

Úskalí modelování vlastních kmitů

Eliška Zábranová

Katedra geofyziky

MFF UK

Přehled

- PRO PŘIPOMENUTÍ
 - Rovnice, metoda řešení
- ÚSKALÍ VÝPOČTŮ
 - Podmínka na kapalném rozhraní
 - Frekvenční závislost vlastních kmitů
 - Identifikace módů
- ÚSKALÍ DAT
 - Štěpení multipletů
- URČOVÁNÍ FAKTORŮ KVALITY A SESMICKÉHO MOMENTU

Modelování

- Rovnice
 - $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho_0 \nabla \varphi + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \nabla \varphi_0 - \nabla (\rho_0 \nabla \varphi_0 \cdot \mathbf{u}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ —■ pohybová rovnice
 - $\nabla \cdot (\nabla \varphi + 4\pi G \rho_0 \mathbf{u}) = 0$ —■ Poissonova rovnice
 - $\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] = \boldsymbol{\tau}$ —■ reologický vztah

\mathbf{u} - posunutí

φ - přírůstkový gravitační potenciál

$\boldsymbol{\tau}$ - přírůstkový tenzor napětí

λ and μ - Laméovy parametry tělesa

- Sférická harmonická dekompozice $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{nm} \left[\underbrace{U_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(-1)} + V_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(1)}}_{\text{sféroidální část}} + \underbrace{W_{nm}(r) \mathbf{S}_{nm}^{(0)}}_{\text{toroidální část}} \right]$

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_n F_n(r) Y_n(\vartheta, \varphi)$$

- Diskretizace pomocí schémat s pseudospektrální přesností v kořenech Čebyševových polynomů.

- Vlastní problém $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}] \mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{Z} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Y}$

- vektor \mathbf{Y} obsahuje posunutí na vnitřních bodech vrstvy

- vektor \mathbf{Z} obsahuje potenciál a posunutí na hranicích

Hraniční podmínky pro sféroidální kmity

<p>pevné rozhraní</p>	$[U_n]_-^+ = 0,$ $[V_n]_-^+ = 0,$ $[T_{rr,n}]_-^+ \equiv \left[\beta U_n' + \frac{\lambda}{r} (2U_n - NV_n) \right]_-^+ = 0,$ $[T_{r\vartheta,n}]_-^+ = \left[\mu \left(V_n' - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r} \right) \right]_-^+ = 0,$ $[F_n]_-^+ = 0,$ $[F_n' + 4\pi G\rho_0 U_n]_-^+ = 0,$
<p>kapalné rozhraní</p>	$[U_n]_-^+ = 0,$ $[T_{rr,n}]_-^+ \equiv \left[\beta U_n' + \frac{\lambda}{r} (2U_n - NV_n) \right]_-^+ = 0,$ $[T_{r\vartheta,n}]_-^+ \equiv \mu \left(V_n' - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r} \right) = 0,$ $[F_n]_-^+ = 0,$ $[F_n' + 4\pi G\rho_0 U_n]_-^+ = 0,$
<p>volný povrch</p>	$T_{rr,n} \equiv \beta U_n' + \frac{\lambda}{r} (2U_n - NV_n) = 0,$ $T_{r\vartheta,n} \equiv \mu \left(\frac{dV_n}{dr} - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r} \right) = 0$ $Q_n \equiv F_n' + \frac{n+1}{r} F_n + 4\pi G\rho_0 U_n = 0.$

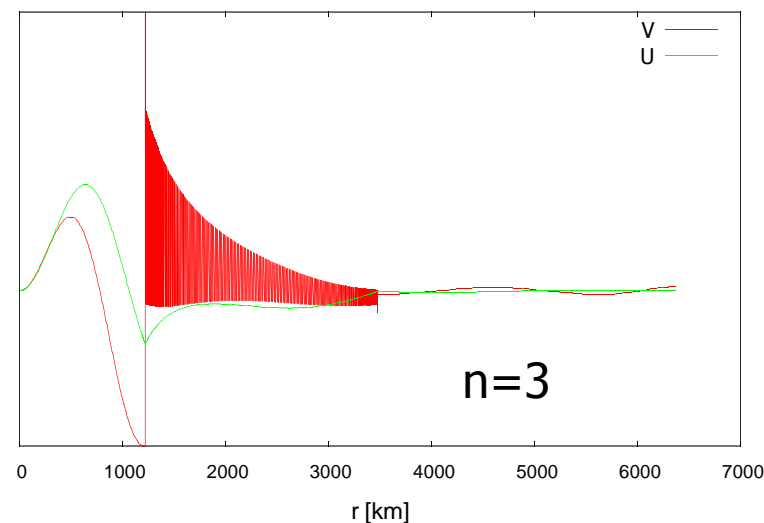
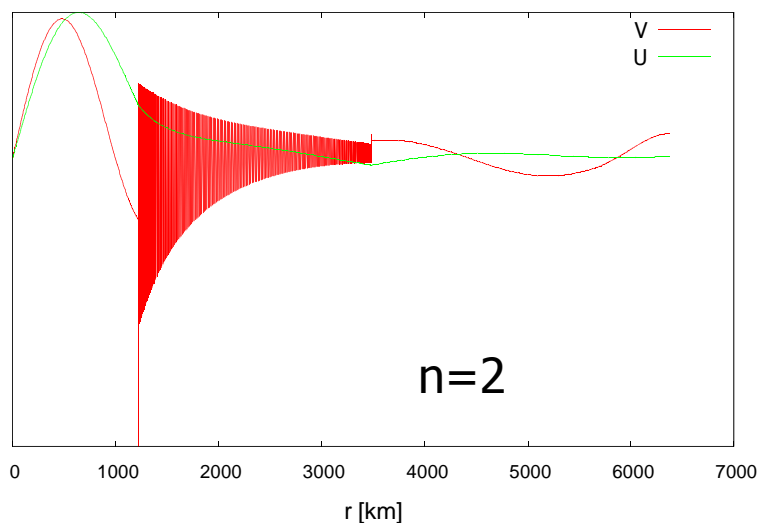
Vliv podmínky na kapalném rozhraní

Potřeba dodat jednu podmínku z kapalně strany

• Rovnice
$$\mu V_n'' + \frac{2\mu}{r} V_n' - \frac{\beta N}{r^2} V_n + \frac{\mu + \lambda}{r} U_n' + \left(\frac{2\beta}{r^2} - \frac{\rho_0 g_0}{r} \right) U_n - \frac{\rho_0}{r} F_n + \mu' \left(V_n' + \frac{1}{r} U_n - \frac{1}{r} V_n \right) = -\rho_0 \omega_n^2 V_n$$

$$-\frac{\lambda}{r} U_n' + \left(\frac{\rho_0 g_0}{r} - \frac{2\lambda}{r^2} \right) U_n + \frac{N\lambda}{r^2} V_n + \frac{\rho_0}{r} F_n = \rho_0 \omega_n^2 V_n$$

• Ztotožnění V na hranici se sousedním bodem



Frekvenční závislost vlastních kmitů

Frekvenční závislost seismických rychlostí v PREMÚ

$$V_S(T) = V_S(1) \cdot \left(1 - \frac{\ln T}{\pi} q_\mu \right)$$

$$V_P(T) = V_P(1) \cdot \left\{ 1 - \frac{\ln T}{\pi} [(1 - E) q_K + E q_\mu] \right\} \quad E = \frac{4}{3} (V_S/V_P)^2$$

