

# Zrno i to zrníčko – pohádky o růstu a rekrystalizaci

Petra Maierová<sup>1</sup>

Petr Jeřábek<sup>2</sup>, Ondrej Lexa<sup>1,2</sup>, Karel Schulmann<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Centrum pro výzkum litosféry, Česká geologická služba

<sup>2</sup> Přírodovědecká fakulta Univerzity Karlovy v Praze

# Obsah

- I. Úvod
- II. Deformace granulárního materiálu
- III. Jak se mění velikost zrna  
růst, rekrystalizace, piezometry, hraniční hypotéza, pinning
- IV. Jihočeské granulity
- V. Modely



Jak to bylo, pohádko?  
Zabloudilo kuřátko

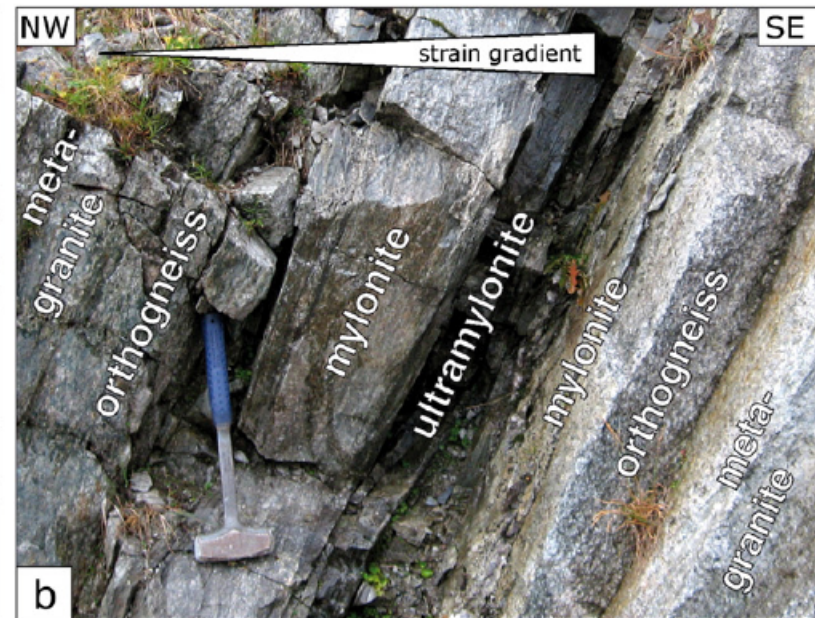
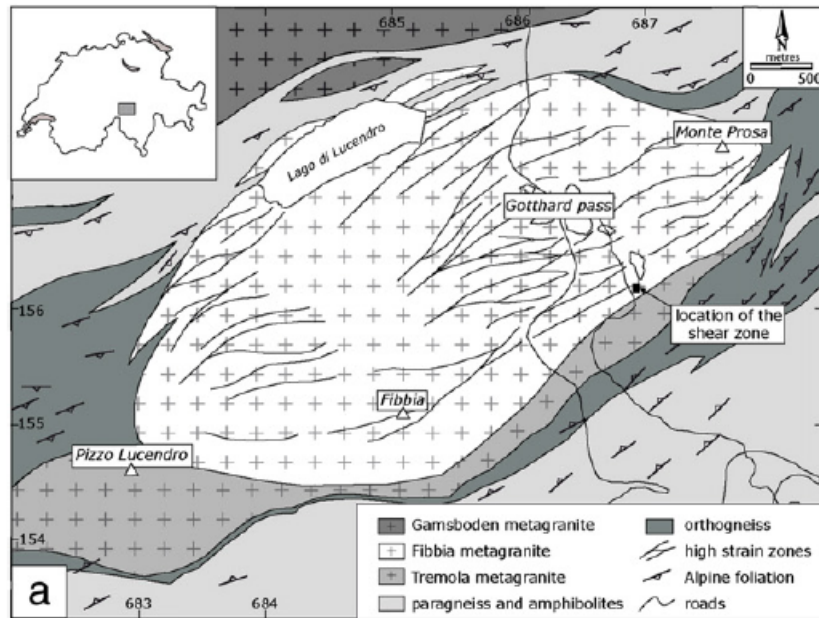
za zahradou mezi poli,  
pípá, pípá, nožky bolí.

# 1. Úvod

Mechanické vlastnosti horniny významně souvisí s průměrnou velikostí zrn.

Příklad:

deformační zóna v původně žulovém masivu v centrálních Alpách [Oliot et al. 2013]



# 1. Úvod

metagranit a ortorula – málo deformované, velké zrno  
mylonit, ultramylonit – významná deformace, malé zrno

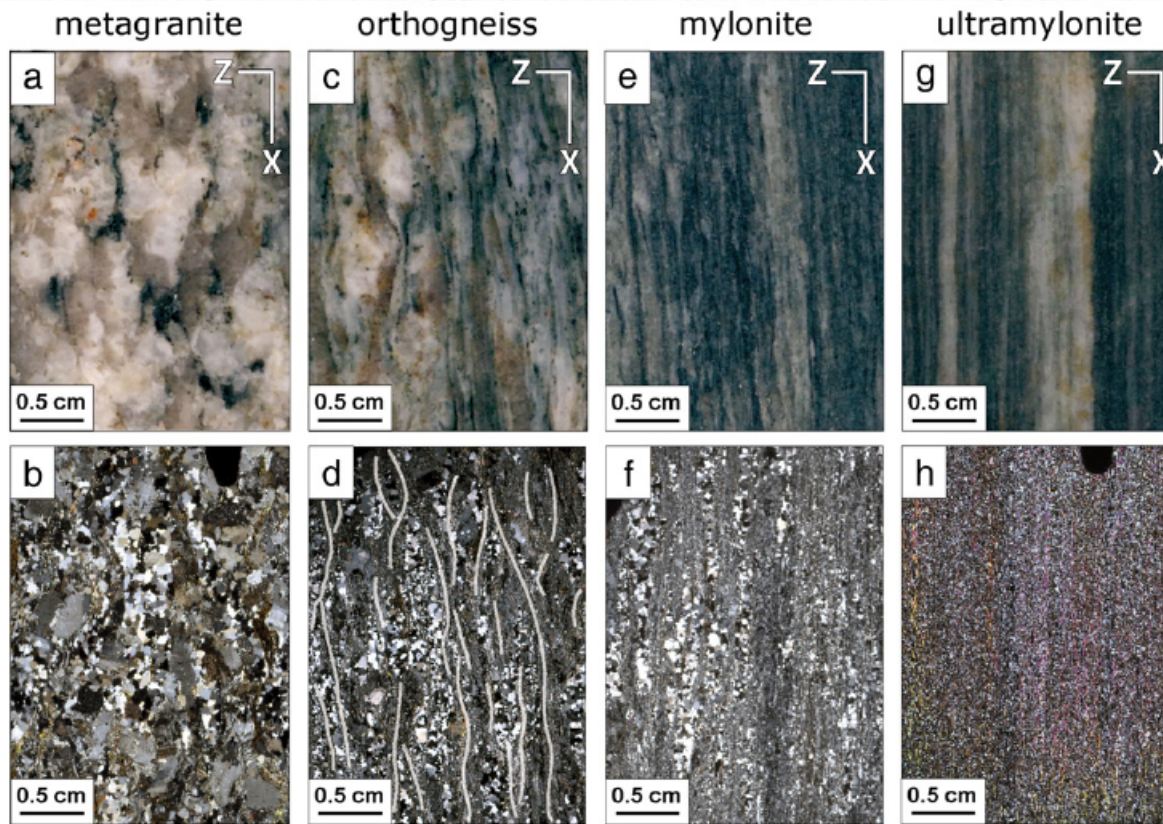


Fig. 2. Pictures of the four studied samples (top) and related cross-polarized microphotographs (bottom), showing the textural and microfabrics evolution throughout the shear zone: Got06-A: the weakly deformed metagranite, Got06-B1: the orthogneiss, Got06-B3: the mylonite and Got06-C: the ultramylonite. In the orthogneiss, the anastomosed fine-grained plagioclases-rich shear bands, wrapping around recrystallized  $Qtz_{17}$ - and  $Kfs_{17}$ -monomineralic aggregates, have been highlighted by white lines (Fig. 2f). Note the transition in the strain gradient from a weakly deformed isotropic texture (Got06-A) to a layered fabric (Got06-B1 and Got06-B3) and finally a homogeneous texture (Got06-C).

# 1. Úvod

Deformace s prokluzováním zrn může být velmi efektivní.

Kdy k ní dochází?

Jaká velikost zrna je dostatečně malá?

Proč a jakým způsobem se mění velikost zrn?

*Je možné tento děj zahrnout do modelů?*



Ve vysokém obilí  
bude večer za chvíli.

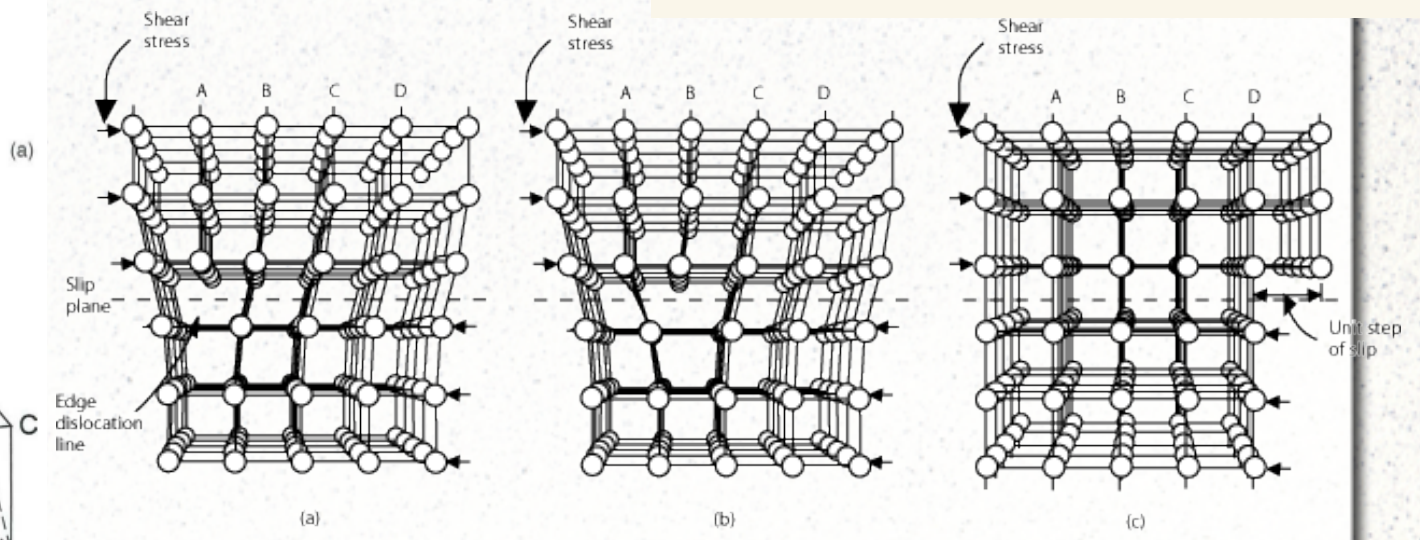
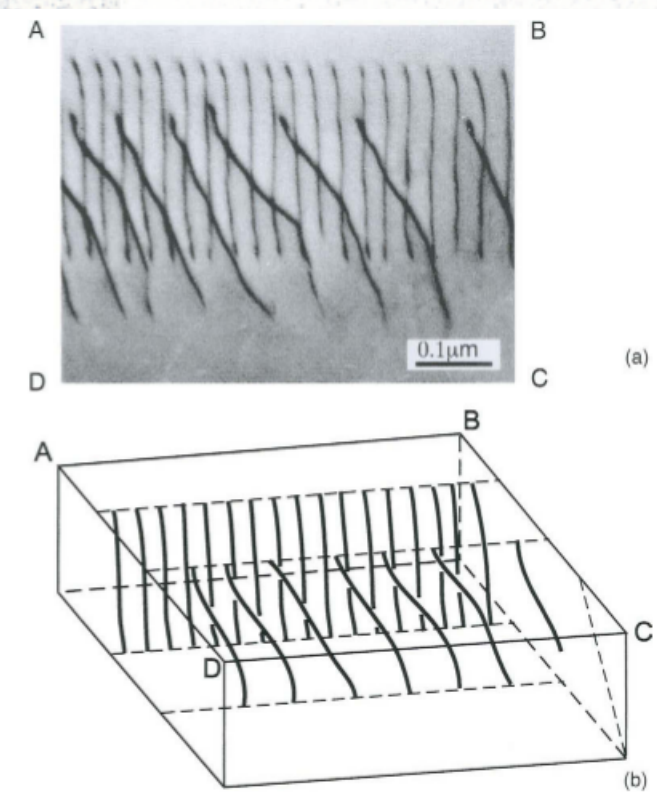
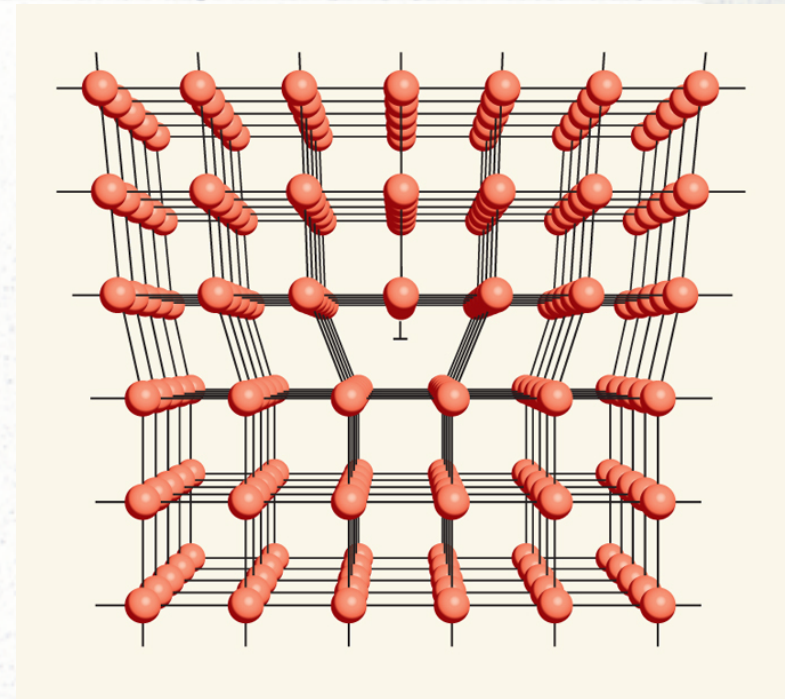
„Povězte mi, bílé ovy,  
kudy vede cesta do vsi!“

