

Slapový vývoj oběžné dráhy

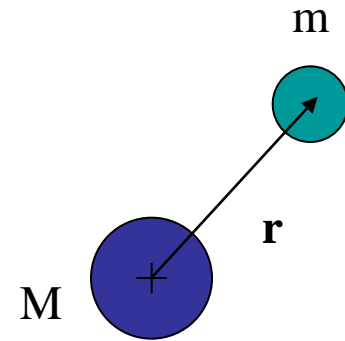
Michaela Káňová, Marie Běhounková
Geodynamický seminář 20. 5. 2015

Problém dvou těles

v nebeské mechanice:

dva hmotné body + gravitační síla = **Keplerova úloha**

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} - \mathcal{G}\frac{mM}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{0}} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad \text{keplerovská rychlost} \\ \dot{\mathbf{v}} - \mathcal{G}\frac{M}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$



ve vázaném systému je řešením stacionární eliptická dráha

trojice ODR druhého řádu \rightarrow **6 nezávislých integračních konstant**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$$

hodnota integračních konstant c_j jednoznačně určena počátečními podmínkami

Význam integračních konstant

- integrační konstanty voleny v závislosti na typu úlohy, kterou se chceme zabývat

popis tvaru dráhy: **Keplerovy elementy** ($a, e, i, \Omega, \omega, t_0$)

hlavní poloosa

výstřednost (excentricita)

sklon (inklinace)

délka výstupného uzlu

argument pericentra

čas průchodu pericentrem

popis dynamiky systému: **kanonické elementy** ($M_z, M, E, \Omega, \omega, t_0$)

z-složka momentu hybnosti

velikost momentu hybnosti

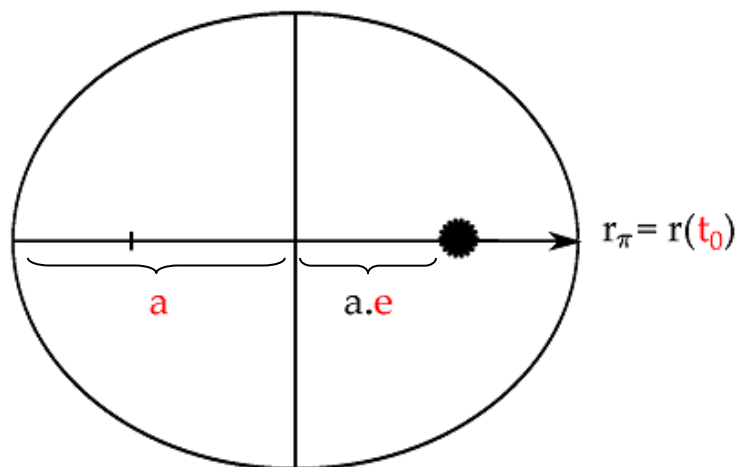
energie soustavy

délka výstupného uzlu

argument pericentra

čas průchodu pericentrem

Keplerovy elementy



Tvar dráhy:

a - hlavní poloosa

e - výstřednost

Pozice planety:

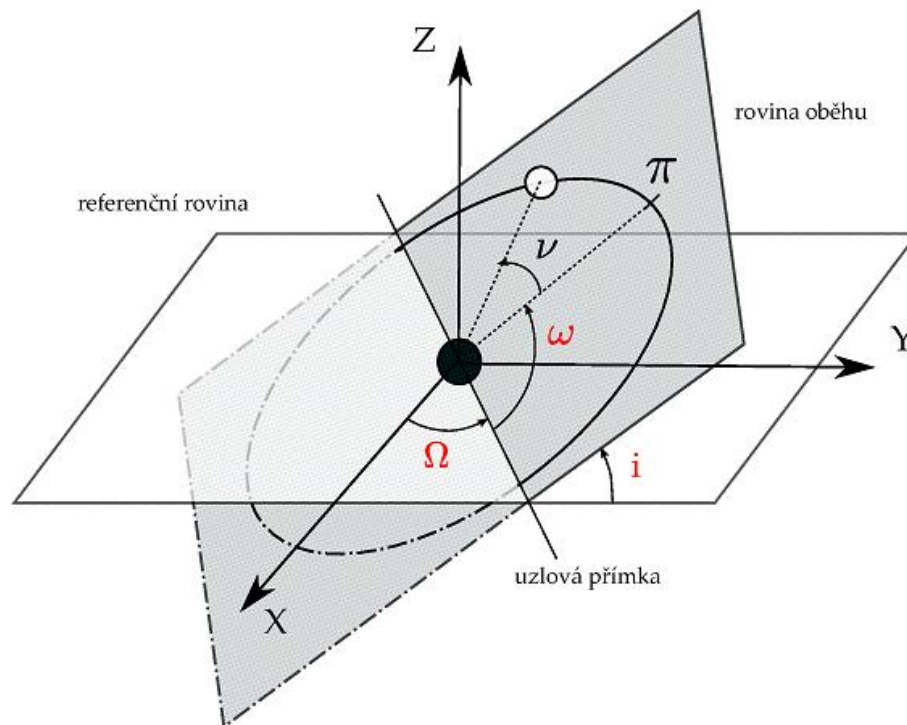
t_0 - čas průchodu pericentrem

Orientace dráhy:

i - inklinace (sklon)

Ω - délka výstupného uzlu

ω - argument pericentra



Zahrnutí poruchy

- řešením problému dvou těles je stacionární eliptická dráha
- časový vývoj soustavy jen díky „poruše“

Co představuje poruchu:

ostatní tělesa v soustavě

atmosféra nebo prachoplynný disk

nesféricita hvězdy (rotační zploštění)

nesféricita planety

$$\ddot{\mathbf{r}} - \mathcal{G} \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{0}$$



$$\ddot{\mathbf{r}} - \mathcal{G} \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{f}$$

- rovnici s nenulovou pravou stranou řešíme metodou **variace konstant**
→ $a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), t_0(t)$ obecně $c_j(t)$

Variace konstant

hledáme řešení rovnice $\ddot{\mathbf{r}} - \mathcal{G} \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{f}$, známe řešení rovnice $\ddot{\mathbf{r}} - \mathcal{G} \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = 0$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} - \mathcal{G} \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{f}$$

+ ansatz

$$\mathbf{r} = f(t, c_j(t))$$

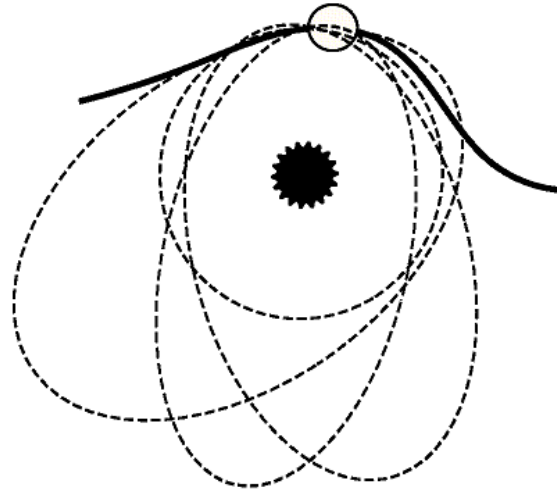
$$\mathbf{v} = g(t, c_j(t))$$

rovnice řešíme pro $c_j(t)$



$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f}{\partial c_j} \dot{c}_j = \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial g}{\partial c_j} \dot{c}_j - \mathcal{G} \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{f}$$