Oprava vlastní frekvence na frekvenci modelu závislá na faktoru kvality

$$\delta\omega_d = \omega Q^{-1} \ln(\omega/\omega_0)/\pi$$

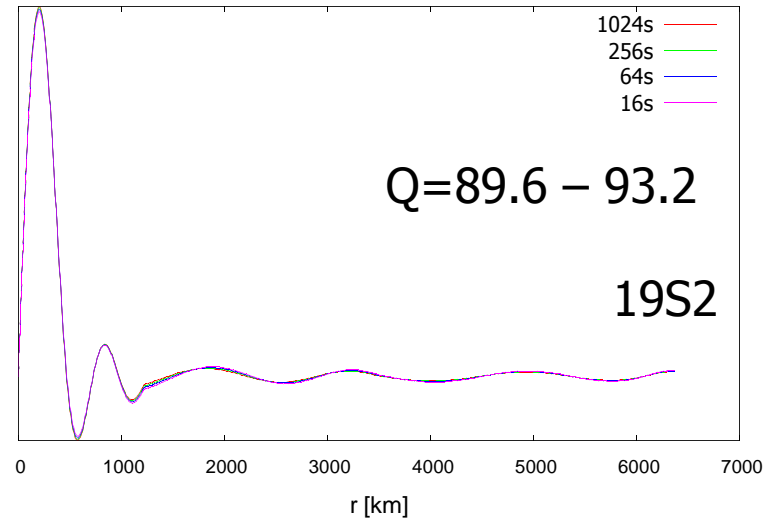
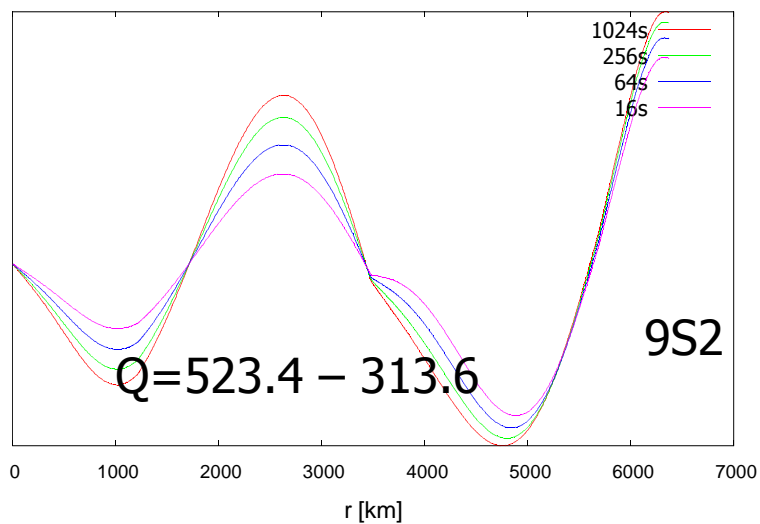
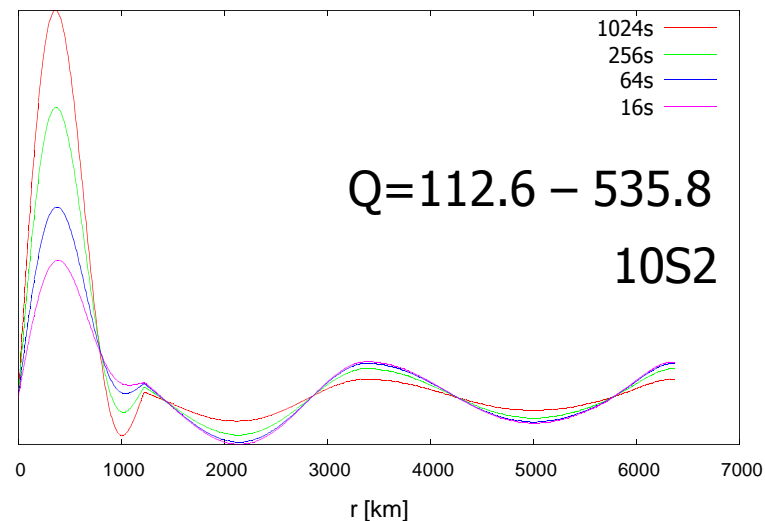
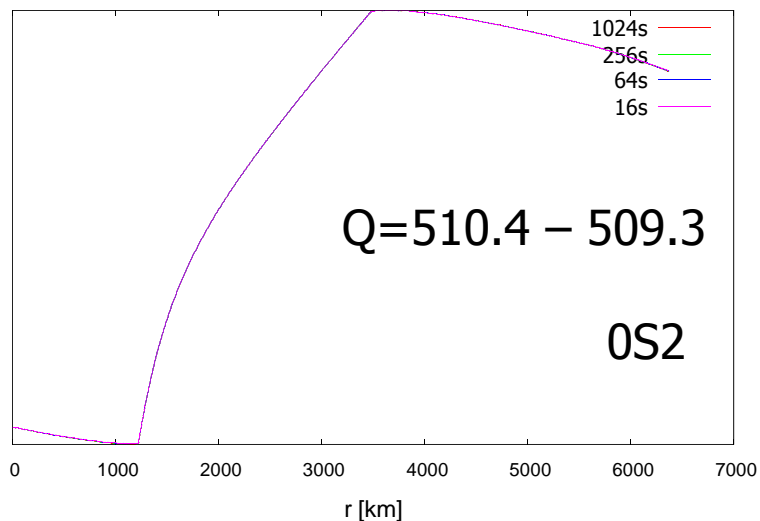
Faktor kvality závislý na vlastních funkcích

$$Q^{-1} = 2\omega^{-1} \int_0^a [(\kappa_0 K_\kappa) Q_\kappa^{-1} + (\mu_0 K_\mu) Q_\mu^{-1}] dr$$

Vlastní funkce mohou silně záviset na frekvenci modelu

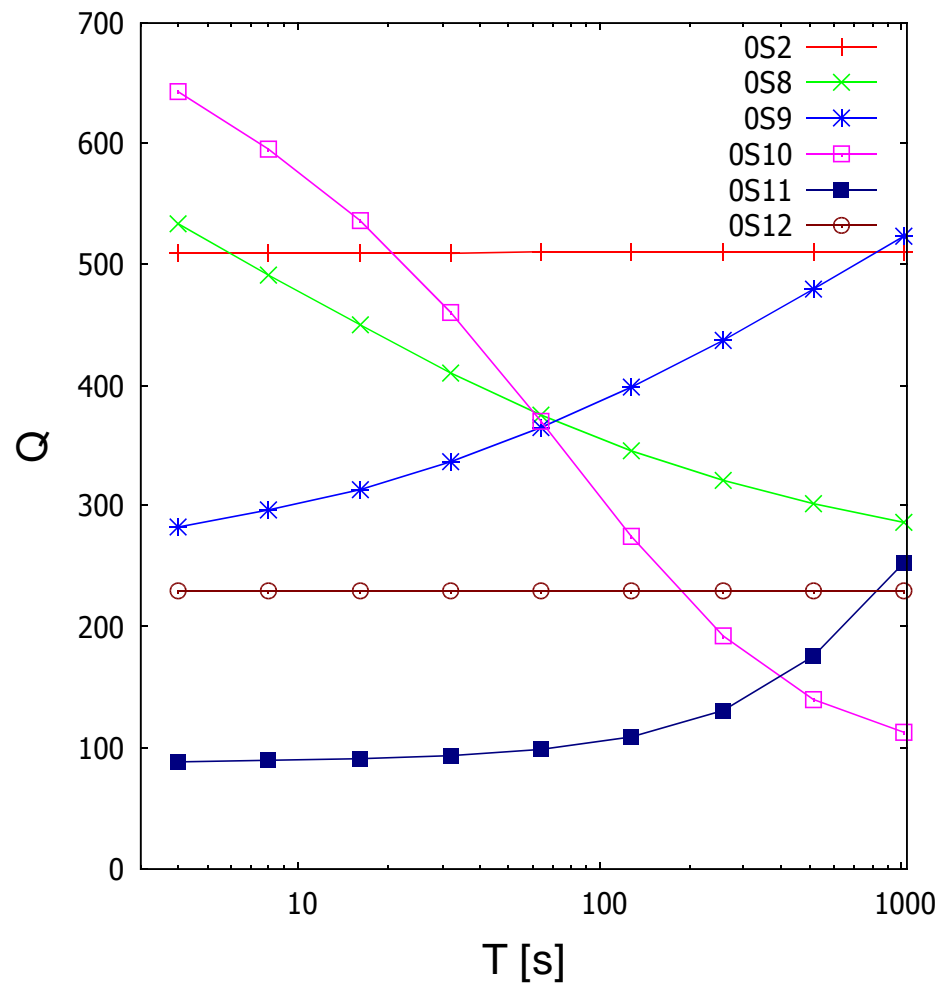
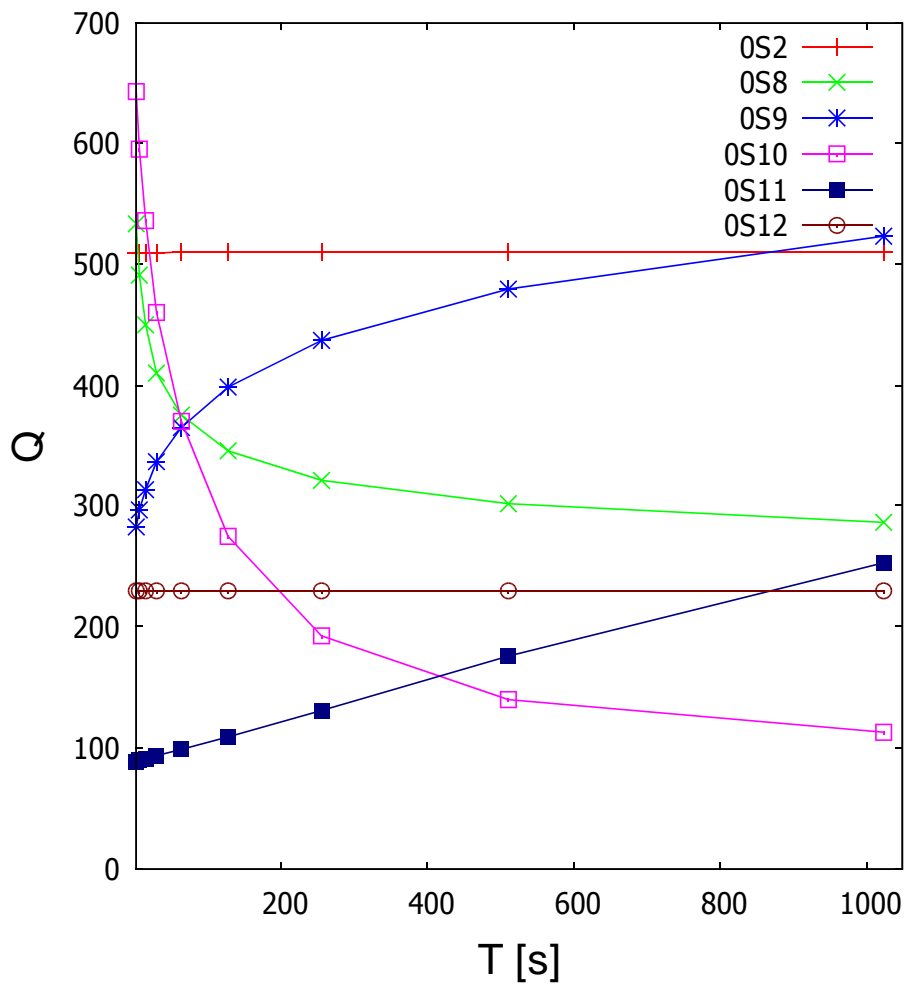
Frekvenční závislost vlastních funkcí

Periody PREMů: 1024s, 256s, 64s, 16s



Frekvenční závislost faktorů kvality

Periody PREMu: 1024s, 512s, 256s, ..., 8s, 4s



Identifikace a interpolace vlastních funkcí

Výpočet na několika periodách: 1024s, 512s, 256s, ..., 8s, 4s

Módy mohou být proházeny – malé $Q \Rightarrow$ velké $\delta\omega_d = \omega Q^{-1} \ln(\omega/\omega_0)/\pi$