# II. Deformace granulárního materiálu

difuzní a dislokační tečení (creep)

## dislokace

lineární vada mřížky, ale také řada vakancí  
pohyb v důsledku napětí



## II. Deformace granulárního materiálu

**rekrytalizace** – změna rozložení, tvaru a dalších vlastností zrn

### migrace hranic zrn

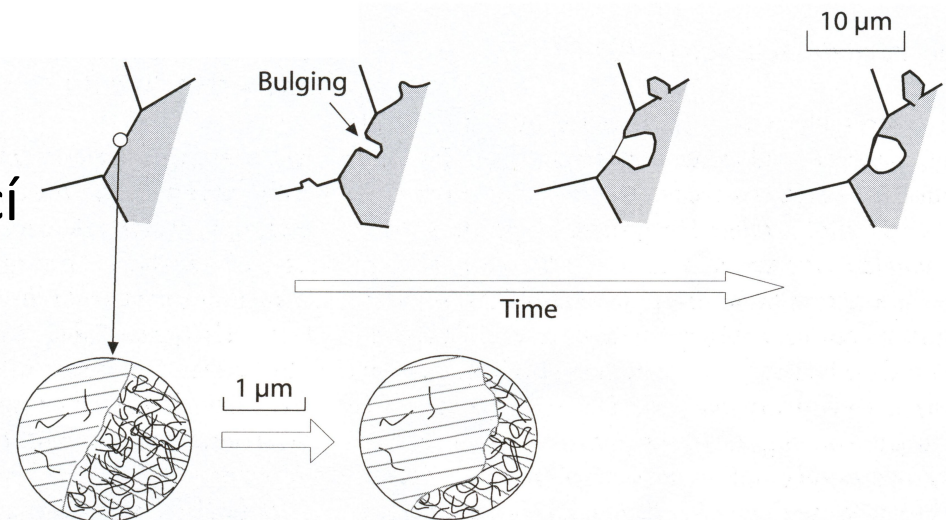
(mladá) zrna s malou hustotou dislokací rostou na úkor (starých) zrn s vysokou hustotou dislokací  
=> redukce vnitřní energie



### vyklenutí hranice zrn

vznikají nová malá zrna

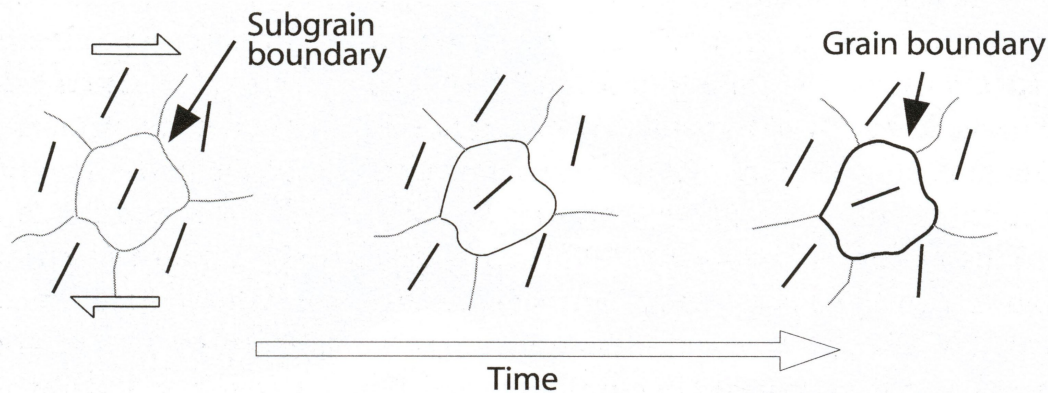
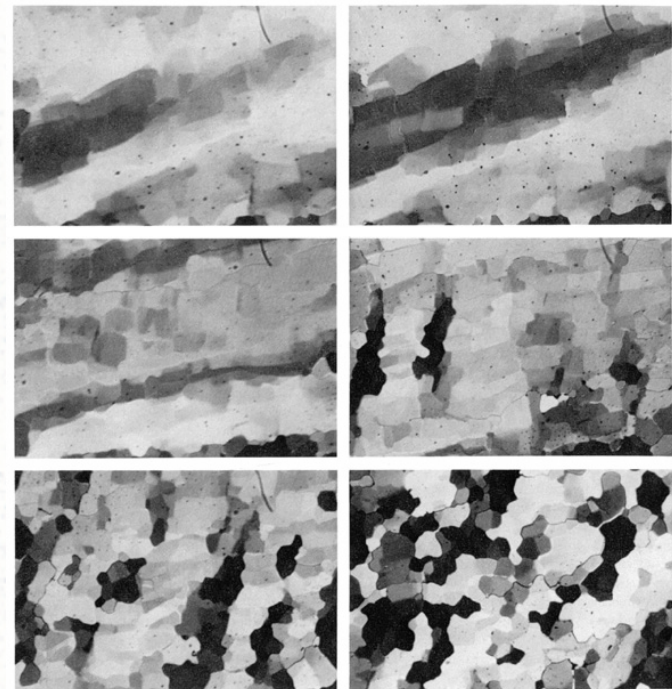
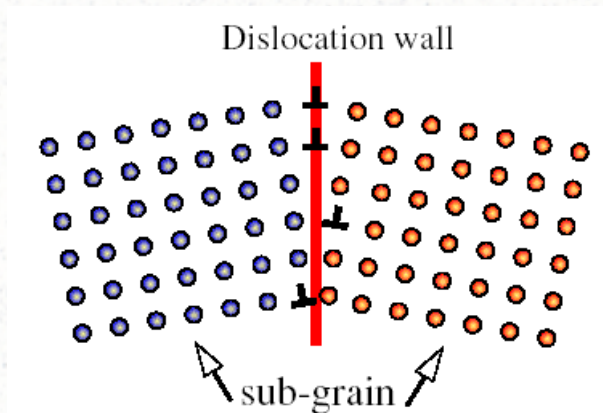
dochází k přesunu atomů/vakancí  
=> mikro- i makroskopický pohyb



# II. Deformace granulárního materiálu

## rotace subzrn

přesun dislokací z objemu zrn na stěny uvnitř zrn, oddělují se malá zrna

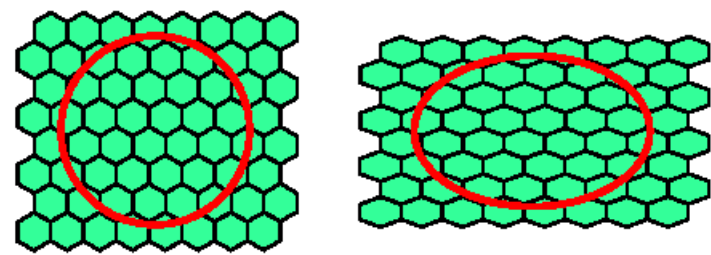
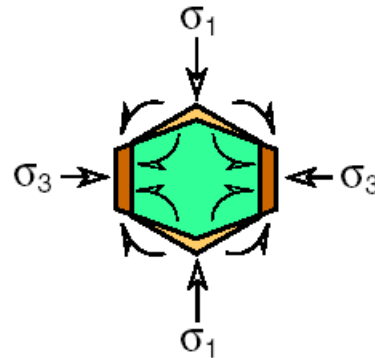
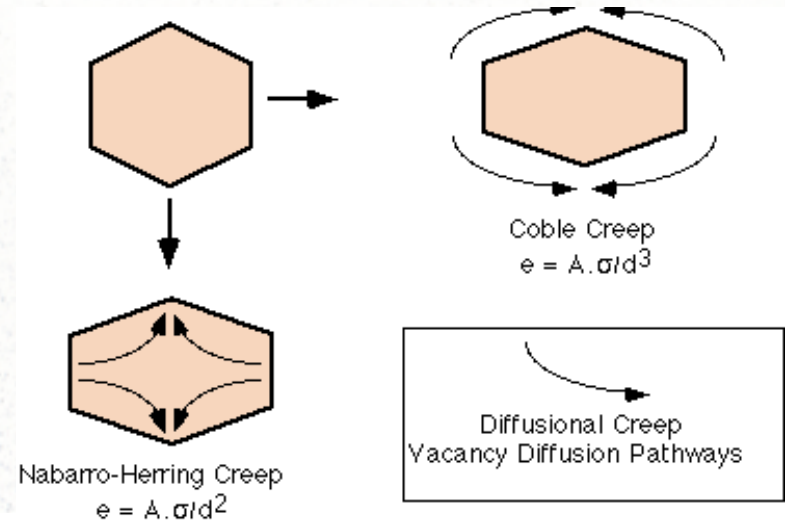




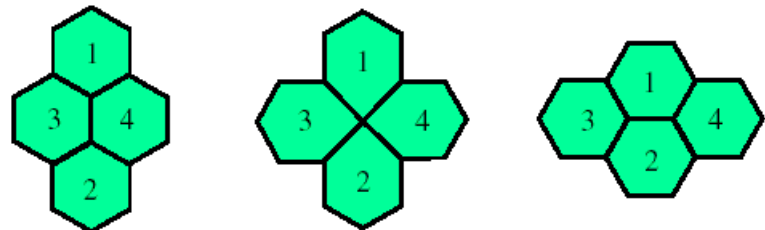
# II. Deformace granulárního materiálu

## difuzní tečení

přes krystalovou mřížku  
nebo podél hranic zrn



prokluzování po hranicích zrn  
superplasticita



## II. Deformace granulárního materiálu

Makroskopický popis dislokačního a difuzního tečení

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{\text{disl}} + \dot{\epsilon}_{\text{dif}}$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{disl}} = A_{\text{disl}} \sigma^n \exp\left(\frac{-E_{\text{disl}}}{RT}\right) = B_{\text{disl}}(T) \sigma^n$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{dif}} = A_{\text{dif}} d^{-m} \sigma \exp\left(\frac{-E_{\text{dif}}}{RT}\right) = B_{\text{dif}}(T) \sigma d^{-m}$$

$\dot{\epsilon}$  rychlost deformace

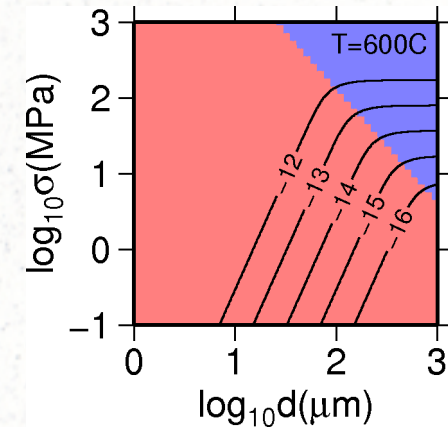
$\sigma$  deviatorické napětí

$d$  střední velikost zrna

$T$  teplota

$m, n, A, E, B$  parametry

$R$  plynová konstanta

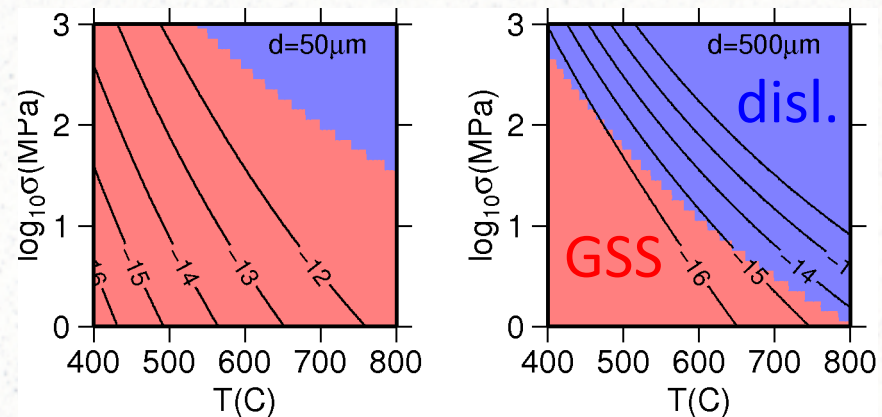


## II. Vliv střední velikosti zrna

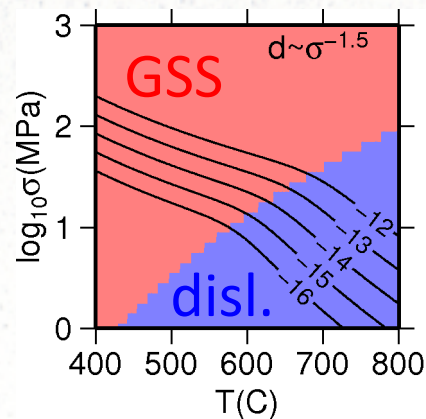
efektivita difuzního mechanismu závisí na velikosti zrna =>

grain size sensitive (GSS) creep

velikost zrna – střední, charakteristická; obecně má určitou distribuci



*Zahrnutí proměnné velikosti zrna zcela změní oblast dislokačního a difuzního (GSS) tečení.*



### III. Jak se mění velikost zrna

- rovnováha mezi růstem a rekrystalizací
- různé způsoby rekrystalizace:  
vyklenutí hranice zrn, rotace subzrn...



„Jen se zeptej ječmene,  
snad si na to vzpomene.“

Kuře bloudí mezi poli,  
pípá, pípá, nožky bolí.