Díky ansatzu je pro každé t
řešením keplerovská dráha
- **ale která?**

Oskulační elementy

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f}{\partial c_j} \dot{c}_j = \mathbf{v}$$

keplerovská rychlost
(tečná k elipse)

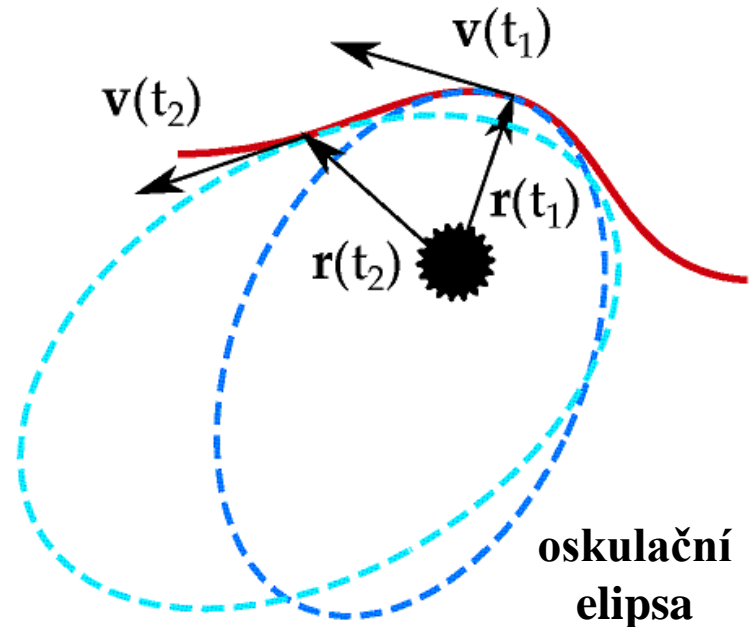
okamžitá rychlost
(tečná k trajektorii)

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial g}{\partial c_j} \dot{c}_j - \mathcal{G} \frac{M}{r^3} \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{f}$$

Nechť je skutečná trajektorie v každém okamžiku aproximována keplerovskou dráhou, která je k ní tečná.

Podmínky oskulace

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial f}{\partial c_j} \dot{c}_j = 0 \quad \sum_{j=1}^6 \frac{\partial g}{\partial c_j} \dot{c}_j = \varepsilon \mathbf{f}$$



parametry $c_j(t)$ vyhovující této vazbě = oskulační elementy

Poruchové rovnice

- za parametry $c_j(t)$ budeme nadále volit Keplerovy elementy
- úprava podmínek oskulace vede na sadu poruchových rovnic

Lagrangeovy rovnice

porucha vyjádřena ve formě **potenciálu**

na pravé straně parciální derivace
potenciálu podle Keplerových elementů

výhodné, máme-li **analytický vztah** pro
poruchový potenciál

typicky $\sum_k A_k \cos \lambda_k$

Gaussovy rovnice

porucha vyjádřena ve formě **síly**

na pravé straně složky síly v pravoúhlé
souřadné soustavě korotující s oběhem

výhodné pro **numerický výpočet** a pro
poruchy, jež nelze vyjádřit jako potenciál

(odpor hmotného prostředí)



Zadání úlohy

studujeme časový vývoj **oskulačních elementů** $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$, $t_0(t)$

poruchou oproti problému dvou těles je **narušení sférické symetrie** planety

referenční rovinu položíme do roviny oběhu

$$\rightarrow i \equiv 0^\circ, \text{ BÚNO } \Omega \equiv 0^\circ, \omega \equiv 0^\circ$$

\rightarrow hledáme vývoj **tvaru dráhy**, tedy $a(t)$, $e(t)$

předpokládáme, že **rotační osa** planety je **kolmá** k rovině oběhu

řešíme **Gaussovy poruchové rovnice**

Evoluční rovnice

Gaussovy poruchové rovnice

R - radiální složka slapové síly

S - tečná složka slapové síly

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[eR \sin \nu + \frac{p}{r} S \right]$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[eR \sin \nu + \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) S \right]$$

celkový moment hybnosti soustavy se zachovává

rotační frekvence

$$\frac{Mm}{M+m} a^2 n \sqrt{1-e^2} + C\Omega = \text{const.}$$

oběh planety

rotace planety

odtud vývoj rotační frekvence

$$C \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{GMm\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{da}{dt} + \frac{Mm}{M+m} \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt}$$

Slapová deformace

program Andy4

doc. Čadka

- deformace viskoelastické kulové slupky (plášť planety)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

nestlačitelné prostředí

$$-\nabla \pi + \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

\mathbf{f} - slapové buzení a self-gravitace

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right] = -\frac{\mu}{\eta} \mathbf{D}$$

Maxwellova reologie

- v laterálních směrech rozklad do sférických harmonik
- v radiálním směru metoda konečných diferencí s posunutou sítí
- deformace rozhraní je za předpokladu malých posunutí reprezentována pomocí **plošné hustoty**

