsat jako

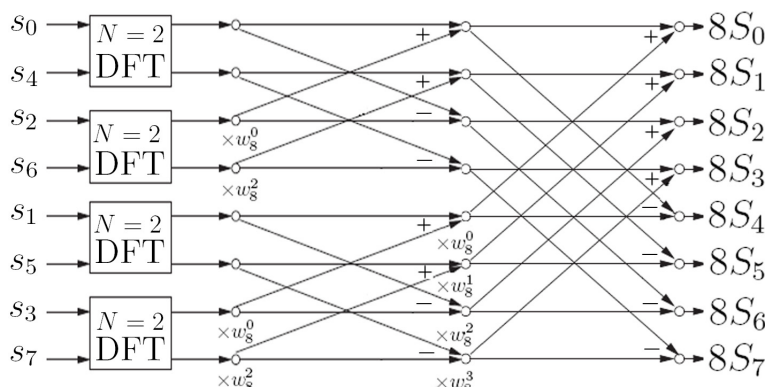
$$\mathcal{DFT}[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] = [A+E, B+w_8^1 F, C+w_8^2 G, D+w_8^3 H, A-E, B-w_8^1 F, C-w_8^2 G, D-w_8^3 H].$$

Všimněme si úspory numerických nákladů, které jsme tímto postupem dosáhli, např. pro počet komplexních násobení. Namísto $8^2 = 64$ násobení v klasickém výpočtu, jsme potřebovali 2×4^2 násobení pro 1 čtveřici sudých a 1 čtveřici lichých vzorků plus tři násobení faktory w_8^1, w_8^2 a w_8^3 , celkem tedy 35 komplexních násobení. Již to představuje značnou úsporu (cca 45 %), avšak



Obrázek 5.15: Rozdělení DFT pro $N = 8$ na dva výpočty DFT pro $N = 4$ pomocí dekompozice na vzorky se sudým a lichým indexem.

tím možnosti FFT nekončí. Celý postup můžeme opakovat pro každou ze dvou čtveřic sudých a lichých vzorků, tj. rozložíme je na dvě dvojice sudých a lichých vzorků, jak ukazuje obrázek 5.16. Všimněme si, že v tomto kroku jsme počet komplexních násobení zredukovali již jen na $4 \times 2^2 + 8 = 24$.

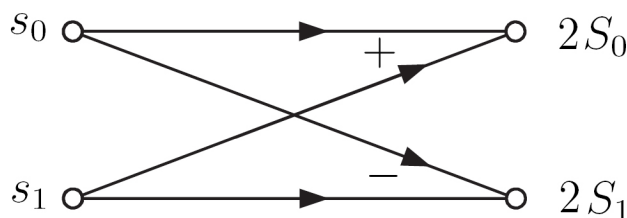


Obrázek 5.16: Rozdělení DFT pro $N = 4$ na dva výpočty DFT pro $N = 2$ pomocí dekompozice na vzorky se sudým a lichým indexem a jejich začlenění do schematu na obrázku 5.15.

Dospějeme-li v algoritmu FFT k dílčím N -ticím pro $N = 2$, je následný výpočet již velmi jednoduchý. Díky (5.32), máme

$$2S_0 = (s_0 + s_1), \quad 2S_1 = s_0 - s_1.$$

Tento výpočet je schematicky znázorněn na obrázku 5.17. Tomuto diagramu se pro jeho charakteristický tvar říká „motýlový“ diagram. Tvoří vlastně stavební kámen FFT — i obrázky 5.15 a 5.16 obsahují v sobě toto základní schema a někdy se proto též nazývají motýlové diagramy¹⁰.

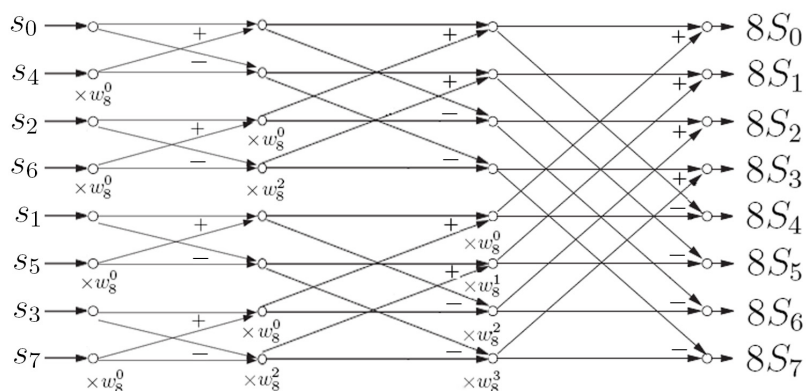


Obrázek 5.17: Schema výpočtu DFT pro $N = 2$.

Nahradíme-li DFT pro $N = 2$ v obrázku 5.16 dostaneme schema na obrázku 5.18. Vidíme z něj, že počet komplexních násobení se zredukoval na 12. Mezi nimi je ovšem započítáno i 7 násobení faktorem $w_8^0 = 1$, která bychom nemuseli uvažovat, avšak subroutine pro výpočet FFT musí uvažovat obecný modulační faktor v dílčích motýlových diagramech, a proto i násobení jedničkou realizují jako násobení komplexním číslem $1 + 0i$.

Pro $N = 2^L$ vzorků musíme tedy $\log_2 N$ -krát přerovnávat vzorky vstupující do DFT za účelem oddělení sudých a lichých. Každé této fázi výpočtu FFT odpovídá $N/2$ základních schemat z obrázku 5.17 a každé z nich představuje jedno komplexní násobení a 2 komplexní sčítání. Celkové numerické nároky FFT lze tedy shrnout jako $(N/2) \log_2 N$ komplexních násobení a

¹⁰Jedná se o specifickou terminologii používanou pouze v souvislosti s FFT.



Obrázek 5.18: Implementace výpočtu DFT pro $N = 2$ do schematu na obrázku 5.16 — základní schema pro FFT při $N = 8$ vzorků.

L	$N = 2^L$	DFT		FFT			
		PKN	PKS	PKN	PKS	úspora PKN	úspora PKS
1	2	4	2	1	2	75%	0%
2	4	16	12	4	8	75%	30%
3	8	64	56	12	24	81%	57%
4	16	256	240	32	64	87%	73%
5	32	1024	992	80	160	92%	84%
6	64	4096	4032	192	384	95%	90%
7	128	16384	16256	448	896	97%	94%
8	256	65536	65280	1024	2048	98%	97%
9	512	262144	261632	2304	4608	99%	98%
10	1024	1048576	1047552	5120	10240	99%	99%

Tabulka 5.3: Srovnání numerických nároků FFT a klasického výpočtu DFT pro počty vzorků do $N = 2^{10}$ (PKN = počet komplexních násobení, PKS = počet komplexních sčítání).

$N \log_2 N$ komplexních sčítání. Detailní srovnání numerických nároků FFT a klasického výpočtu DFT poskytuje tabulka 5.3 pro prvních 10 mocnin dvou. Pro větší počty vzorků již je úspora v numerických nárocích při použití FFT větší než 99%! Z tabulky vidíme, že dokonce už i při $N \geq 125$ je úspora výpočetního času nad 90%.

Připomeňme, že výsledkem postupu FFT popsaného výše je N -násobek DFT spektra. Výsledné FFT spektrum tedy ještě musíme dělit faktorem N (počtem vzorků), abychom dostali správnou amplitudu DFT spektra. Pro inverzní DFT lze použít přesně tentýž způsob výpočtu pouze s rozdílným znaménkem v exponentu modulačních faktorů. Výsledek se pak již počtem vzorků nedělí.

Existuje mnoho programů pro výpočet FFT. Velmi často se používá subroutine FOUR1 z knihy Numerických receptů Press a kol. (1997), obsahující databáze subroutin v různých programovacích jazycích. Vzorové stránky z této knihy lze nalézt i na internetu. Při pohledu na tuto subroutineu umožňující tak enormní zrychlení výpočtu čtenáře možná překvapí, jak je krátká — např. v jazyce Fortran90 obsahuje pouhých 46 výkonných řádků. Při přebírání programů od jiných autorů je třeba pečlivě zkoumat, jakou definici DFT ten který autor používá. Jak víme,

rozdíly se mohou týkat násobení faktorem $1/N$ a případně znaménka v exponenciálách.

5.5 Vztah DFT k ostatním Fourierovským transformacím

Dosud jsme DFT chápali jako svébytnou transformaci definovanou v odstavci 5.1 aniž bychom zkoumali „původ“ N -tic s_n a S_l , tj. jejich vztah ke spojitým (případně diskrétním) protějškům v ostatních Fourierovských transformacích. Vraťme se nyní k úvahám v úvodu této kapitoly, kdy jsme předpokládali, že signál s_n vznikne vzorkováním spojitého signálu $s(t)$, případně jeho periodizované verze $\tilde{s}(t)$, s krokem Δt . Obdobně DFT spektrum S_l můžeme považovat za signál vzniklý vzorkováním ze spektra $S(f) = \mathcal{F}(s(t))$, případně ze spojitého periodického spektra $\tilde{S}(f)$, s krokem Δf (popřípadě $\Delta\omega$, pokud bychom pracovali s úhlovými frekvencemi). Jak víme, se vzorkováním v jedné oblasti je vždy spojena periodizace v oblasti komplementární. Perioda opakování je nepřímo úměrná vzorkovacímu kroku. Protože v DFT uvažujeme společnou periodu N v obou oblastech a perioda $N\Delta t$ spojitého signálu v časové oblasti je rovna $1/\Delta f$ stejně jako perioda $N\Delta f$ v oblasti spektrální je rovna $1/\Delta t$, je zřejmé, že vzorkovací kroky nejsou nezávislé a musí pro ně platit vztah

$$N = \frac{1}{\Delta t \Delta f}. \quad (5.34)$$

Vyjasněme nyní podrobněji vztah DFT k exponenciální Fourierově řadě spojitého signálu probírané v kapitole 2. Pro větší názornost a také v zájmu nekonfliktního značení nahradíme DFT Fourierovou řadou diskrétního signálu. Budeme tedy uvažovat periodické rozšíření signálů v DFT na celý obor Z , tj. signály $\tilde{s}_n, n = 0, \pm 1, \dots, \pm\infty$ a $\tilde{S}_l, l = 0, \pm 1, \dots, \pm\infty$, které jsou v základním intervalu $(0, N - 1)$ rovny vzoru a obrazu DFT.

Uvažujme spojitý T -periodický signál $\tilde{s}(t)$ rozvinutý v exponenciální Fourierovu řadu

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \exp\left(\frac{i2\pi kt}{T}\right), \quad (5.35)$$

kde koeficient je dán vztahem

$$S_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{s}(t) \exp\left(-\frac{i2\pi kt}{T}\right) dt.$$

Diskretizujme $\tilde{s}(t)$ s krokem Δt tak, abychom dostali N vzorků na periodu T . Vzorkovací krok je tedy $\Delta t = T/N$ a ze signálu $\tilde{s}(t)$ tak vybereme vzorky

$$\tilde{s}_n = \tilde{s}\left(n\frac{T}{N}\right).$$

I pro tyto diskrétní hodnoty musí platit rozvoj 5.35, tj.

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \exp\left(i2\pi \frac{kn}{N}\right). \quad (5.36)$$

Jak víme, diskrétní exponenciály v sumě na pravé straně rovnice jsou periodické s periodou N . Můžeme proto substitucí $k = l + Nm$ převést sumu na součet dílčích sum v mezích od 0 do

$N - 1$, ve kterých tuto periodicitu využijeme

$$\tilde{s}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} S_{l+Nm} \exp\left(i2\pi \frac{(l+Nm)n}{N}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} S_{l+Nm} \exp\left(i2\pi \frac{ln}{N}\right).$$

Prohodíme pořadí sčítání (tj. předpokládáme obecně absolutní konvergenci řady), čímž dostaneme

$$\tilde{s}_n = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{l+Nm} \exp\left(i2\pi \frac{ln}{N}\right),$$

odkud již snadno přejdeme k definičnímu vztahu Fourierovy řady diskrétního signálu

$$\tilde{s}_n = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{S}_l \exp\left(i2\pi \frac{ln}{N}\right), \quad (5.37)$$

označíme-li

$$\tilde{S}_l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{l+Nm}. \quad (5.38)$$

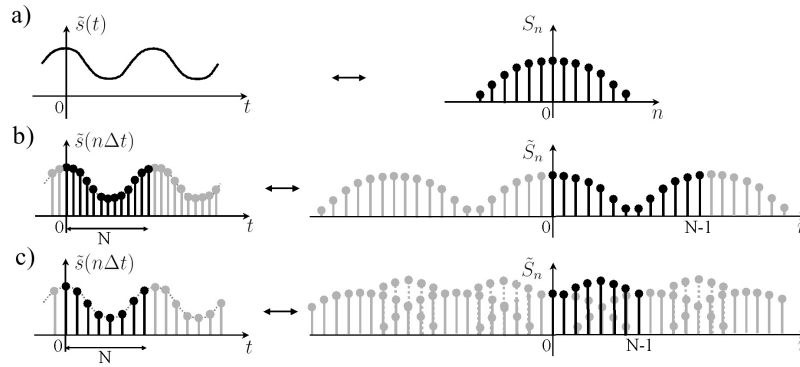
Veličina \tilde{S}_l představuje v rovnici (5.37) koeficient Fourierovy řady diskrétního signálu. Pak ovšem rovnice (5.38) dává hledaný vztah mezi Fourierovými koeficienty řady diskrétního signálu \tilde{s}_n a rozvoje původního spojitého signálu $\tilde{s}(t)$, ze kterého signál \tilde{s}_n vznikl diskretizací s krokem $\Delta t = T/N$. Z rovnice (5.38) vyplývá, podle očekávání, že koeficienty Fourierovy řady diskrétního signálu jsou dány periodizací Fourierových koeficientů původního spojitého signálu, viz obrázek 5.19. Je zřejmé, že pokud Fourierovy koeficienty spojitého signálu nejsou nulové mimo interval $\langle 0, N - 1 \rangle$, dojde při periodizaci k překrývání, tj. ve spektrální oblasti nastane efekt alias (obrázek 5.19c a dále pak 5.20e a g).

Uvažme, že v základním intervalu $\langle 0, N - 1 \rangle$ se koeficienty Fourierovy řady diskrétního signálu rovnají koeficientům DFT, tj. $\tilde{S}_l = S_{l \bmod N}^{DFT}$, kde horní index „DFT“ zde užíváme pro rozlišení od koeficientů Fourierovy řady spojitého signálu. Pak tvrzení o periodizaci Fourierových koeficientů platí i ve vztahu DFT a Fourierovy exponenciální řady spojitého signálu

$$S_{l \bmod N}^{DFT} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{l+Nm}. \quad (5.39)$$

Pokud při periodizaci Fourierových koeficientů nedochází k efektu alias, je možné z DFT spektra (popřípadě Fourierových koeficientů diskrétního signálu) jednoznačně určit Fourierovy koeficienty původně spojitého periodického signálu (viz obr. 5.20b, d a c, f). To nabízí možnost interpolace hodnot signálu $\tilde{s}(t)$ (potažmo $s(t)$) sečtením příslušné Fourierovy řady. Jedná se o obdobu vzorkovacího teorému (4.16) z odstavce 4.5, tentokrát však pro periodické signály¹¹.

¹¹Pokud bychom chtěli tímto způsobem interpolovat i původní neperiodický signál $s(t)$, pak na rozdíl od $\tilde{s}(t)$ taková interpolace nikdy nemůže být přesná, někdy může dokonce být zcela chybná. Důvodem je přítomnost efektu alias v časové oblasti. Předpokládáme-li konečný počet Fourierových koeficientů, je v důsledku Paley-Wienerova teorému nosič signálu v časové oblasti nutně neomezený. Velikost odchylky mezi $s(t)$ a $\tilde{s}(t)$ díky aliasu v časové oblasti pak závisí na konkrétním tvaru signálu $\tilde{s}(t)$.



Obrázek 5.19: Vztah Fourierovy řady spojitého signálu (a) k Fourierově řadě diskretního signálu (DFT): b) periodizace bez překrývání ve spektrální oblasti, c) periodizace s překrýváním ve spektrální oblasti. DFT je v částech b) a c) vyznačena černě.

Věta (Vzorkovací teorém pro periodické signály):

Předpokládejme spojitý T -periodický signál $\tilde{s}(t)$, který má pouze N nenulových koeficientů Fourierovy exponenciální řady. Je-li s_n diskretní signál vzniklý vzorkováním spojitého signálu $\tilde{s}(t)$ s krokem $\Delta t = T/N$, pak hodnoty spojitého signálu $\tilde{s}(t)$ lze rekonstruovat z hodnot diskretního signálu s_n pomocí vzorce

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(i\pi \frac{(N-1)(t-n\Delta t)}{n\Delta t}\right) \frac{\sin\left(\pi \frac{t-n\Delta t}{\Delta t}\right)}{\sin\left(\pi \frac{t-n\Delta t}{N\Delta t}\right)}. \quad (5.40)$$

To znamená, že za splnění podmínek této věty je spojitý periodický signál reprezentován konečnou množinou vhodně vybraných vzorků.

Důkaz:

Funkci $\tilde{s}(t)$ rozvineme v exponenciální Fourierovu řadu a periodu vyjádříme jako $T = N\Delta t$. Využijeme toho, že řada má jen N nenulových koeficientů

$$\tilde{s}(t) = \sum_{l=0}^{N-1} S_l \exp\left(i2\pi \frac{lt}{N\Delta t}\right).$$

Podle předpokladů nedochází ve spektrální oblasti k překrývání, a proto můžeme za S_l dosadit z rovnice (5.1). Pak

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(i2\pi \left(\frac{l}{N\Delta t}(t-n\Delta t)\right)\right).$$

Suma přes l je suma typu (D.9.8); zde však místo proměnné t stojí proměnná $2\pi(t-n\Delta t)/N\Delta t$. Dosazením součtu této řady pak snadno dostaneme (5.40), c.b.d.