### III. Normální růst

- prostorově stejnoměrný růst střední velikosti zrn
- růst zmenšuje celkový povrch zrn
- rychlost růstu je úměrná celkové povrchové energii

$$(d^p) \dot{=} G, \text{ neboli } \dot{d} = \frac{G}{p d^{p-1}}$$
$$G = G_0 \exp\left(-\frac{E_G}{RT}\right), \quad p \approx 2$$

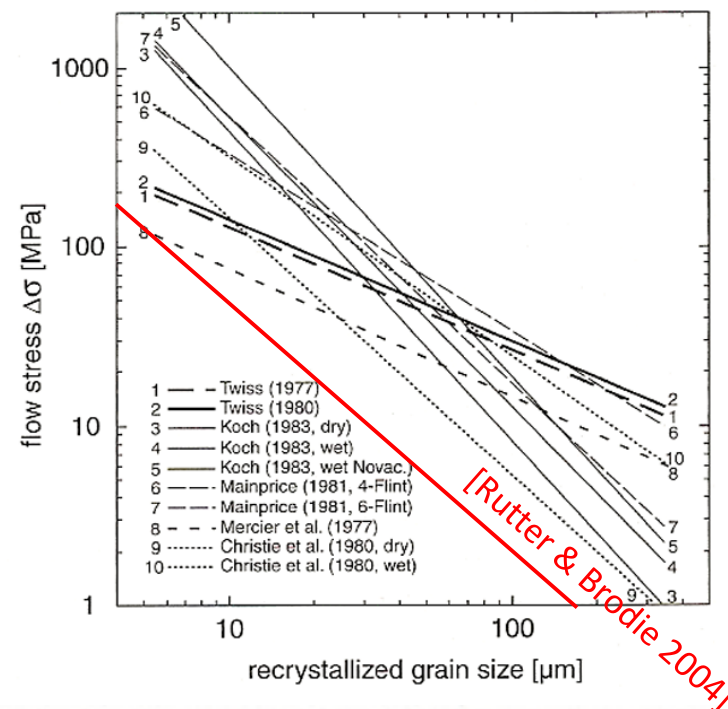
### III. Paleopiezometry

rovnovážná velikost zrna při rekrystalizaci je funkcí napětí

$$d_{\infty} = D_0(T)\sigma^{-l}, \quad l \approx 0.7 - 1.5$$

**teorie** – rovnováha mezi mikroskopickými mechanizmy růstu a redukce velikosti zrna [Twiss 1977, Derby & Ashby 1987, Shimizu 1998 a další]

**experimenty** – obvykle se neuvažuje teplotní závislost



### III. Hraniční hypotéza

field boundary hypothesis

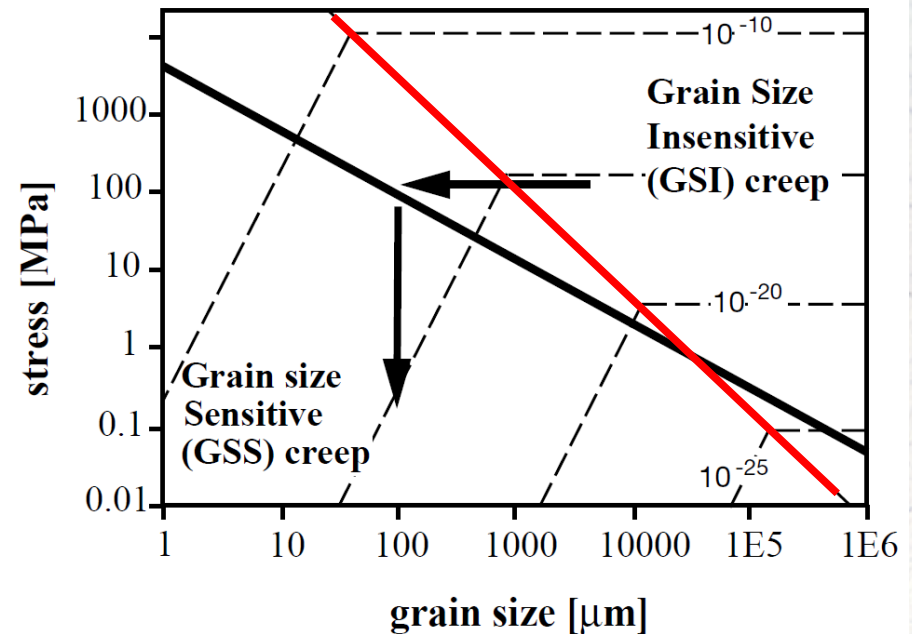
[de Bresser et al. 1998, 2001]

$$\dot{\epsilon}_{\text{disl}\infty} = \dot{\epsilon}_{\text{gss}\infty}$$

$$d_{\infty} = \left( \frac{B_{\text{gss}}}{B_{\text{disl}}} \sigma^{1-n} \right)^{1/m}$$

experimentálně určené piezometry  
jsou blízke hranici mezi  
difuzní a dislokační oblastí

*Rekrytalizace nedokáže vést k významné GSS deformaci  
a souvisejícímu změkčení materiálu.*



**Fig. 1** Empirical stress versus recrystallized grain size relation (*heavy line*) for olivine extrapolated into a deformation mechanism map drawn for a temperature of 600°C.

### III. Růst a rekrystalizace – ad-hoc přístup

bez růstového členu:

$$\dot{d} = - \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_{\infty}} (d - d_{\infty})$$

$$\dot{d} = - \frac{\dot{\epsilon}_{\text{disl}}}{\epsilon_{\infty}} (d - d_{\infty})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{\text{disl}\infty} = \dot{\epsilon}_{\text{gss}\infty} \\ d_{\infty} = \left( \frac{B_{\text{gss}}}{B_{\text{disl}}} \sigma^{1-n} \right)^{1/m} \quad \text{hraniční hypotéza} \\ d_{\infty} = D_0(T) \sigma^{-l} \quad \text{piezometr} \\ \dot{\epsilon}_{\text{gss}\infty} = \tilde{B}_{\text{gss}}(T) \sigma^{1+lm} \end{array} \right.$$

s růstovým členem:

$$\dot{d} = \frac{G}{p d^{p-1}} - \frac{\dot{\epsilon}_{\text{disl}}}{\epsilon_{\infty}} d$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{\infty} = \left( \frac{\epsilon_{\infty} G}{B_{\text{disl}} p} \right)^{1/p} \sigma^{-n/p} \\ \dot{\epsilon}_{\text{gss}\infty} = B_{\text{gss}} \left( \frac{G \epsilon_{\infty}}{p B_{\text{disl}}} \right)^{-m/p} \sigma^{1+nm/q} \end{array} \right.$$



### III. Termodynamický přístup

- velikost zrna je „paleowattmetr“, je funkcí vykonané práce [Austin & Evans 2007, Rozel et al. 2010]
- práce vnějších sil  $\sigma : \dot{\epsilon}$  se částečně disipuje a částečně ukládá do vnitřní energie (vznik hranic zrn)

$$\dot{d} = \frac{G}{p d^{p-1}} - f \frac{\lambda_3}{3\gamma\lambda_2} d^2 (\sigma : \dot{\epsilon}_{\text{disl}}), \quad f \in [0, 1]$$

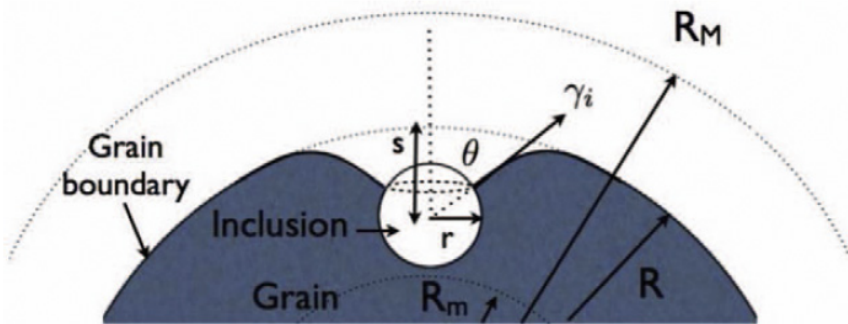
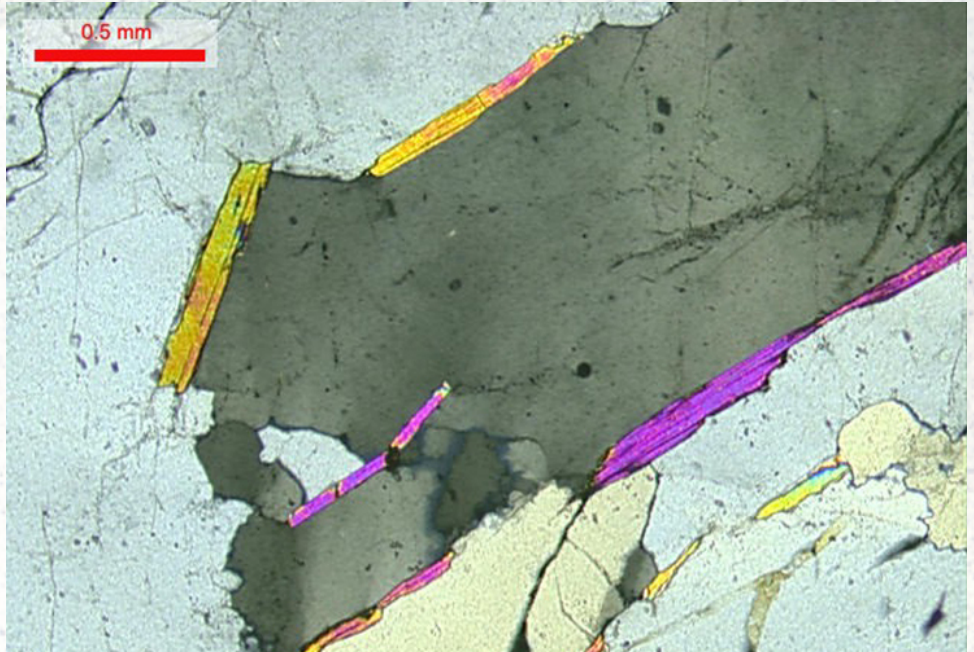
$$d_{\infty} = \left( \frac{3\gamma G \lambda_2}{p f B_{\text{disl}} \lambda_3} \right)^{\frac{1}{p+1}} \sigma^{-\frac{n+1}{p+1}}$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{gss}\infty} \approx \sigma^{1+m \frac{(n+1)}{(p+1)}}$$

### III. Zener pinning

- “přišpendlení” hranice zrn k částicím jiného materiálu
- brání volnému růstu zrn

=> rozšíření termodynamického přístupu o vliv příměsi  
[Bercovici & Ricard 2013]



### III. Zener pinning

[Bercovici & Ricard 2013, Apendix A–H]

2 rovnice pro velikost zrna

$$\dot{d}_i = \frac{G}{p d_i^{p-1}} Z_i - f(1 - f_r) \frac{\lambda_3}{3\gamma\lambda_2} d_i^2 (\sigma_i : \dot{\epsilon}_{\text{disl}}) Z_i^{-1} \quad f, f_r \in [0, 1]$$

člen odpovídající pinningu

$$Z_i = 1 - \frac{3\lambda_4}{160\lambda_2} (1 - \phi_i) \left( \frac{d_i}{r} \right)^2$$

je funkcí hrubosti  $r$  rozhraní mezi zrny různého složení

$$\dot{r} = \frac{\varphi G_r}{q r^{q-1}} - \frac{f_r}{\gamma_r \varphi} r^2 (\bar{\sigma} : \dot{\epsilon})$$

$$\varphi = 3\phi_1\phi_2 = 3\phi(1 - \phi)$$

$$\bar{\sigma} = \phi\sigma_1 + (1 - \phi)\sigma_2$$

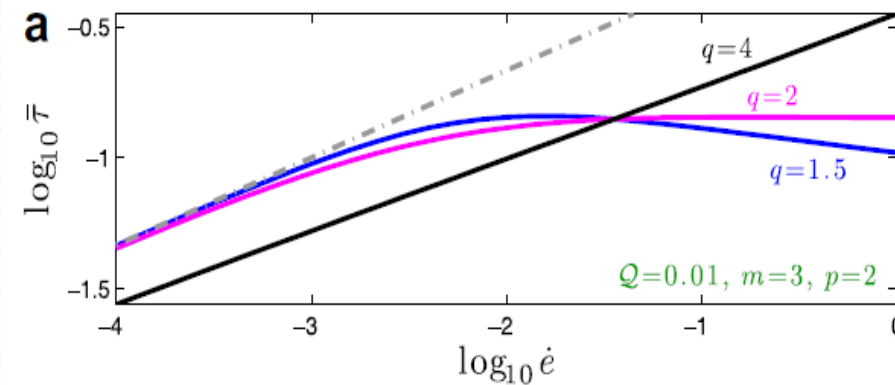


„Pověz, milý ječmínku,  
jak mám najít maminku?“

Ječmen syčí mezi vousy:  
„Ptej se pšenic, vzpomenou si!“

### III. Zener pinning

- rovnovážná velikost zrna menší než pro jednosložkový systém
- hrubost rozhraní se mění i difuzní deformací
- nelineární vztah napětí–rychlost deformace v závislosti na  $q$



$$\dot{d}_i = \frac{G}{p d_i^{p-1}} Z_i - f(1 - f_r) \frac{\lambda_3}{3\gamma\lambda_2} d_i^2 (\sigma_i : \dot{\epsilon}_{\text{disl}}) Z_i^{-1}$$

$$Z_i = 1 - \frac{3\lambda_4}{160\lambda_2} (1 - \phi_i) \left( \frac{d_i}{r} \right)^2$$

$$\dot{r} = \frac{\varphi G_r}{q r^{q-1}} - \frac{f_r}{\gamma_r \varphi} r^2 (\bar{\sigma} : \dot{\epsilon})$$

### III. Shrnutí

$$\dot{d} = -\frac{\dot{\epsilon}_{\text{tot,disl}}}{\epsilon_{\infty}} (d - d_{\infty})$$