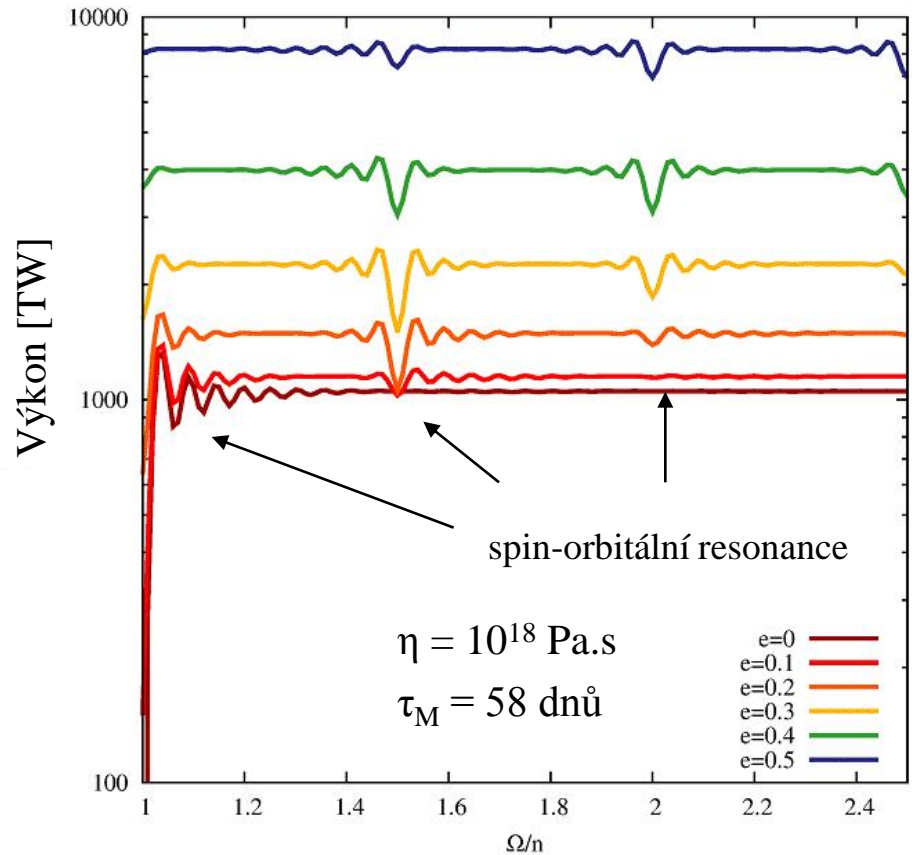
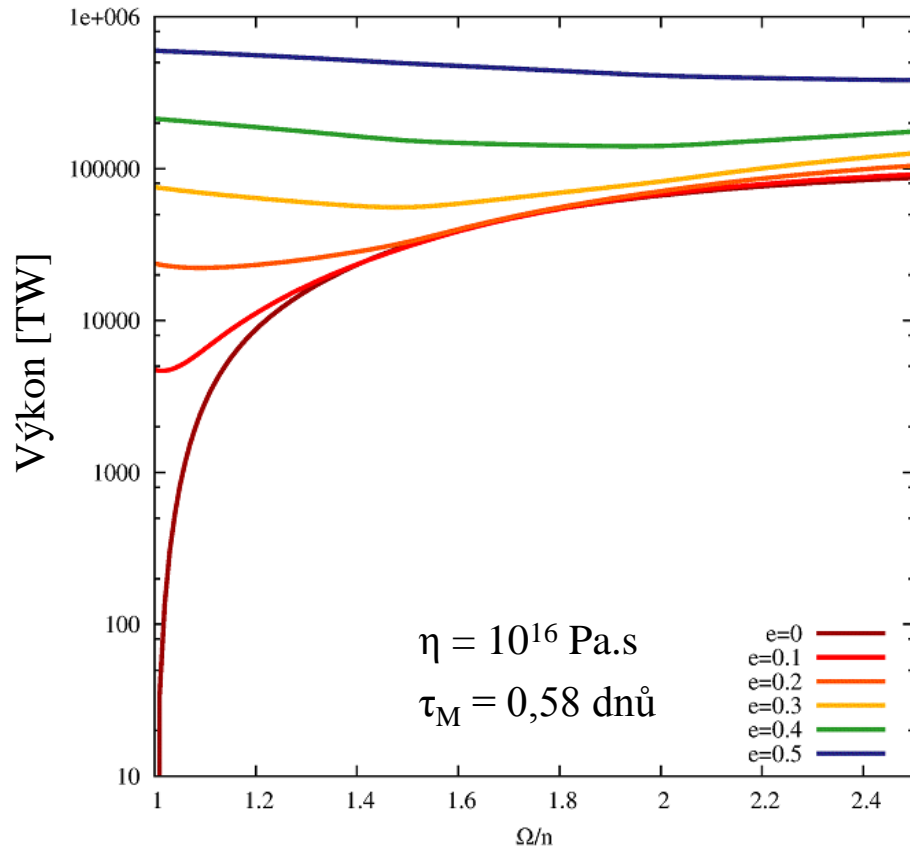
$$\sigma = \Delta \rho u_r(\vartheta, \varphi)$$

Slapové zahřívání

$$P = \frac{1}{T} \int_V \int_t^{t+T} \frac{\mathbf{D}(\tau) : \mathbf{D}(\tau)}{2\eta} d\tau dV$$

η - efektivní „slapová“ viskozita (pro Zemi $\sim 10^{18}$ Pa.s)

oběžná doba 16,33 dnů

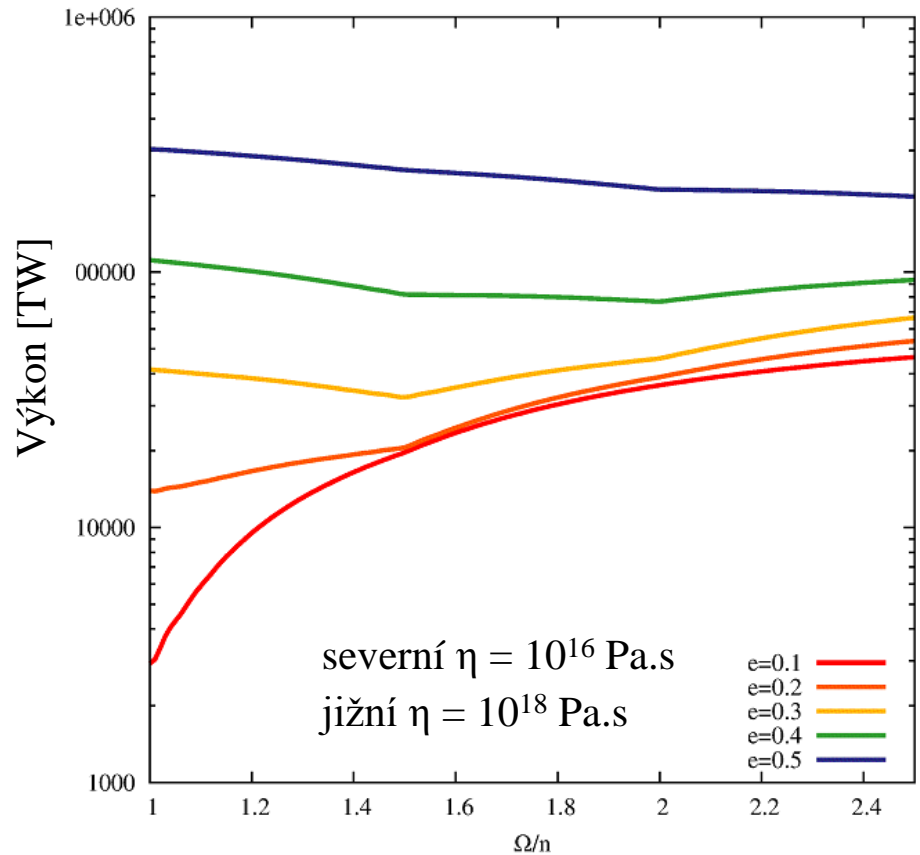
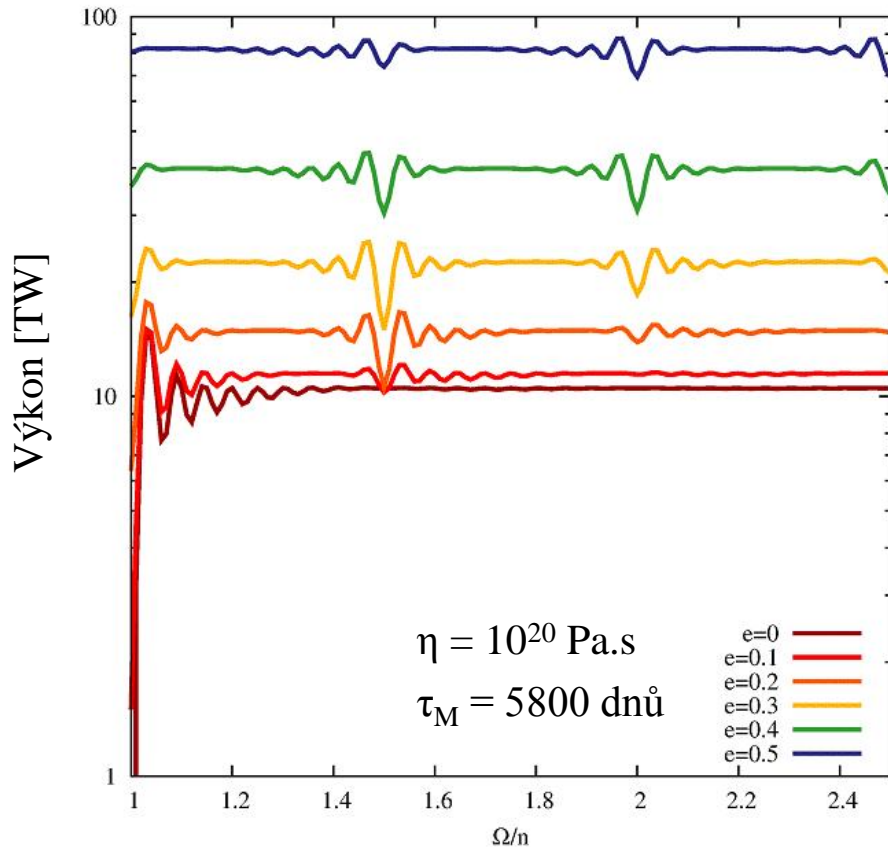