Porovnání rozdílového integrálu – identifikace

$$\int_0^a (\Delta U^2 + \Delta V^2) \rho r^2 dr$$

Interpolace $T_2 > T > T_1$

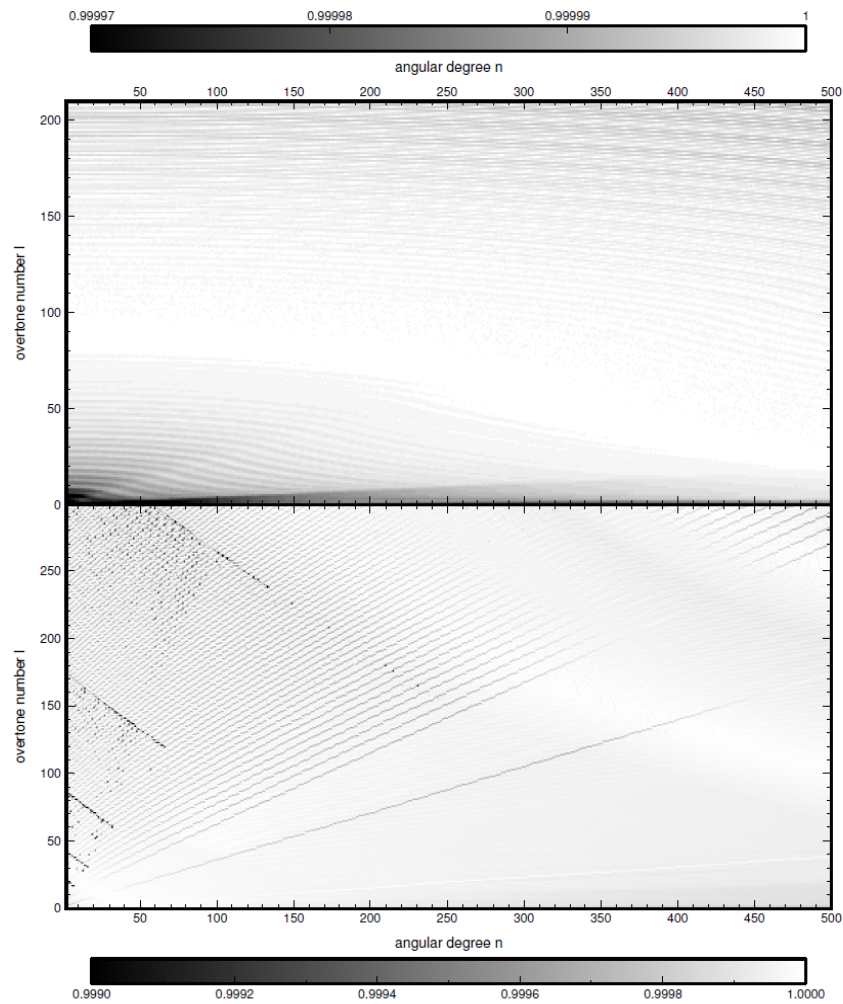
$$T = T_1 + \frac{\log(T_1 + T_2)/2 - \log T_1}{\log T_2 - \log T_1} (T_2 - T_1) \quad U = U_1 + \frac{\log T - \log T_1}{\log T_2 - \log T_1} (U_2 - U_1)$$

kontrola

$$Q = Q_1 + \frac{\log T - \log T_1}{\log T_2 - \log T_1} (Q_2 - Q_1)$$

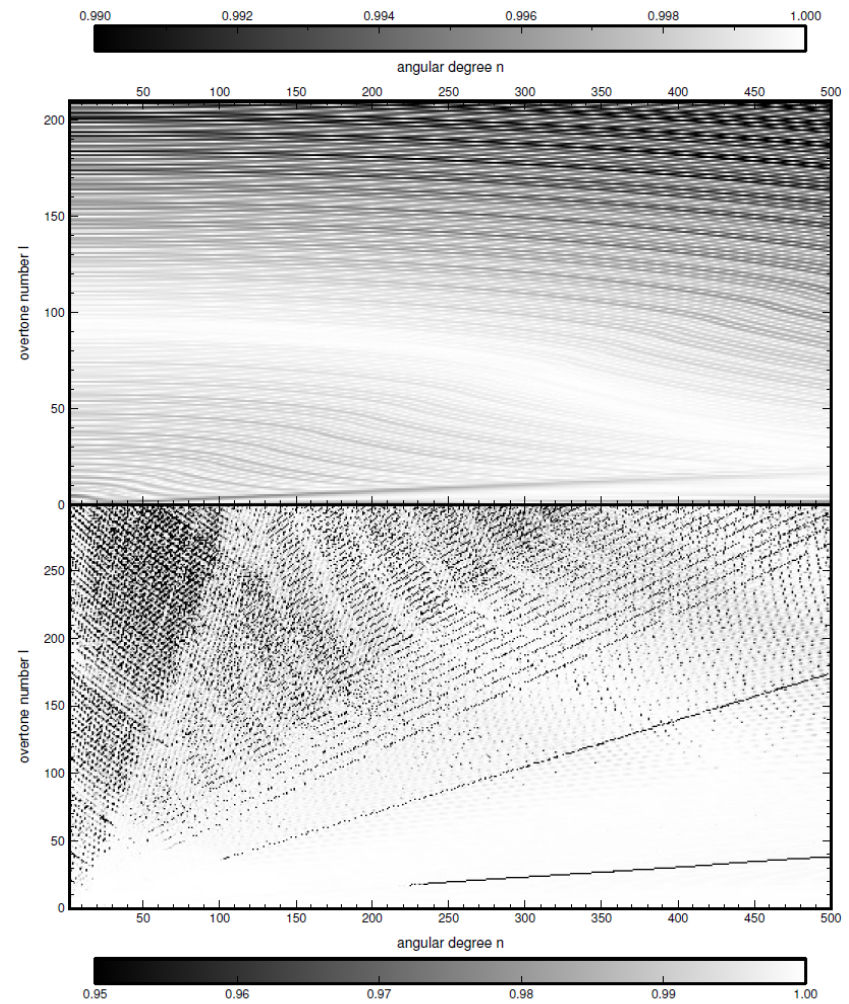
$$Q^{-1} = 2\omega^{-1} \int_0^a \left[(\kappa_0 K_\kappa) Q_\kappa^{-1} + (\mu_0 K_\mu) Q_\mu^{-1} \right] dr$$

Frekvence a faktory kvality srovnání do 250mHz



T

S



• Zrychlení

- reálná odezva aparatury (pro rotační, eliptický, anelastický model)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \sum_{nlm} \mathbf{A}_{nlm}(\mathbf{x}) \cos \left[n\omega_l \left(1 + a + bm + cm^2 \right) t \right] \exp(-n\gamma_l t)$$

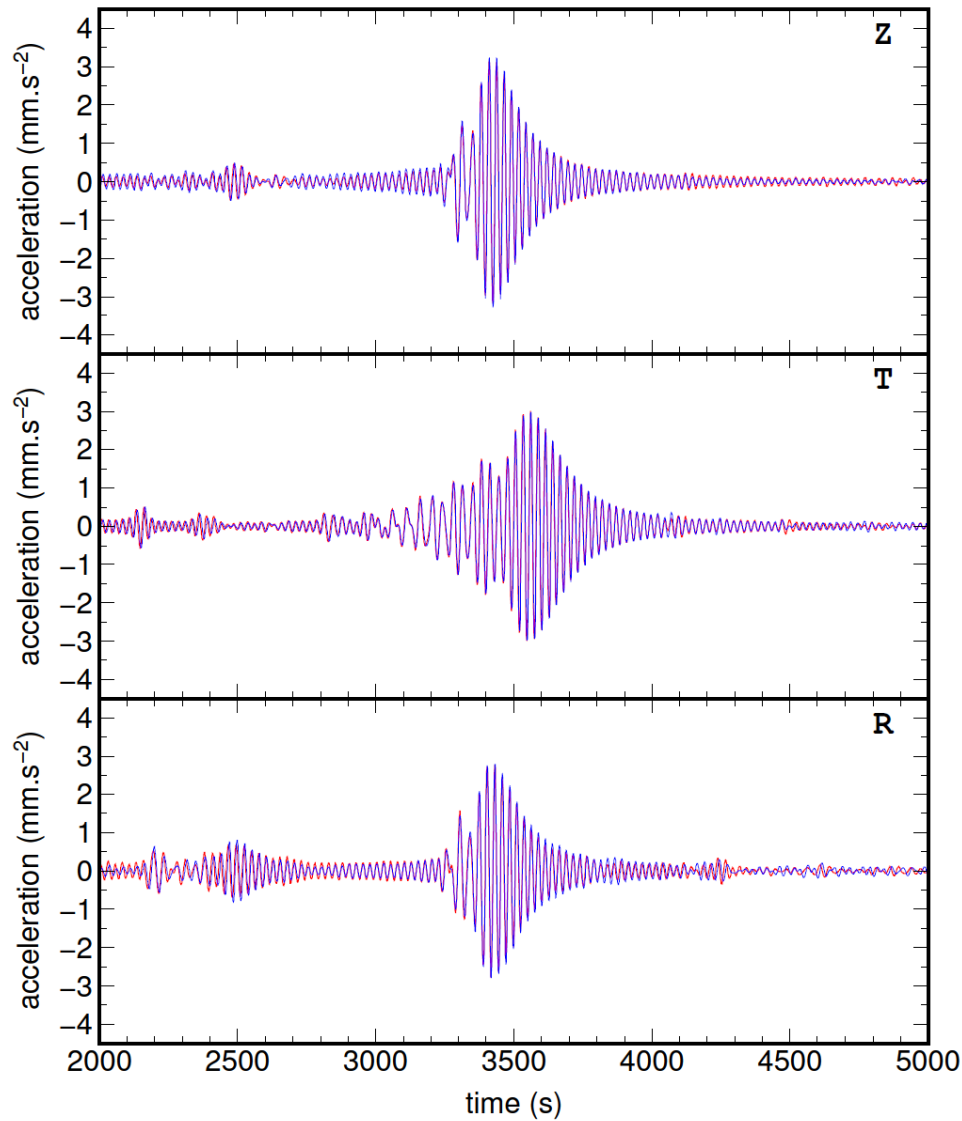
$n\omega_l$ - neperturovaná frekvence multipletu