Doplňme-li vztah mezi DFT (Fourierovou řadou diskrétního signálu) a Fourierovou řadou spojitého (periodického) signálu (5.39) o vztah (3.12) mezi Fourierovými koeficienty spojitého signálu a Fourierovým spektrem spojitého neperiodického signálu, můžeme zformulovat následující větu:

Věta (O vztahu DFT k Fourierově transformaci a Fourierově řadě spojitého signálu):

Rozviňme funkci $s(t) = \mathcal{F}^{-1}(S(f))$ s konečným nosičem v exponenciální Fourierovu řadu s koeficienty S_n na intervalu délky T obsahujícím tento nosič. Funkce $s(t)$ se sečtením Fourierovy řady periodizuje na $\tilde{s}(t)$. Diskretizujme dále funkci $\tilde{s}(t)$ s krokem T/N , abychom získali N vzorků na každém intervalu délky T , což dává diskrétní signál $\tilde{s}_n = \tilde{s}(nT/N)$. Omezme se u tohoto signálu na základní interval $\langle 0, N-1 \rangle$: $s_n = \mathcal{DF}\mathcal{T}^{-1}S_l^{DFT}$. Pak mezi spektry ve zmíněných Fourierových transformacích platí vztah

$$S_{l \bmod N}^{DFT} = \tilde{S}_l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{l+Nm} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi(l+Nm)}{N\Delta t}\right). \quad (5.41)$$

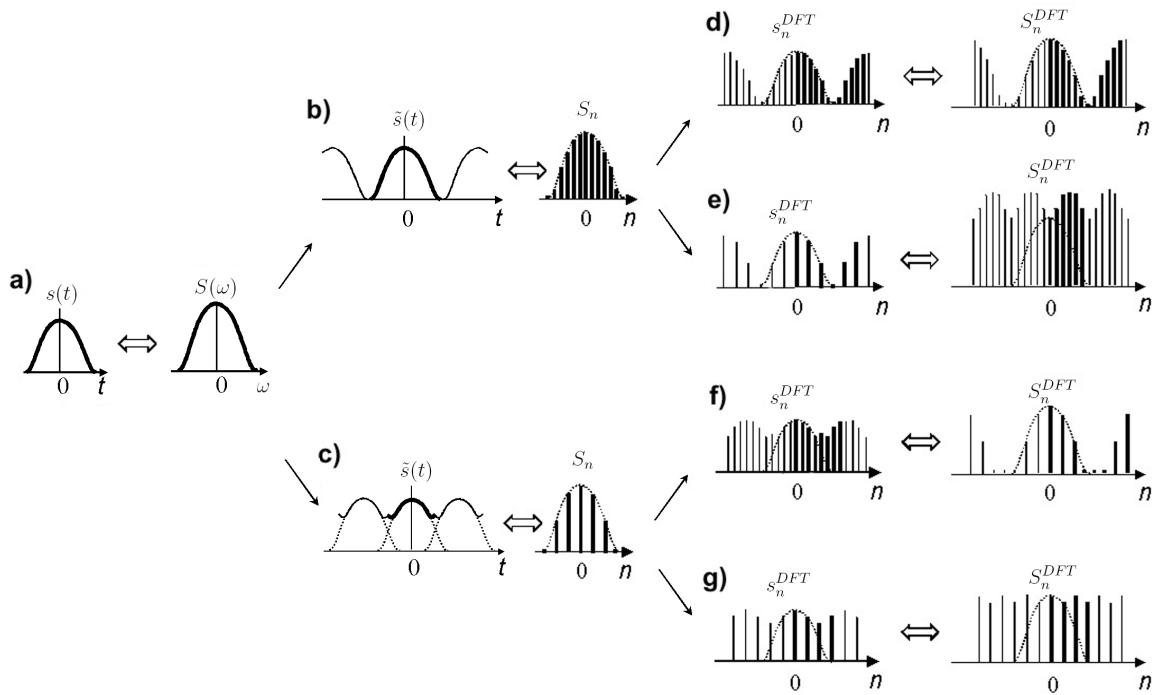
Pro úplnost dodejme, že při použití obyčejné frekvence v reprezentaci spektra spojitého signálu namísto úhlové bychom museli použít vzorec (3.11) a rovnici (5.41) psát formálně ve tvaru

$$S_{l \bmod N}^{DFT} = \tilde{S}_l = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{l+Nm} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{l+Nm}{N\Delta t}\right).$$

Vztah tří Fourierovských transformací ve výše uvedené větě ilustruje graficky schématický obrázek 5.20. Věta i obrázek se váží k jednomu ze dvou způsobů „odvození“ DFT zmíněných v úvodu této kapitoly, a sice diskretizaci spojitého signálu, známe-li jeho diskrétní spektrum (Fourierovy koeficienty).

Obrázek 5.20 je v mnoha ohledech zjednodušený. Jednak pomíjí případné multiplikativní faktory $1/T$ a $1/N$ na svislé spektrální ose, a jednak může svádět k dojmu, že za jistých okolností nenastává efekt alias ani v časové, ani ve spektrální oblasti (obrázek 5.20d). To rozhodně není pravda. Jak víme z Paley-Wienerova teorému (odstavec 3.11), má-li signál omezený nosič v jedné oblasti, nutně musí mít neomezený nosič v oblasti komplementární (tedy, striktně vzato, alias v komplementární oblasti nastává vždy). Otázkou je, jak rychle signál v příslušné oblasti ubývá. Může se stát, že ubývá dostatečně rychle, abychom jej mohli považovat za efektivně nenulový pouze na konečném intervalu. Pak by byl efekt alias v komplementární oblasti nepatrný, případně zanedbatelný (jako například u Gaussovy funkce z obrázku 5.20). V takovém případě existuje šance aproximovat pomocí DFT s přijatelnou přesností kompletní Fourierův pár $s(t) = \mathcal{F}(s(t))$. V praktických aplikacích se většinou nacházíme v situaci znázorněné na obrázku 5.20g (alias v obou oblastech), kterou se snažíme vhodnou volbou vzorkovacích kroků a celkového počtu vzorků přiblížit buď případu 5.20e nebo 5.20f, podle toho, zda chceme pomocí DFT počítat signál v časové nebo frekvenční oblasti. Důležité je minimalizovat vliv efektu alias v našem „zájmovém“ intervalu, tedy například v určitém časovém okně nebo v určitém rozsahu frekvencí.

Abychom lépe pochopili druhý ze způsobů „odvození“ DFT zmíněných v úvodu kapitoly, zaměříme se podrobněji na vztah Fourierovy řady diskrétního signálu (DFT) a Fourierovy transformace diskrétního signálu. Z úvodu kapitoly víme, že tento vztah je dán vzorkováním spojitého



Obrázek 5.20: Vztah Fourierovy transformace spojitého signálu (a) k Fourierově řadě spojitého signálu (b,c) a k Fourierově řadě diskrétního signálu - DFT (d – g). Obrázek demonstruje vliv volby vzorkovacího kroku 1) ve spektrální oblasti (b vs. c), 2) v časové oblasti (d, f vs. e, g). Pro jednoduchost nejsou uvažovány konstantní multiplikační faktory $1/T$ a $1/N$, tj. vertikální osy nejsou vždy ve stejném měřítku. Tečkovanou čarou je v obrázcích b – g znázorněn tvar spojitých signálů z obrázku a. V částech d – g jsou tučně znázorněny vzorky odpovídající DFT, tj. s indexem 0 až $N - 1$.

periodického spektra. Předpokládejme diskrétní (neperiodický) signál $s_n, n \in \mathbb{Z}$, a jeho spojitě spektrum $\tilde{S}(\Omega)$

$$\tilde{S}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \exp(-i\Omega n).$$

Jak víme, perioda tohoto spektra je 2π . Odeberme N vzorků na periodu s krokem $\Delta\Omega = 2\pi/N$. Vzorky budou odebrány v bodech $\omega_l = 2\pi l/N$:

$$\tilde{S}\left(\frac{2\pi l}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \exp\left(-i2\pi \frac{ln}{N}\right).$$

Substitucí $n = m + kN$ a využitím periodicity exponenciál dostaneme

$$\tilde{S}\left(\frac{2\pi l}{N}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} s_{m+kN} \exp\left(-i2\pi \frac{lm}{N}\right).$$

Za předpokladu absolutní konvergence řady můžeme přehodit pořadí sumací

$$\tilde{S}\left(\frac{2\pi l}{N}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{m+kN} \exp\left(-i2\pi \frac{lm}{N}\right) \quad (5.42)$$

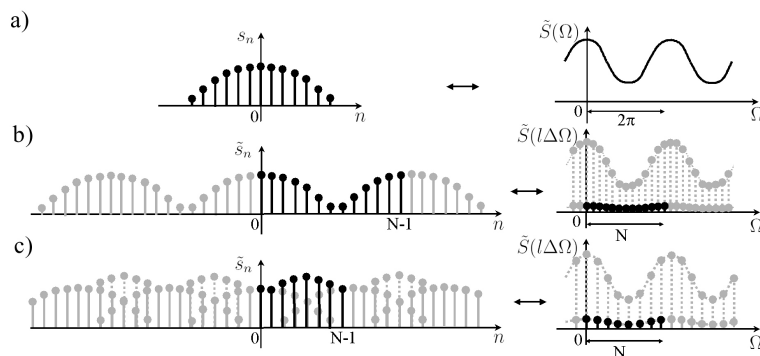
a označit

$$\tilde{s}_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{m+kN}. \quad (5.43)$$

Pak rovnice (5.42), až na faktor $1/N$, udává koeficienty Fourierovy řady diskrétního signálu \tilde{S}_l , a zároveň (v rámci základního intervalu $(0, N-1)$) i koeficienty DFT spektra S_n (srov. s (5.1)). Hledaný vztah mezi Fourierovou řadou diskrétního signálu (DFT) a Fourierovou transformací diskrétního signálu je tedy

$$\tilde{S}_l = S_{l \bmod N}^{DFT} = \frac{1}{N} \tilde{S}\left(\frac{2\pi l}{N}\right). \quad (5.44)$$

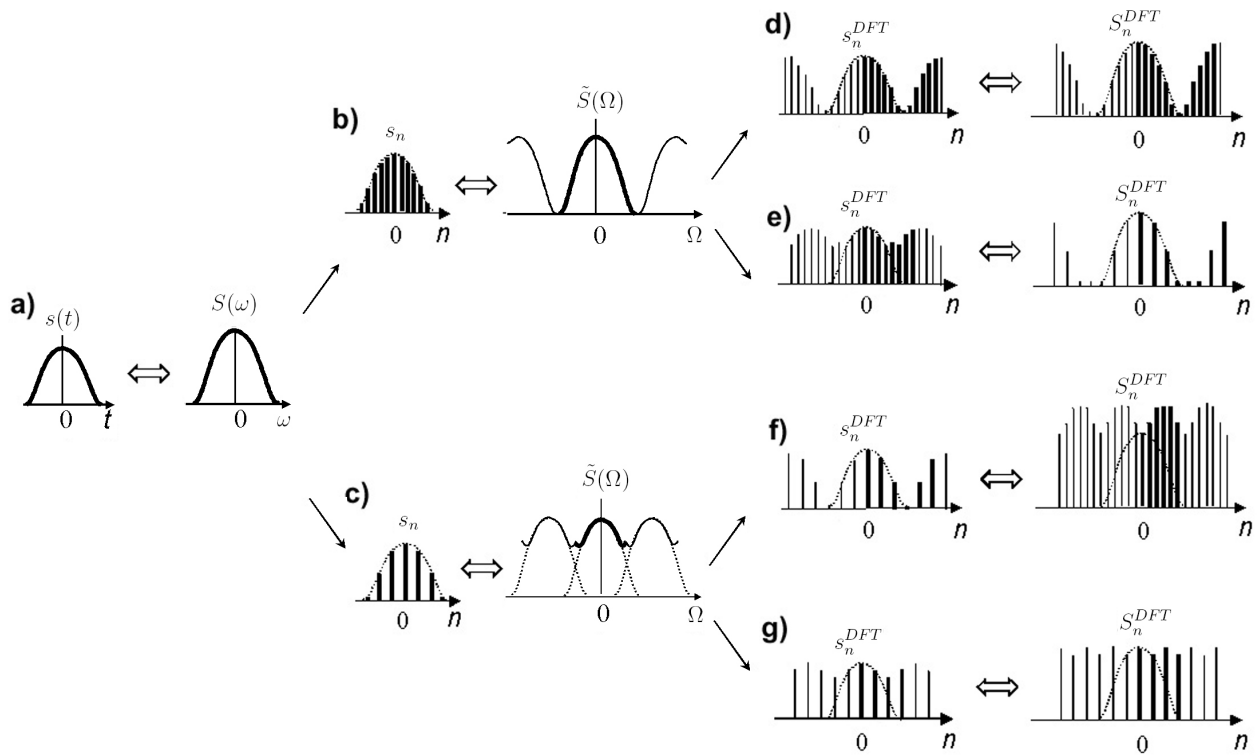
Vztah mezi Fourierovou řadou a transformací diskrétního signálu je demonstrován na obrázku 5.21. Opět je zřejmé, že při periodizaci může nastat alias, tentokrát v časové oblasti¹² (viz obrázek 5.21c).



Obrázek 5.21: Vztah Fourierovy transformace diskrétního signálu (a) k Fourierově řadě diskrétního signálu (DFT): b) periodizace bez překrývání v časové oblasti, c) periodizace s překrýváním v časové oblasti. DFT je v částech b) a c) vyznačena černě.

Revokujme vztah mezi Fourierovou transformací spojitého a diskrétního signálu (4.12). V kombinaci s právě odvozeným vztahem k DFT nám umožňuje zformulovat následující větu.

¹²Alias ve spektrální oblasti zde momentálně nediskutujeme, je případně obsažen už v periodickém spektru $\tilde{S}(\Omega)$.



Obrázek 5.22: Vztah Fourierovy transformace spojitého signálu (a) k Fourierově transformaci diskrétního signálu (b,c) a k Fourierově řadě diskrétního signálu - DFT (d – g). Obrázek demonstuje vliv volby vzorkovacího kroku 1) v časové oblasti (b vs. c), 2) ve spektrální oblasti (d, f vs. e, g). Pro jednoduchost nejsou uvažovány konstantní multiplikační faktory $1/T$ a $1/N$, tj. vertikální osy nejsou vždy ve stejném měřítku. Tečkovanou čarou je v obrázcích b – g znázorněn tvar spojitých signálů z obrázku a. V částech d – g jsou tučně znázorněny vzorky odpovídající DFT, tj. s indexem 0 až $N - 1$.

Věta (O vztahu DFT spektra k Fourierově transformaci diskrétního a spojitého signálu):

Diskretizujme funkci $s(t) = \mathcal{F}^{-1}(S(f))$ s časovým krokem 1. Takto vzniklému diskrétnímu signálu odpovídá ve spektrální oblasti 2π -periodická funkce $\tilde{S}(\Omega)$; $s_n = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{S}(\Omega))$. Diskretizujme dále toto spektrum s krokem $\Delta\Omega$ tak, abychom dostali N vzorků na periodu 2π , tj. $\Delta\Omega = 2\pi/N$, čemuž v časové oblasti odpovídá periodický diskrétní signál \tilde{s}_n s periodou N . Omezíme-li se u tohoto signálu i u diskrétního periodického spektra na základní interval $\langle 0, N - 1 \rangle$, můžeme mezi spektry psát převodní vztahy:

$$S_{l \bmod N}^{DFT} = \tilde{S}_l = \frac{1}{N} \tilde{S} \left(\frac{2\pi l}{N} \right) = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S \left(\frac{2\pi(l + Nm)}{N \Delta t} \right). \quad (5.45)$$

Podobně jako v případě předchozí věty, při použití obyčejné frekvence namísto úhlové by rovnice

(5.45) musela být (s využitím (4.13)) zapsána ve tvaru

$$S_{l \bmod N}^{DFT} = \tilde{S}_l = \frac{1}{N} \tilde{S} \left(\frac{l}{N} \right) = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S \left(\frac{l + Nm}{N \Delta t} \right).$$

Vztah DFT spektra k Fourierově transformaci diskrétního a spojitého signálu ilustruje graficky schematický obrázek 5.22. Podobně jako 5.20 je velmi zjednodušující. „Ideální“ situace na obrázku 5.22d můžeme v praxi dosáhnout jen velmi přibližně. Z principiálních důvodů vždy alespoň v jedné oblasti (časové nebo spektrální) musí nastávat efekt alias, většinou však nastává v obou. Příklad od případu pak musíme posoudit, do jaké míry znehodnocuje výpočet $s(t)$ nebo $S(f)$ pomocí DFT v našem zájmovém intervalu. Vhodným zmenšením vzorkovacích kroků (za případného zvýšení celkového počtu vzorků N podle vzorce (5.34)) se pak snažíme dosáhnout alespoň přibližně situace na obrázcích 5.22e nebo f.

V souvislosti se vztahy Fourierovských transformací spojitého a diskrétního signálu zmiňme ještě důležitý termín tzv. **Nyquistova frekvence**. Je to číslo definované pomocí vzorkovacího kroku v čase

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t}. \quad (5.46)$$

Pro spektrum reprezentované pomocí úhlové frekvence musíme namísto f_N uvažovat úhlovou Nyquistovu frekvenci $\omega_N = 2\pi f_N = \pi/\Delta t$, kterou již známe z kapitoly 4. Dosadíme-li za Δt ze vztahu (5.34)

$$f_N = \frac{N\Delta f}{2}, \quad \omega_N = \frac{N2\pi\Delta f}{2} = \frac{N\Delta\omega}{2},$$

vidíme, že Nyquistova frekvence je rovna polovině délky periody ve spektrální oblasti. V DFT této frekvenci odpovídá spektrální vzorek s indexem $N/2 - 1$ (při sudém počtu vzorků). Jak víme, za tímto vzorkem se při periodickém opakování objevují vzorky pro záporné indexy. Pro reálné signály jsou to dokonce pouze komplexně sdružené hodnoty k vzorkům s indexy $-N/2$ až -1 . Nyquistova frekvence tedy udává nejvyšší skutečnou frekvenci ve spektru, pro kterou můžeme spektrum ještě reprezentovat pomocí DFT a případně také pomocí Fourierovy transformace diskrétního signálu. Obecně, spektrální hodnoty pro frekvence vyšší než Nyquistova frekvence není z principiálních důvodů možné získat ani pomocí DFT (Fourierovy řady diskrétního signálu) ani pomocí Fourierovy transformace diskrétního signálu. A jak je to se spektrálními hodnotami pro frekvence menší než frekvence Nyquistova? Ty sice pomocí zmíněných metod principiálně počítat můžeme, avšak zda odpovídají skutečným spektrálním hodnotám pro spojitý signál nebo ne závisí na tom, jestli dochází ve spektru k překrývání (efektu alias) či nikoliv. Je-li přítomen efekt alias, je spektrum zatíženo větší či menší chybou i pro frekvence menší než f_N (ω_N), jak je vidět například na obrázcích 5.20e a 5.20g a 5.22f a 5.22g.

5.6 DFT dvoudimenzionálních signálů

Dvoudimenzionální (2D) diskrétní signál $s_{n,m}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$; $m = 0, 1, \dots, M-1$ představuje vlastně matici $N \times M$. DFT 2D signálů (2D DFT) nachází nejvýznamnější aplikace v problematice zpracování obrázků. Dva indexy příslušející 2D signálům pak určují jednotlivé pixely v obrázku.