Slapové zahřívání

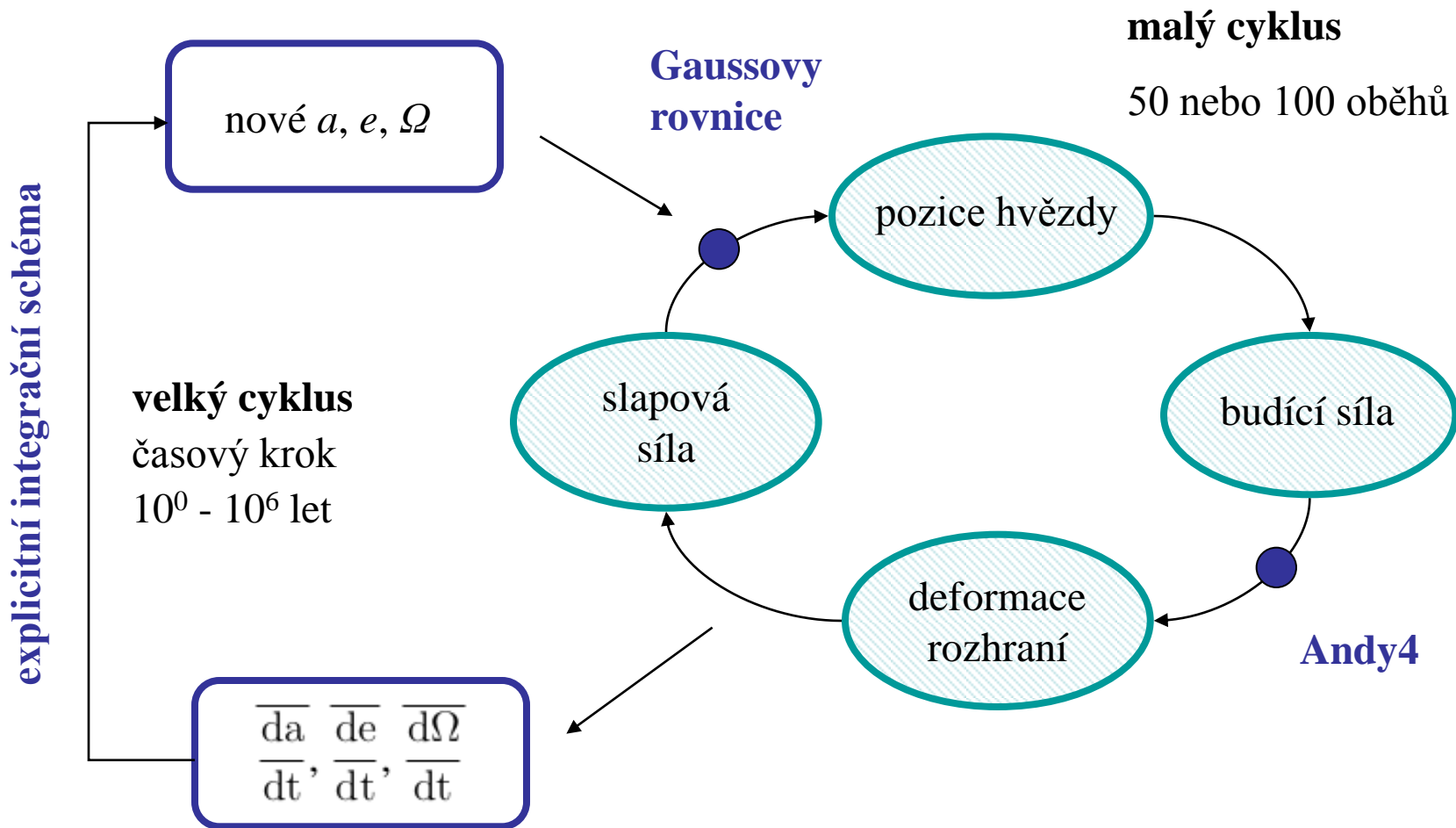
$$P = \frac{1}{T} \int_V \int_t^{t+T} \frac{\mathbf{D}(\tau) : \mathbf{D}(\tau)}{2\eta} d\tau dV$$