$n\gamma_l$ - útlum multipletu

Koeficienty $\mathbf{A}_{nlm}(\mathbf{x})$ dané:

- obecným momentovým tenzorem
 - pozicí zdroje a přijímače (epicentrální vzdálenost, azimut)
 - vlastními funkcemi ve zdroji a na povrchu
 - korekce na volný vzduch a náklon (nutné zahrnout díky pohybu přístroje v grav. poli)
- štěpení v důsledku rotace, elipticity a laterálních nehomogenit

Syntetické seismogramy



Tři komponenty syntetického akcelerogramu

Z – vertikální

T – transverzální

R – radiální

Zdroj – GCMT řešení pro 2010 Maule

Sféroidální a toroidální módy do 40mHz

→ MINEOS

→ Naše

T (Loveho vlny) – toroidální módy

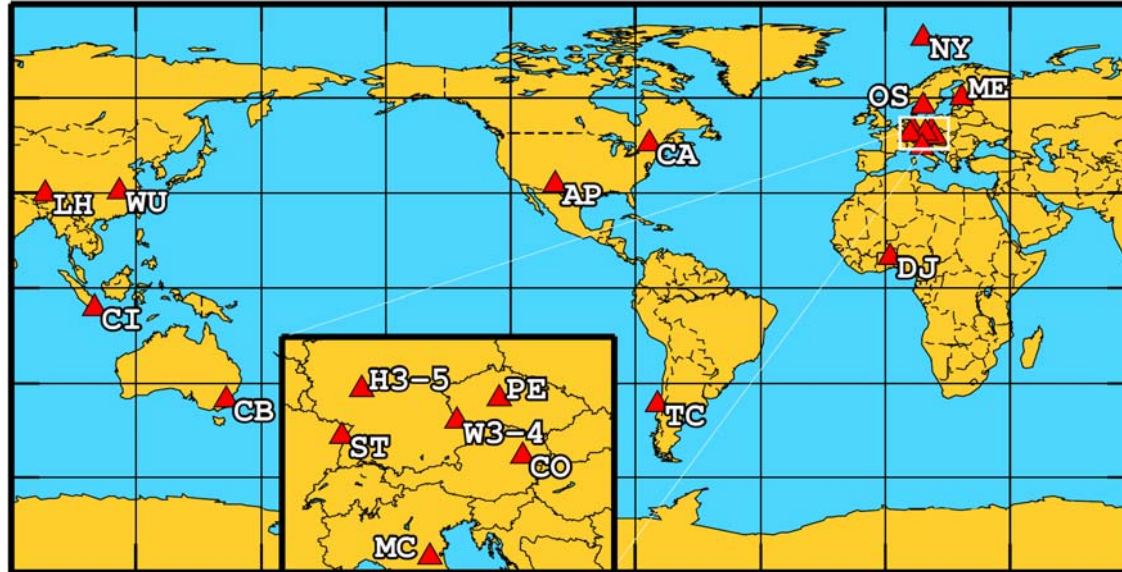
Z, R (Rayleigho vlny) – sféroidální módy

• Data

- záznamy ze supravodivých gravimetrů v rámci Global Geodynamics Project

<http://www.eas.slu.edu/GGP/ggphome.html>

- sběr dat po významných jevech (Sumatra 2004, Maule 2010, Tohoku 2011)
 - sekundová i minutová gravitační data, atmosférický tlak

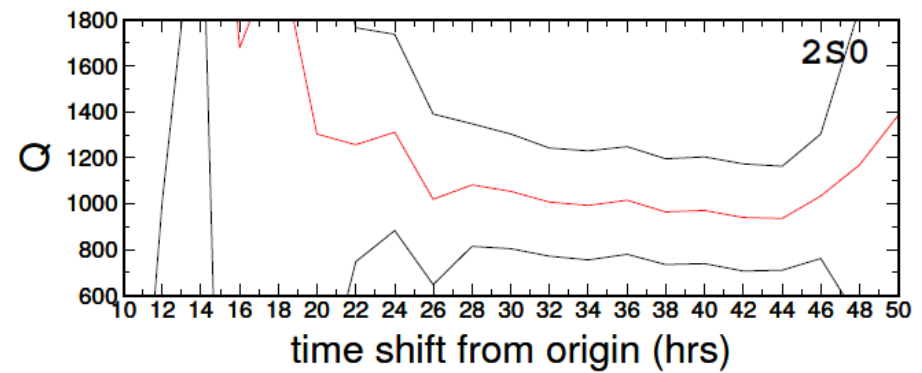
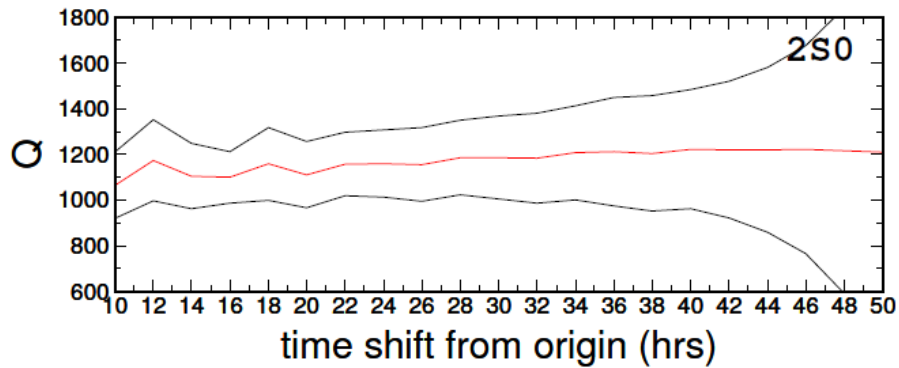
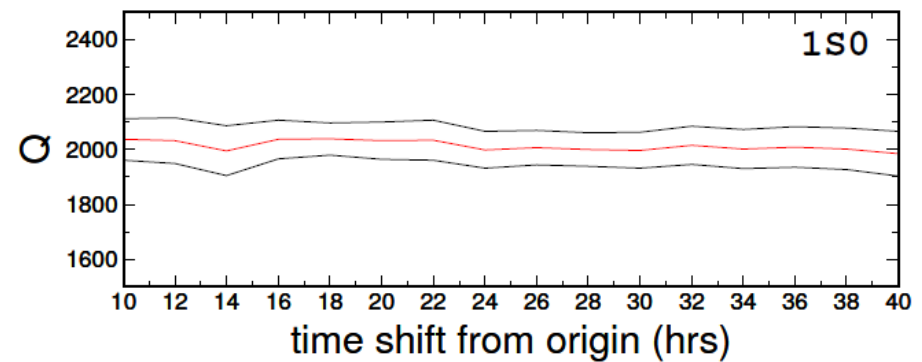
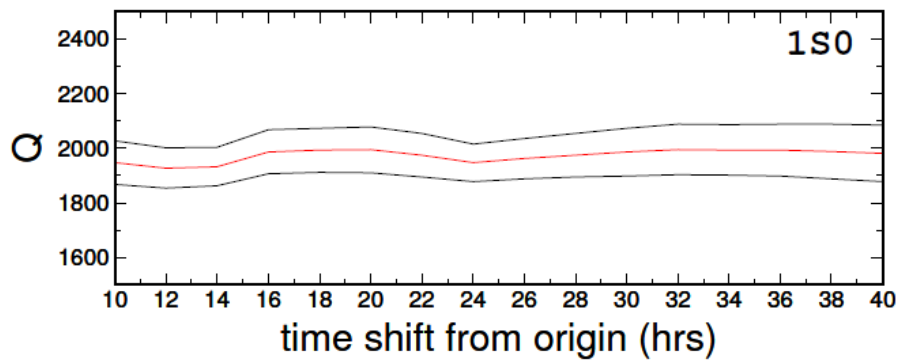
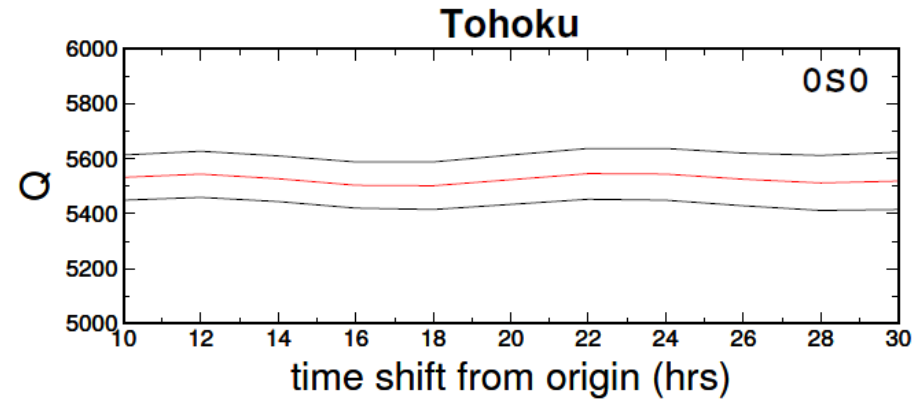
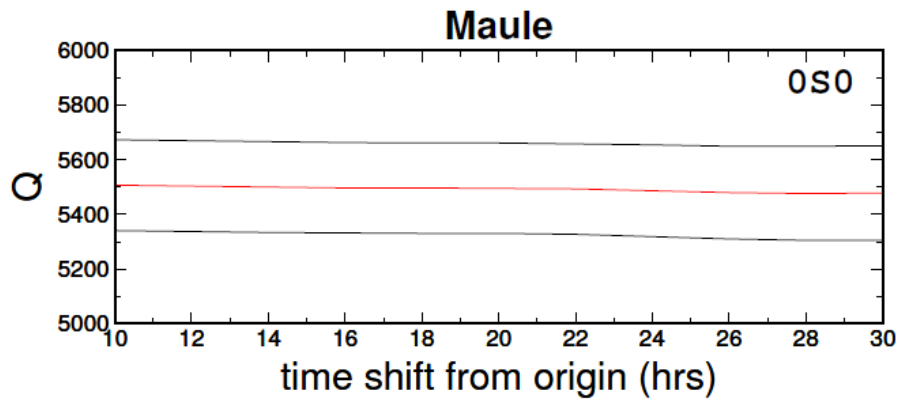