Definice: (2D DFT)

Diskrétní Fourierovou transformací diskrétního signálu $s_{n,m}, n = 0, 1, \dots, N-1; m = 0, 1, \dots, M-1$ nazveme signál $S_{l,k}, l = 0, 1, \dots, L-1; k = 0, 1, \dots, K-1$, kde $L = N$ a $K = M$

$$S_{l,k} = \mathcal{DFT}\{s_{n,m}\}_{l,k} = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} s_{n,m} \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{nl}{N} + \frac{mk}{M} \right) \right\}. \quad (5.47)$$

Inverzní diskrétní Fourierovou transformací odpovídající spektru $S(l, k)$ je

$$s_{n,m} = \mathcal{DFT}^{-1}\{S_{l,k}\}_{n,m} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{K-1} S_{l,k} \exp \left\{ i2\pi \left(\frac{ln}{N} + \frac{km}{M} \right) \right\}. \quad (5.48)$$

Spektrum v 2D DFT je obecně komplexní (i pro reálný signál $s_{n,m}$) a vyjadřuje se buď pomocí reálné a imaginární části, nebo pomocí modulu (amplitudového spektra) a fáze (fázového spektra). Za ilustraci 2D DFT můžeme považovat obrázek 3.27 z kapitoly 3.14, avšak nyní ani signál ani jeho amplitudové a fázové spektrum nepokračují do $\pm\infty$. Oproti konvenci přijaté v této kapitole, kdy signál i spektrum leží v intervalu $\langle 0, N-1 \rangle \times \langle 0, M-1 \rangle$, v obrázku 3.27 jsou jak obrázek, tak obě jeho spektra zadána v intervalu $\langle -N/2, N/2-1 \rangle \times \langle -M/2, M/2-1 \rangle$ (přesněji řečeno $\langle -N/2, N/2-1 \rangle \times \langle -N/2, N/2-1 \rangle$), tj. $M = N$). To je umožněno periodicitou signálu a jeho spektra (viz dále) a odpovídá to alternativní možnosti, jak někteří autoři definují 2D DFT. Z dalších alternativních definic zmiňme rozdíly ve faktoru $1/NM$, který se někdy přiřazuje k inverzní 2D DFT, případně se uvažuje faktor $1/\sqrt{NM}$ symetricky u přímé i inverzní transformace. Další rozdíly mohou být v záměně znaménka imaginární jednotky v exponenciále u přímé a inverzní transformace.

DFT spektrum 2D signálu můžeme též zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} S_{l,k} &= \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} s_{n,m} \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{nl}{N} + \frac{mk}{M} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{mk}{M} \right) \right\} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_{n,m} \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{nl}{N} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

ze kterého je zřejmé, že 2D DFT je možné počítat metodou rozkladu na řádky a sloupce, tj. pomocí dvou po sobě následujících jednodimenzionálních DFT, při kterých se nejprve transformují řádky matice $s_{n,m}$ podle proměnné n a poté sloupce příslušného DFT spektra podle proměnné m . Je možný samozřejmě i postup opačný, tj. nejprve transformovat sloupce a teprve poté řádky (DFT spektra). Analogicky lze rozložit i inverzní 2D DFT.

V aplikacích se často setkáváme s případem, kdy v obou proměnných máme stejný počet hodnot DFT, tedy $N = M$. Pak můžeme 2D DFT napsat v elegantním maticovém tvaru

$$\mathbf{S} = \frac{1}{N^2} (\mathbf{W}\mathbf{s})\mathbf{W}$$

a inverzní 2D DFT jako

$$\mathbf{s} = (\overline{\mathbf{W}}\mathbf{S})\overline{\mathbf{W}},$$

kde matice \mathbf{W} je Vandermondova matice $W_{nk} = w_N^{nk} = (\exp(-i2\pi/N))^{nk}$, viz odstavec 5.1. V maticovém tvaru bychom samozřejmě mohli napsat i obecnou 2D DFT ($N \neq M$), pouze matice, kterými se násobí zleva a zprava by byly různé.

Rozklad na řádky a sloupce je výhodný i pro numerický výpočet 2D DFT. Zatímco pro klasický výpočet pomocí (5.47) bychom potřebovali přibližně N^2M^2 operací komplexního násobení (a obdobný počet komplexních sčítání), při rozkladu na řádky a sloupce již jen $\approx NM(N+M)$ násobení a při použití FFT pak dokonce již jen $\frac{NM}{4} \log_2(N/2 + M/2)$ násobení. Například při velikosti obrázku 8×8 pixelů se jedná o redukcii z 3136 na 64 násobení.

Předpokládejme, že signál $s_{n,m}$ je možné speciálně napsat ve faktorizovaném tvaru $s_{n,m} = f_n g_m$, tj. jako součin dvou signálů jedné proměnné. Z rovnice (5.49) pak plyne okamžitě, že

$$S_{l,k} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} g_m \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{mk}{M} \right) \right\} \frac{1}{N} f_n \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{nl}{N} \right) \right\} = G_k F_l. \quad (5.50)$$

2D DFT spektrum je tedy opět faktorizovatelné v součin dvou DFT spekter $F_l = \mathcal{DFT}[f_n]$ a $G_k = \mathcal{DFT}[g_m]$. Těto vlastnosti 2D DFT říkáme separabilita. Je analogií separability 2D Fourierovy transformace spojitých signálů, viz rovnice (4.9) v odstavci 3.14.

2D DFT $S_{l,k}$ je možno zobecnit na Fourierovu řadu 2D diskretního signálu $\tilde{S}_{l,k}$. V základním intervalu $\langle 0, N-1 \rangle \times \langle 0, M-1 \rangle$ je $\tilde{S}_{l,k} = S_{l,k}$, vně tohoto intervalu je $\tilde{S}_{l,k}$ periodickým rozšířením signálu $S_{l,k}$ s periodou N v proměnné n a periodou M v proměnné m . Uvažujme $s, r \in \mathbb{Z}$, pak

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{i,j} &= \tilde{S}_{l+rN, k+sM} = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} s_{n,m} \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{n(l+rN)}{N} + \frac{m(k+sM)}{M} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} s_{n,m} \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{nl}{N} + \frac{mk}{M} \right) \right\} \exp \left\{ -i2\pi \left(\frac{n(rN)}{N} + \frac{m(sM)}{M} \right) \right\} = S_{l,k}, \end{aligned}$$

což můžeme též zapsat jako $\tilde{S}_{i,j} = S_{i \bmod N, j \bmod M}$. Analogicky koeficientům Fourierovy řady diskretního signálu odpovídá v komplementární oblasti periodický signál $\tilde{s}_{i,j} = s_{i \bmod N, j \bmod M}$, který představuje periodické prodloužení inverzní 2D DFT. Ilustraci takových periodizací signálu a jeho spektra ukazují obrázky 5.23 a 5.24.

Vlastnosti 2D DFT jsou analogické vlastnostem DFT, které známe z jednodimenzionálního případu. Jsou shrnuty v tabulce 5.4. V tabulce jsou použity DFT páry $S_{l,k} = \mathcal{DFT}[s_{n,m}]$ a $F_{l,k} = \mathcal{DFT}[f_{n,m}]$, $G_{l,k} = \mathcal{DFT}[g_{n,m}]$, kde $l, n = 0, 1, \dots, N-1$ a $k, m = 0, 1, \dots, M-1$.

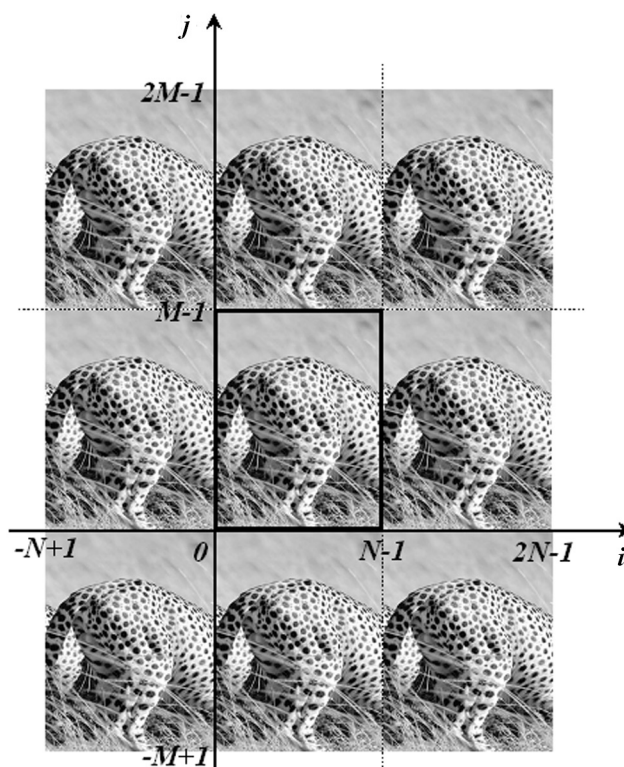
Obdobně jako v 1D případě, i zde je důsledkem komplexního sdružení a zrcadlení signálu i to, že pro spektrum reálného signálu $s_{n,m}$ platí

$$S_{(N-l) \bmod N, (M-k) \bmod M} = \overline{S}_{l,k}. \quad (5.51)$$

V důsledku toho je reálná část spektra symetrická (sudá) a imaginární antisymetrická (lichá) ve smyslu popsaném v odstavci 3.14 (viz též obrázek 3.29). Stejně symetrie (antisymetrie) najdeme i u amplitudového (fázového) spektra. Obrázek 5.24 ukazuje schematicky směry symetrií amplitudového spektra. Naopak fázové spektrum reálného signálu by bylo ve stejných směrech antisymetrické.

VLASTNOST	DFT VSTUP	DFT VÝSTUP
lin. kombinace	$\alpha f_{n,m} + \beta g_{n,m}, \alpha, \beta \in C$	$\alpha F_{l,k} + \beta G_{l,k}$
cyklické posunutí	$s_{(n-i)\bmod N, (m-j)\bmod M}$	$S_{l,k} \exp\left(-i2\pi\left(\frac{il}{N} + \frac{jk}{M}\right)\right)$
modulace	$s_{n,m} \exp\left(i2\pi\left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M}\right)\right)$	$S_{(l-i)\bmod N, (k-j)\bmod M}$
transpozice	$s_{m,n}$	$S_{k,l}$
cyklické zrcadlení	$s_{(N-n)\bmod N, m}$	$S_{(N-l)\bmod N, k}$
	$s_{n, (M-m)\bmod M}$	$S_{l, (M-k)\bmod M}$
	$s_{(N-n)\bmod N, (M-m)\bmod M}$	$S_{(N-n)\bmod N, (M-k)\bmod M}$
komplexní sdružení	$\bar{s}_{n,m}$	$\bar{S}_{(N-l)\bmod N, (M-k)\bmod M}$
reálný signál	$s_{n,m} = \bar{s}_{n,m}$	$S_{l,k} = \bar{S}_{(N-l)\bmod N, (M-k)\bmod M}$
cyklická konvoluce	$\frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m} g_{(i-n)\bmod N, (j-m)\bmod M}$	$F_{l,k} G_{l,k}$
násobení	$f_{n,m} g_{n,m}$	$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} F_{l,k} G_{(i-l)\bmod N, (j-k)\bmod M}$
cyklická korelace	$\frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \bar{f}_{n,m} g_{(i+n)\bmod N, (j+m)\bmod M}$	$\bar{F}_{l,k} G_{l,k}$
cyklická autokorelace	$\frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \bar{s}_{n,m} s_{(i+n)\bmod N, (j+m)\bmod M}$	$\bar{S}_{l,k} S_{l,k} = S_{l,k} ^2$
Parsevalův teorém	$\frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{n,m} \bar{g}_{n,m} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} F_{l,k} \bar{G}_{l,k}$	
Rayleighův teorém	$\frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} s_{n,m} ^2 = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} S_{l,k} ^2$	

Tabulka 5.4: Nejdůležitější vlastnosti 2D DFT.



Obrázek 5.23: Signál $\tilde{s}_{i,j}$ vzniklý periodizací signálu $s_{n,m}$ s periodou N v proměnné n a periodou M v proměnné m . Hodnoty signálu jsou vyjádřeny příslušným stupněm šedi odpovídajícím danému pixelu.

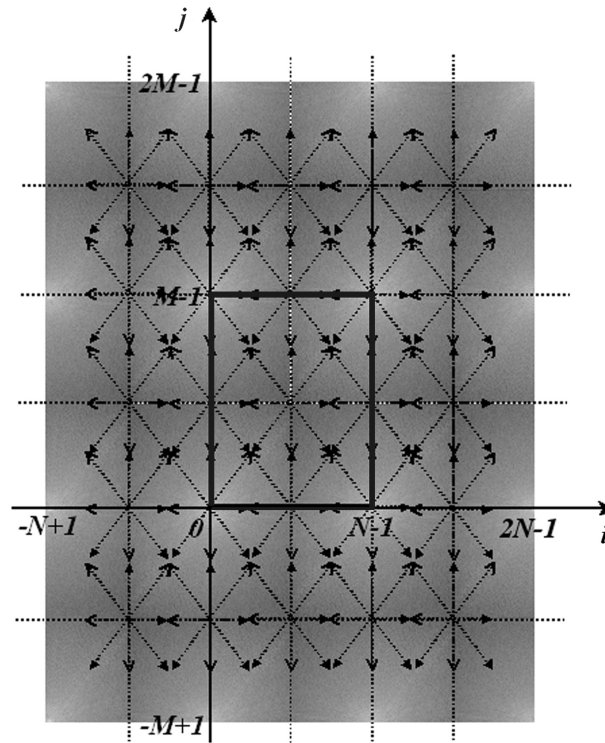
5.7 Interpolace pomocí DFT

DFT je možné použít k velmi efektivní (zejména při použití FFT) interpolaci hodnot spojitého signálu z diskretních vzorků¹³. Nevýhodou této interpolační metody je, že nelze interpolovat v libovolném bodě t , tak jako je to možné v případě vzorkovacího teorému, ale jen v bodech odpovídajícím zlomkům původního vzorkovacího kroku, např. polovině, čtvrtině, apod. (viz dále). Výhodou je naopak to, že v jednom kroku dostaneme naráz všechny funkční hodnoty ve zlomcích původního kroku, tedy neinterpolujeme jen v jednom bodě.

Uvažujme spojitý signál $s(t)$ a jeho T -periodické prodloužení $\tilde{s}(t)$. Podobně jako u vzorkovacího teorému je i zde pro přesnou interpolaci nutnou podmínkou frekvenčně omezený signál. Je-li nosič signálu omezený ve spektrální oblasti, musí být podle Paley-Weinera teorému (odstavec 3.11) neomezený v časové oblasti. Při periodizaci v časové oblasti tedy obecně dochází k efektu alias – míra „nepřesnosti“, kterou tak do výpočtu interpolovaných hodnot vnášíme, závisí na konkrétním tvaru signálu $s(t)$ ¹⁴.

¹³Pro jednoduchost vysvětlíme tuto metodu pro jednodimenzionální případ – zobecnění na 2D DFT je jednoduché.

¹⁴Poznamenejme, že periodický signál $\tilde{s}(t)$ může být za předpokladu dostatečně hustého vzorkování v čase (a frekvenční omezenosti $\tilde{s}(t)$ potažmo $s(t)$) interpolován zcela přesně. Interpolované hodnoty získané tímto postupem budou také přesně odpovídat hodnotám, které bychom dostali použitím vzorkovacího teorému pro periodické signály, viz rovnice (5.40). Obecně však tyto hodnoty v rámci jedné periody neodpovídají hodnotám



Obrázek 5.24: Amplitudové spektrum $|\tilde{S}_{i,j}|$ vzniklé periodizací amplitudového spektra $|S_{l,k}|$. Hvězdicovitě uspořádané šipky ukazují směry symetrie amplitudového spektra. Černý obdélník ve středu obrázku vyznačuje základní interval DFT spektra.

Odeberme diskrétní hodnoty s krokem Δt tak, abychom získali N vzorků na periodu ($T = N\Delta t$). Vznikne tak signál $\tilde{s}_m = \tilde{s}(m\Delta t)$, $m = 0, 1, \dots$ a z něho pak operací modulo signál s_n , $n = 0, 1, \dots, N$, který představuje vstup DFT. Dalším nutným předpokladem je, že Nyquistova frekvence odpovídající kroku Δt je větší než maximální frekvence v signálu obsažená.

DFT spektrum signálu s_n označíme S_l , $l = 0, 1, \dots, N$, tedy $S_l = \mathcal{DFT}[s_n]$. Za výše uvedených předpokladů je jednoznačně dáno diskrétními hodnotami spektra původního spojitého signálu a představuje vlastně Fourierovy koeficienty exponenciální řady signálu $\tilde{s}(t)$ – z důvodů frekvenční omezenosti původního signálu je těchto koeficientů konečný počet rovný právě N . Nyní následuje klíčový krok celé metody: doplnění spektra $(L-1)N$ nulami, kde L je přirozené číslo. Vznikne tak spektrum P_l , $l = 0, 1, \dots, M$, kde $M = LN$ a platí

$$P_l = \begin{cases} S_l & l = 0, 1, \dots, K \quad \text{a} \quad l = M - K + 1, \dots, M \\ 0 & l = K + 1, \dots, M - K \end{cases}, \quad (5.52)$$

kde $K = (N/2) - 1$ pro N sudé a $K = (N-1)/2$ pro N liché. Nuly tedy doplňujeme za vzorek $(N/2) - 1$ původního spektra S_l , pokud je N sudé, nebo případně za vzorek s indexem $(N-1)/2$, je-li N liché, každopádně vždy „do středu“ spektra za vzorek odpovídající Nyquistově frekvenci. Spektrum si tím zachová základní „tvar“, jen se prodlouží o doplněné nuly.

V následujícím výkladu pro jednoduchost předpokládejme N sudé¹⁵. Prodlouženému spektru původního neperiodického signálu.

¹⁵Pro N liché bychom pouze v následujících rovnicích upravili sumační meze (posunutím o 1 vzorek). Na podstatě odvození to však nic nemění.

odpovídá signál

$$p_m = \mathcal{DFT}^{-1}[P_l] = \sum_{l=0}^{M-1} P_l \exp\left(i2\pi \frac{ml}{M}\right) = \sum_{l=-N/2}^{M-1-(N/2)} P_l \exp\left(i2\pi \frac{ml}{M}\right), \quad (5.53)$$

kde $m = 0, 1, \dots, M$. Poslední rovnost zde je důsledkem M -periodicity DFT spektra prodlouženého signálu – meze můžeme libovolně posunovat při zachování celkového počtu M sčítanců. Dále platí

$$p_m = \sum_{l=-N/2}^{M-1-(N/2)} P_l \exp\left(i2\pi \frac{ml}{M}\right) = \sum_{l=-N/2}^{(N/2)-1} S_l \exp\left(i2\pi \frac{ml}{LN}\right), \quad (5.54)$$

neboť za vzorkem $(N/2) - 1$ již ve spektru následují jen samé nuly.