→ hraniční hypotéza **(FB)**  $\dot{\epsilon}_{\text{disl}\infty} = \dot{\epsilon}_{\text{gss}\infty}$   
→ piezometr **(Pie)**  $d_{\infty} = D_0(T)\sigma^{-l}$

růst–rekrytalizace **(GRX)**

$$\dot{d} = \frac{G(T)}{p d^{p-1}} - \frac{\dot{\epsilon}_{\text{disl}}}{\epsilon_{\infty}} d$$

termodynamický přístup **(Th)**

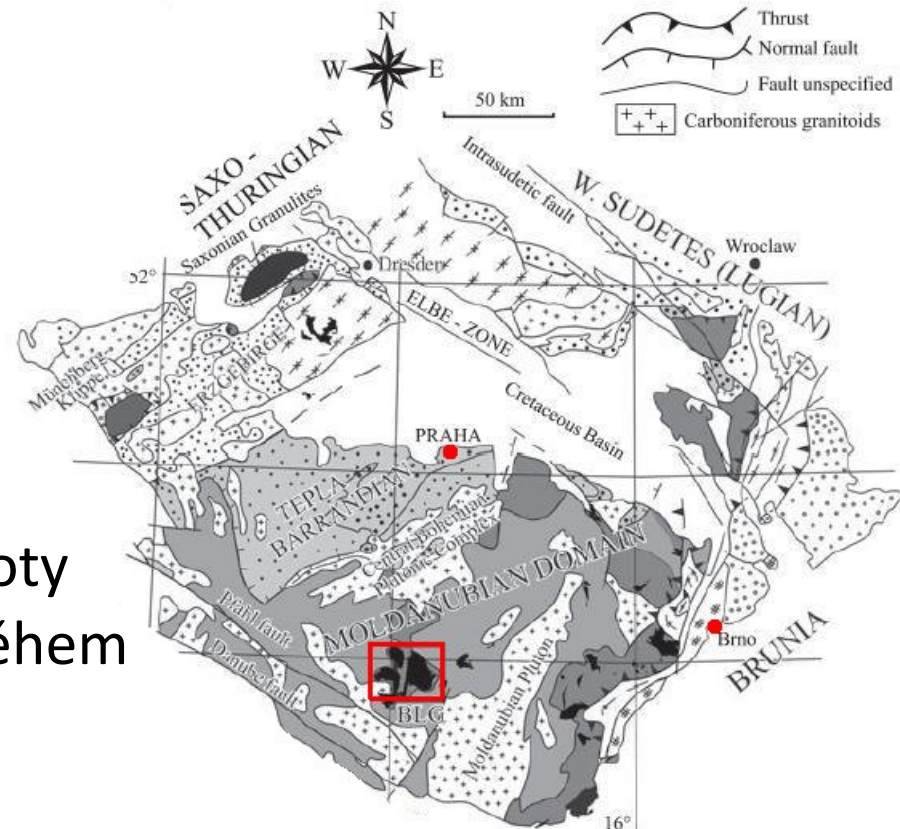
$$\dot{d} = \frac{G(T)}{p d^{p-1}} - A(T) \dot{\epsilon}_{\text{disl}} : \sigma d^2$$

termodynamický přístup se Zenerovým pinningem **(ThZ)**

$$\dot{d} = \frac{G(T)}{p d^{p-1}} Z - \tilde{A}(T) \dot{\epsilon}_{\text{disl}} : \sigma d^2 Z^{-1}$$

# IV. Jihočeské granulity

- světlé horniny: křemen, živce
- výstup z hloubky ~50 km a teploty >800 °C do ~20 km a ~700 °C během několika milionů let
- výstup řízen gravitací – diapirismus



[Franke 2000]

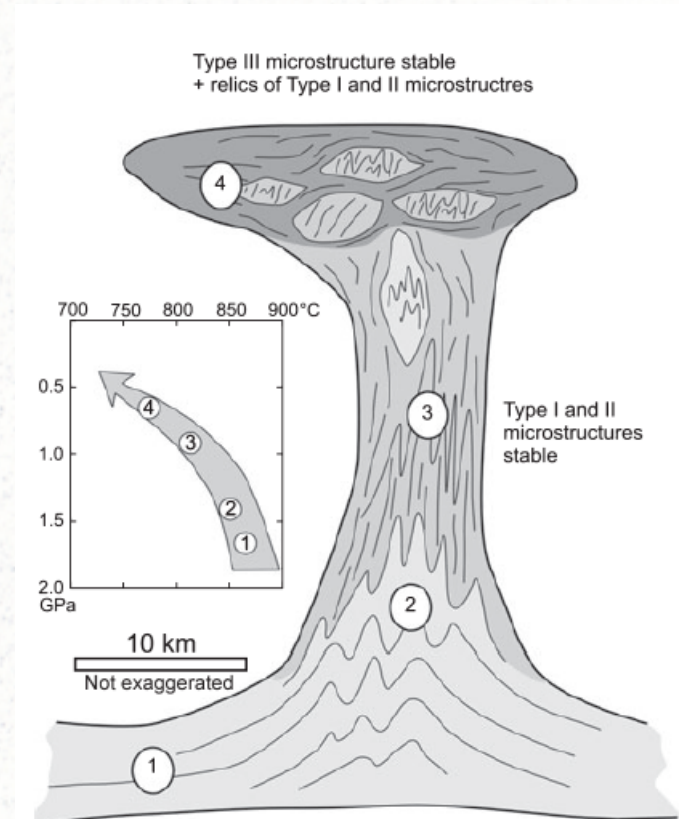
# IV. Jihočeské granulity

Tři typy mikrostruktur:

**S1:** velká zrna (až 1000  $\mu\text{m}$ ) živce, dislokační tečení

**S2:** jemnozrnná struktura (ultramylonit, zrna  $<50 \mu\text{m}$ ), difuzní deformace s prokluzováním zrn usnadněným přítomností taveniny, tzv. granulitová mikrostruktura

**S3:** hrubozrnná ( $\sim 100 \mu\text{m}$ ) struktura, dislokační tečení



[Franěk et al. 2011]

## IV. Jihočeské granulity

*Je možné změnou podmínek (teplota, napětí, rychlost deformace) vysvětlit pozorované mikrostruktury a jejich změnu?*



Kuře pípá u pšeníc,  
nevědí však také nic:

„Milé kuře, je nám líto,  
ptej se žita, poví ti to!“

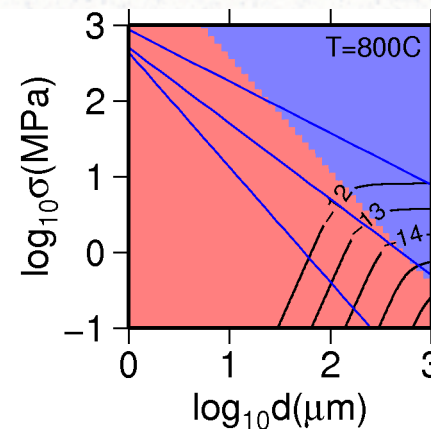
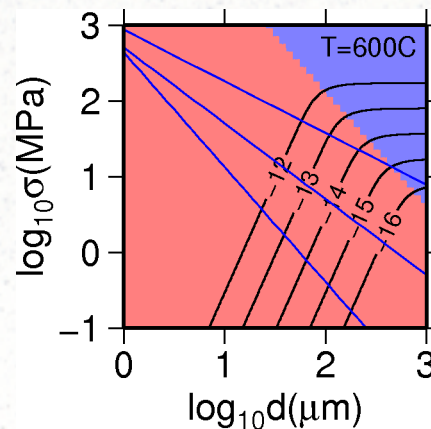


# V. Modely – parametry

- integrace rovnic v čase metodou RK4
- reologické vztahy pro **živec**;  $n=3$ ,  $m=3$   
[Ranalli 1995, Rybacki & Dresen 2000]
- rovnice pro růst [Dresen et al. 1995],  $p=2.6$
- charakteristický strain  $\epsilon_{\infty}=1$
- piezometry [Twiss 1977, Post & Tullis 1999]  
=> „průměrný“ piezometr

$$\dot{d} = \frac{G}{p d^{p-1}} - \frac{\dot{\epsilon}_{\text{disl}}}{\epsilon_{\infty}} d$$

$$\dot{d} = -\frac{\dot{\epsilon}_{\text{tot,disl}}}{\epsilon_{\infty}} (d - d_{\infty})$$



# V. Modely – parametry

## Termodynamický přístup:

- $f$  pro olivín stanovené jako závislé na teplotě,  $f \sim 10^{-6} - 10^{-2}$   
[Rozel et al. 2011, Bercovici & Ricard 2013]

$$\dot{d} = \frac{G}{p d^{p-1}} - f \frac{\lambda_3}{3\gamma\lambda_2} d^2 (\sigma : \dot{\epsilon}_{\text{disl}})$$

## Zener pinning:

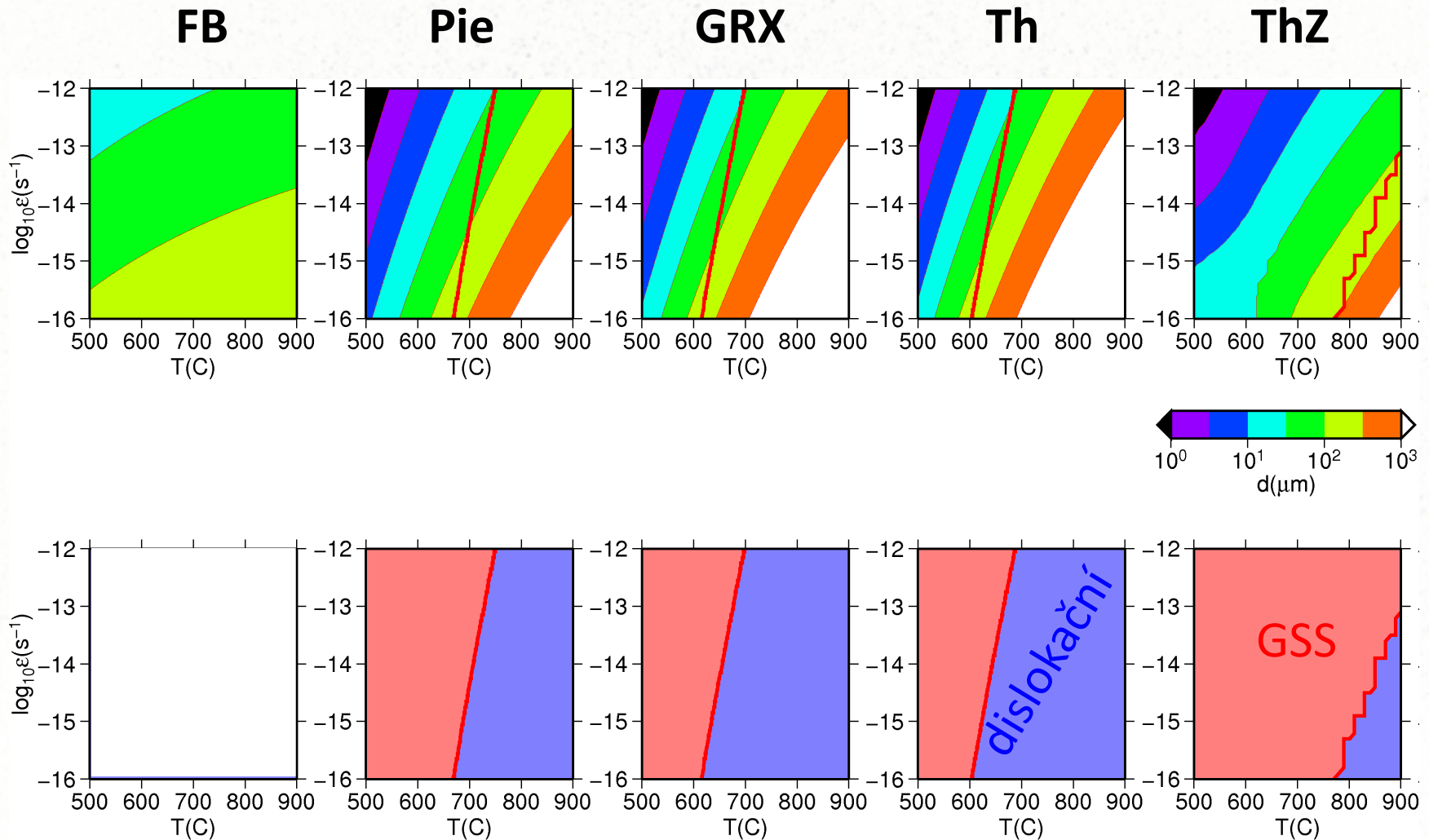
- poměr složek 60:40, mají stejné vlastnosti, ale nemísí se
- $f_r = f$ ,  $G_r = 10^{-2} G$
- $\gamma = 1 \text{ J m}^{-2}$
- $q = 2$  (není lokalizace v rámci deformační zóny)

$$\dot{d}_i = \frac{G}{p d_i^{p-1}} Z_i - f(1 - f_r) \frac{\lambda_3}{3\gamma\lambda_2} d_i^2 (\sigma_i : \dot{\epsilon}_{\text{disl}}) Z_i^{-1}$$

$$\dot{r} = \frac{\varphi G_r}{q r^{q-1}} - \frac{f_r}{\gamma_r \varphi} r^2 (\bar{\sigma} : \dot{\epsilon})$$