• Data

- sekundový záznam gravitačního zrychlení a atmosférického tlaku ve voltech
- potřeba odstranit vliv:
 - atmosférického tlaku
 - faktor závislý lokálně i frekvenčně : $(-0.27 - -0.43 \mu\text{Gal hPa}^{-1})$
- slapy (modelem nebo filtrací)
- trend

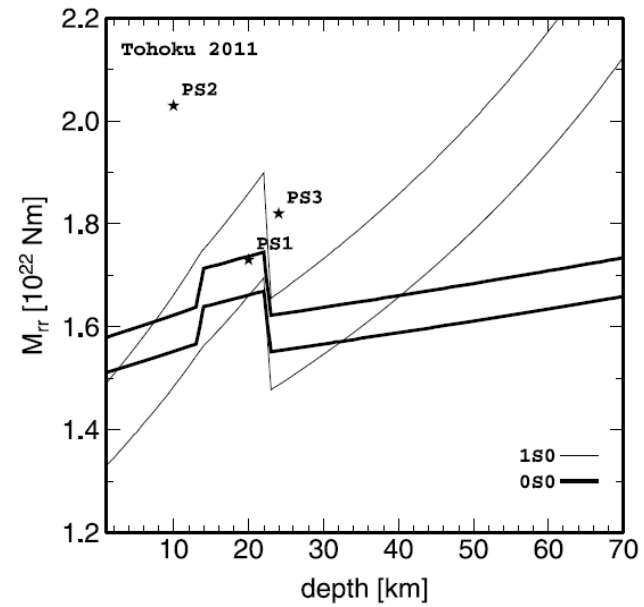
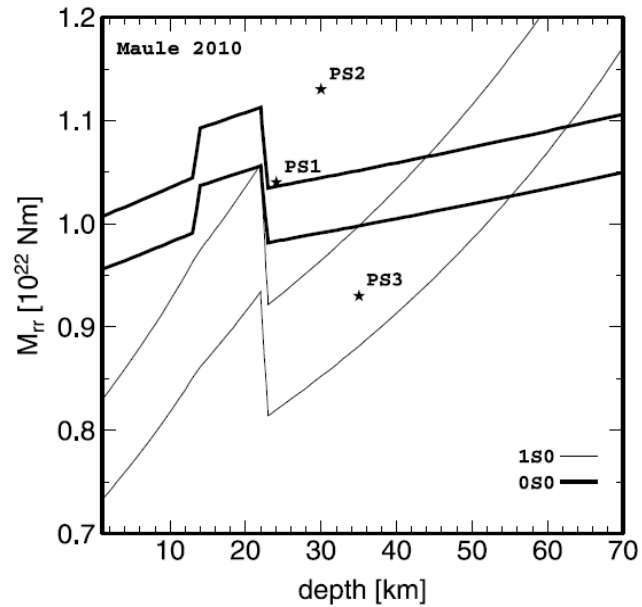
```
Filename          : PE110300.GGS
Station           : Pecny, Czech Republic
Instrument        : GWR OSG-050
Time Delay (sec)  :      8.8600    0.0200 measured
N. Latitude (deg) :      49.9137    0.0001 measured
E. Longitude (deg) :      14.7856    0.0001 measured
Elevation MSL (m) :      534.5800    0.0500 measured
Gravity Cal (uGal/V) :     -73.3500    0.0200 measured
Pressure Cal (hPa/V) :       1.0000    0.0060 measured
Author           : vojtech.palinkas@pecny.cz
yyyyymmdd hhmmss gravity(V) pressure(V)
C*****
77777777          0.0          0.0
20110301 000000   0.313755   962.6310
20110301 000001   0.303011   962.6290
20110301 000002   0.297373   962.6270
20110301 000003   0.303552   962.6220
20110301 000004   0.319019   962.6200
20110301 000005   0.333299   962.6180
20110301 000006   0.336057   962.6180
20110301 000007   0.325090   962.6200
```

Přímé určení faktoru kvality z **dat** – radiální módy



• Radiální kmity – Maule 2010, Tohoku 2011

0S0 – 450h záznamu, 1S0 – 170h záznamu



- PS1 – Global CMT Solution
- PS2 – USGS Centroid Moment Solution
- PS3 – USGS Wphase Moment Solution

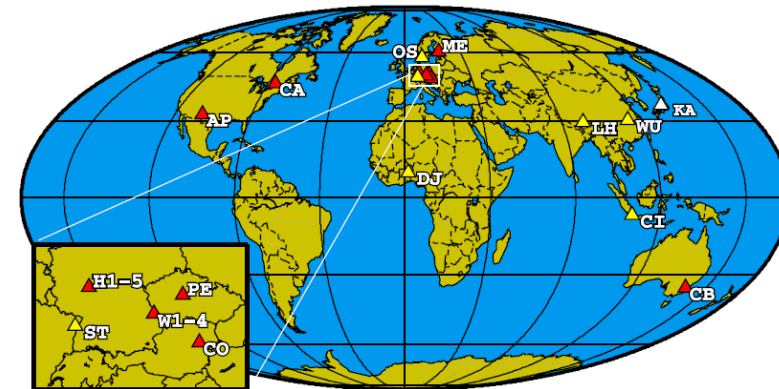


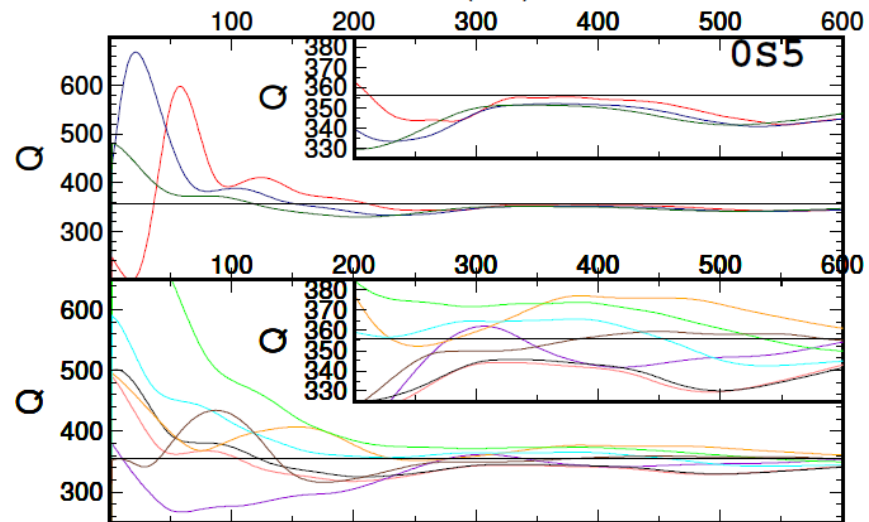
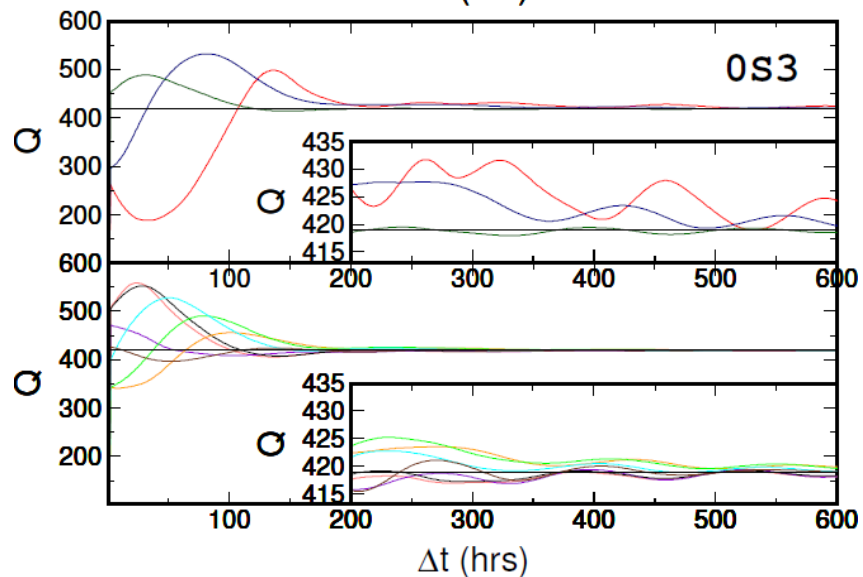
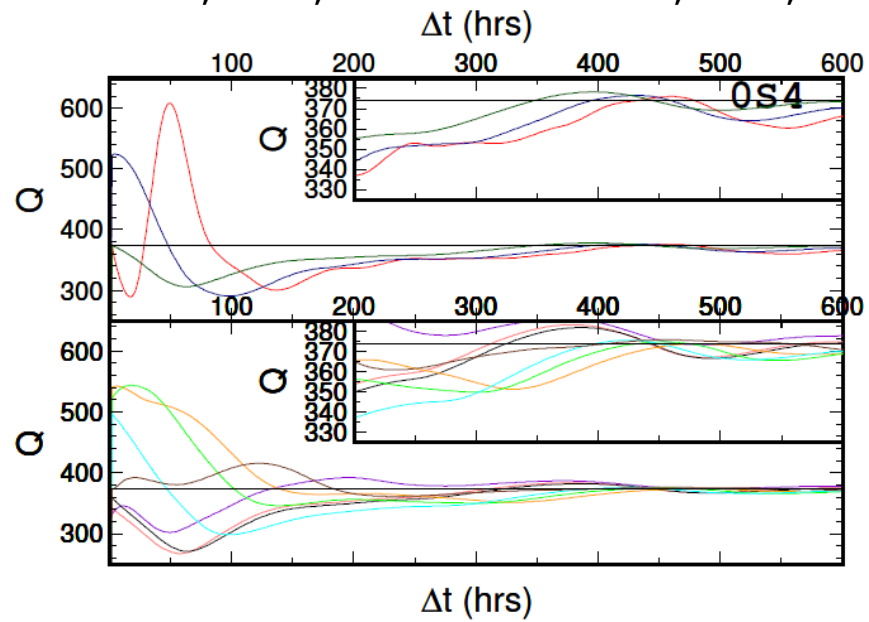
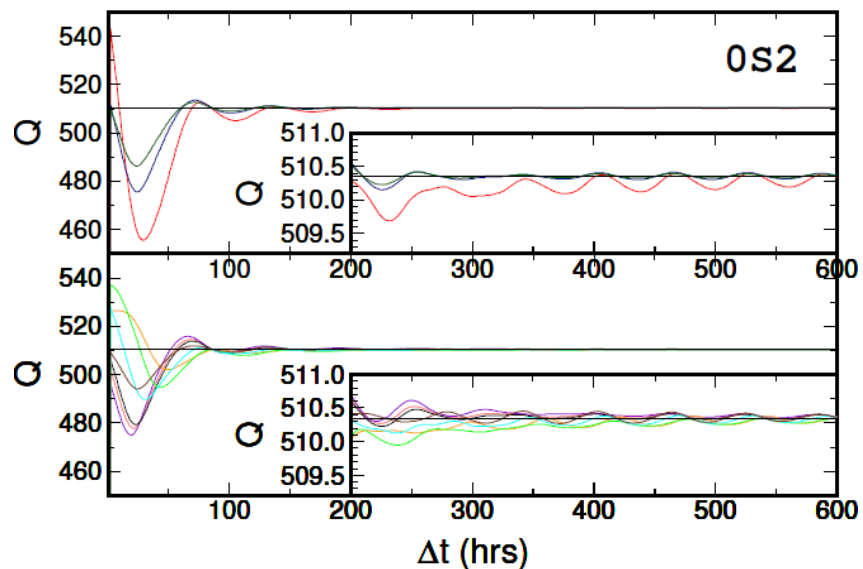
Figure 1. The triangles represent the SG sites used in this study. Red ones were employed for both events, white only for the 2010 Maule earthquake and yellow only for the 2011 Tohoku earthquake.