Zároveň víme, že

$$s_n = \sum_{l=-N/2}^{(N/2)-1} S_l \exp\left(i2\pi \frac{nl}{N}\right)$$

a ze srovnání obou vzorců okamžitě vidíme, že

$$p_m = s_n \quad \text{pro} \quad m = nL. \quad (5.55)$$

Pokud by např. L bylo rovno 2, pak každý druhý vzorek signálu p_m odpovídá jednomu vzorku signálu s_n (při zachování jejich pořadí). Čtenář si jistě povšiml jasné analogie s doplněním signálu nulami, probíraným v odstavci 5.3; zde se opět jedná o projev reciprocit DFT. Signál p_m však obsahuje i vzorky mezi těmito hodnotami, a ty právě představují interpolované hodnoty původního signálu. Čemu konkrétně odpovídají tyto nové vzorky?

Vyjádříme spojitý periodický signál pomocí exponenciální Fourierovy řady, která má, jak víme, pouze N nenulových koeficientů S_l

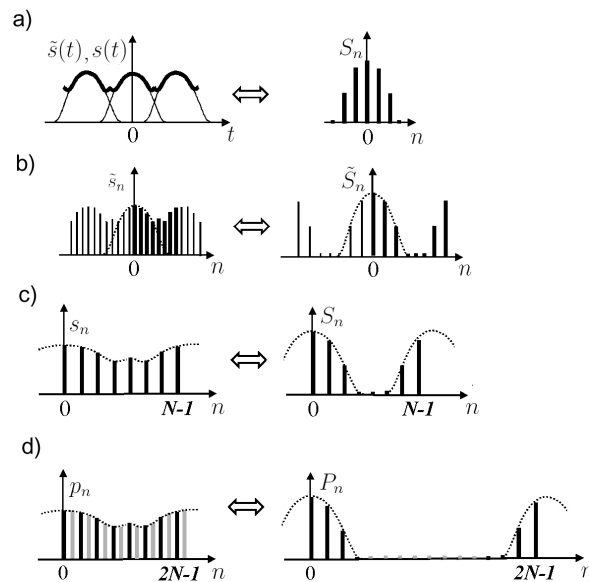
$$\tilde{s}(t) = \sum_{l=-N/2}^{(N/2)-1} S_l \exp\left(i2\pi \frac{lt}{N\Delta t}\right). \quad (5.56)$$

Položme $\delta t = \Delta t/L$ (přirozené zlomky původního kroku). V rovnici (5.56) specifikujme diskrétní časy $t = m\delta t$

$$\tilde{s}(m\delta t) = \tilde{s}\left(\frac{m\Delta t}{L}\right) = \sum_{l=-N/2}^{(N/2)-1} S_l \exp\left(i2\pi \frac{lm}{NL}\right) = p_m, \quad (5.57)$$

kde poslední rovnost plyne přímo z (5.54).

Sumarizujme k čemu jsme dospěli: doplnění spektra $(L-1)N$ nulami a následná inverzní DFT nám dá diskrétní signál p_m o délce $M = LN$, jehož vzorky na pozicích $m = Ln$ jsou rovny signálu $s_n = \tilde{s}(n\Delta t)$ a ostatní vzorky (mezi) jsou rovny diskrétním hodnotám signálu $\tilde{s}(m\delta t) = \tilde{s}(m\Delta t/L)$, tedy hodnotám v příslušných zlomcích původního vzorkovacího kroku a představují tak hledanou interpolaci. Situaci ilustruje názorně obrázek 5.25. Jeho části a) a b) odpovídají obrázkům 5.20c respektive 5.20f. Připomeňme znovu, že předpoklad frekvenční omezenosti spektra je pro celé odvození podstatný. Za tohoto předpokladu také dostaneme tímto postupem přesně tytéž interpolované hodnoty, jaké bychom dostali při použití vzorkovacího teoremu (5.40), pokud bychom jej aplikovali pro všechny časy odpovídající hledaným vzorkům p_m .



Obrázek 5.25: Interpolace pomocí DFT: a) spojitý periodický signál $\tilde{s}(t)$ a jeho Fourierovy koeficienty S_n (spojitý neperiodický signál znázorněn tenkou čarou), b) diskrétní periodický signál \tilde{s}_n vzniklý diskretizací $\tilde{s}(t)$ a periodické opakování Fourierových koeficientů bez překryvu (diskrétní signál \tilde{S}_n), c) detail DFT páru $S_n = \mathcal{DFT}[s_n]$ použitého pro interpolaci, d) detail DFT páru $p_n = \mathcal{DFT}^{-1}[P_n]$, šedou barvou jsou u p_n vyznačeny interpolované hodnoty po doplnění N nul za $(N - 1)$ -ní vzorek spektra P_n .

Použití algoritmu FFT výše uvedenou interpolaci výrazně zefektivňuje. Vlastní doplnění nul ve spektru z numerického hlediska téměř nic nestojí, jen je třeba, aby počet vzorků, původní N i výsledný LN , byl roven mocnině dvou (při použití nejběžnějšího typu FFT). Získáme tak interpolované hodnoty ve zlomcích vzorkovacího kroku, jejichž jmenovatel je rovněž mocninou dvou, tedy např. v polovinách, čtvrtinách, osminách, atd.

Na závěr ještě poznamenejme, že stejnou metodu bychom mohli použít i pro interpolaci spektra, kdy bychom nulami rozšířili naopak signál v časové oblasti. Zda by se jednalo o centrální doplnění nulami, nebo jejich připojení za vzorek $N - 1$ závisí na tom, obsahuje-li signál nenulové vzorky i pro záporné časy, nebo je kauzální (viz odstavec 5.3).

Výsledky cvičení

Cvičení 2.4.1

$$\begin{aligned} S_{-n} &= \overline{S_n}, \quad \text{tj. } |S_{-n}| \exp(i\phi_{-n}) = |S_n| \exp(-i\phi_n) \\ &\quad \downarrow \\ |S_{-n}| &= |S_n| \quad \dots \text{sudá funkce} \\ \phi_{-n} &= -\phi_n \quad \dots \text{lichá funkce} \end{aligned}$$

Cvičení 2.4.2

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \Re\{\tilde{o}(t)\} - i\Im\{\tilde{o}(t)\} + \Re\{\tilde{e}(t)\} - i\Im\{\tilde{e}(t)\} \\ &\quad \downarrow \\ S_n &= i\Im\{O_n\} - \Re\{O_n\} + \Re\{E_n\} - i\Im\{E_n\} \\ &= -i\Im\{O_{-n}\} + \Re\{O_{-n}\} + \Re\{E_{-n}\} - i\Im\{E_{-n}\} = \overline{S_{-n}} \end{aligned}$$

Cvičení 2.5.1

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_n = 0, \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Cvičení 2.5.2

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_n = 0, \\ b_n &= -\frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Cvičení 2.5.3

a)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2l^2}{3}, \quad a_n = \frac{4l^2}{n^2\pi^2}(-1)^n, \\ b_n &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{8l^2}{3}, \quad a_n = \frac{4l^2}{n^2\pi^2}, \\ b_n &= -\frac{4l^2}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Cvičení 2.8.1

a)

$$\begin{aligned} a_0 &= a_n = 0 \quad (\text{integrál z liché funkce od } -\pi \text{ do } \pi) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = -\frac{1}{\pi} \left[t \frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos(-n\pi)}{n} \right] = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = -\frac{2}{n} (-1)^n \end{aligned}$$

b)

$$b_n = -\frac{2}{n}, \quad S_n = -\frac{2i}{n}$$

$$\tilde{h}(t) = \tilde{s}(t - \pi) \leftrightarrow H_n = \frac{2i}{n} \exp\left(-\frac{i2\pi n\pi}{2\pi}\right) = \frac{2i}{n} \cos(n\pi) = \frac{2i}{n}(-1)^n, \quad b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

Cvičení 2.8.2

a)

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi 1 dt = 1$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \cos(nt) dt = \left[\frac{1}{n\pi} \sin(nt) \right]_0^\pi = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \left[-\frac{1}{n\pi} \cos(nt) \right]_0^\pi = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) \quad n = 1, 2, \dots$$

b)

$$A_0 = \frac{a_0}{2} + 1 = 1$$

$$A_n = 2a_0 = 0$$

$$B_n = \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) \quad n = 1, 2, \dots$$

c)

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}, \quad H_n = S_n \exp(-i\frac{n\pi}{2})$$

$$\Downarrow$$

$$H_0 = S_0 = \frac{1}{2}$$

$$H_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} (\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)) = -\frac{i}{n\pi} (\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right))^2 = -\frac{i}{n\pi} \frac{1 - (-1)^n}{2} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Downarrow$$

$$a_0 = 2S_0 = 1$$

$$a_n = S_n + S_{-n} = 0$$

$$b_n = i(S_n - S_{-n}) = i \left(-\frac{i}{2n\pi} (1 - (-1)^n) - \frac{i}{2n\pi} (1 - (-1)^n) \right) = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) \quad n = 1, 2, \dots$$

Cvičení 2.9.1

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad u_n(t) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + C_2 \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \quad \text{při } C_1^2 + C_2^2 \neq 0.$$

Cvičení 2.10.1

$$P_0 = 1, \quad P_1 = t, \quad P_2 = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_3 = t^3 - \frac{3}{5}t, \quad P_4 = t^4 - \frac{5}{7}t^2 - \frac{1}{5}$$

(až na multiplikátor se jedná o Legendrovy polynomy).

Cvičení 2.10.2

$$c_0 = \frac{1}{3}, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad \text{ostatní koeficienty nulové.}$$

Cvičení 2.10.3

$$P_2^1(t) = (1-t^2)^{1/2} \frac{d}{dt} P_2(t) = (1-t^2)^{1/2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3t^2-1}{2} \right) = 3t(1-t^2)^{1/2}$$

$$P_2^2(t) = (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} P_2(t) = (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{3t^2-1}{2} \right) = 3t(1-t^2)$$

$$P_2^3(t) = (1-t^2)^{3/2} \frac{d^3}{dt^3} P_2(t) = (1-t^2)^{3/2} \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{3t^2-1}{2} \right) = 0$$

$$P_3^2(t) = (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} P_3(t) = (1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{5t^3-3t}{2} \right) = 15t(1-t^2)$$

Cvičení 2.10.4

$$c_n = \frac{(2n+1)(n-2)!}{2(n+2)!} \int_{-1}^1 a(1-t^2) P_n^2(t) dt$$

$$c_2 = a/3, \quad \text{ostatní nulové díky ortogonalitě}$$

Cvičení 2.11.1

$$S_{n,m} = \frac{4\mu\nu}{T_1 T_2} \operatorname{sinc} \left(\frac{2\mu}{T_1} \pi n \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{2\nu}{T_2} \pi m \right).$$

Cvičení 2.11.2

$$a_{n,m} = b_{n,m} = c_{n,m} = 0$$

$$d_{n,m} = \frac{4}{nm} (-1)^{n+m}, \quad m > 0, n > 0,$$

$$d_{n,0} = d_{0,m} = d_{00} = 0$$

Cvičení 3.2.1

$$\exp(-i2\pi ft) = \cos(2\pi ft) - i \sin(2\pi ft)$$

$$\Downarrow$$

$$|\exp(-i2\pi ft)| = \sqrt{\cos^2(2\pi ft) + \sin^2(2\pi ft)} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$|s(t) \exp(-i2\pi ft)| = |s(t)|$$

Tudíž

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i2\pi ft) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) \exp(-i2\pi ft)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Cvičení 3.2.2

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi t^2) \exp(-i2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\pi(t^2 + i2ft)] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\pi(t^2 + i2ft + f^2 - f^2)] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi f^2) \exp[-\pi(t + if)^2] dt$$

$$= \exp(-\pi f^2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\sqrt{\pi}(t + if))^2] dt.$$

Substitucí $y = \sqrt{\pi}(t + if)$ dostaneme

$$S(f) = \exp(-\pi f^2) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \exp(-\pi f^2), \quad \text{neboť} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi}.$$

Gaussova funkce tedy tvoří symetrický Fourierův pár.

Cvičení 3.2.3

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-i2\pi ft) dt = \left[\frac{1}{-i2\pi f} \exp(-i2\pi ft) \right]_{-1/2}^{1/2} \\ &= \frac{1}{-i2\pi f} [\exp(-i\pi f) - \exp(i\pi f)] = \frac{1}{\pi f} \frac{[\exp(i\pi f) - \exp(-i\pi f)]}{2i} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \\ &= \text{sinc}(\pi f) = \text{sinc}_{\pi}(f) \end{aligned}$$

Cvičení 3.2.4

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) \exp(-i2\pi ft) dt = \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha + i2\pi f)t] dt \\ &= -\frac{1}{\alpha + i2\pi f} [\exp(-(\alpha + i2\pi f)t)]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \end{aligned}$$

Cvičení 3.2.5

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha|t|) \exp(-i2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^0 \exp(\alpha t) \exp(-i2\pi ft) dt + \int_0^{\infty} \exp(-\alpha|t|) \exp(-i2\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp[-(i2\pi f - \alpha)t] dt + \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha + i2\pi f)t] dt \\ &= \frac{1}{\alpha - i2\pi f} [\exp(-(\alpha + i2\pi f)t)]_{-\infty}^0 - \frac{1}{\alpha + i2\pi f} [\exp(-(\alpha + i2\pi f)t)]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha - i2\pi f} + \frac{1}{\alpha + i2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

Cvičení 3.4.1

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i2\pi ft) dt = 2 \int_0^1 (1-t) \cos(2\pi ft) dt \\ &= 2 \left\{ \int_0^1 \cos(2\pi ft) dt - \int_0^1 t \cos(2\pi ft) dt \right\} = \frac{1}{\pi f} [\sin(2\pi ft)]_0^1 - \int_0^1 t \cos(2\pi ft) dt \\ &= \frac{1}{\pi f} \{ \sin(2\pi f) - [t \sin(2\pi ft)]_0^1 + \int_0^1 \sin(2\pi ft) dt \} = \frac{1}{2\pi^2 f^2} [\cos(2\pi ft)]_1^0 \\ &= \frac{1}{2\pi^2 f^2} (1 - \cos(2\pi f)) = \frac{1}{\pi^2 f^2} \sin^2(\pi f) = \text{sinc}^2(\pi f) = \text{sinc}_{\pi}^2(f) \end{aligned}$$

Cvičení 3.4.2

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \exp(-i2\pi ft) dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi t) \cos(2\pi ft)}{\pi t} dt$$

Pomocí (D.8.6)

$$\begin{aligned} S(f) &= 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(\pi t + 2\pi f t)}{2\pi t} + \frac{\sin(\pi t - 2\pi f t)}{2\pi t} \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin(\pi t(1 + 2f))}{\pi t} + \frac{\sin(\pi t(1 - 2f))}{\pi t} \right] dt \\ &= \frac{1 + 2f}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t(1 + 2f))}{\pi t(1 + 2f)} dt + \frac{1 - 2f}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t(1 - 2f))}{\pi t(1 - 2f)} dt \end{aligned}$$

S využitím (D.10.7)

$$S(f) = \frac{1 + 2f}{2|1 + 2f|} + \frac{1 - 2f}{2|1 - 2f|} = \Pi(f) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1/2 \leq f \leq 1/2 \\ 0 & \text{pro } |f| > 1/2 \end{cases}$$

Cvičení 3.5.1

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta(t - a)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) \exp(-i2\pi f t) dt = \exp(-i2\pi f t) \Big|_{t=a} = \exp(-i2\pi f a) \\ \mathcal{F}^{-1}(\delta(f - a)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - a) \exp(i2\pi f t) df = \exp(i2\pi f t) \Big|_{f=a} = \exp(i2\pi t a) \\ &\Rightarrow \mathcal{F}(\exp(i2\pi t a)) = \delta(f - a) \end{aligned}$$

Cvičení 3.6.1

$$\begin{aligned} \Re\{\mathcal{F}(\delta(t))\} &= 1 \dots \text{sudá} & \Im\{\mathcal{F}(\delta(t))\} &= 0 \\ \Re\{\mathcal{F}(\delta(t - a))\} &= \cos(2\pi f a) \dots \text{sudá} & \Im\{\mathcal{F}(\delta(t - a))\} &= \sin(2\pi f a) \dots \text{lichá} \\ \Re\{\mathcal{F}(\delta_T(t))\} &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \dots \text{sudá} & \Re\{\mathcal{F}(\delta_T(t))\} &= 0 \\ \Re\{\mathcal{F}(A)\} &= A\delta(f) \dots \text{sudá} & \Im\{\mathcal{F}(A)\} &= 0 \\ \Re\{\mathcal{F}(\text{sgn}(t))\} &= 0 & \Im\{\mathcal{F}(\text{sgn}(t))\} &= -\frac{1}{\pi f} \dots \text{lichá} \\ \Re\{\mathcal{F}(u(t))\} &= \frac{1}{2}\delta(f) \dots \text{sudá} & \Im\{\mathcal{F}(u(t))\} &= -\frac{1}{2\pi f} \dots \text{lichá} \end{aligned}$$

Cvičení 3.7.1

Nechť $s(t)$ je reálný signál. Pak $is(t)$ je ryze imaginární a platí

$$\mathcal{F}(is(t)) = i\mathcal{F}(s(t)) = i\frac{1}{2}(A(f) - iB(f)) = \frac{1}{2}(B(f) + iA(f)) = \Re\{\mathcal{F}(is(t))\} + i\Im\{\mathcal{F}(is(t))\},$$

neboť $A(f)$ a $B(f)$ jsou reálné.

Cvičení 3.7.2

Nechť $s(t)$ je reálný lichý signál. Pak $is(t)$ je ryze imaginární lichý signál a platí

$$\mathcal{F}(is(t)) = i\mathcal{F}(s(t)) = i(-i\frac{B(f)}{2}) = \frac{B(f)}{2},$$

což je v tomto případě reálná lichá funkce.