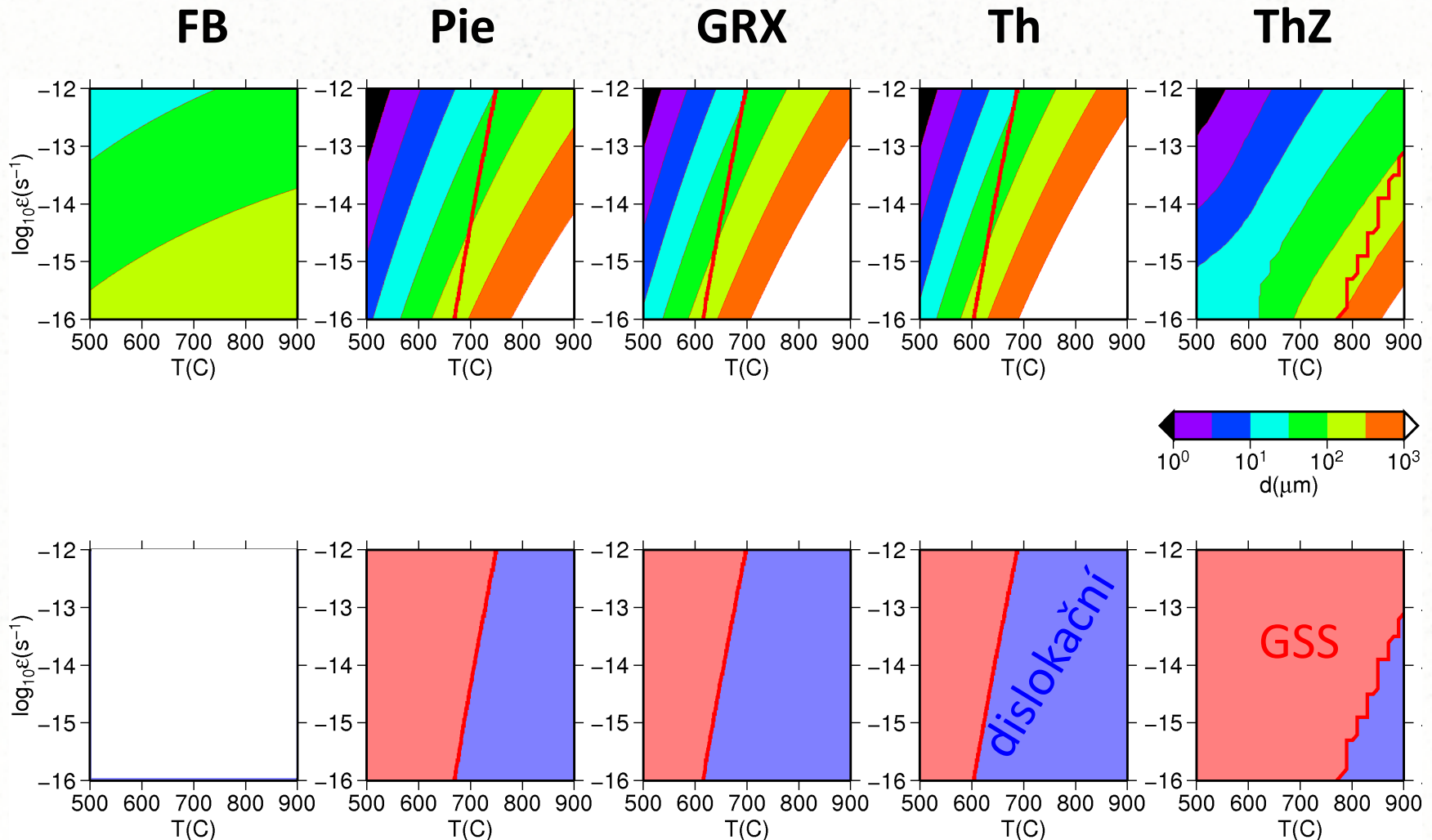
# V. Modely

## Rovnovážná velikost zrna



# V. Modely

## Rovnovážná velikost zrna

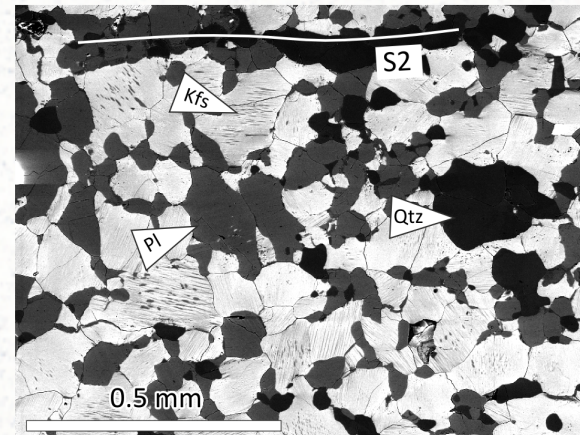
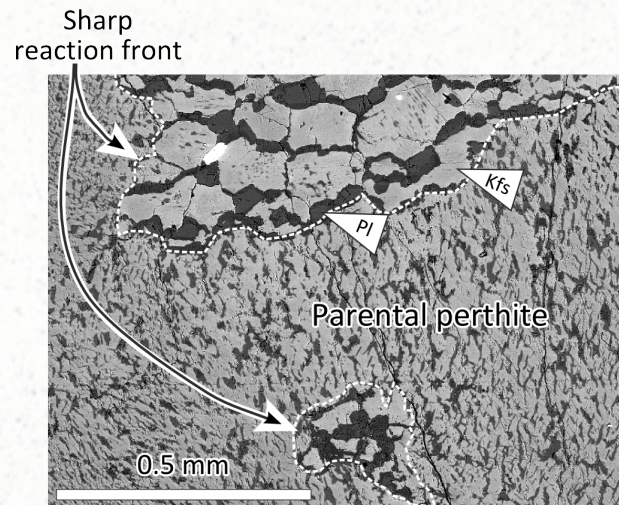


**S1:** velké zrna, dislokační tečení – jednosložkový systém

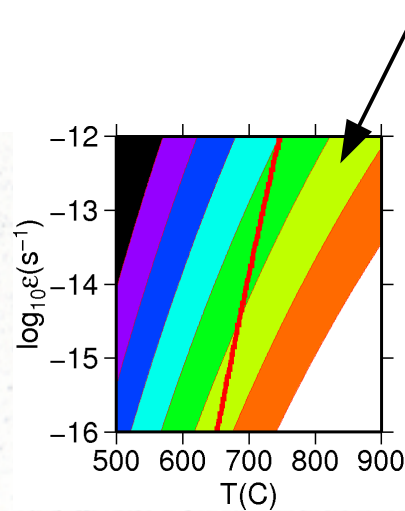
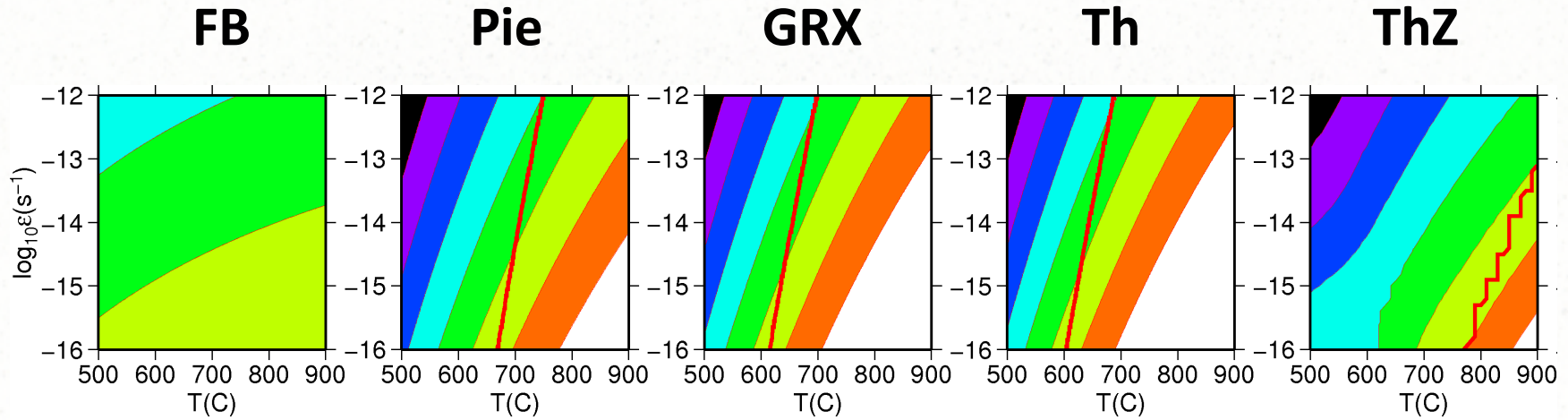
**S2:** malé zrna, GSS tečení – dvousložkový systém

# V. Modely

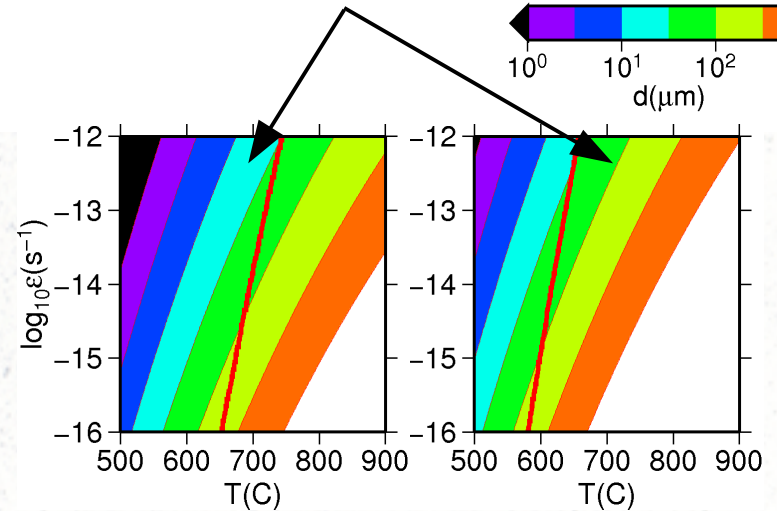
**S1–S2 přechod:** náhlý fázový přechod, rozpad velkých (metastabilních) zrn živce [Franěk et al. 2011]



# V. Modely



**GRX**  $\epsilon_{\infty} \times 0.1$



**Th**  $f \times 10$

**Th**  $f \times 0.1$

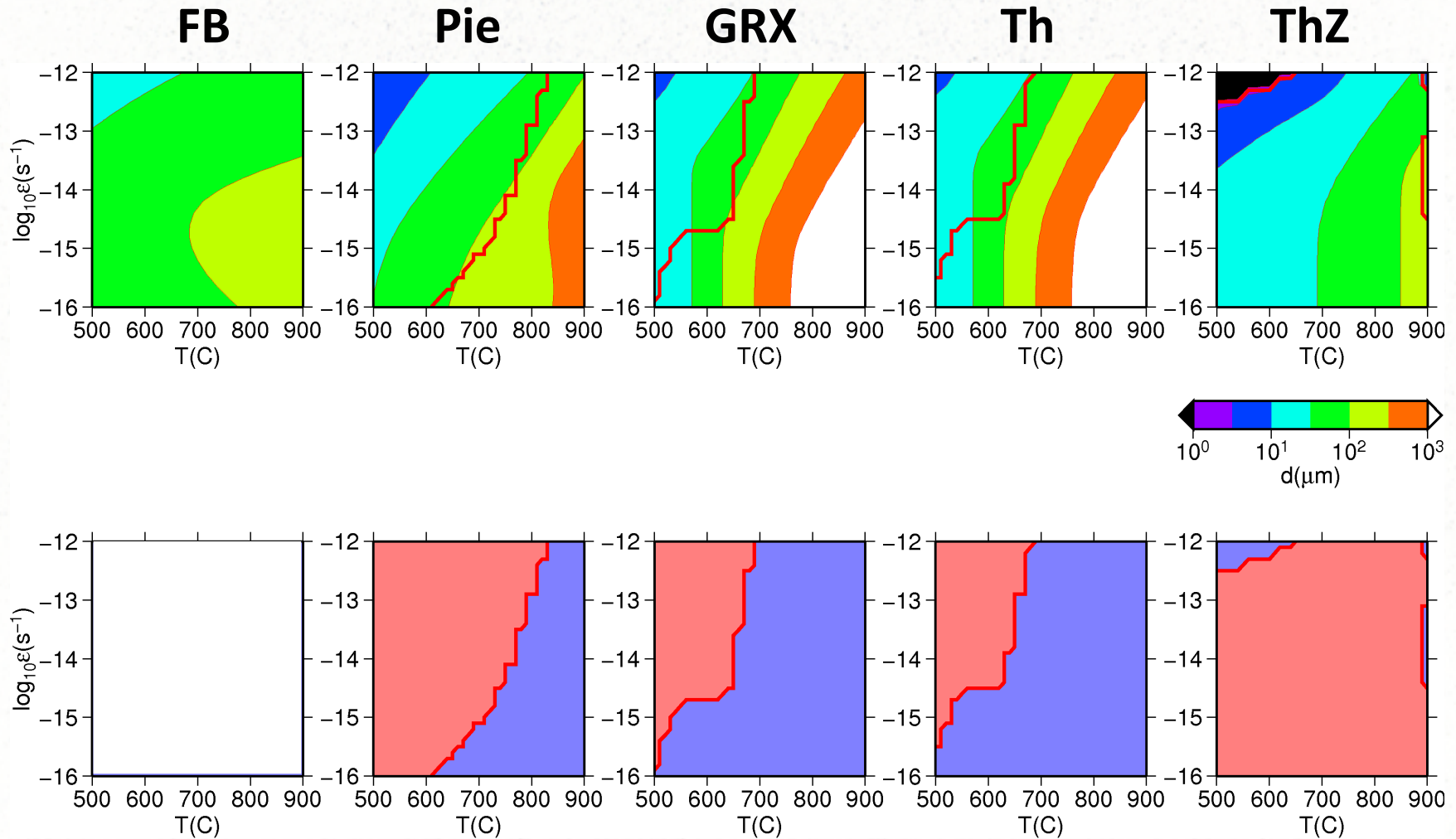
$$\dot{d} = \frac{G}{p d^{p-1}} - \frac{\dot{\epsilon}_{\text{disl}}}{\epsilon_{\infty}} d$$

$$\dot{d} = \frac{G}{p d^{p-1}} - f \frac{\lambda_3}{3\gamma\lambda_2} d^2 (\sigma : \dot{\epsilon}_{\text{disl}})$$

# V. Modely

*Jak rychle se mění velikost zrna po S1–S2 přechodu?*

počáteční velikost zrna 20  $\mu\text{m}$ , doba vývoje 5 milionů let

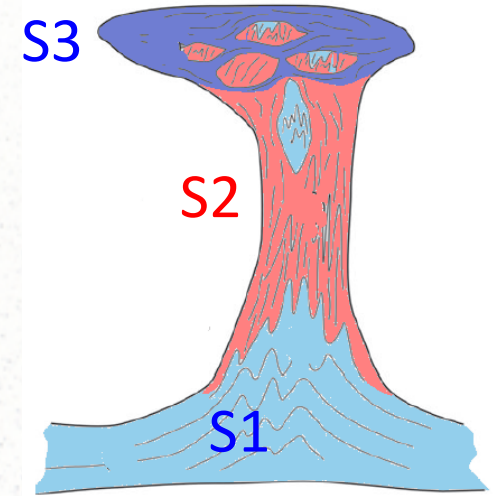


# V. Modely

## S2–S3 přechod:

- teplota klesá, rychlost deformace klesá
- mechanismus deformace se mění na dislokační
- průměrná velikost zrna se zvětší na  $\sim 100 \mu\text{m}$