(Zábranová et al., GRL, 2012)

Určování faktoru kvality ze **syntetiky** – sférodíální módy

OS2: 230h, 460h, 920h - OS3: 124h, 248h, 500h

OS4: 80h, 160h, 320h - OS5: 59h, 118h, 236h



- Současné určování Q a CMT z dat

Zrychlení přístroje

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_S, t) = \sum_k \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_S) \cos(\omega_k t) \exp\left(-\frac{\omega_k t}{2Q_k}\right)$$

- momentový tenzor, epicentrální vzdálenost, azimut
- vlastní funkce ve zdroji a na povrchu
- korekce na volný vzduch a náklon

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_S) = \mathbf{M} : \mathbf{e}_k(\mathbf{x}_S) \mathbf{s}_k(\mathbf{x}_R)$$

volba báзовých momentových tenzorů

$$\mathbf{M} = M_{rr} \mathbf{G}_1 + \frac{M_{\vartheta\vartheta} - M_{\varphi\varphi}}{2} \mathbf{G}_2 + M_{r\vartheta} \mathbf{G}_3 + M_{r\varphi} \mathbf{G}_4 + M_{\vartheta\varphi} \mathbf{G}_5$$

$$\mathbf{G}_1 = (1, -1/2, -1/2, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{G}_2 = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{G}_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$\mathbf{G}_4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

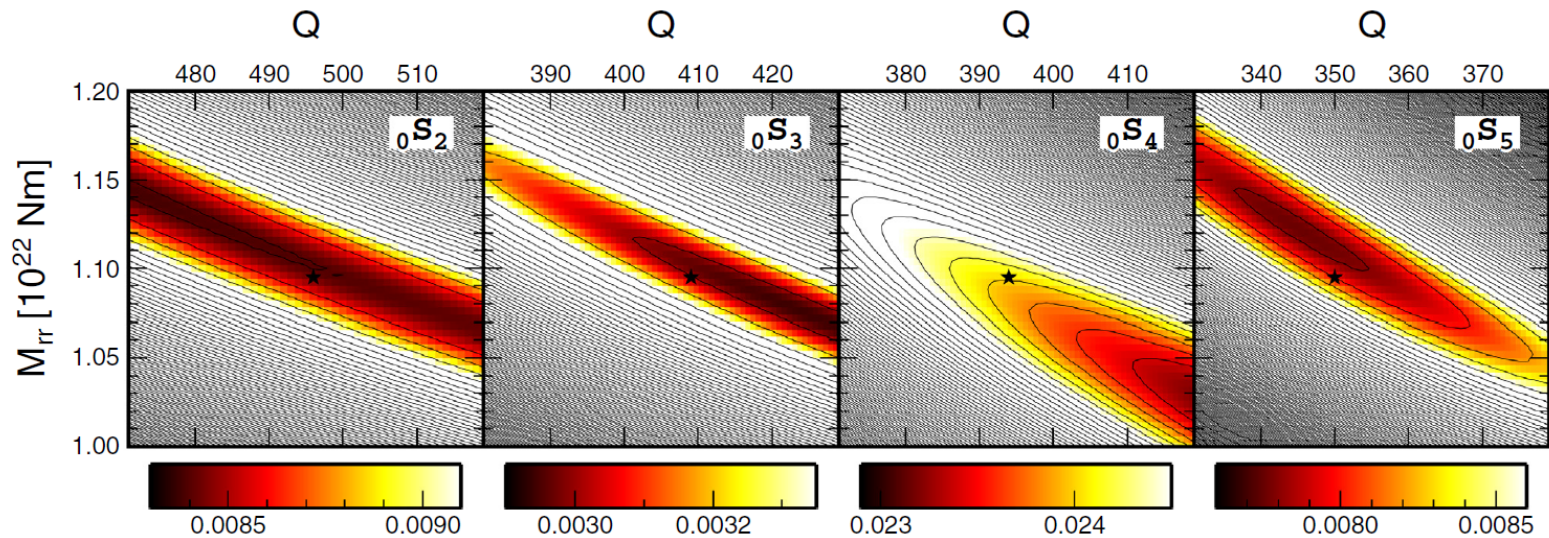
$$\mathbf{G}_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

Módy do 1mHz izolované ve spektru

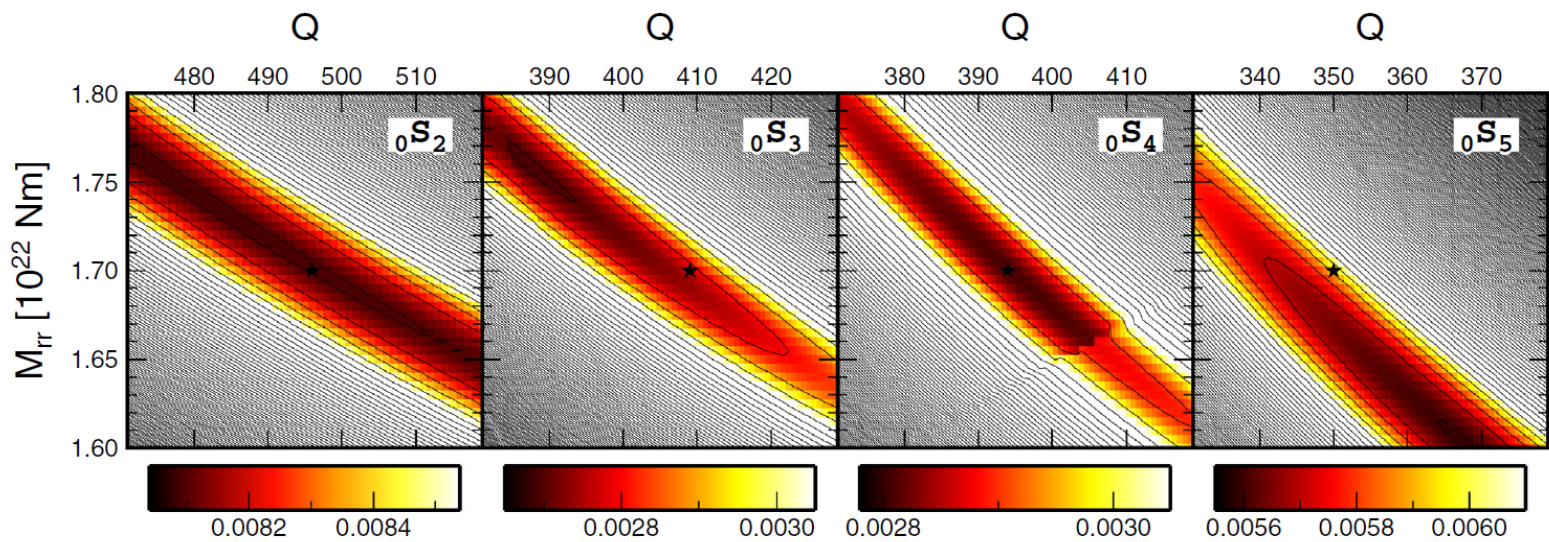
	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
${}_0S_2$	0.907	0.045	0.0015	0.0015	0.045
${}_0S_3$	0.671	0.165	0.0000	0.0000	0.165
${}_0S_4$	0.589	0.204	0.0010	0.0010	0.205
${}_1S_2$	0.404	0.282	0.0159	0.0159	0.282
${}_0S_0$	1.000	0.000	0.0000	0.0000	0.000
${}_0S_5$	0.553	0.221	0.0024	0.0024	0.221

(Zábranová and Matyska, PEPI, 2014)