Cvičení 3.7.3

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi t}\right) = -i \operatorname{sgn}(f).$$

Cvičení 3.8.1

$$\begin{aligned} h(t) &= \overline{s(t)} = \Re\{o(t)\} - i\Im\{o(t)\} + \Re\{e(t)\} - i\Im\{e(t)\} \\ &\quad \downarrow \\ H(f) &= i\Im\{O(f)\} - \Re\{O(f)\} + \Re\{E(f)\} - i\Im\{E(f)\} \\ &= -i\Im\{O(-f)\} + \Re\{O(-f)\} + \Re\{E(-f)\} - i\Im\{E(-f)\} = \overline{S(-f)} \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.2

$$\mathcal{F}(u(\alpha t)) = \frac{1}{2\alpha} \delta\left(\frac{f}{\alpha}\right) - \frac{i\alpha}{\alpha 2\pi f} = \frac{1}{2} \delta(f) - \frac{i}{2\pi f},$$

kde jsme použili (D.17.5)

Cvičení 3.8.3

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\cos(\pi t - \tfrac{1}{2})) &= \frac{1}{2} \left(\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) \right) \exp(-i\pi f) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) \right) (\cos(-\pi f) + i \sin(-\pi f)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) \cos(-\pi f) + i \delta\left(f + \frac{1}{2}\right) \sin(-\pi f) \right. \\ &\quad \left. + \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) \cos(-\pi f) + i \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) \sin(-\pi f) \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(\delta\left(f + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(f - \frac{1}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.4

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right), \\ \mathcal{F}\left(u\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{1}{2} \delta(f) - \frac{i}{2\pi f} \exp(i\pi f), \\ \mathcal{F}\left(u\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{1}{2} \delta(f) - \frac{i}{2\pi f} \exp(-i\pi f) \\ &\quad \downarrow \\ \mathcal{F}(\Pi(t)) &= -\frac{i}{2\pi f} (\exp(i\pi f) - \exp(-i\pi f)) = \frac{1}{2} \frac{1}{i\pi f} (\exp(i\pi f) - \exp(-i\pi f)) = \operatorname{sinc}(\pi f) \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.5

$$S(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} [\exp(-\pi^2(f - f_0)^2/\beta^2) + \exp(-\pi^2(f + f_0)^2/\beta^2)]$$

Cvičení 3.8.6

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Pi_d(t)) &= \frac{1}{\pi f} \sin(\pi f d) \\ &\quad \downarrow \\ S(f) &= \frac{\sin(\pi(f - f_0)d)}{i2\pi(f - f_0)} - \frac{\sin(\pi(f + f_0)d)}{i2\pi(f + f_0)} \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.7

Z modulačního teoremu

$$\mathcal{F}(2is(t) \sin(2\pi \frac{a}{2}t)) = S(f - \frac{a}{2}) - S(f + \frac{a}{2})$$

Z reciprocity

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S(t - \frac{a}{2}) - S(t + \frac{a}{2})) &= -2is(-f) \sin(\pi af) = -2i\mathcal{F}(S(t)) \sin(\pi af) \\ &\Downarrow \\ \mathcal{F}s((t + \frac{a}{2}) - s(t - \frac{a}{2})) &= 2i\mathcal{F}(s(t)) \sin(\pi af) \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.8

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{2i \sin(\pi fa) S(f)}{a} = 2iS(f) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi fa)}{a} = 2iS(f) \frac{\pi fa}{a} = 2i\pi f S(f)$$

Cvičení 3.8.9

$$\begin{aligned} (2\pi i)^n t^n s(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{d^n S(-f)}{df^n} \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(-\frac{d^n S(f)}{df^n} \right) \\ &\Downarrow \\ t^n s(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{-1}{(2\pi i)^n} \frac{d^n S(f)}{df^n} \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{i^n}{(2\pi)^n} \frac{d^n S(f)}{df^n} \right) \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.10

$$\begin{aligned} S(f) &= \left(\frac{1}{\alpha + i2\pi f} \right)^2, \quad \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\alpha + i2\pi f} \right) = \exp(-\alpha t), t > 0 \\ &\Downarrow \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha\tau) \exp(-\alpha(t - \tau)) d\tau = \int_0^t \exp(-\alpha\tau) \exp(-\alpha(t - \tau)) d\tau \\ &= \exp(-\alpha t) \int_0^t d\tau = t \exp(-\alpha t) \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.11

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g_1(t) * g_2(t)) &= G_1(f)G_2(f) \\ \Rightarrow \mathcal{F}(G_1(t)G_2(t)) &= g_1(-f) * g_2(-f) = \mathcal{F}(G_1(t)) * \mathcal{F}(G_2(t)), \quad \text{c.b.d.} \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.12

$$\begin{aligned} \text{sinc}_\pi(f) * \text{sinc}_\pi(f) &= \mathcal{F}(\Pi(t)\Pi(t)) = \mathcal{F}(\Pi(t)) = \text{sinc}_\pi(f) \\ &\text{(autokonvoluce funkce } \text{sinc}_\pi \text{ je opět funkce } \text{sinc}_\pi) \\ &\Downarrow \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}_\pi^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}_\pi(t) \text{sinc}_\pi(a - t) dt \Big|_{a=0} = (\text{sinc}_\pi * \text{sinc}_\pi)(0) = \text{sinc}_\pi(0) = 1 \end{aligned}$$

Cvičení 3.8.13

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right\} \exp(-i2\pi ft) dt \\ &= \left[\left(\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) \frac{\exp(-i2\pi ft)}{-i2\pi f} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{i2\pi f} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \frac{1}{i2\pi f} S(f) \end{aligned}$$

Cvičení 3.9.1

$$s(t) = \exp(-\alpha t), t > 0, \alpha > 0, \quad \mathcal{F}(s(t)) = S(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t) dt = S(0) = \frac{1}{\alpha}$$

Cvičení 3.9.2

$$s(t) = \exp(-\alpha t), t > 0, \alpha > 0, \quad \mathcal{F}(s(t)) = S(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\infty} t \exp(-\alpha t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \exp(-\alpha t) dt = \frac{i}{2\pi} \frac{d}{df} (\alpha + i2\pi f)^{-1} \Big|_{f=0} = (\alpha + i2\pi f)^{-2} \Big|_{f=0} = \frac{1}{\alpha^2}$$

Cvičení 3.9.3

$$s(t) = \exp(-\alpha t), t > 0, \alpha > 0, \quad \mathcal{F}(s(t)) = S(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp(-\alpha t) dt = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2}{df^2} (\alpha + i2\pi f)^{-1} \Big|_{f=0} = \frac{2}{\alpha^3}$$

Cvičení 3.9.4

$$\langle t \rangle = \frac{1/\alpha^2}{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

Cvičení 3.9.5

$$\langle t^2 \rangle = \frac{2/\alpha^3}{1/\alpha} = \frac{2}{\alpha^2}$$

Cvičení 3.9.6

$$\sigma_{s(t)}^2 = \frac{2}{\alpha^3} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

Cvičení 3.12.1

$$S(f) = \mathcal{F}(u(t)) = \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{i}{2\pi f},$$

$$-\mathcal{H}(\Re\{S(f)\}) = -\frac{1}{\pi f} * \frac{1}{2}\delta(f) = -\frac{1}{2\pi f} = \Im\{S(f)\}$$

Cvičení 3.15.1

$$i(t) = L(\delta(t)) = L\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(i\omega t) d\omega\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\exp(i\omega t)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \mathcal{F}^{-1}(T(\omega))$$

Cvičení 4.2.1

$$h_n = [1, 2, 3, 4] * [0, 1, 2, 3] = [0, 1, 4, 10, 16, 17, 12]$$

Ostatní prvky jsou nulové.

Cvičení 4.2.2

$$\begin{aligned} p(n_1) &= \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s(n_1, n_2) \\ &\Downarrow \\ \mathcal{F}(p(n_1)) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s(n_1, n_2) \right\} \exp(-in_1\Omega_1) \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s(n_1, n_2) \exp(-in_1\Omega_1 - in_2\Omega_2) \\ &= \tilde{S}(\Omega_1, 0) \end{aligned}$$

Cvičení 4.3.1

$$\tilde{T}_{vf}(\Omega) = \tilde{T}(\Omega + \pi) \Rightarrow h_{vf}(n) = h(n) \exp(-in\pi) = h(n)(-1)^n = (-1)^n \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}_{\pi} \left(\frac{\Omega_c n}{\pi} \right)$$

Cvičení 4.4.1

$$\begin{aligned} s(n) &= s(n\Delta t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \\ &\Downarrow \\ \mathcal{F}(s(n)) &= \frac{1}{2\pi} \left[S(\omega) * \frac{2\pi}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{\Delta t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\xi - k \frac{2\pi}{\Delta t} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \xi) \delta \left(\xi - k \frac{2\pi}{\Delta t} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left(\omega - k \frac{2\pi}{\Delta t} \right) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left(\frac{\omega \Delta t - 2\pi k}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Přeznačením $\Omega = \omega \Delta t$

$$\mathcal{F}(s(n)) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left(\frac{\Omega - 2\pi k}{\Delta t} \right) \equiv \tilde{S}(\Omega) \quad \text{c.b.d.}$$

Cvičení 5.1.1

$$\mathcal{DFT}[1, 0, 0, 0] = \frac{1}{4}[1, 1, 1, 1], \quad \mathcal{DFT}[1, 1, 1, 1] = \frac{1}{4}[4, 0, 0, 0]$$

Cvičení 5.3.1

$$F_l = \mathcal{DFT}[1, 2, 3, 4] = \frac{1}{4}[10, -2+2i, -2, -2-2i], \quad G_l = \mathcal{DFT}[0, 1, 2, 3] = \frac{1}{4}[6, -2+2i, -2, -2-2i],$$

$$F_l G_l = \frac{1}{16}[10 \cdot 6, (-2+2i)^2, (-2)^2, (-2-2i)^2] = \frac{1}{16}[60, -8i, 4, 8i],$$

$$h_n = \mathcal{DFT}^{-1}[F_l G_l] = \frac{1}{16} \mathcal{DFT}^{-1}[60, -8i, 4, 8i] = \frac{1}{16} [64, 72, 64, 40] = \frac{1}{4} [16, 18, 16, 10]$$

Cvičení 5.3.2

$$\begin{aligned} h_n^L &= [1, 2, 3, 4] * [0, 1, 2, 3] = [0, 1, 4, 10, 16, 17, 12] \\ &\quad \downarrow \\ \text{pro } n = 0, 1, 2, 3 \quad h_n^C &= \frac{1}{4} [0 + 16, 1 + 17, 4 + 12, 10] = \frac{1}{4} [16, 18, 16, 10] \end{aligned}$$

Cvičení 5.3.3

Lineární konvoluce dvou čtyřvzorkových signálů má délku $4+4-1=7$

$$h_n^L = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0] \odot [0, 1, 2, 3, 0, 0, 0] = [0, 1, 4, 10, 16, 17, 12]$$

Cvičení 5.3.4

1)

$$[1, 2, 3, 4] \otimes [0, 1, 2, 3] = [1, 4, 3, 2] \odot [0, 1, 2, 3] = \frac{1}{4} [20, 14, 12, 14]$$

2)

$$\begin{aligned} G_l &= \mathcal{DFT}[g_n] = \mathcal{DFT}[0, 1, 2, 3] = \frac{1}{4} [6, -2 + 2i, -2, -2 - 2i] \\ F_l &= \mathcal{DFT}[f_n] = \mathcal{DFT}[1, 2, 3, 4] = \frac{1}{4} [10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i] \\ &\quad \downarrow \\ F_{(-l) \bmod N} &= \mathcal{DFT}[1, 4, 3, 2] = \frac{1}{4} [10, -2 - 2i, -2, -2 + 2i] \\ &\quad F_{(-l) \bmod N} G_l = \frac{1}{16} [60, 8, 4, 8] \\ \mathcal{DFT}^{-1}[F_{(-l) \bmod N} G_l] &= \mathcal{DFT}^{-1}\left(\frac{1}{16} [60, 8, 4, 8]\right) = \frac{1}{4} [20, 14, 12, 14] \end{aligned}$$

Dodatky

D.8 Některé vzorce pro goniometrické funkce.

Exponenciální funkci můžeme vyjádřit pomocí funkcí \cos a \sin jako

$$\exp(it) = \cos(t) + i \sin(t). \quad (\text{D.8.1})$$

Odtud již snadno plynou tzv. Eulerovy vzorce

$$\cos(t) = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}, \quad \sin(t) = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}. \quad (\text{D.8.2})$$

Z Pythagorovy věty plyne vzorec

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1.$$

Velmi užitečné jsou i vzorce pro \cos a \sin součtu

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \quad (\text{D.8.3})$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y). \quad (\text{D.8.4})$$

Jednoduchým důsledkem těchto vzorců jsou také vztahy

$$2 \sin^2(x/2) = 1 - \cos(x), \quad 2 \cos^2(x/2) = 1 + \cos(x), \quad (\text{D.8.5})$$

a

$$2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x + y) + \sin(x - y) \quad (\text{D.8.6})$$

D.9 Užitečné goniometrické součty.

V praktických úlohách se často vyskytují konečné řady $\sum_{k=1}^n \exp(ikt)$, $\sum_{k=1}^n \sin(kt)$ a $\sum_{k=1}^n \cos(kt)$. První s těchto sum představuje vlastně geometrickou řadu s kvocientem $\exp(it)$. Pro částečný součet této řady tedy máme

$$\sum_{k=1}^n \exp(ikt) = \exp(it) \frac{1 - \exp(int)}{1 - \exp(it)} = - \frac{\exp(i(t/2)) - \exp(i(n + 1/2)t)}{\exp(i(t/2)) - \exp(-i(t/2))}. \quad (\text{D.9.1})$$

Vyjádríme-li exponenciály pomocí vzorce (D.8.1), dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\cos(kt) + i \sin(kt)) &= \frac{-\cos(t/2) - i \sin(t/2) + \cos((n + 1/2)t) + i \sin((n + 1/2)t)}{2i \sin(t/2)} \\ &= \frac{-\sin(t/2) + \sin((n + 1/2)t) + i(\cos(t/2) - \cos((n + 1/2)t))}{2 \sin(t/2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.9.2})$$

Rozdělením tohoto výrazu na reálnou a imaginární část máme

$$\sum_{k=1}^n \sin(kt) = \frac{\cos(t/2) - \cos((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} \quad (\text{D.9.3})$$

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n+1/2)t) - \sin(t/2)}{2 \sin(t/2)} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2}. \quad (\text{D.9.4})$$

Tyto vzorce lze použít pro $t \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$

S využitím úprav založených na vzorcích (D.8.3) – (D.8.5) můžeme dospět k alternativním vzorcům pro sumy (D.9.4), (D.9.3) a tedy i (D.9.1)

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \cos \left[\frac{1}{2}(n+1)t \right] \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \quad (\text{D.9.5})$$

$$\sum_{k=1}^n \sin(kt) = \sin \left[\frac{1}{2}(n+1)t \right] \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \quad (\text{D.9.6})$$

$$\sum_{k=1}^n \exp(ikt) = \exp \left[i \frac{1}{2}(n+1)t \right] \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}. \quad (\text{D.9.7})$$

Často potřebujeme znát součet exponenciál v mezích 0 až $n-1$ namísto 1 až n . Z (D.9.1) snadno dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(ikt) &= 1 + \sum_{k=1}^n \exp(ikt) - \exp(int) = \exp(it) \frac{1 - \exp(int)}{1 - \exp(it)} + 1 - \exp(int) \\ &= (1 - \exp(int)) \left(1 + \frac{\exp(it)}{1 - \exp(it)} \right) = \frac{1 - \exp(int)}{1 - \exp(it)}. \end{aligned}$$

Oproti (D.9.1) se tento výraz liší pouze chybějícím faktorem $\exp(it)$. Z rovnice (D.9.7) pak dělením tímto faktorem dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp(ikt) = \exp \left[i \frac{1}{2}(n-1)t \right] \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}. \quad (\text{D.9.8})$$

D.10 Funkce sinc a integrální sinus.

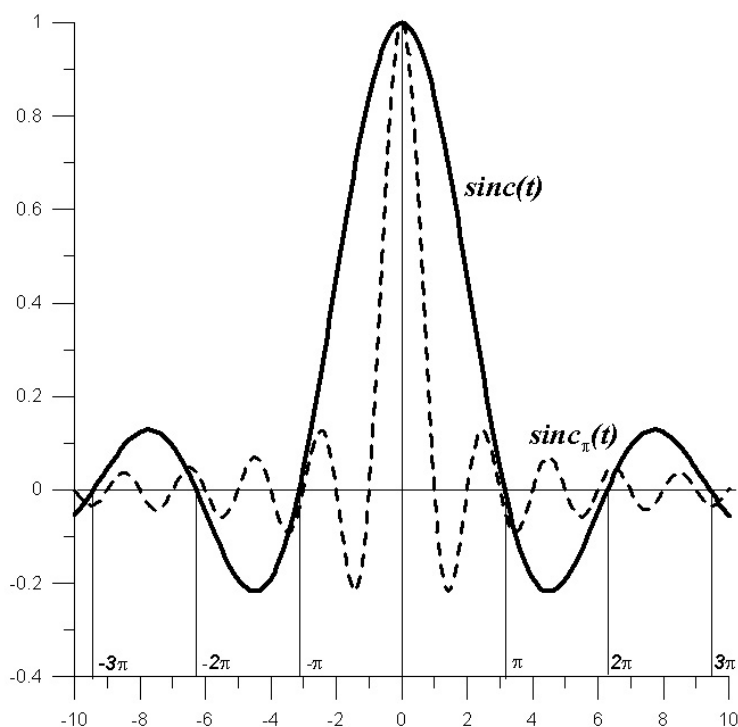
Funkce sinc se nejčastěji definuje takto:

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{pro } t \neq 0 \\ 1 & \text{pro } t = 0 \end{cases} \quad (\text{D.10.1})$$

V oblasti zpracování signálů se někdy používá alternativní definice funkce sinc:

$$\text{sinc}_\pi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{pro } t \neq 0 \\ 1 & \text{pro } t = 0 \end{cases} \quad (\text{D.10.2})$$

Někteří autoři i funkci $\text{sinc}_\pi(t)$ značí $\text{sinc}(t)$. V těchto skriptech se důsledně držíme výše uvedených definic.

Obrázek D.1: Funkce sinc (plně) a sinc_π (čárkovaně).

Funkce sinc je totožná se sférickou Besselovou funkcí prvního druhu nultého řádu

$$\text{sinc}(t) = j_0(t). \quad (\text{D.10.3})$$

Je znázorněna plnou čarou na obrázku D.1. Má maximum v nule a nulové body v násobcích π .

S funkcí sinc úzce souvisí další důležitá funkce – tzv. integrální sinus

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx. \quad (\text{D.10.4})$$

Dá se ukázat, že limita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Si}(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2. \quad (\text{D.10.5})$$

Jelikož sinc je funkce sudá, dostáváme z výše uvedeného vzorce též

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (\text{D.10.6})$$

Při změně měřítka ($x \rightarrow ax, a \neq 0$) platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{ax} dx = \frac{\pi}{|a|} = \begin{cases} \frac{\pi}{a} & \text{pro } a > 0 \\ -\frac{\pi}{a} & \text{pro } a < 0 \end{cases}, \quad (\text{D.10.7})$$

neboť pro $a < 0$ se při substituci mění směr integrace.

D.11 Gram-Schmidtova ortogonalizace posloupnosti.

Gram-Schmidtova ortogonalizace posloupnosti je procedura, při které se rutinním způsobem z neortogonální posloupnosti $\{x_n\} \in H$ vytvoří ortogonální posloupnost $\{y_n\} \in H$, případně její ortonormální varianta $\{e_n\} \in H$, $e_n = y_n \|y_n\|^{-1}$ a platí, že každý vektor x , který je lineární kombinací vektorů x_1, x_2, \dots, x_m , je také lineární kombinací y_1, y_2, \dots, y_m a naopak.