*Je možné dosáhnout takového vývoje v modelu?*



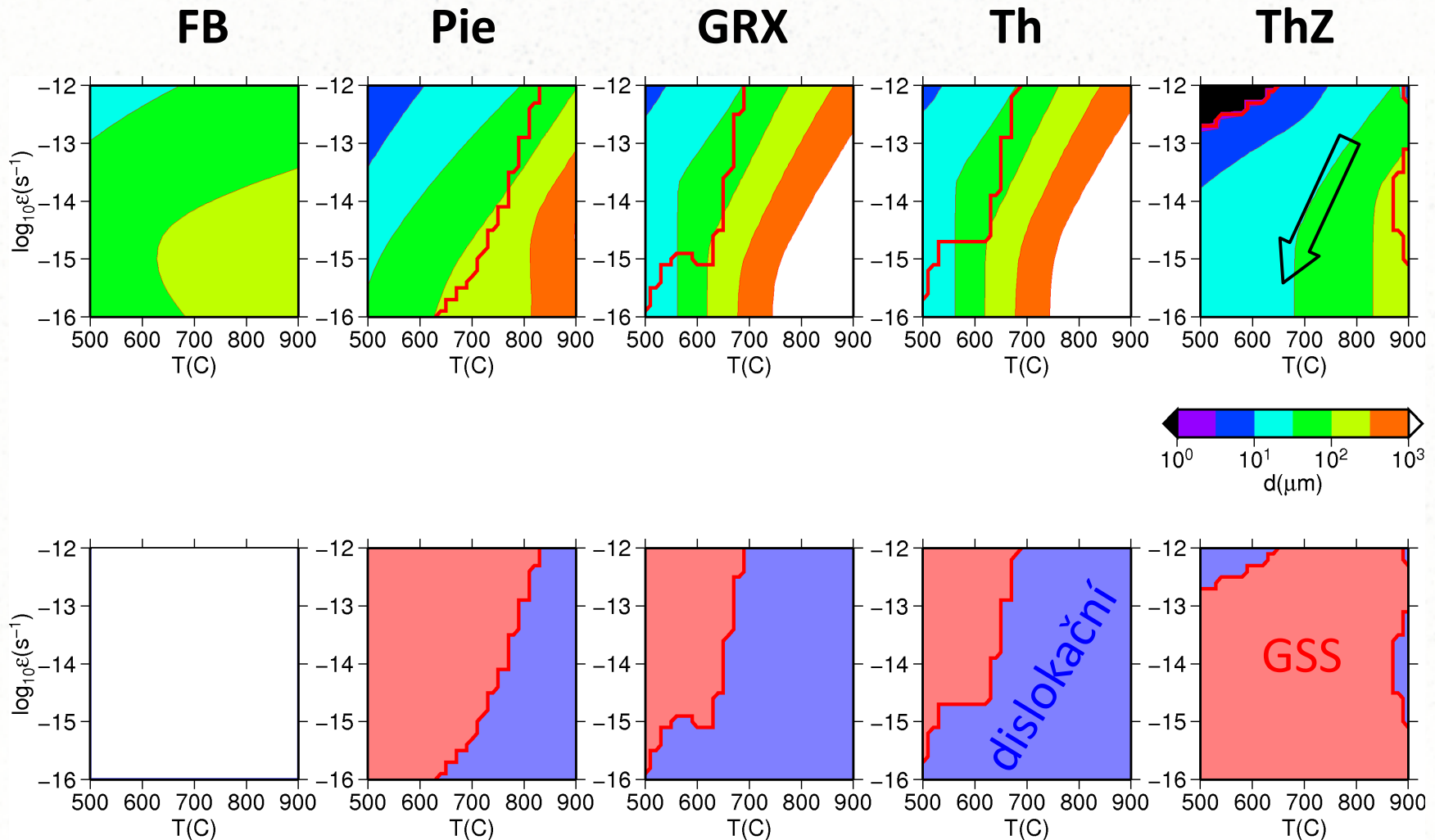
Kuře hledá žitné pole,  
ale to je dávno holé

A na suchá strniska  
vítr tiše zapíská:



# V. Modely

počáteční velikost zrna 20  $\mu\text{m}$ , doba vývoje 10 milionů let



## V. Modely

*V modelu ThZ se průměrná velikost zrna téměř nezvětší, zůstává v GSS oblasti.*

Možná vysvětlení S2–S3 přechodu:

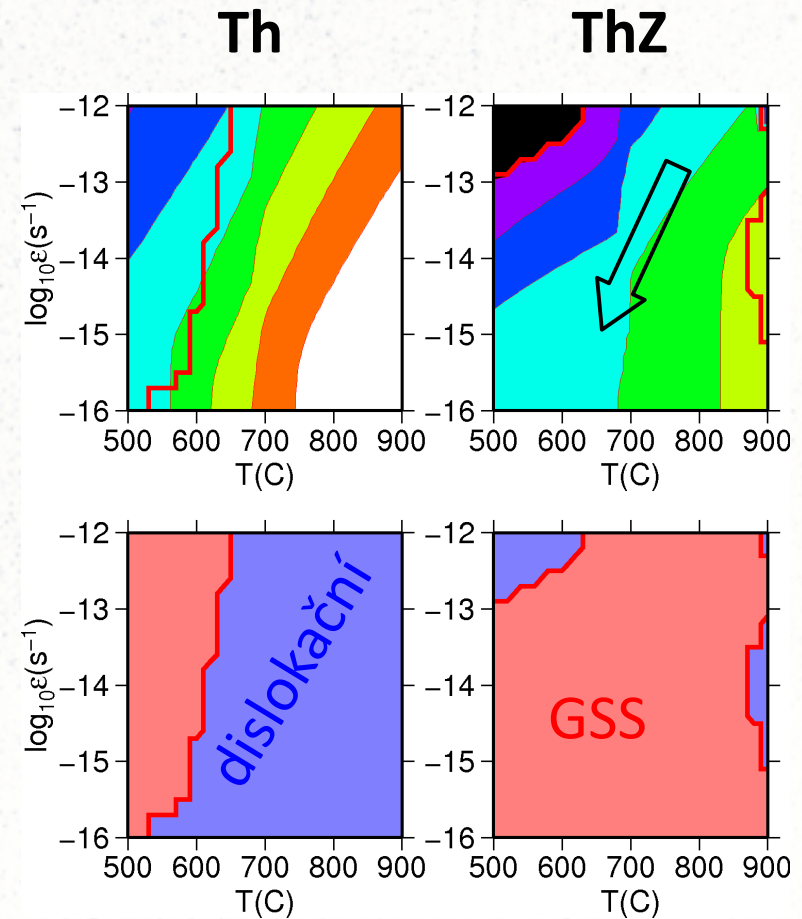
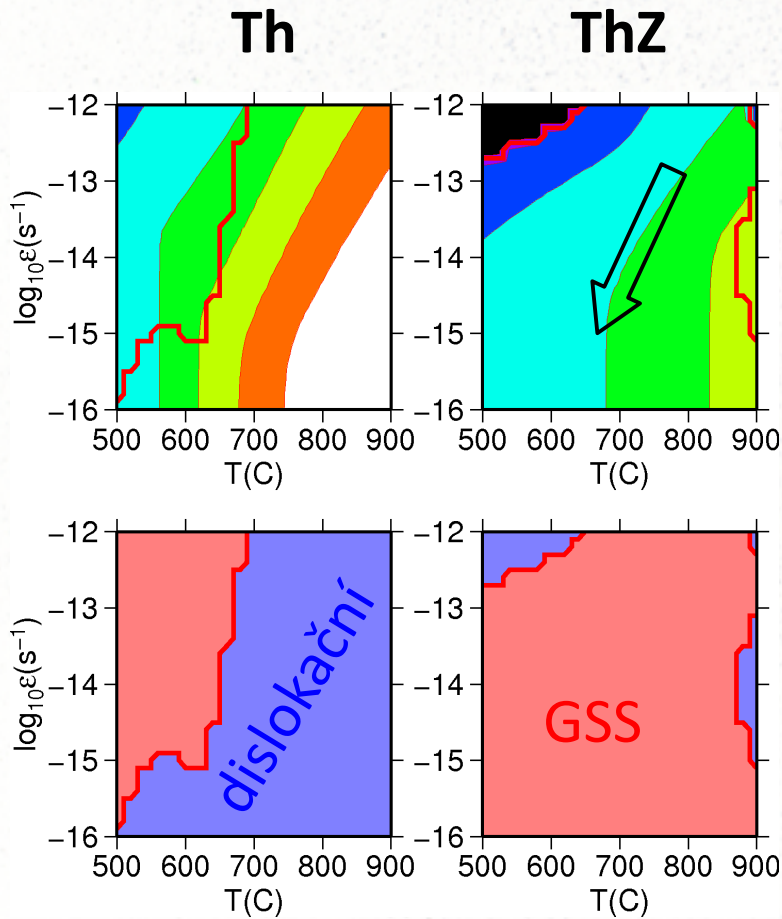
- změna na (efektivně) jednosložkový systém (ThZ->Th)
- další vlivy – utuhnutí taveniny v důsledku chladnutí, přítomnost vody, změna napěťových podmínek na větší škále

# V. Modely

počáteční velikost zrna 20  $\mu\text{m}$ , doba vývoje 10 milionů let

utuhnutí taveniny pro  $T < 700\text{ }^\circ\text{C}$

$$A_{\text{disl}} \times 0.01, A_{\text{gss}} \times 0.01$$

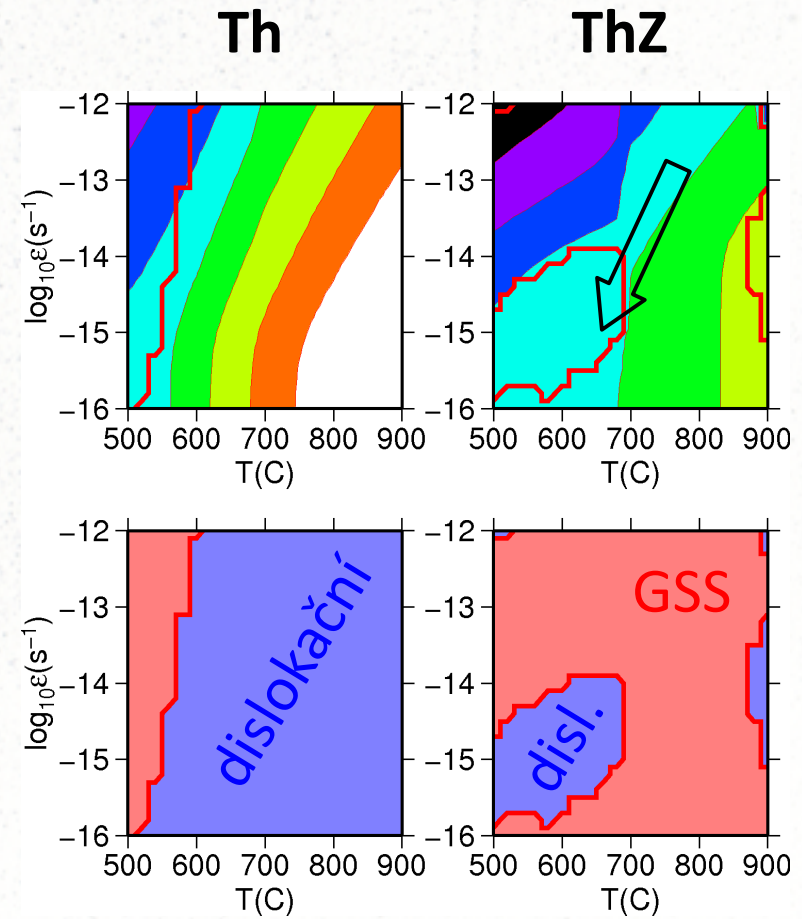
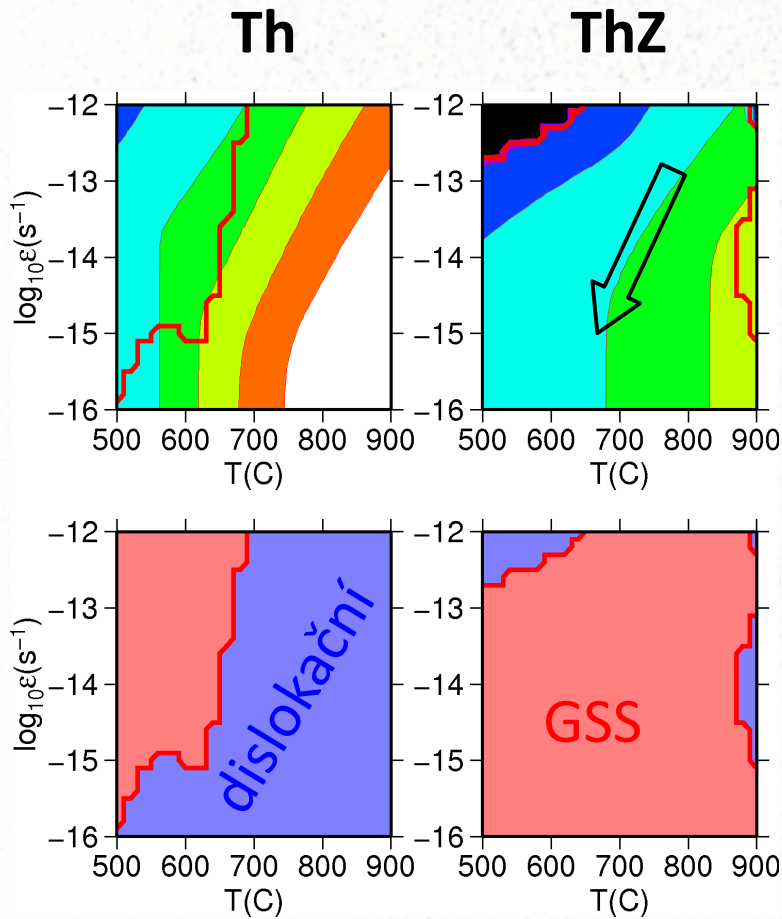