Trade-off mezi Q a M_{rr}



2010
Maule

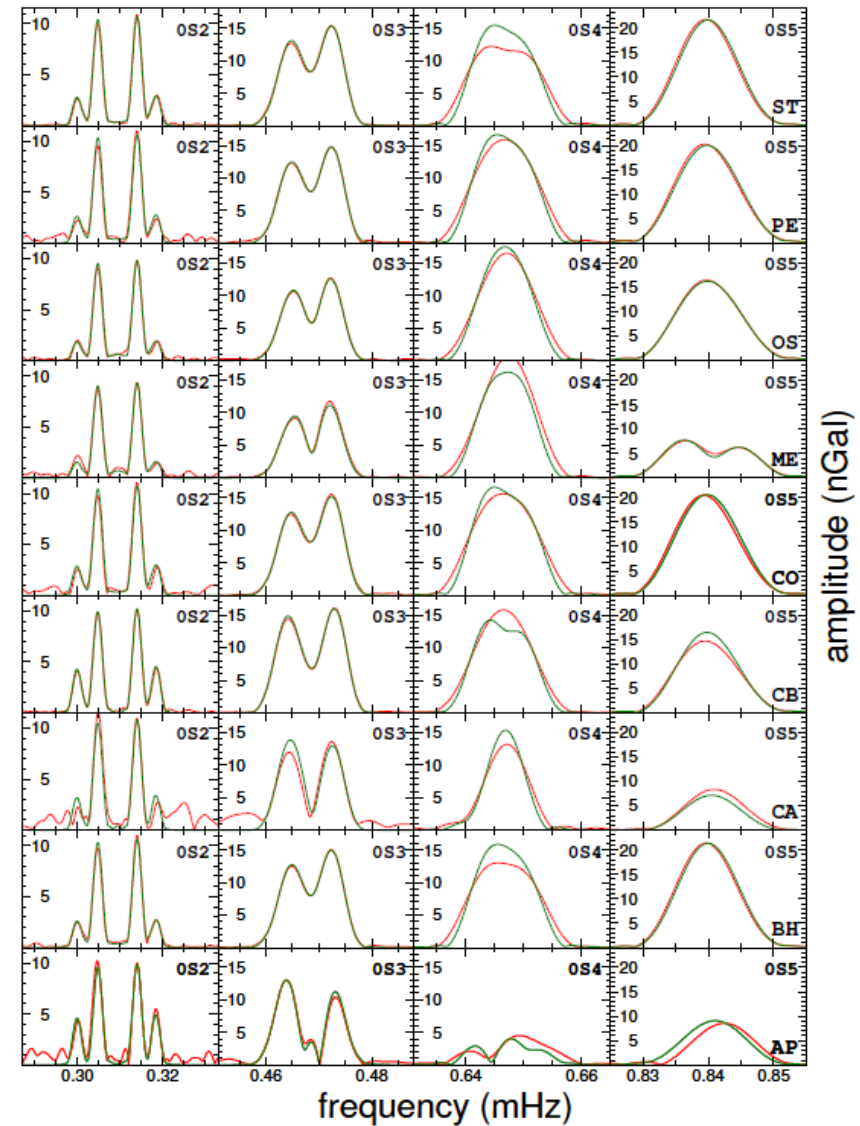
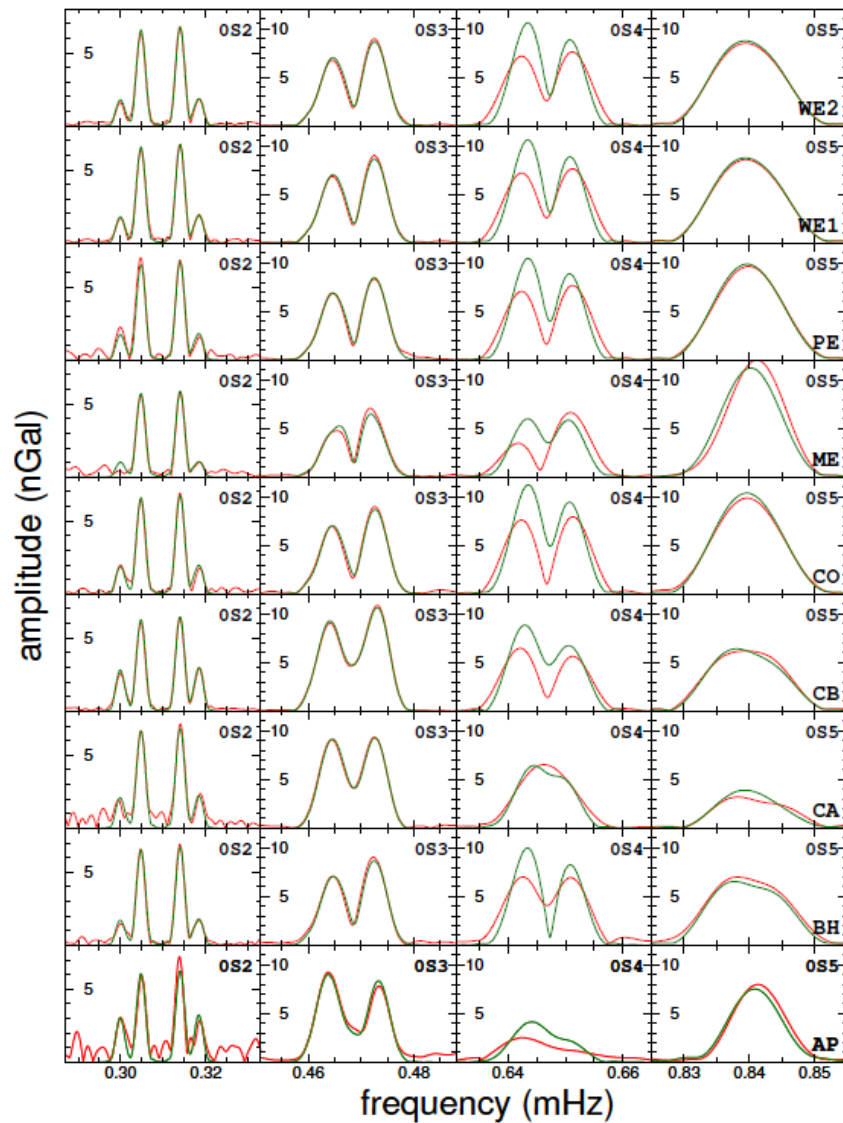


2011
Tohoku

Data – syntetika: dlouhé záznamy

Maule 2010

Tohoku 2011

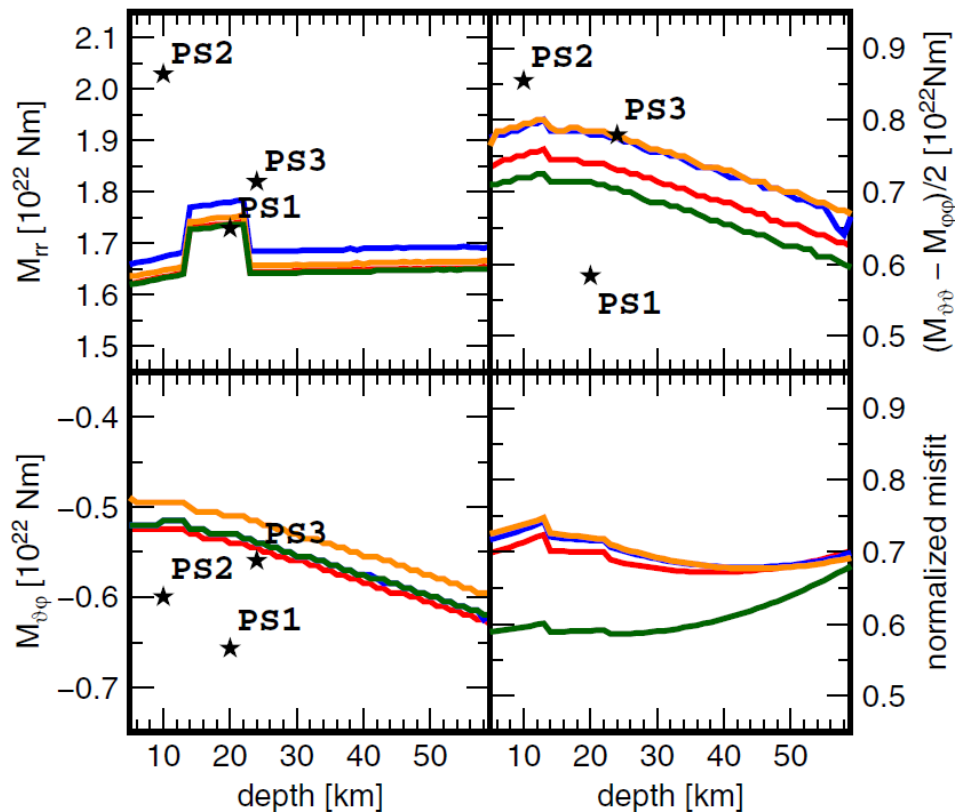


• Sféroidální módy – Tohoku 2011

- společná analýza sféroidálních módů do 1mHz z „krátkých záznamů“
- zbylé dvě složky momentového tenzoru fixované na hodnotě PS1

použité čtyři sady Q

	T [s]	Q ₀	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₀ T/2 [h]
${}_0S_2$	3234	510	496 ± 16	525	477 ± 177	230
${}_0S_3$	2135	417	409 ± 11	380	405 ± 14	124
${}_0S_4$	1546	373	394 ± 27	365	373 ± 9	80
${}_0S_5$	1190	356	350 ± 16	350	364 ± 5	59



- červená Q0 – PREM
- zelená Q1
- modrá Q2 – Tanimoto et al. (2012)
- žlutá Q3 – Deuss et al. (2013)