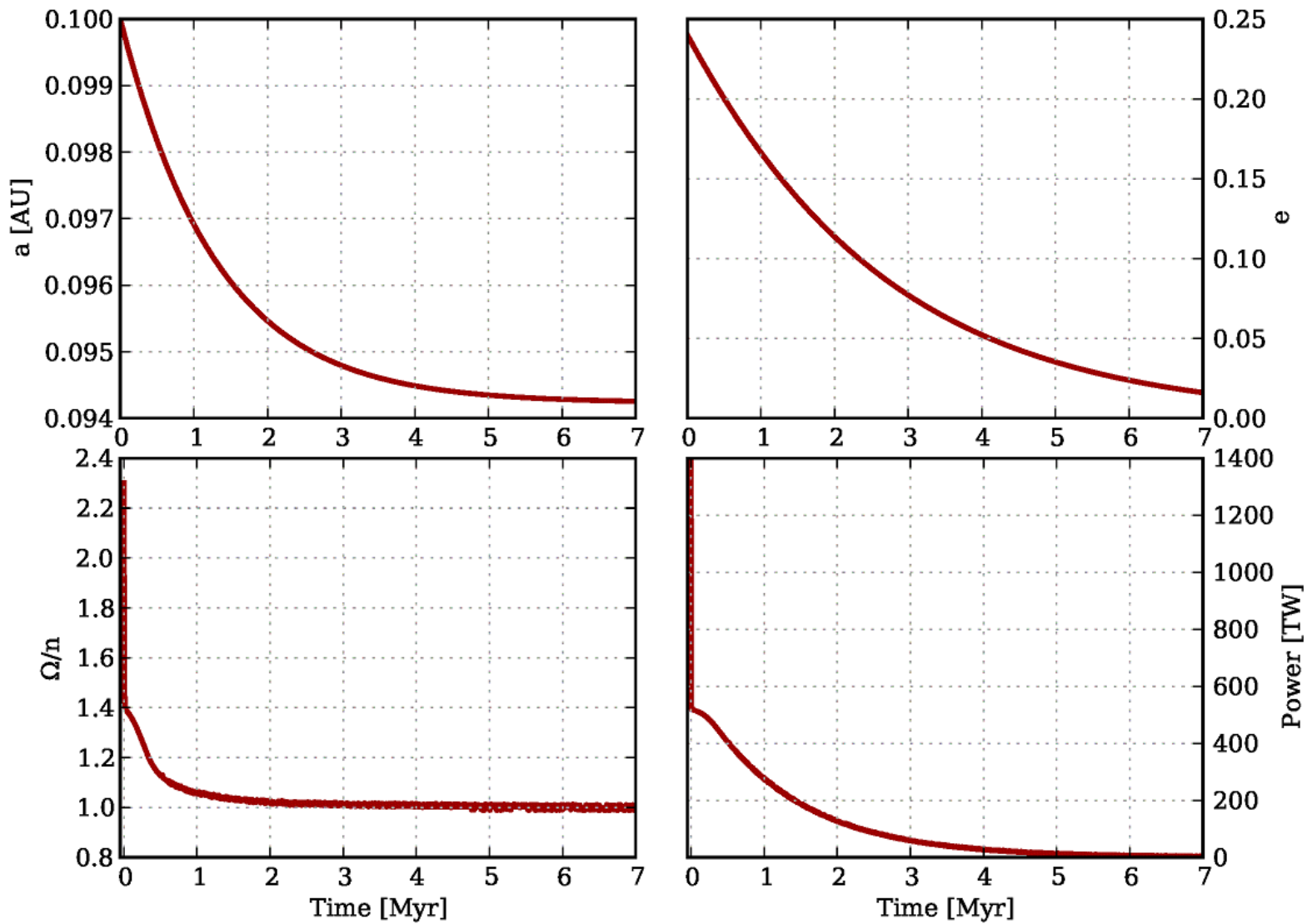
η - efektivní „slapová“ viskozita (pro Zemi $\sim 10^{18}$ Pa.s)

oběžná doba 16,33 dnů



Výpočetní schéma

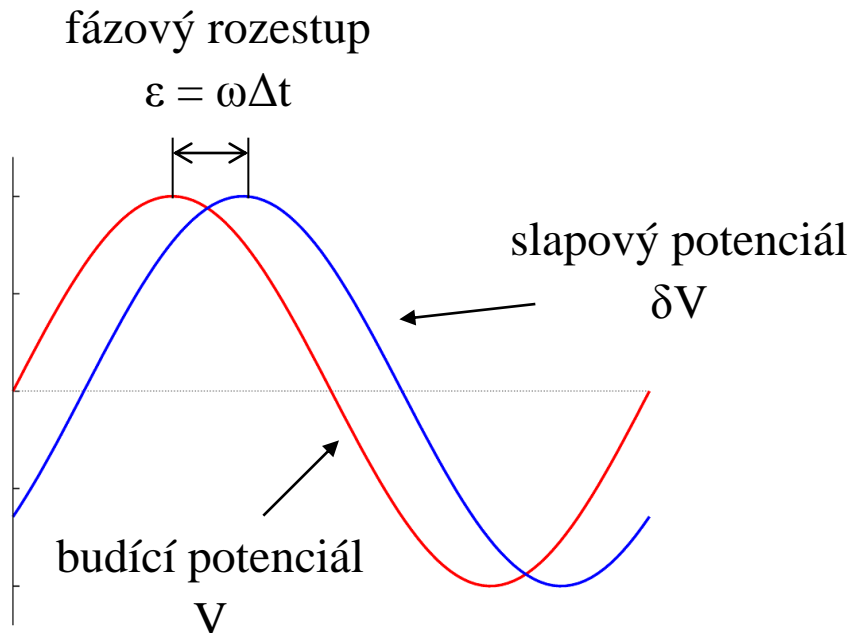




Ukázka vývoje a , e , Ω/n a slapového zahřívání pro planetu se severo-jížním rozložením viskozity (10^{16} Pa.s + 10^{18} Pa.s).

Tradiční slapové teorie

- odezva tělesa na slapové zatěžování popsána **Loveovým číslem** k_l a **fázovým** či **časovým rozestupem** mezi budícím a slapovým potenciálem (nebo úhlem mezi slapovou výdutí a směrem k rušícímu tělesu)



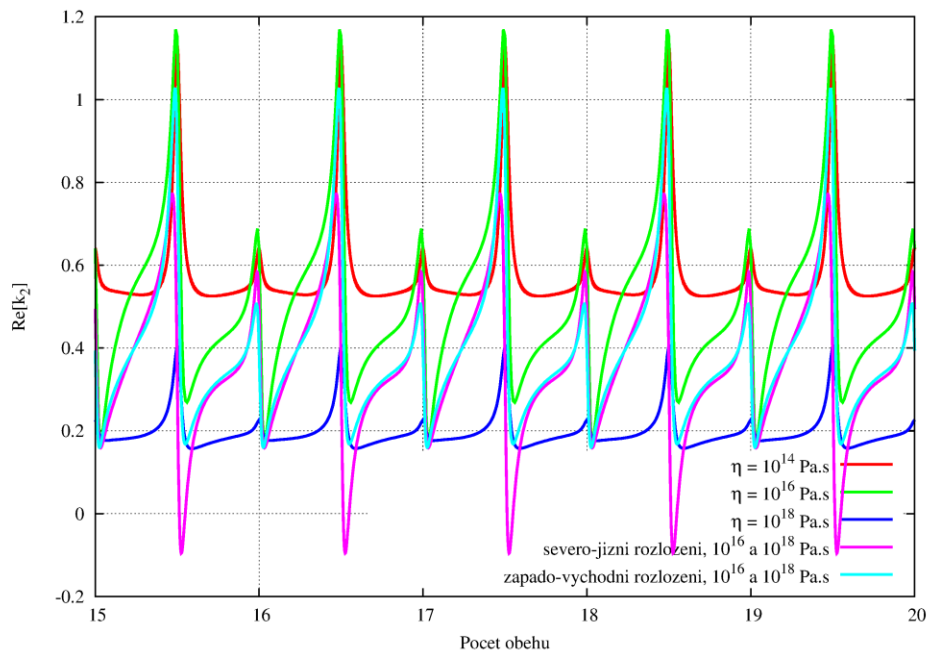
Loveovo číslo: $k_l = \frac{\delta V_l}{V_l}$