Předpokládejme, že již máme prvních $k-1$ (nenulových) ortogonálních vektorů $y_i \in H$, $(y_i, y_j) = 0$ při $i \neq j$. Pak vektor y_k vytvoříme pomocí vektoru x_k a lineární kombinace těchto $k-1$ ortogonálních vektorů

$$y_k = x_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} y_i,$$

kde koeficient a_{ik} se určí z podmínky ortogonality $(y_k, y_j) = 0$ pro $j < k$, tudíž pro něj dostaneme

$$\begin{aligned} (y_k, y_j) &= (x_k, y_j) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} (y_i, y_j) = (x_k, y_j) + a_{jk} \|y_j\|^2 = 0 \\ &\Downarrow \\ a_{jk} &= -(x_k, y_j) \|y_j\|^{-2}. \end{aligned}$$

Pro vytvoření k -tého vektoru tedy máme předpis

$$y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} (x_k, y_j) \frac{y_j}{\|y_j\|^2}. \quad (\text{D.11.1})$$

Pokud by tímto způsobem vznikl nulový vektor, vynechá se a dalším prvkem vytvářené ortogonální posloupnosti je první následující nenulový vektor.

Vzorec (D.11.1) je rekurentní, použitelný pro libovolné $k > 1$. První vektor ortogonální posloupnosti definujeme jednoznačně vztahem

$$y_1 = x_1.$$

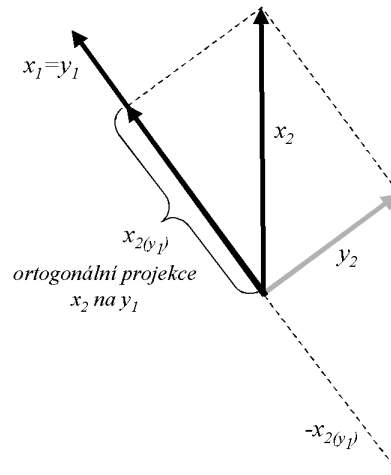
Výraz $(x_k, y_j) y_j \|y_j\|^{-2}$ (tj. sčítanec v sumě v (D.11.1)) představuje ortogonální projekci vektoru x_k na vektor y_j . Při proceduře ortogonalizace tedy vytváříme nový vektor y_k tak, že od vektoru x_k postupně odečítáme jeho ortogonální projekce na předcházejících $k-1$ ortogonálních vektorů $y_i, i < k$. Graficky je tento proces znázorněn pro $k=2$ na obrázku D.2.

Proces ortogonalizace je zcela formální a lze jej použít na libovolnou posloupnost z obecného Hilbertova prostoru, tedy i na posloupnost funkcí $\{v_i\}$ z $L_2(a, b)$. Odpovídající ortogonální posloupnost $\{u_i\}$ je pak dána předpisem

$$u_i(t) = v_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{u_j(t)}{\int_a^b |u_j(t)|^2 dt} \int_a^b v_i(t) \overline{u_j(t)} dt. \quad (\text{D.11.2})$$

Tento vzorec lze snadno zobecnit pro ortogonalizaci s vahovou funkcí $w(t)$, tedy na případ prostoru $L_2^w(a, b)$

$$u_i(t) = v_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{u_j(t)}{\int_a^b w(t) |u_j(t)|^2 dt} \int_a^b w(t) v_i(t) \overline{u_j(t)} dt. \quad (\text{D.11.3})$$



Obrázek D.2: Vytvoření y_2 z vektorů $x_1 = y_1$ a x_2 pomocí Gram-Schmidtovy ortogonalizace.

D.12 Schwarzova nerovnost.

Je-li H Hilbertův prostor s definovaným skalárním součinem a $x \in H$ a $y \in H$ dva prvky z tohoto Hilbertova prostoru, pak pro ně platí tzv. Schwarzova (někdy též zvaná Cauchy-Schwarzova) nerovnost:

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y). \quad (\text{D.12.1})$$

Odmocněním přejde tato nerovnost na tvar

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Důkaz je velmi jednoduchý. Předpokládejme, že $y \neq 0$ (pro $y = 0$ je (D.12.1) jistě splněno, platí přímo rovnost). Pak pro libovolné komplexní číslo α musí platit

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = (x - \alpha y, x - \alpha y) = (x, x) - \bar{\alpha}(x, y) - \alpha(y, x) + |\alpha|^2(y, y).$$

Tato nerovnost musí být splněna pro libovolné α , tedy i pro $\alpha = (x, y)/(y, y)$, pro které přejde výše uvedená nerovnost na tvar

$$0 \leq (x, x) - \frac{(y, x)}{(y, y)}(x, y) - \frac{(x, y)}{(y, y)}(y, x) + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} = (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}.$$

Tato nerovnost je splněna právě tehdy když platí (D.12.1), c.b.d.

Je-li prostorem H speciálně prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem, $L_2(-\infty, \infty)$, má Schwarzova nerovnost tvar

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{g(t)} dt. \quad (\text{D.12.2})$$

Schwarzovu nerovnost můžeme psát v různých variantních tvarech, které jsou důsledkem tvaru základního. Tak např. v $L_2(-\infty, \infty)$ platí take Schwarzova nerovnost

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} + g(t)\overline{f(t)} dt \right)^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\overline{g(t)} dt. \quad (\text{D.12.3})$$

Tuto nerovnost lze velmi snadno dokázat přímo, uvážíme-li, že pro libovolné reálné ϵ musí platit

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) + \epsilon g(t))\overline{(f(t) + \epsilon g(t))} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)} dt + \epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\overline{g(t)} dt + \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} + g(t)\overline{f(t)} dt. \end{aligned}$$

Aby byla tato nerovnost splněna, musí být diskriminant kvadratického výrazu na pravé straně menší nebo roven nule. Tato podmínka implikuje (D.12.3).

D.13 Taylorův rozvoj.

Podle Taylorovy věty, má-li funkce $f(t)$ v intervalu $\langle a, a+h \rangle$ (resp. $\langle a+h, a \rangle$ pro h záporné) spojité derivace do n -tého řádu včetně a v intervalu $(a, a+h)$ (resp. $(a+h, a)$) spojitou $(n+1)$ -ní derivaci, pak její hodnotu v bodě $a+h$ lze vyjádřit jako

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}, \quad (\text{D.13.1})$$

kde zbytek R_{n+1} lze vyjádřit jako

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Užitečným speciálním případem je např. rozvoj exponenciální funkce, jejíž všechny derivace jsou rovny původní funkci. Pro $a=0$ máme

$$\exp(h) = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}. \quad (\text{D.13.2})$$

D.14 Reziduová věta.

Reziduová věta umožňuje počítat některé integrály jednoznačné funkce $f(z)$ komplexní proměnné z , kde integrační cestou je uzavřená křivka C v komplexní rovině obklopující nejvýše konečný počet singulárních bodů z_1, z_2, \dots, z_n funkce $f(z)$. Nechť žádný singulární bod neleží na křivce C a funkce f je ve všech bodech křivky spojitá. Pak platí

$$\oint_C f(\xi) d\xi = i2\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k} f(z), \quad (\text{D.14.1})$$

kde $\text{Res}_{z_k} f(z)$ označuje tzv. reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_k .

Pro výpočet reziduí existují známé vzorce. Tak například, má-li analytická funkce $f(z)$ pól m -tého řádu v bodě $z = a \neq \infty$, je

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)].$$

Je-li speciálně a jednonásobným pólem, můžeme pro reziduum psát jednoduchý vzorec

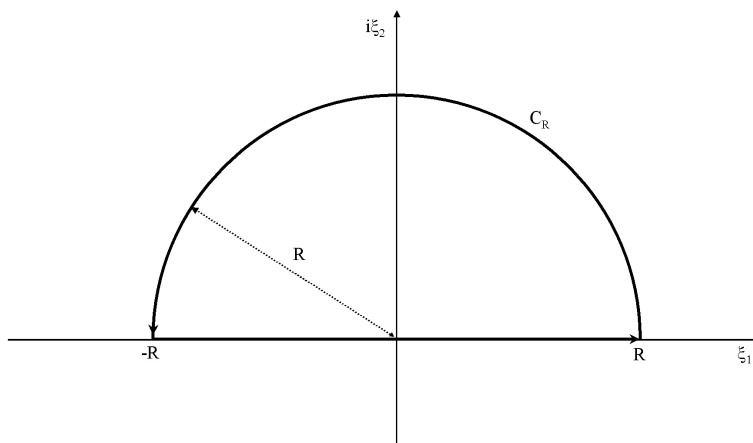
$$\operatorname{Res}_a f(z) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)f(z)]. \quad (\text{D.14.2})$$

Je-li navíc $f(z)$ možno psát jako podíl dvou funkcí holomorfních v bodě $a \neq \infty$, $f(z) = g(z)/h(z)$, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ máme

$$\operatorname{Res}_a f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}, \quad (\text{D.14.3})$$

kde čárkou v horním indexu značíme derivaci podle proměnné příslušné funkce.

Reziduovou větu lze s výhodou využít i pro výpočet určitých integrálů typu $\int_{-\infty}^{\infty} z$ reálné funkce f , pokud se křivka C skládá z intervalu $(-R, R)$ na reálné ose a polokružnice C_R o poloměru R a středu $[0, 0]$ v horní nebo dolní komplexní polorovině (viz obrázek D.3). Podmínkou této metody je ubývání integrandu při zvětšujícím se poloměru polokružnice tak, že $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(\xi) d\xi = 0$. Proto např. u integrandu ve tvaru podílu dvou polynomů požadujeme, aby polynom ve jmenovateli byl alespoň o dva řády vyšší než polynom v čitateli. Ubývání integrandu s rostoucím R posiluje také přítomnost exponenciálního faktoru, což je právě případ výpočtu přímé a inverzní Fourierovy transformace touto metodou.



Obrázek D.3: Příklad integrační cesty pro výpočet integrálu reálné funkce s využitím reziduové věty.

D.15 Besselovy funkce.

Besselovy funkce dělíme na funkce prvního a druhého druhu. Besselova funkce prvního druhu řádu (indexu) ν , $J_\nu(x)$, je definována jako

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

kde Γ -funkce je tzv. Eulerův integrál druhého druhu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-z)t^{z-1} dt, \quad \Re\{z\} > 0.$$

Řada v definici Besselovy funkce konverguje pro každé reálné ν a pro každé x .

Besselovy funkce jsou řešením tzv. Besselovy rovnice

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \quad (\text{D.15.1})$$

Zde ν představuje pro dané řešení index příslušné Besselovy funkce, $y = J_\nu(x)$.

Pro každé reálné ν má funkce J_ν spočetně mnoho kladných nulových bodů kladných kořenů $x_1 < x_2 < \dots$; $x_n \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$.

Pro celočíselné n platí

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Besselovy funkce J_n s celočíselným indexem představují koeficienty rozvoje tzv. vytvořující funkce

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m.$$

Speciálními volbami proměnné t můžeme z tohoto rozvoje dostat různé řady s Besselovými funkcemi, které mohou být užitečné v mnoha aplikacích. Tak například volbou $t = \exp(-i\phi)$ dostáváme rozvoj

$$\exp(-ix \sin(\phi)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) \exp(-im\phi).$$

Vynásobíme-li celou tuto rovnici faktorem $\exp(in\phi)$, kde n je celé číslo, dostaneme

$$\exp[i(n\phi - x \sin(\phi))] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) \exp(i(n-m)\phi). \quad (\text{D.15.2})$$

Integrujme celou rovnici pro ϕ na intervalu od 0 do 2π . S využitím ortogonality exponenciál na tomto intervalu dojdeme k integrálnímu vyjádření Besselovy funkce prvního druhu

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(n\phi - x \sin(\phi))] d\phi.$$

Speciálně pro $n = 0$ platí

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-ix \sin(\phi)] d\phi.$$

Různými substitucemi můžeme dále dospět k různým alternativním integrálním výrazům, např. pro $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$ máme

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-ix \cos(\phi)] d\phi, \quad (\text{D.15.3})$$

kde se substituce nedotkla mezí integrálu díky periodicitě integrandu.

Velmi známou integrální reprezentaci Besselovy funkce prvního druhu dostaneme též rozdělením (D.15.2) na reálnou a imaginární část. Např. pro reálnou část platí

$$\cos(n\phi - x \sin(\phi)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) \cos((n-m)\phi).$$

Integrujeme-li celou rovnici pro ϕ na intervalu od 0 do π a uvážíme-li

$$\int_0^{\pi} \cos[(n-m)\phi] d\phi = \left[\frac{1}{n-m} \sin[(n-m)\phi] \right]_0^{\pi} = \pi \delta_{nm},$$

dostaneme integrální reprezentaci

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[n\phi - x \sin(\phi)] d\phi$$

a speciálně pak pro $n = 0$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[x \sin(\phi)] d\phi, \quad (\text{D.15.4})$$

kde jsme též využili sudost funkce \cos .

Besselovy funkce splňují rekurentní vzorce

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)),$$

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu},$$

kde čárka v horním indexu značí derivaci podle argumentu funkce. Z těchto vztahů speciálně vyplývá pro $\nu = 0$

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad (\text{D.15.5})$$

a pro $\nu = 1$

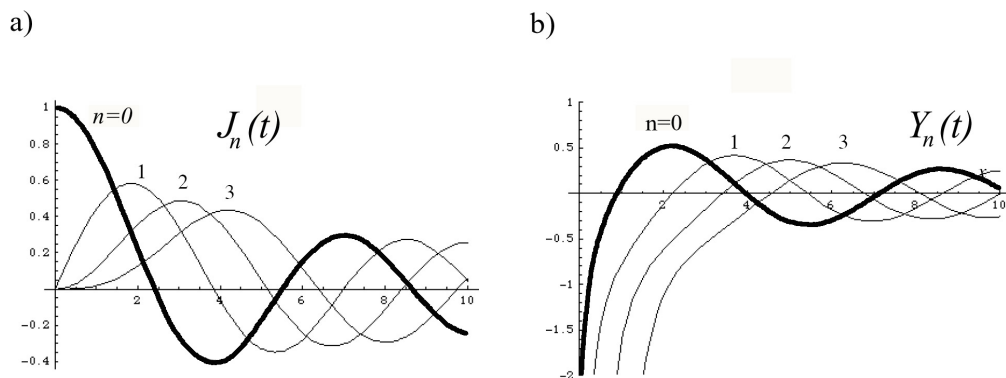
$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x). \quad (\text{D.15.6})$$

Besselovy funkce druhého druhu řádu (indexu) ν , $Y_\nu(x)$, jsou pro reálné neceločíselné ν definovány vztahem

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

zatímco pro celočíselný index $\nu = n$ vztahem

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$



Obrázek D.4: Besselovy funkce prvního (a) a druhého (b) druhu. Tučná křivka odpovídá $n = 0$.

Rovněž funkce $Y_\nu(x)$ jsou řešením rovnice (D.15.1).

Podobně jako v případě funkce J_ν i funkce Y_ν má pro každé reálné ν spočetně mnoho kladných kořenů $x_1 < x_2 < \dots; x_n \rightarrow \infty$ pro $n \rightarrow \infty$.

Pro celočíselné n opět platí

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x).$$

Obecným řešením rovnice (D.15.1) pro celočíselný index je $y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$, kde C_1 a C_2 jsou reálné konstanty. Besselovy funkce prvního i druhého druhu pro několik celočíselných indexů jsou znázorněny na obrázku D.4.

D.16 Konvoluce spojitých signálů.

Konvoluci můžeme chápat jako operátor, který ze dvou funkcí proměnné t , např. $f(t)$ a $g(t)$, vytvoří třetí funkci proměnné t , $h(t) = f(t) * g(t)$ (značení $f(t) * g(t)$ se tradičně používá, přesnější by však bylo psát $(f * g)(t)$). Většinou se však konvolucí rozumí přímo výsledná funkce $h(t)$. Tato funkce je definována jako integrál ze součinu f a g , přičemž jedna z těchto funkcí je v integrandu zrcadlově otočena kolem $t = 0$ a posunuta o t (viz obrázek D.5):

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau. \quad (\text{D.16.1})$$

Integrační meze se mohou lišit podle toho, jaký nosič mají funkce f a g . Jsou-li například obě funkce kauzální, tj. nenulové pro $t > 0$, integrujeme pouze od 0 do t . Jsou-li obě funkce finitní s dobou trvání T_f , respektive T_g , integrujeme od 0 do $t \leq T_f + T_g$.

Jsou-li funkce f a g absolutně integrovatelné, pak konvoluce je funkce spojitá a také absolutně integrovatelná. Je to operace komutativní

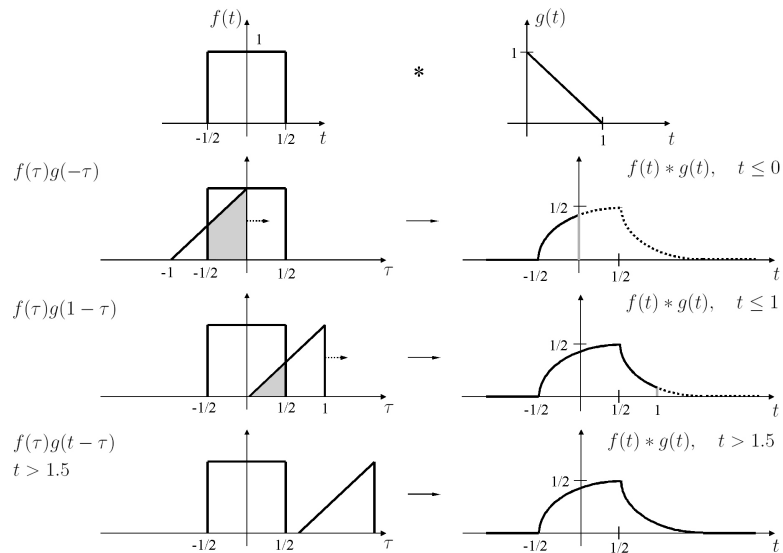
$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t),$$

asociativní

$$f(t) * (g_1(t) * g_2(t)) = (f(t) * g_1(t)) * g_2(t),$$

asociativní vzhledem ke skalárnímu násobení

$$a(f(t) * g(t)) = (af(t)) * g(t) = f(t) * (ag(t)),$$



Obrázek D.5: Grafické znázornění konvoluce dvou spojitých signálů.

a distributivní

$$f(t) * (g_1(t) + g_2(t)) = f(t) * g_1(t) + f(t) * g_2(t).$$

Konvoluce má zajímavou vlastnost vzhledem k derivaci podle proměnné t :

$$\frac{d}{dt}(f(t) * g(t)) = \frac{df(t)}{dt} * g(t) = f(t) * \frac{dg(t)}{dt}. \quad (\text{D.16.2})$$

Integrál z konvoluce dvou funkcí přes celý definiční obor je roven součinu integrálů těchto funkcí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * g(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) dt \right\} d\tau \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

D.17 Diracova δ funkce.