# V. Modely

počáteční velikost zrna 20  $\mu\text{m}$ , doba vývoje 10 milionů let

utuhnutí taveniny pro  $T < 700\text{ }^\circ\text{C}$

$$A_{\text{gss}} \times 0.01$$



## V. Modely

- **utuhnutí taveniny** -> snížení efektivity GSS tečení -> zvýšení napětí  
-> zmenšení hraniční velikosti zrna mezi GSS a dislokačním tečením -> **aktivace dislokačního tečení**
- velikost zrna neroste
- dislokační tečení může způsobit oddělení jednotlivých složek – **snížení vlivu pinningu**
- v komplikovanějším modelu se rychlost deformace a napětí mění jiným způsobem

# V. Modely 2D

2D termo-mechanické modely

FE software Elmer [[www.csc.fi/web/elmer](http://www.csc.fi/web/elmer)]

+ rozšíření pro modelování deformace v kůře [Maierová, 2013]

$$\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\rho g \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

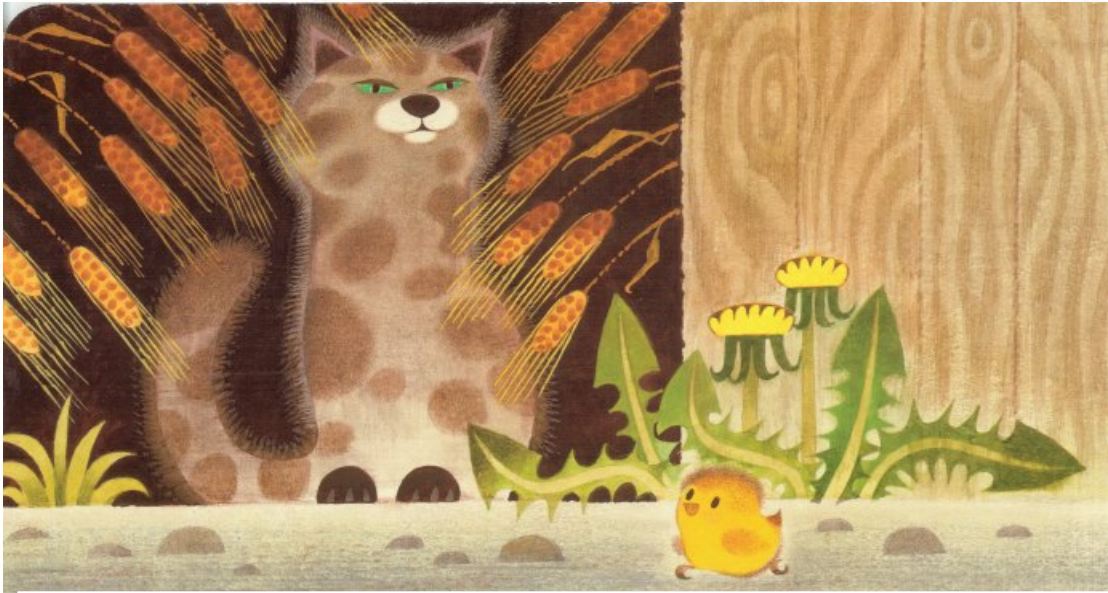
$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \nabla \cdot k \nabla T = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + Q$$

$$\frac{Dc_i}{Dt} = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, T, p, \{c_i\})$$

$$\rho = \rho(\{c_i\})$$

$$Q = Q(\{c_i\})$$

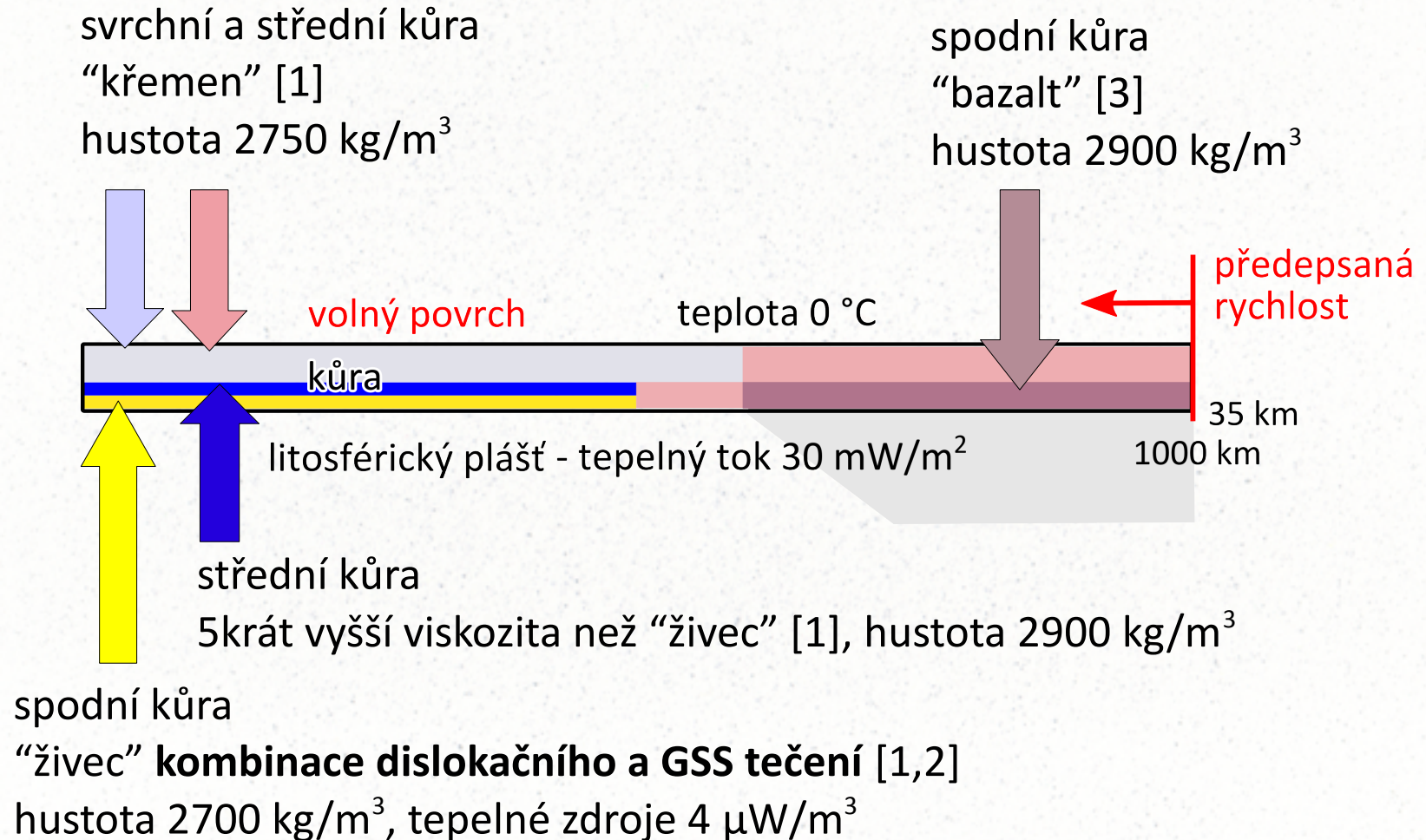


„Vždyť jsi doma, za chalupou.  
Slyšíš? V stáji koně dupou,

kocour ve stodole vrní –

# V. Modely 2D

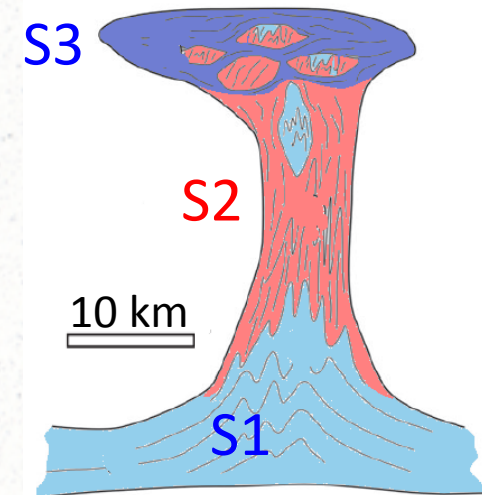
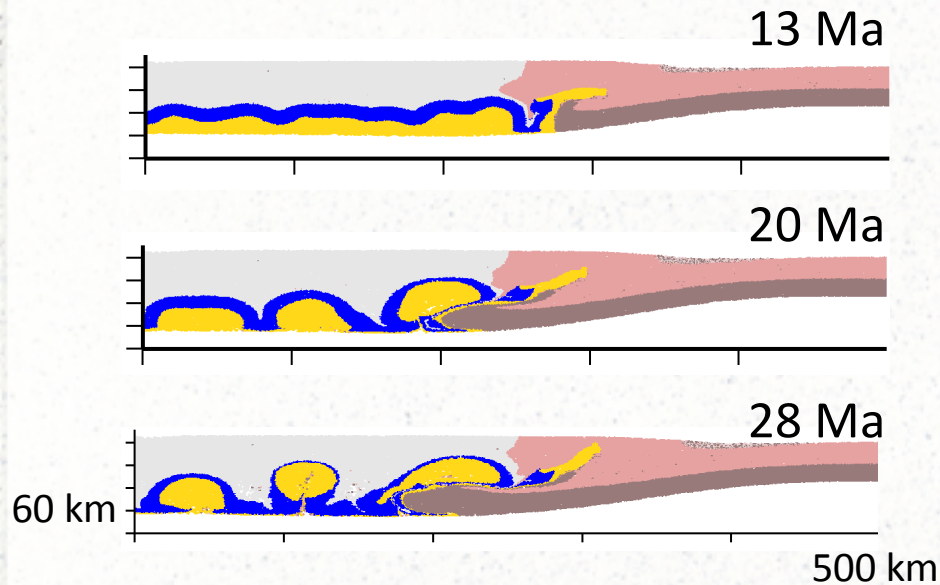
## Počáteční a hraniční podmínky:



[1] Ranalli 1995, [2] Rybacki & Dresen 2000, [3] Mackwell et al. 1998

# V. Modely 2D

Bez GSS, jen dislokační tečení

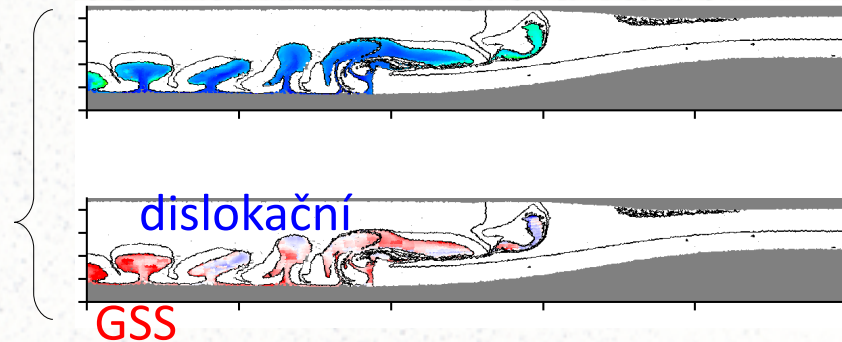
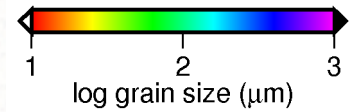
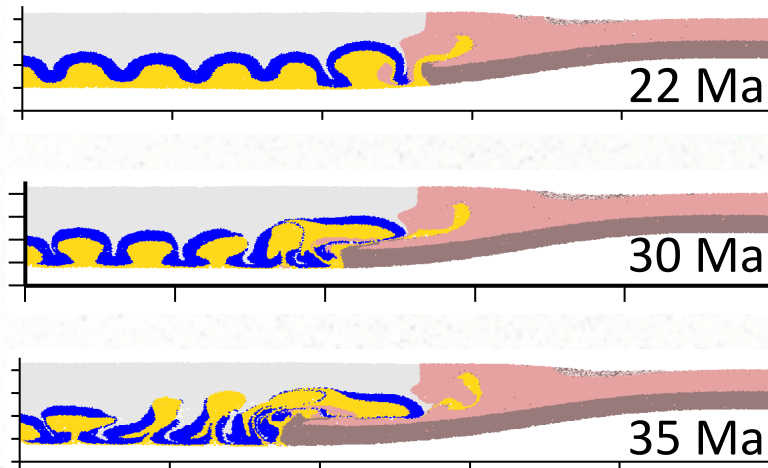


*Tvar ani rozměr namodelovaných diapirů neodpovídá geologickým pozorováním.*



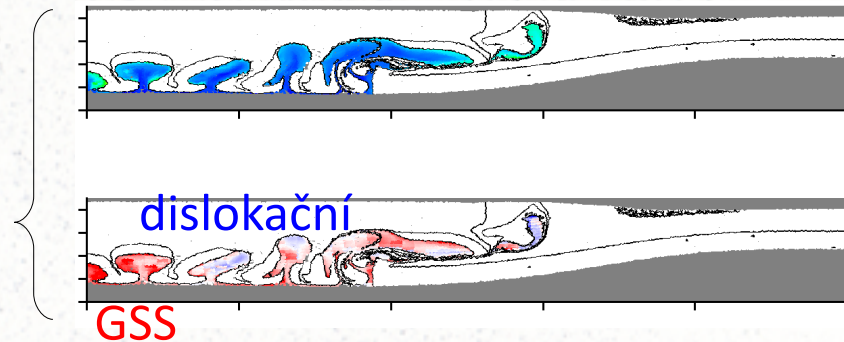
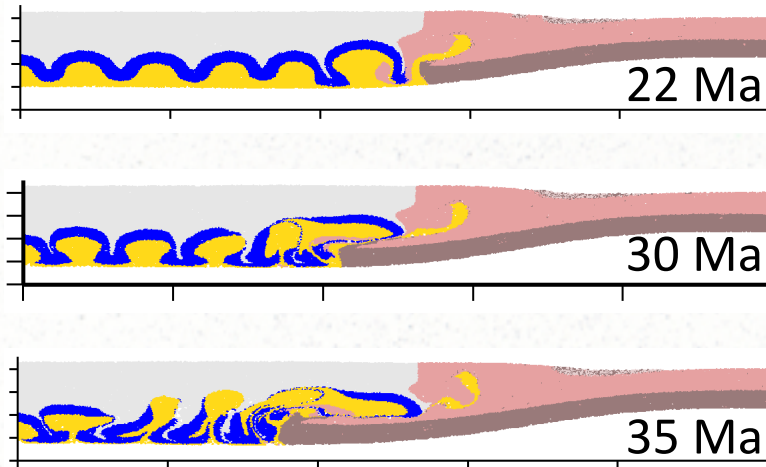
# V. Modely 2D

hraniční hypotéza (FB)  $\dot{d} = - \frac{\dot{\epsilon}_{\text{disl}}}{\epsilon_{\infty}} (d - d_{\infty})$