relativní změna vnějšího potenciálu kvůli self-gravitaci deformovaného tělesa

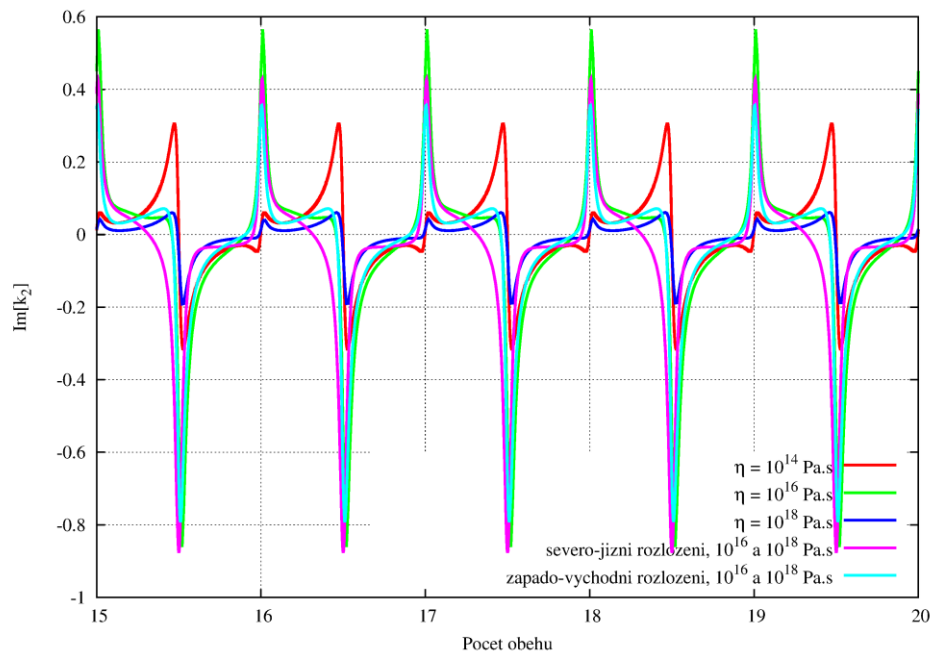
fázový, časový nebo geometrický rozestup charakterizuje anelasticitu planety

Loveova čísla k_2

- numerický výpočet pro spin-orbitální resonanci 1:1 a výstřednost $e=0,24$



reálná část



imaginární část

Kaulova-Darwinova expanze

- William M. Kaula (1964) v návaznosti na George Darwina (1908) rozvíjí budící potenciál do Fourierových řad

$$V_{j\text{mp}q} = \frac{Gm^*}{a^*} \left(\frac{r}{a^*}\right)^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} (2 - \delta_{0m}) \mathcal{P}_{jm}(\cos \vartheta) \mathcal{F}_{j\text{mp}}(i^*) \mathcal{G}_{j\text{p}q}(e^*) \times$$
$$\times \begin{cases} \cos \\ -\sin \end{cases}_{j-m} \begin{matrix} \text{sudé} \\ \text{liché} \end{matrix} \{ \nu_{j\text{mp}q}^* - m(\lambda + \theta) \}$$

$$\nu_{j\text{mp}q}^* = (j - 2p)\omega^* + (j - 2p + q)M^* + m\Omega^*$$

- obecně **frekvenčně závislý fázový rozestup** $\varepsilon_{l\text{mp}q}$ a frekvenčně nezávislá Loveova čísla k_l
- analytické vyjádření \rightarrow Lagrangeovy poruchové rovnice

Konvergence Kaulových řad

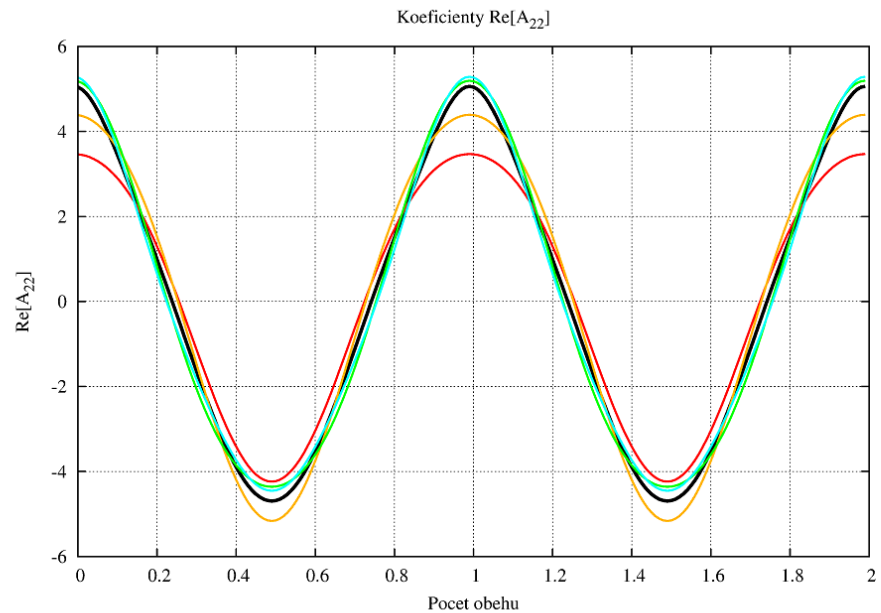
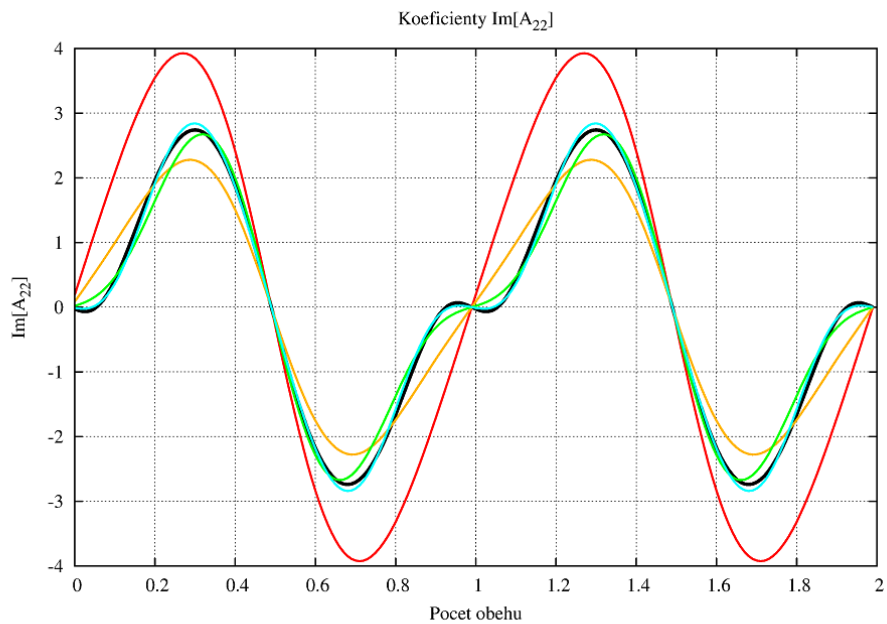
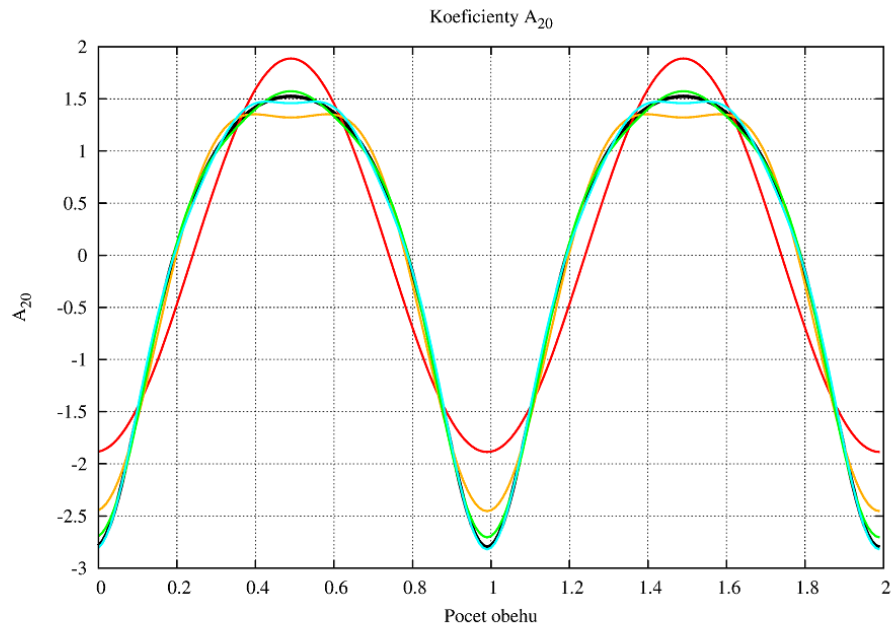
- přepis budící síly do sférických harmonik:

$$\vec{f}(r, \vartheta, \varphi) = \tilde{A}_{20} \vec{Y}_{20}^1 + \operatorname{Re}\{\tilde{A}_{22}\} \operatorname{Re}\{\vec{Y}_{22}^1 + \vec{Y}_{2-2}^1\} + \operatorname{Im}\{\tilde{A}_{22}\} \operatorname{Im}\{\vec{Y}_{22}^1 - \vec{Y}_{2-2}^1\}$$

- na následujících obrázcích časový průběh koeficientů pro rozvoj do různých řádů ve výstřednosti (e^1 až e^4)
- „pseudo-Merkur“, výstřednost $e=0,2$ a spin-orbitální resonance 3:2
- porovnání s numericky vypočtenými koeficienty budící síly

$$f_{jm}^{j-1}(r) = \frac{4\pi G m'}{(r')^2} \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{r}{r'}\right)^{j-1} Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi')$$

↑
okamžitá poloha hvězdy



Zjednodušení: konstantní rozestup

- dva obvyklé předpoklady:

konstantní fázový rozestup ε

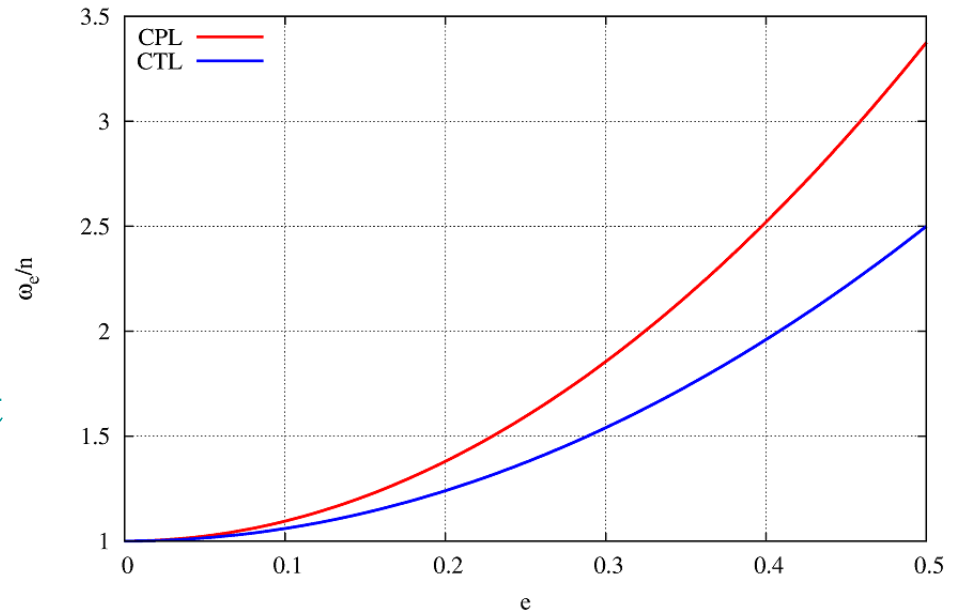
constant phase lag, CPL

$$\varepsilon \sim \omega^0$$

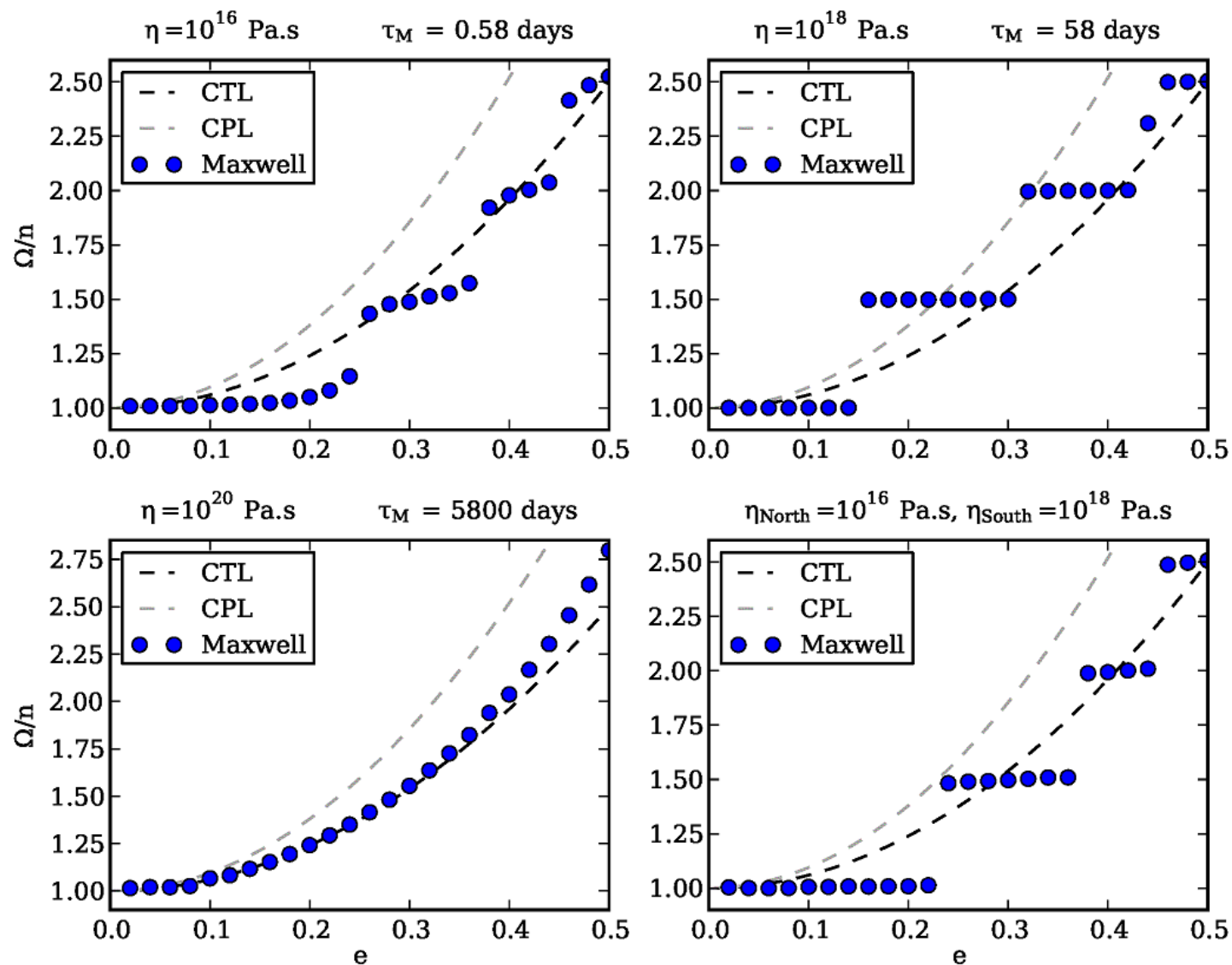
konstantní časový rozestup Δt

constant time lag, CTL

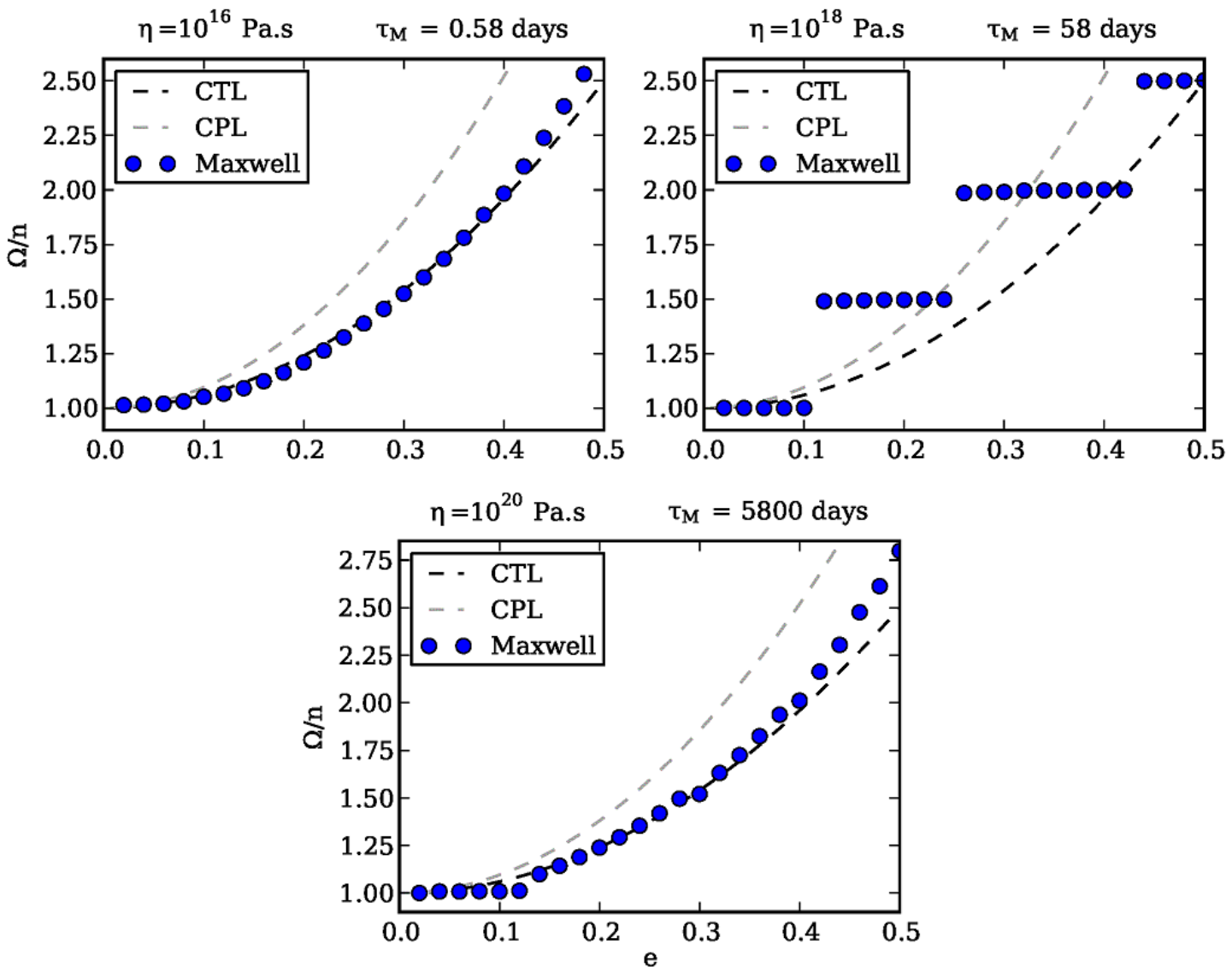
$$\varepsilon \sim \omega^1, \text{ viskózní limita}$$