Diracova δ -funkce představuje tzv. zobecněnou funkci neboli distribuci. Je definována podmínkami

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \neq 0 \\ \infty & \text{pro } t = 0 \end{cases}$$

a vazební podmínkou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (\text{D.17.1})$$

Tato zobecněná funkce má tedy jednotkovou plochu. Můžeme si ji představit například jako limitu pravoúhelníkových funkcí

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{t}{a}\right),$$

kde

$$\Pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |t| > 1/2 \\ 1/2 & \text{pro } |t| = 1/2 \\ 1 & \text{pro } |t| < 1/2 \end{cases}.$$

Všechny pravoúhelníkové funkce v této limitě mají jednotkovou plochu, viz obrázek D.6. Z této názorné představy vidíme, že ve vazební podmínce (D.17.1) můžeme integrovat přes libovolný interval $\langle a, b \rangle$ obsahující 0.

Důležitou vlastností δ -funkce je její schopnost vyčíslit funkci $f(t)$ v daném bodě a . Integrál z $f(t)$ vynásobené δ -funkcí posunutou do bodu a je totiž

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = f(a), \quad (\text{D.17.2})$$

neboť posunutá δ -funkce je nulová všude mimo bod a a vzhledem k nekonečně krátkému trvání $f(t)$ může být tato vytknuta před integrál coby konstanta $f(a)$. Poslední rovnost je pak důsledkem vazební podmínky (D.17.1). Speciálně pro $a = 0$ dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0). \quad (\text{D.17.3})$$

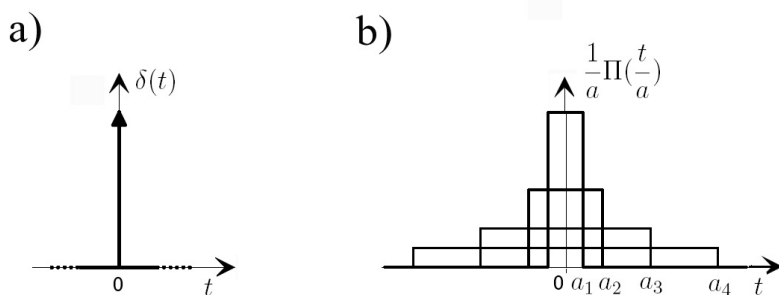
Výše uvedené dvě rovnice zůstanou v platnosti, i když budeme v integrandu místo $f(t)$ psát $f(a)$, respektive $f(0)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(t-a)dt = f(a) \Rightarrow f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \Rightarrow f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t). \end{aligned} \quad (\text{D.17.4})$$

Tyto vzorce mají striktní matematický význam pouze v integrálních výrazech! Přestože často formálně v úpravách píšeme δ -funkci samostatně (mimo integrál), vždy bychom měli mít na paměti, že příslušná operace s δ -funkcí dává správný výsledek až poté, co se δ -funkce octne v integrandu nějakého integrálu. V tomto kurzu to je nejčastěji Fourierův integrál.

Pro konvoluci s posunutou δ -funkcí máme

$$f(t) * \delta(t-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-a-\tau)d\tau = f(t-a)$$



Obrázek D.6: Diracova δ -funkce (a) jakožto limita pravoúhelníkových funkcí (b).

a speciálně pro $a = 0$

$$f(t) * \delta(t) = f(t).$$

Při změně měřítka v (D.17.1) dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) du \quad \Rightarrow \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t). \quad (\text{D.17.5})$$

Důležitý je vztah δ -funkce a Heavisideovy funkce $u(t)$, která je nespojitá v bodě $t = 0$. Uvažujme funkci

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}.$$

V bodě 0 máme limitu zleva $h(0^-) = 0$ a zprava $h(0^+) = 1$. V samotném bodě ji můžeme dodefinovat libovolnou hodnotou, většinou se volí $h(0) = 1/2$. Je zjevné, že $h(t) = u(t)$ a tedy δ -funkce je derivací Heavisideovy funkce

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t). \quad (\text{D.17.6})$$

D.18 Korelace a autokorelace spojitých signálů.

Korelace dvou spojitých signálů $f(t)$ a $g(t)$ je funkce $h(t) = f(t) \star g(t)$ (přesněji $h(t) = (f \star g)(t)$) definovaná předpisem¹⁶

$$h(t) = f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau)} g(\tau + t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau - t)} g(\tau) d\tau. \quad (\text{D.18.1})$$

Pro reálný signál $f(t)$ se tato funkce liší od konvoluce (D.16.1) pouze znaménkem v argumentu $g(t)$. Při autokorelaci se tedy žádná z korelovaných funkcí zrcadlově nepřeklápí – viz názorný obrázek D.7 korelace dvou reálných funkcí.

Na rozdíl od konvoluce není korelace komutativní. U korelace obecně záleží na pořadí korelovaných funkcí.

$$f(t) \star g(t) \neq g(t) \star f(t), \quad g(t) \star f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\tau)} f(\tau + t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\tau - t)} f(\tau) d\tau.$$

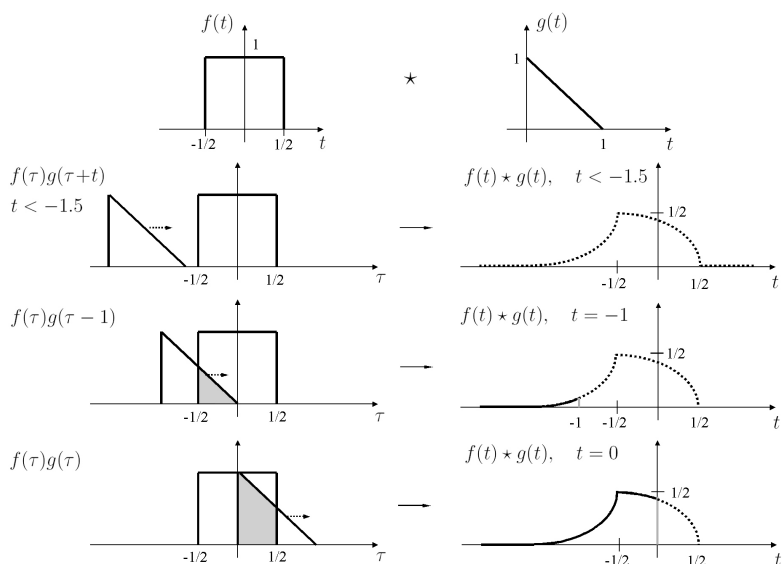
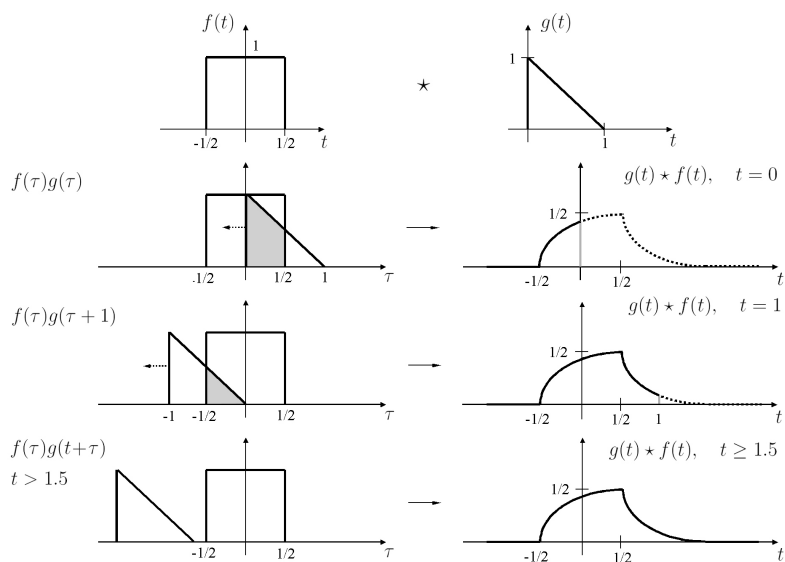
Při korelaci funkcí $g(t) \star f(t)$ se tedy oproti konvoluci funkce $g(t)$ nejen zrcadlově nepřetáčí, ale navíc se posouvá přes $f(t)$ opačným směrem – viz obrázek D.8. Platí, že je-li $h(t) = f(t) \star g(t)$, je

$$g(t) \star f(t) = \overline{h(-t)}.$$

Z porovnání definic konvoluce a korelace ((D.16.1) a (D.18.1)) je zřejmé, že platí

$$f(t) \star g(t) = \overline{f(-t)} * g(t). \quad (\text{D.18.2})$$

¹⁶Různí autoři definují korelaci dvou funkcí různě. Často se vyskytuje definice, kde v integrandu je komplexně sdružená funkce g , případně role funkcí f a g je zcela prohozena.

Obrázek D.7: Ukázka korelace reálných funkcí $h(t) = f(t) \star g(t)$.Obrázek D.8: Ukázka korelace reálných funkcí $h(t) = g(t) \star f(t)$.

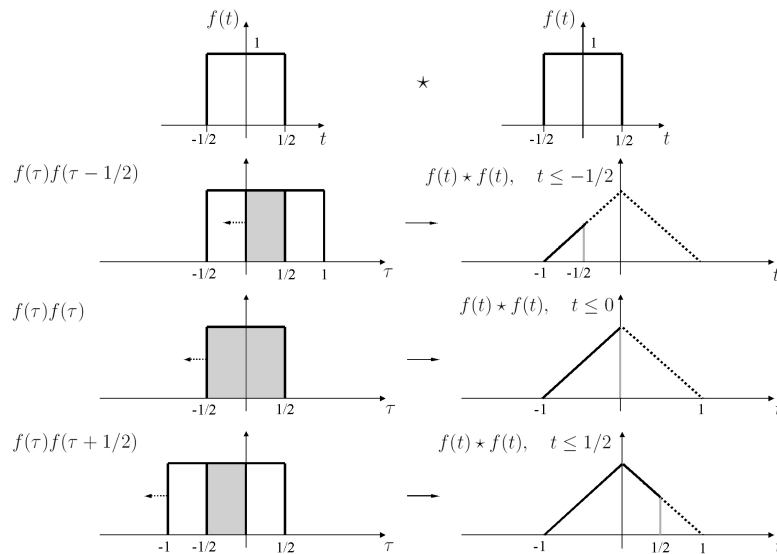
Ve speciálním případě, kdy $f(t)$ je reálná a sudá, platí rovnost $f \star g = f \star g$, viz též srovnání obrázků D.5 a D.7.

Autokorelace je korelace funkce sama se sebou. Je definována integrálem

$$f(t) \star f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau)} f(\tau + t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\tau - t)} f(\tau) d\tau = \overline{f(-t)} \star f(t). \quad (\text{D.18.3})$$

Na jednoduchém příkladu pravoúhelníkové funkce je tato operace znázorněna na obrázku D.9. Jelikož pravoúhelníková funkce je reálná sudá, je její autokorelace rovna vlastně konvoluci

dvou stejných (v daném případě pravoúhelníkových) funkcí, někdy nazývané autokonvoluce.



Obrázek D.9: Ukázka autokorelace na příkladu pravoúhelníkové funkce.

Jak je zřejmé z názorného obrázku i z definičního integrálu, autokorelace reálné funkce je vždy sudou funkcí proměnné t . Navíc má vždy maximum v bodě 0, neboť při nulovém vzájemném posunu dvou identických funkcí je plocha pod křivkou odpovídající jejich součinu (kvadrát funkce) největší. Pro komplexní funkci f rovněž platí, že autokorelace má maximum v nule a dále $f(-t) \star f(-t) = f(t) \star f(t)$.

Poznamenejme, že autokorelace některých speciálních signálů je identicky rovna původnímu signálu (např. δ -funkce).

D.19 Hilbertova transformace

Hilbertova transformace je integrální transformace, která reálné funkci reálné proměnné, např. $f(t)$, přiřazuje obecně jinou reálnou funkci téže reálné proměnné, $h(t)$. Nejedná se tedy o přiřazení z jedné oblasti do druhé (např. z časové do spektrální jako je tomu u Fourierovy transformace). Přiřazení je definováno následujícím předpisem

$$h(t) = \mathcal{H}(f(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{t - \xi} d\xi = \frac{1}{\pi t} * f(t), \quad (\text{D.19.1})$$

kde $*$ značí konvoluci, viz D.16. Hilbertova transformace představuje tedy svého druhu lineární časově invariantní filtr působící na funkci $f(t)$, jehož impulzní odezva je $1/\pi t$ (viz kapitola 3.15).

Integrand v (D.19.1) obsahuje singularitu bodě $t = \xi$, proto je nutné integrál chápat ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty

$$h(t) = \mathcal{H}(f(t)) = \frac{1}{\pi} \mathcal{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{t - \xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{f(\xi)}{t - \xi} d\xi + \int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{f(\xi)}{t - \xi} d\xi \right\}. \quad (\text{D.19.2})$$

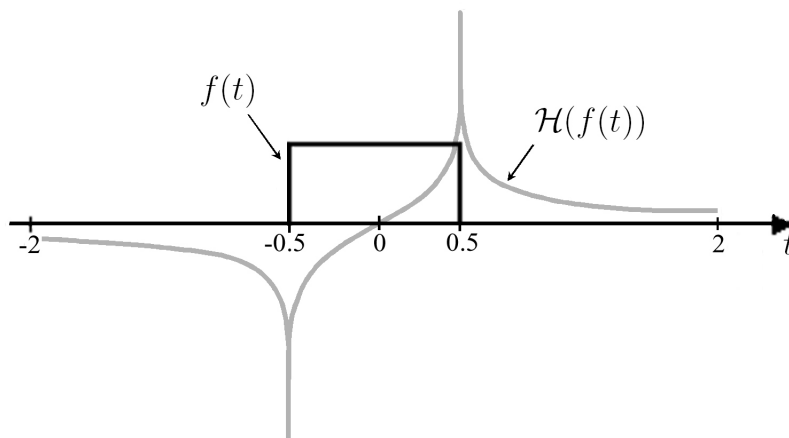
Inverzní Hilbertovu transformaci definujeme obdobným předpisem, avšak s opačným znaménkem

$$f(t) = \mathcal{H}^{-1}(h(t)) = \frac{1}{\pi} \mathcal{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{\xi - t} d\xi = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{h(\xi)}{\xi - t} d\xi + \int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{h(\xi)}{\xi - t} d\xi \right\} = -\frac{1}{\pi t} * h(t). \quad (\text{D.19.3})$$

Funkce $f(t)$ a $h(t)$, odpovídající výše uvedeným definicím, nazýváme Hilbertův pár. Pro některé funkce (případně distribuce) je snadné spočítat Hilbertovu transformaci přímo z definice výpočtem příslušného integrálu. Tak například snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\sin(t)) &= -\cos(t), & \mathcal{H}(\cos(t)) &= \sin(t), & \mathcal{H}(\delta(t)) &= \frac{1}{\pi t}, & \mathcal{H}(\text{const}) &= 0, \\ \mathcal{H}(\Pi(t)) &= \frac{1}{\pi} \ln |(t + 1/2)/(t - 1/2)| & \text{apod.} \end{aligned} \quad (\text{D.19.4})$$

Pro jiné funkce je třeba příslušné integrály vyčíslit numericky anebo využít k výpočtu Hilbertovy transformace Fourierovo spektrum (odstavec 3.12). Obrázek D.10 ukazuje příklad Hilbertovy transformace pravoúhelníkové funkce. Obrázek demonstruje obecné chování Hilbertovy transformace: v bodech, kde je transformovaná funkce spojitá, nabývá transformace relativně nízkých hodnot, avšak v okolí bodu nespojitosti vykazuje prudký nárůst (v bodě nespojitosti je logaritmická singularita). Obrázek také ukazuje, že Hilbertova transformace obecně nezachovává kauzalitu funkce: vstupuje-li do transformace funkce kauzální (nenulová od $t = 0$ případně od jistého t_0), výstupem z transformace je funkce nekauzální.



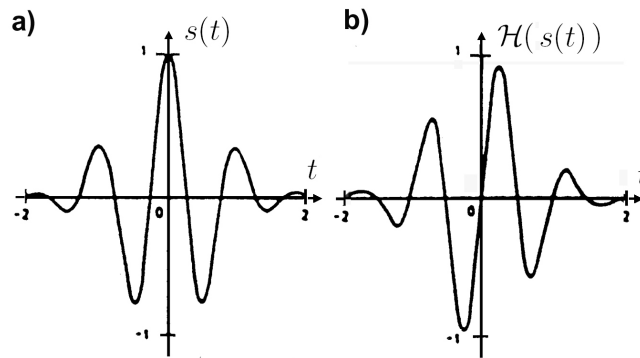
Obrázek D.10: Hilbertova transformace pravoúhelníkové funkce.

Další ukázkou Hilbertova páru poskytuje obrázek D.11. V levé části (a) ukazuje tzv. Gáborův signál

$$s(t) = \exp[-(2\pi f_M t/\gamma)^2] \cos(2\pi f_M t + \nu).$$

Jedná se o kosinus s gaussovskou obálkou, kde parametr γ kontroluje šířku této obálky, f_M je převládající frekvence a ν fázový posun. V pravé části (b) obrázek ukazuje odpovídající Hilbertovu transformaci. Z obrázku můžeme usoudit, že pro signály s harmonickým nosičem¹⁷ přenásobeným hladkou dostatečně širokou obálkou (vzhledem k $1/f_M$), se tato obálka v Hilbertově transformaci přibližně zachovává a harmonický nosič se transformuje na svůj Hilbertovský obraz, tedy v našem případě \cos na $-\sin$.

¹⁷Nosičem se zde nemyslí interval, na kterém je signál nenulový, ale funkce pod obálkou.



Obrázek D.11: Gáborův signál (a) s parametry $f_M = 2.5, \nu = 0, \gamma = 6$ a jeho Hilbertova transformace (b).

Shrňme nejdůležitější vlastnosti Hilbertovy transformace:

$$f(at + b) \longleftrightarrow h(at + b) \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (\text{D.19.5})$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}, \quad (\text{D.19.6})$$

$$\frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow \frac{dh(t)}{dt}, \quad (\text{D.19.7})$$

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow h_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * h_2(t), \quad (\text{D.19.8})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(\tau) d\tau = 0, \quad (\text{D.19.9})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (h(t))^2 dt, \quad (\text{D.19.10})$$

kde $h(t) = \mathcal{H}(f(t))$ (popřípadě $h_i(t) = \mathcal{H}(f_i(t)), i = 1, 2$). Další vlastnosti Hilbertovy transformace, které souvisejí s transformací Fourierovou, jsou diskutovány v podkapitole 3.12.

Poznamenejme, že ortogonalita signálu a jeho Hilbertovy transformace (D.19.9), spolu s chováním Hilbertovy transformace vůči derivaci (D.19.7) má své důsledky pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu: je-li $s(t)$ řešením takové rovnice, $h(t) = \mathcal{H}(s(t))$ je druhým lineárně nezávislým řešením.