PS1 – Global CMT Solution

PS2 – USGS Centroid Moment Solution

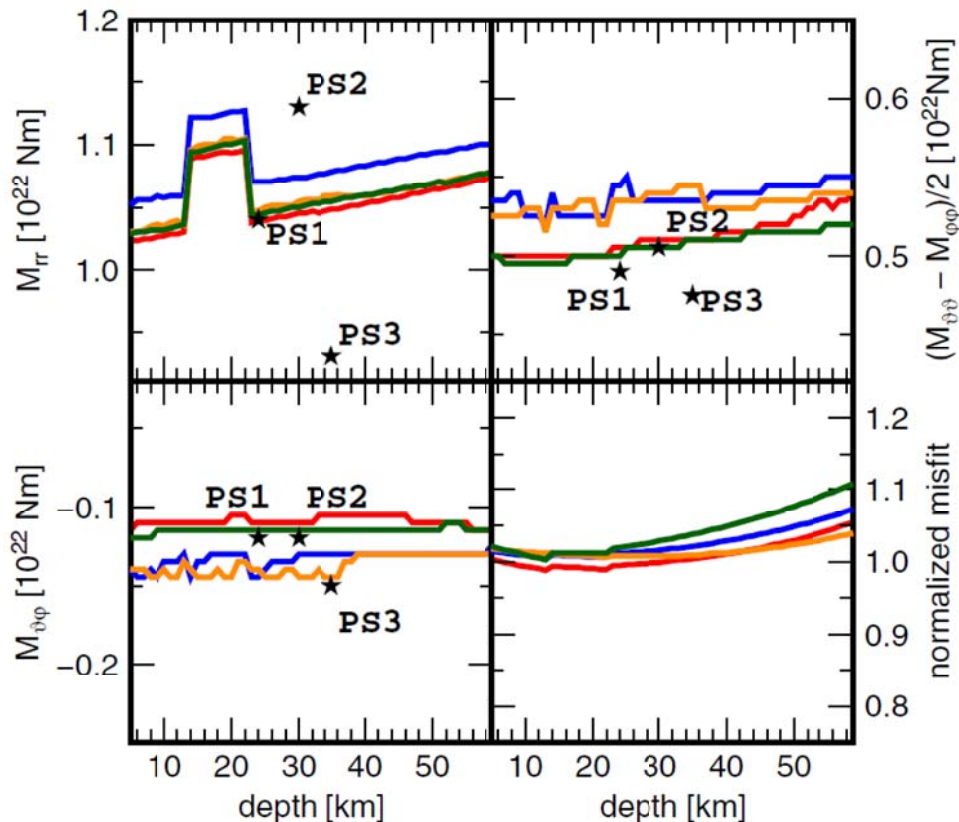
PS3 – USGS Wphase Moment Solution

• Sféroidální módy – Maule 2010

- společná analýza sféroidálních módů do 1mHz z „krátkých záznamů“
- zbylé dvě složky momentového tenzoru fixované na hodnotě PS1

použité čtyři sady Q

	T [s]	Q ₀	Q ₁	Q ₂	Q ₃	Q ₀ T/2 [h]
${}_0S_2$	3234	510	496 ± 16	525	477 ± 177	230
${}_0S_3$	2135	417	409 ± 11	380	405 ± 14	124
${}_0S_4$	1546	373	394 ± 27	365	373 ± 9	80
${}_0S_5$	1190	356	350 ± 16	350	364 ± 5	59



- červená Q0 – PREM
- zelená Q1
- modrá Q2 – Tanimoto et al. (2012)
- žlutá Q3 – Deuss et al. (2013)

PS1 – Global CMT Solution

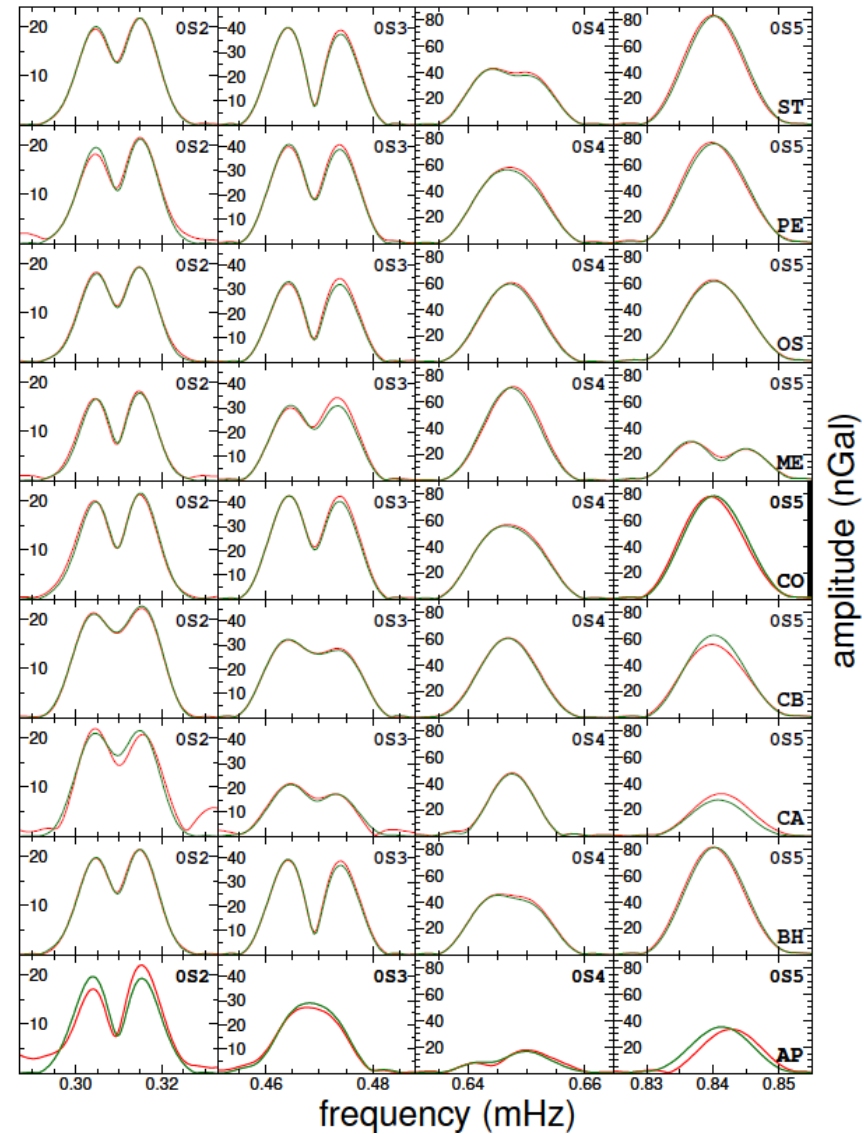
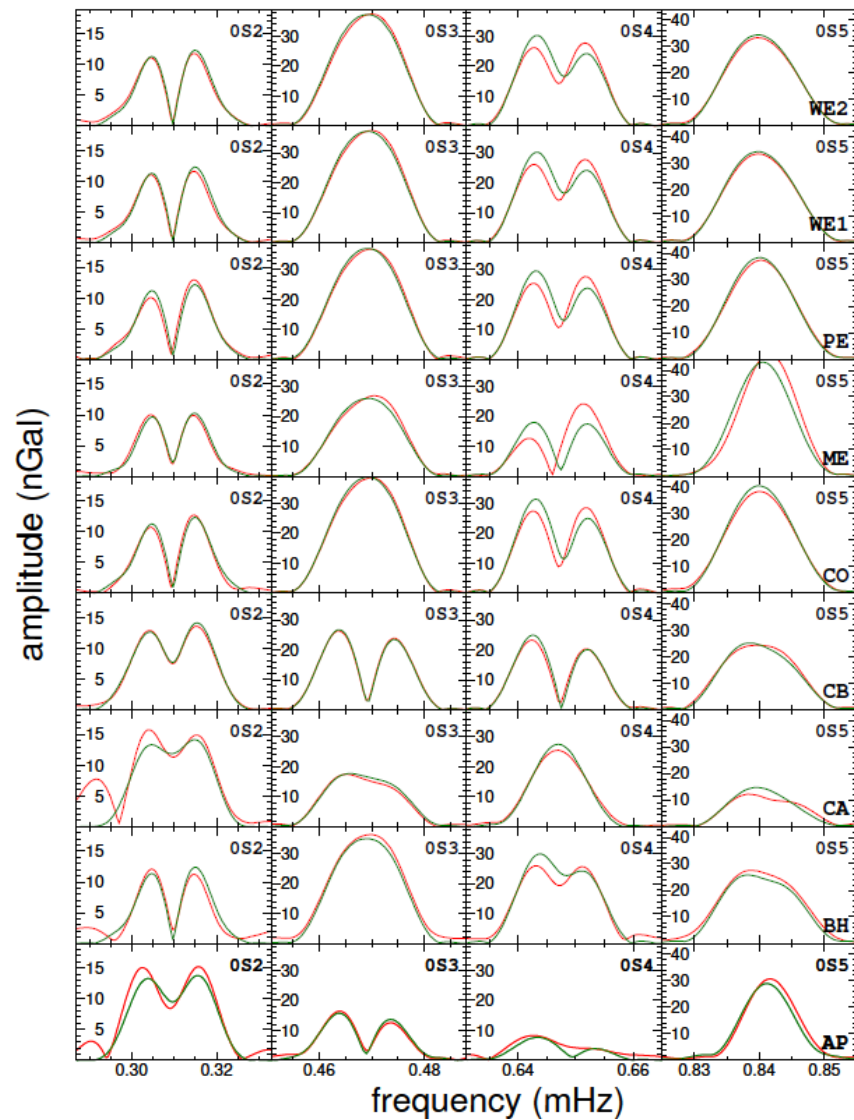
PS2 – USGS Centroid Moment Solution

PS3 – USGS Wphase Moment Solution

Data – syntetika: 60h záznamy

Maule 2010

Tohoku 2011



Závěr

Metoda na výpočet vlastních kmitů

- otestovaná proti softwaru MINEOS
- použita v submilihertzové oblasti pro inverzi gravimetrických dat

Statická deformace a změna grav. pole v epicentrálních oblastech

- sumace módů do vysokých úhlových a modálních čísel
- velké rozlišení u povrchu
- odpadá problém s frekvenční závislostí módů
- problém s 3D strukturou