- oba modely předpovídají vázanou rotaci planet na kruhové dráze, pro vyšší výstřednosti ovšem zachycení do spin-orbitální resonance neumožňují
- stabilní **pseudo-synchronní rotace**
- protipříklad: Měsíc a ostatní velké měsíce ve Sluneční soustavě



Konečné spin-orbitální poměry pro planetu zpomalující anebo zrychlující z poměru $\Omega/n = 2,3$. Vliv výstřednosti a viskosity. Oběžná doba 4,71 dní.
 CTL - constant time lag, CPL - constant phase lag



Konečné spin-orbitální poměry pro planetu zpomalující anebo zrychlující z poměru $\Omega/n = 2,3$. Vliv výstřednosti a viskosity. Oběžná doba 14,9 dní.
 CTL - constant time lag, CPL - constant phase lag

Závěr

- předpoklad viskoelastické odezvy planety vede k realističtějšímu vývoji oběžné dráhy a přirozeně předvídá spin-orbitální resonance
- záchyt do pseudo-synchronní rotace ve viskózní nebo elastické limitě
- v resonancích lokální minima slapového zahřívání (a lokální maxima průměrné maximální teploty)

Výhled do budoucna

- slapový vývoj těles s vnitřní strukturou
- víceplanetární soustavy, případně vliv měsíce → příspěvek k vývoji oběžné dráhy díky vzájemným interakcím