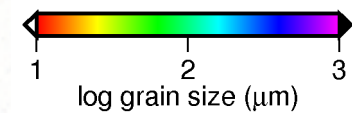
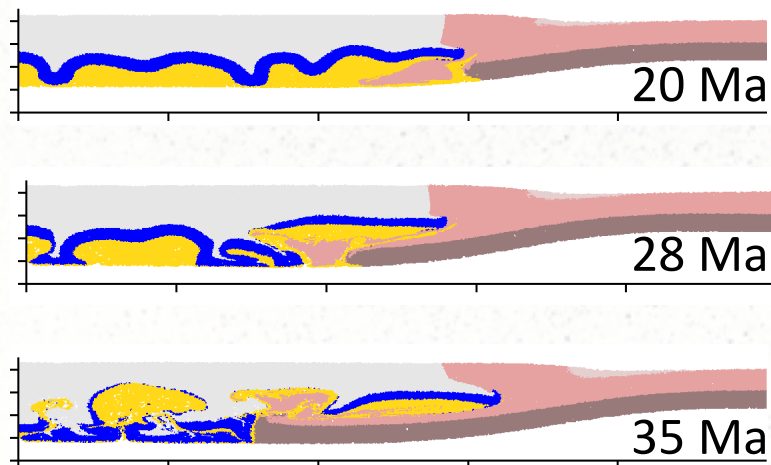


# V. Modely 2D

hraniční hypotéza (FB,disl)  $\dot{d} = - \frac{\dot{\epsilon}_{\text{disl}}}{\epsilon_{\infty}} (d - d_{\infty})$



FB,disl + správná rovnice pro viskozitu

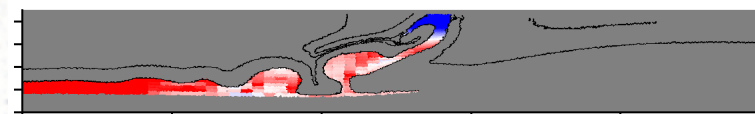
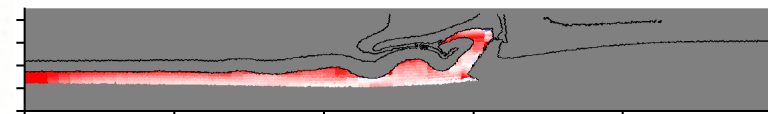
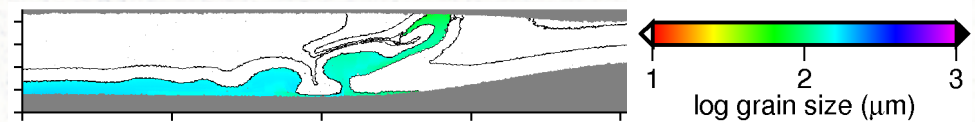
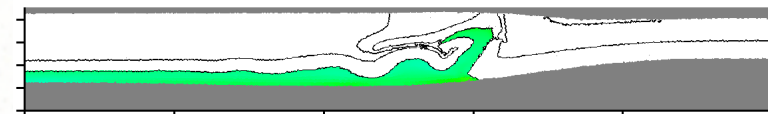
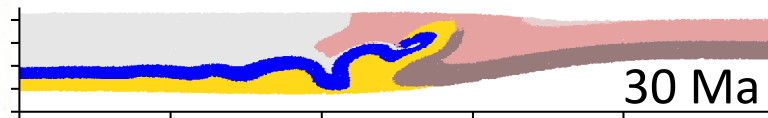
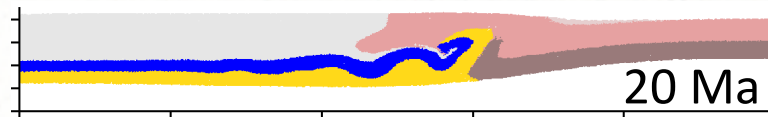


velikost zrna stále ~20 μm, zůstává v GSS

# V. Modely 2D

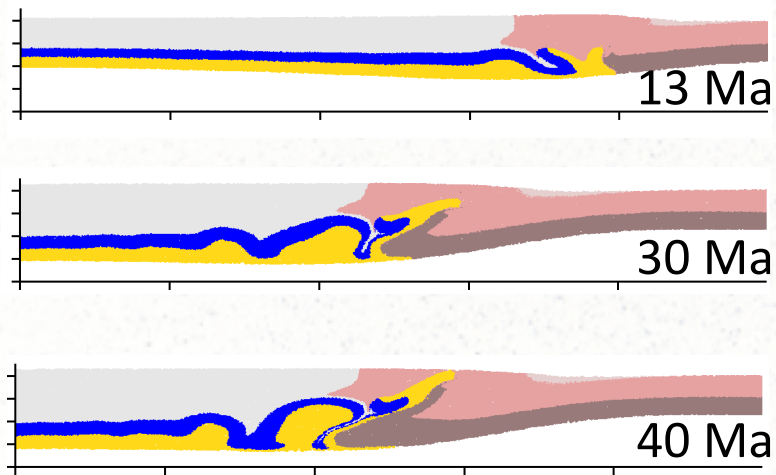
## hraniční hypotéza (FB)

$$\dot{d} = - \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_{\infty}} (d - d_{\infty})$$

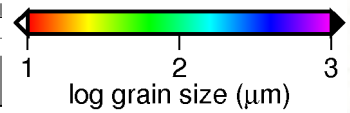
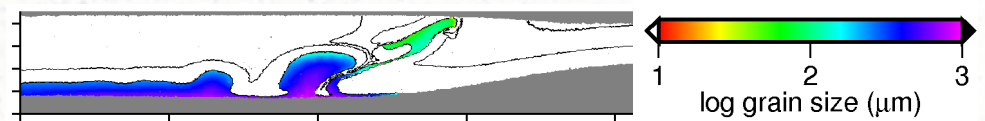
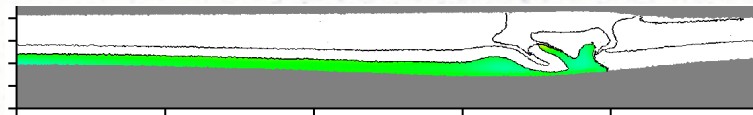


# V. Modely 2D

piezometr (Pie)



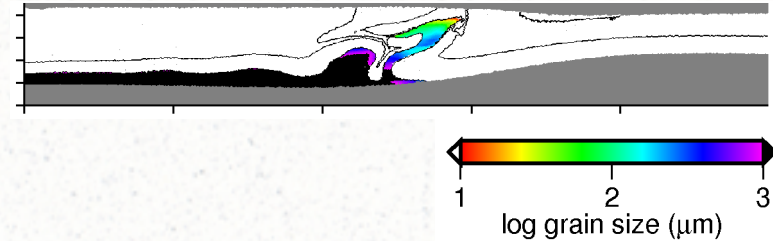
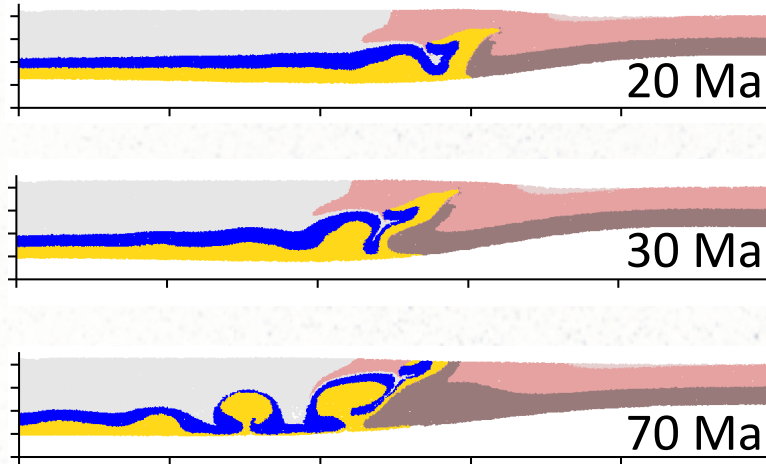
$$\dot{d} = - \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_{\infty}} (d - d_{\infty}) \quad d_{\infty} = D_0(T) \sigma^{-l}$$



# V. Modely 2D

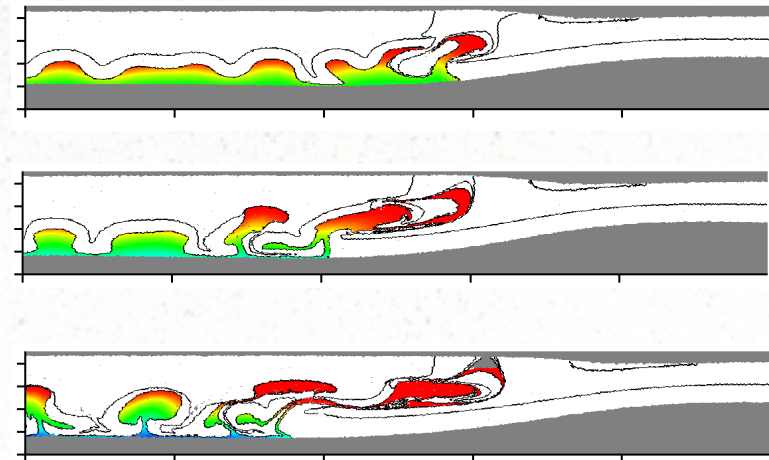
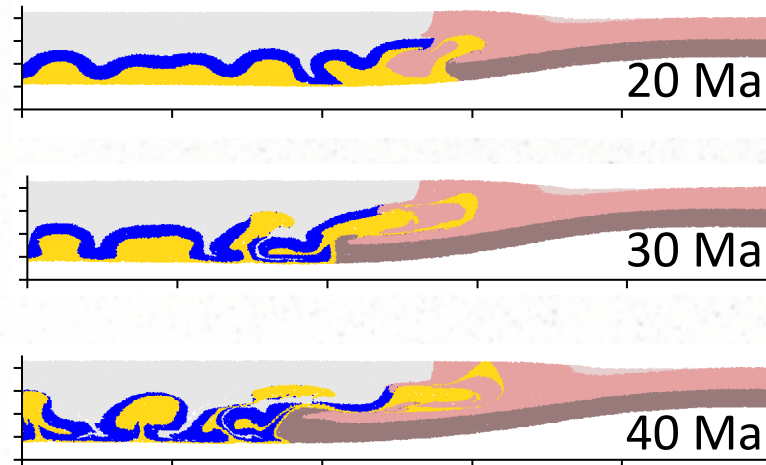
termodynamický přístup (Th)

$$\dot{d} = \frac{G}{p d^{p-1}} - f \frac{\lambda_3}{3\gamma\lambda_2} d^2 (\sigma : \dot{\epsilon}_{\text{disl}})$$



s pinningem (ThZ)

$$\dot{d}_i = \frac{G}{p d_i^{p-1}} Z_i - f(1 - f_r) \frac{\lambda_3}{3\gamma\lambda_2} d_i^2 (\sigma_i : \dot{\epsilon}_{\text{disl}}) Z_i^{-1}$$



# Shrnutí

- řada přístupů dávajících různý vývoj velikosti zrna
- podstatná je volba s/bez růstového členu, s/bez rekrystalizace v GSS oblasti, s/bez pinningu
- jednoduchý přístup nedokáže vystihnout celý proces – je potřeba si pomoci např. tavením/solidifikací nebo fázovým přechodem



a tvá máma za vraty

zob, zob, zobá bílé zrní  
s ostatními kuřaty."

# Konec pohádky



„Děkuji ti, žitné pole!“  
„Pozdravuj tam ve stodole!“

„Koho, milé políčko?“  
„Zrno i to zrníčko!“



Ať se ke mně zjara hlásí,  
vychovám z nich nové klasy!“

A tak mámu zakrátko  
našlo také kuřátko.

# Literatura

- Bercovici & Ricard: Mechanisms for the generation of plate tectonics by two-phase grain-damage and pinning, PEPI, 2012.
- de Bresser et al.: On dynamic recrystallization during solid state flow: effects of stress and temperature. *Geophys. Res. Lett.* 25, 3457–3460, 1998.
- Franěk et al.: Origin of felsic granulite microstructure by heterogeneous decomposition of alkali feldspar and extreme weakening of orogenic lower crust during the Variscan orogeny, *JMG*, 2011.
- Oliot et al.: Mid-crustal shear zone formation in granitic rocks: Constraints from quantitative textural and crystallographic preferred orientations analyses, *Tectonophysics*, 2014.
- Maierová: Evolution of the Bohemian Massif: Insights from numerical modeling. Doctoral thesis. <http://geo.mff.cuni.cz/theses/2013-Maierova-PhD.pdf>, 2013.
- Rozel et al.: A thermodynamically self-consistent damage equation for grain size evolution during dynamic recrystallization, *GJI*, 2011.
- Montési & Hirth: Grain size evolution and the rheology of ductile shear zones: from laboratory experiments to postseismic creep, *EPSL*, 2003.
- Elmer, Open Source Finite Element Software for Multiphysical Problems, CSC – IT Center for Science, Espoo, Finland, [www.csc.fi/english/pages/elmer](http://www.csc.fi/english/pages/elmer).
- <http://virtualexplorer.com.au/special/meansvolume/contribs/brecht/>
- <http://www.geology.um.maine.edu/geodynamics/AnalogWebsite/UndergradProjects2010/PatrickRyan/Pages/Home%20Page.html>
- Hrubín & Miler: *Kuřátko a obilí*, 1953.