D.20 Analytický signál

Analytický signál $s^A(t)$ je komplexní funkce reálné proměnné, jejíž reálná a imaginární část jsou ve vztahu Hilbertovy transformace (viz dodatek D.19). Nejedná se tedy o analytickou funkci známou z analýzy funkcí komplexní proměnné.

Definujeme analytický signál odpovídající reálnému signálu $s(t)$

$$s^{(A)}(t) = s(t) + i\mathcal{H}(s(t)). \quad (\text{D.20.1})$$

Znaménko před imaginární jednotkou souvisí se znaménkem v exponentu v definici Fourierovy transformace a se znaménkem u přímé Hilbertovy transformace. Znaménko „+“ je konzistentní

s definicí Fourierovy a Hilbertovy transformace používané v tomto učebním textu; jiní autoři mohou analytický signál definovat se znaménkem „-“.

Jako příklad uveďme analytický signál odpovídající kosinu, sinu a δ -funkci

$$\cos^{(A)}(t) = \cos(t) + i\mathcal{H}(\cos(t)) = \cos(t) + i \sin(t) = \exp(it), \quad (\text{D.20.2})$$

$$\sin^{(A)}(t) = \sin(t) + i\mathcal{H}(\sin(t)) = \sin(t) - i \cos(t) = i \exp(-it), \quad (\text{D.20.3})$$

$$\delta^{(A)}(t) = \delta(t) + i\mathcal{H}(\delta(t)) = \delta(t) + i\frac{1}{\pi t}. \quad (\text{D.20.4})$$

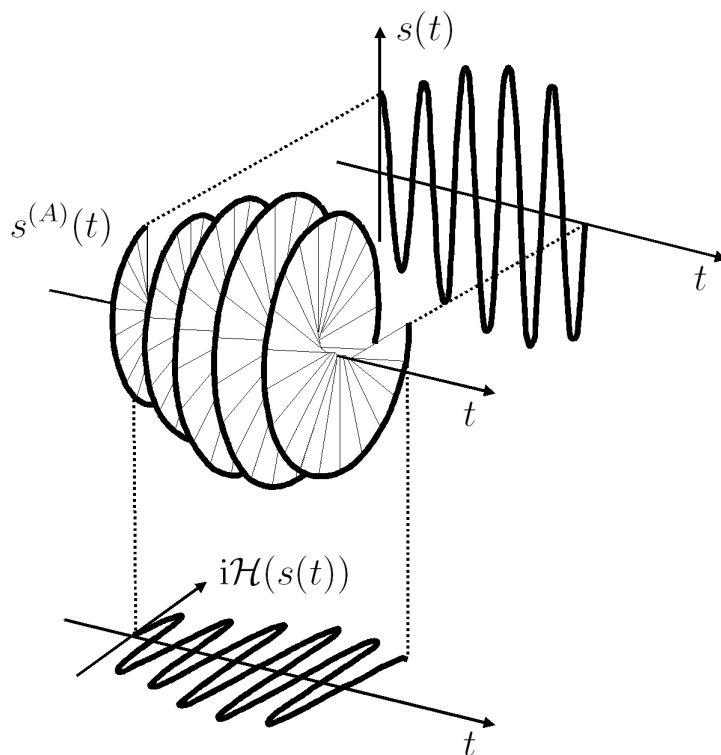
Analytický signál odpovídající δ -funkci může též posloužit k následujícímu vyjádření obecného analytického signálu

$$s^{(A)}(t) = \left(\delta(t) - \frac{i}{\pi t} \right) * s(t) = \delta^{(A)}(t) * s(t).$$

Z této reprezentace analytického signálu je také okamžitě vidět, že analytický signál posunutý o nějaké reálné t_0 odpovídá původnímu signálu se stejným posunem. Platí dokonce

$$s^{(A)}(at - t_0) = \delta^{(A)}(t) * s(at - t_0), \quad (\text{D.20.5})$$

kde a je libovolná nenulová reálná konstanta. Tato vlastnost analytického signálu je též zřejmá z vlastností Hilbertovy transformace, viz dodatek D.19.



Obrázek D.12: Analytický signál $s^{(A)}(t)$ odpovídající reálnému signálu $s(t) = E(t) \sin(t)$.

Obrázek D.12 ukazuje názorně analytický signál $s^{(A)}(t)$ odpovídající sinu přenásobenému pomalu se měnící obálkou (vzhledem k periodě sinu) $E(t)$.

Shrňme některé další vlastnosti analytického signálu:

$$\frac{ds^{(A)}(t)}{dt} = \left(\frac{ds(t)}{dt} \right)^{(A)}, \quad (\text{D.20.6})$$

$$[s_1(t) * s_2(t)]^{(A)} = s_1^{(A)}(t) * s_2(t) = s_1(t) * s_2^{(A)}(t), \quad (\text{D.20.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (s^{(A)}(t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(s^{(A)}(t))^2} dt = 0, \quad (\text{D.20.8})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^{(A)}(t) \overline{s^{(A)}(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (s^2(t) + (\mathcal{H}(s(t)))^2) dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}(s(t)))^2 dt. \quad (\text{D.20.9})$$

Fourierovo spektrum analytického signálu je diskutováno v odstavci 3.13.

D.21 Obálka jednoparametrické soustavy křivek

Nalezení obálky (obalové křivky) jednoparametrické soustavy křivek v rovině patří mezi standardní úlohy diferenciální geometrie. Nechť je jednoparametrický systém rovinných křivek definován implicitní rovnicí

$$F(x, y, \alpha) = 0,$$

kde α je parametr nezávislý na x a y nabývající spojitě všech hodnot z nějakého intervalu. Funkce F je spojitá a má spojitou první a druhou derivaci podle α . Jedna konkrétní křivka parametrického systému, odpovídající parametru α_0 , je pak dána implicitní rovnicí $F(x, y, \alpha_0) = 0$.

Určují-li rovnice

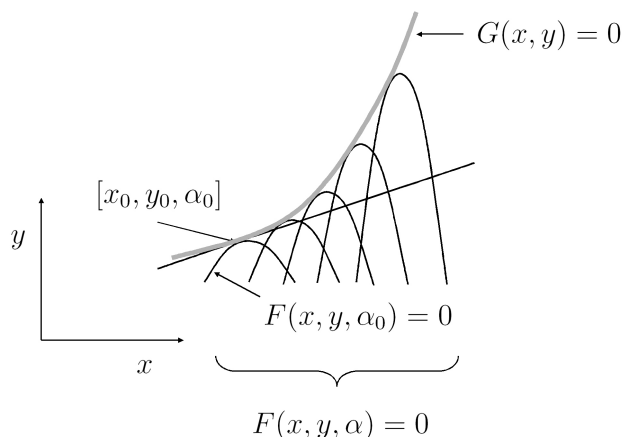
$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (\text{D.21.1})$$

pro každé α bod, nazýváme takový bod charakteristickým (mezním) bodem soustavy křivek. Je-li možno z (D.21.1) eliminovat α a výsledek této eliminace je dán rovnicí

$$G(x, y) = 0, \quad (\text{D.21.2})$$

představuje (D.21.2) implicitní rovnici tzv. obalové křivky soustavy. Obalová křivka je tedy tvořena mezními body. V každém bodě obálky (tj. v každém mezním bodě) $[x_0, y_0, z_0]$, pro který $\partial^2 F / \partial \alpha^2 \neq 0$, se obálka dotýká některé křivky soustavy (mají tam společnou tečnu). Obálka se tedy dotýká v jednom nebo více bodech každé z křivek soustavy a každý bod obálky je dotykovým bodem s některou křivkou soustavy. Situaci ilustruje obrázek D.13.

Je třeba zdůraznit, že při hledání obálky podle (D.21.1) provádíme derivaci podle α . Kdybychom jednu každou křivku soustavy popsali explicitní rovnicí $y = f_\alpha(x)$, neurčujeme lokální extrém této funkce (který by odpovídal podmínce $df_\alpha/dx = 0$), jako je vidět i na obrázku D.13.



Obrázek D.13: Obalová křivka (šedá plná čára) jednoparametrické soustavy křivek v rovině (x, y) .

D.22 Diskrétní ortogonalita diskrétních exponenciál

V tomto odstavci zkoumejme sumu

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i2\pi n \frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i2\pi \frac{k}{N}\right)^n, \quad (\text{D.22.1})$$

kde k je celé číslo. Jedná se vlastně o geometrickou řadu typu

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

s $a = 1$ a kvocientem

$$q = \exp\left(i2\pi \frac{k}{N}\right) \equiv w_N^k, \quad w_N = \exp\left(i2\pi \frac{1}{N}\right),$$

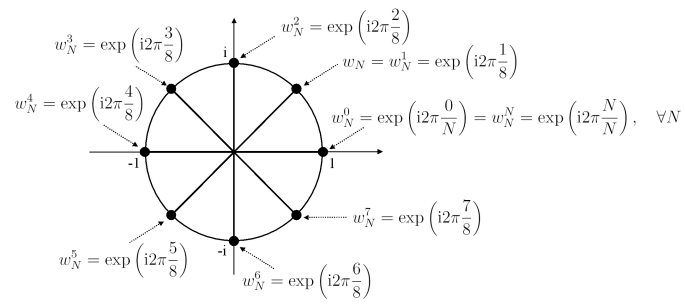
kde w_N je primitivní kořen n -té odmocniny z 1 (neboť $\exp(i2\pi) = 1$). Veličiny w_N^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, jsou také komplexními odmocninami z jedničky:

$$\left(\exp\left(i2\pi \frac{k}{N}\right)\right)^N = \exp(i2\pi k) = 1.$$

Graficky je lze znázornit, rozdělíme-li kružnici v komplexní rovině, o poloměru 1 a středu $(0,0)$, na N stejných dílů počínaje bodem $(1,0)$. Obrázek D.14 poskytuje příklad kořenů N -té odmocniny z 1 pro $N = 8$.

Sčítance řady (D.22.1) jsou tedy $w_N^{nk} = (w_N^k)^n$, $n, k = 0, 1, \dots, N-1$. Je-li $k = 0$, jsou všechny sčítance v sumě rovny jedné a jejich součet je tedy N . Pro $k \neq 0$ dostaneme pro částečný součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i2\pi \frac{k}{N}\right)^n = \frac{1 - \exp(i2\pi k)}{1 - \exp(i2\pi k/N)} = 0,$$

Obrázek D.14: Osm komplexních kořenů $\sqrt[8]{1}$.

neboť čitatel je roven 0. Celkově tedy

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(i2\pi n \frac{k}{N}\right) = \begin{cases} N & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k \neq 0 \end{cases} \quad (\text{D.22.2})$$

Literatura

- Bezvoda, V., Ježek, J., Saic, S., Segeth, K.** (1988), *Dvojrozměrná diskrétní Fourierova transformace a její použití I., Teorie a obecné užití*, SPN, Praha
- Bracewell, R.N.** (1986), *The Fourier transform and its applications* (2. vydání), McGraw-Hill, New York
- Brokešová, J.** (1996), Construction of ray synthetic seismograms using interpolation of travel times and ray amplitudes, *PAGEOPH*, **148**, 503 – 538
- Červený, V.** (1983), *Spektrální analýza v geofyzice I.*, SPN, Praha
- Gonzales, R.C., a Woods, R.E.** (2008) *Digital Image Processing* (3. vydání), Prentice-Hall, New Jersey
- Kufner, A., a Kadlec, J.** (1969) *Fourierovy řady*, Academia, Praha
- Papoulis, A.** (1977), *Signal analysis*, McGraw-Hill, New York
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., and Flannery, B.P.** (1996) *Numerical Recipes in Fortran 90* (2. vydání), Cambridge University Press, Cambridge
- Rabiner, L.R., a Gold, B.** (1975) *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, New Jersey

Seznam nejdůležitějších symbolů

Označení veličin a množin

a_n	Koeficient trigonometrické Fourierovy řady
$A(t)$	Funkce charakterizující okrajovou úlohu
$A(f)$	Sudá část spojitého spektra
b_n	Koeficient trigonometrické Fourierovy řady
$B(t)$	Funkce charakterizující okrajovou úlohu
$B(f)$	Lichá část spojitého spektra
c_n	Koeficient obecné Fourierovy řady
C	Množina komplexních čísel
C_R	Půlkružnice v metodě konturních integrálů
$c_{n,m}$	Koeficient obecné 2D Fourierovy řady
$\{e_i\}$	Ortonormální posloupnost v Hilbertově prostoru
$\{e_{mn}\}$	Ortonormální posloupnost v 2D Hilbertově prostoru
$e(t)$	Sudý spojitý signál v časové oblasti
$e(n), e_n$	Sudý diskrétní signál v časové oblasti
$E(f), E(\omega)$	Sudé spojité spektrum
$E(n), E_n$	Sudé diskrétní spektrum
f	Obyčejná frekvence spojitého signálu
F	Obyčejná frekvence spojitého spektra diskrétního signálu
$f_i(t), f_i(n)$	Vstup filtru
$f_o(t), f_o(n)$	Výstup filtru
f_I	Okamžitá frekvence
$\langle f \rangle$	Těžiště ve spektrální oblasti
$\langle f^2 \rangle$	Střední kvadratická odchylka ve spektrální oblasti
H	Hilbertův prostor
i	Imaginární jednotka
$i(t)$	Impulzní odezva
J_n	Besselova funkce prvního druhu řádu n
L	Obecný lineární operátor
$L_1(a, b)$	Hilbertův prostor funkcí integrovatelných na (a, b)
$L_2(a, b)$	Hilbertův prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem na (a, b)
$L_2^w(a, b)$	Vahový Hilbertův prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem na (a, b) s vahou $w(t)$
N	Perioda diskrétního signálu

$o(t)$	Lichý spojitý signál v časové oblasti
$o(n), o_n$	Lichý diskretní signál v časové oblasti
$O(f), O(\omega)$	Liché spojité spektrum
$O(n), O_n$	Liché diskretní spektrum
P_n	Obecný ortogonální polynom stupně n
P_n^m	Přidružená Legendrova funkce
q	Radius v polárních souřadnicích ve spektrální oblasti
r	Radius v polárních nebo sférických souřadnicích v časové oblasti
R	Množina reálných čísel nebo poloměr kružnice v metodě konturních integrálů
\mathbf{R}	Matice rotace
R_n	Chyba částečného součtu Fourierovy řady
$s(t)$	Spojité signál v časové oblasti
$s^{(A)}(t)$	Analytický signál v časové oblasti
$\tilde{s}(t)$	Spojité periodický signál v časové oblasti
$s(n), s_n$	Diskretní signál v časové oblasti
$\tilde{s}(n), \tilde{s}_n$	Diskretní periodický signál v časové oblasti
$S(f), S(\omega)$	Spojité spektrum
$\tilde{S}(f), \tilde{S}(\omega)$	Spojité periodické spektrum
$S(n)$	Diskretní spektrum
S_n	Diskretní spektrum, koeficient exponenciální Fourierovy řady
$\tilde{S}(n), \tilde{S}_n$	Diskretní periodické spektrum
t	Proměnná v časové oblasti
$\langle t \rangle$	Těžiště v časové oblasti
$\langle t^2 \rangle$	Střední kvadratická odchylka v časové oblasti
T	Perioda spojitěho signálu v časové oblasti
$T(f), T(\omega)$	Přenosová funkce
ω	Úhlová frekvence
$u(t)$	Heavisidova funkce nebo vlastní funkce okrajové úlohy
$u_n(t)$	Vlastní funkce okrajové úlohy
$w(t)$	Vahová funkce
w_N	Primitivní kořen N -té odmocniny z 1
W_s	Ekvivalentní šířka signálu v časové oblasti
W_S	Ekvivalentní šířka spektra
\mathbf{W}	Vandermondova matice (matice DFT)
Y_n	Besselova funkce druhého druhu řádu n
$Y_{n(C)}^m, Y_{n(S)}^m$	Sférické harmonické funkce
Z	Množina celých čísel
$\delta(t)$	Diracova distribuce (δ -funkce)
$\delta(n)$	Diskretní Diracova distribuce (δ -funkce)
δ_{nm}	Kroneckerovo delta
Δt	Časový krok nebo časová disperze
$\Delta_a s(t)$	Konečná diference funkce $s(t)$ na intervalu délky a

Δf	Frekvenční krok nebo frekvenční disperze
λ, λ_n	Vlastní číslo okrajové úlohy
Λ	Trojúhelníková funkce
ϕ	Úhlová souřadnice
$\Phi(f), \Phi(\omega)$	Spojitě fázové spektrum
$\Phi_n(f), \Phi_n(\omega)$	Diskrétní fázové spektrum
$\{\Phi_n(t)\}$	Obecná úplná soustava ortonormálních funkcí na $L_2(a, b)$, případně $L_2^w(a, b)$
$\Psi(t)$	Fázogram (fáze analytického signálu)
$\{\Psi_n(t)\}$	Obecná úplná soustava ortonormálních funkcí na $L_2(c, d)$, případně $L_2^w(c, d)$
Π	Pravoúhelníková funkce
ω	Úhlová frekvence spojitěho signálu
Ω	Úhlová frekvence spojitěho spektra diskrétního signálu
$\langle \omega \rangle$	Těžiště ve spektrální oblasti (v úhlové frekvenci)
σ	Směrodatná odchylka
σ^2	Variance
θ	Úhlová souřadnice

Symbolické vyjádření operací

$\bar{s}(t), \bar{s}_n$	Komplexně sdružený signál k signálu $s(t), s_n$
$(f(t), g(t)), \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	Skalární součin funkcí $f(t)$ a $g(t)$ a vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y} ¹⁸
$f(t) * g(t)$	Konvoluce funkcí $f(t)$ a $g(t)$ (ve smyslu $(f * g)(t)$)
$f(t) \star g(t)$	Korelace funkcí $f(t)$ a $g(t)$ (ve smyslu $(f \star g)(t)$)
$f_n \odot g_n$	Cyklická konvoluce funkcí f_n a g_n (ve smyslu $(f \odot g)_n$)
$f_n \otimes g_n$	Cyklická korelace funkcí f_n a g_n (ve smyslu $(f \otimes g)_n$)
$s'(t)$	Derivace funkce $s(t)$ podle argumentu t
\mathbf{t}'	Transpozice vektoru \mathbf{t}
$ s(t) $	Modul komplexní funkce $s(t)$, absolutní hodnota reálné funkce $s(t)$
$\ s(t)\ $	Norma (velikost) $s(t)$
$\rho(f(t), g(t))$	Vzdálenost $f(t)$ a $g(t)$
$n!$	n faktoriál
mod	Modulo
\mathcal{DFT}	Diskrétní Fourierova transformace
\mathcal{F}	Fourierova transformace
\mathcal{F}_C	Fourierova kosinová transformace
\mathcal{F}_S	Fourierova sinová transformace
\mathcal{H}	Hilbertova transformace
\Im	Imaginární část
\Re	Reálná část
Res	Residuum

¹⁸Vektory alternativně značeny též x, y a jejich skalární součin (x, y)