

Povrchová teplota na kamenných exoplanetách

Michaela Káňová

pod vedením RNDr. Marie Běhounkové, Ph.D.

Kamenné exoplanety

exoplanet.eu : 1782 extrasolárních planet se známou drahou

115 planet o hmotnosti do $10 M_{\text{Země}}$

„super-Země“

nejasná mezní hmotnost pro kamenné planety

snadnější detekce planet obíhajících v těsné blízkosti mateřské hvězdy

významný **slapový vývoj** (cirkularizace), uchycení ve **spin-orbitální resonanci** (celočíselný poměr rotační a oběžné frekvence)

nerovnoměrné ozáření (insolace) a vytvoření **teplotního kontrastu** mezi denní a noční stranou (v případě absence atmosféry stovky až tisíce kelvinů)

vliv na plášťovou konvekci

Výpočet insolace

- extrasolární konstanta

$$S_* = \frac{L_*}{4\pi a^2}$$

- insolace

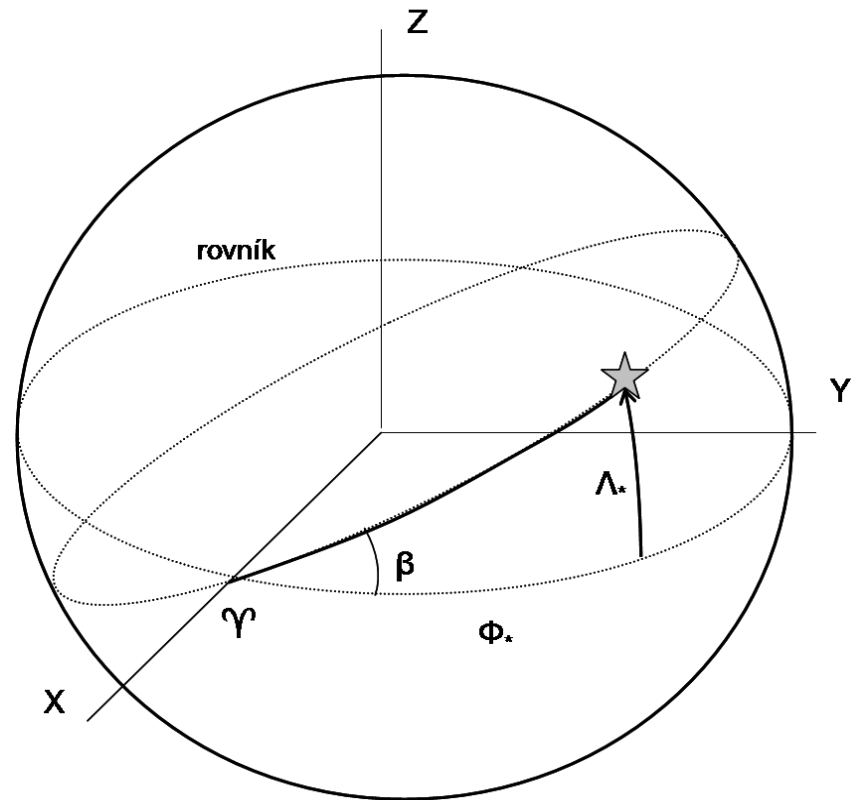
$$S = S_* \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \zeta$$

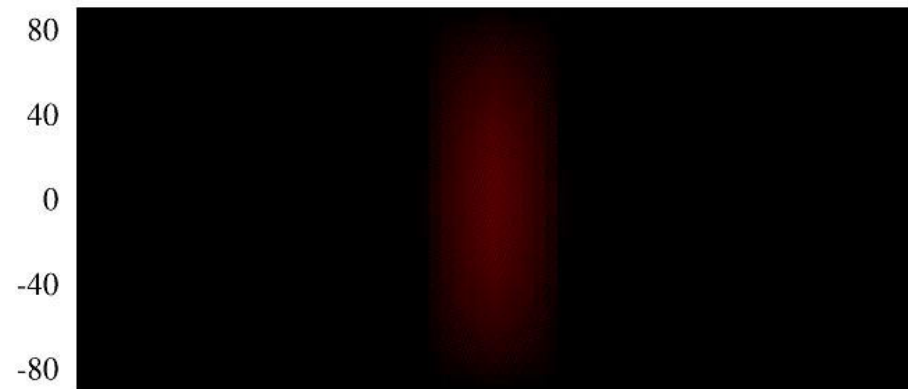
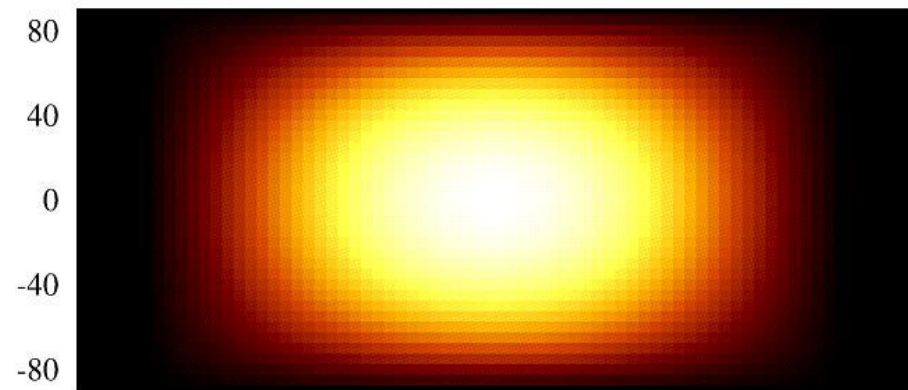
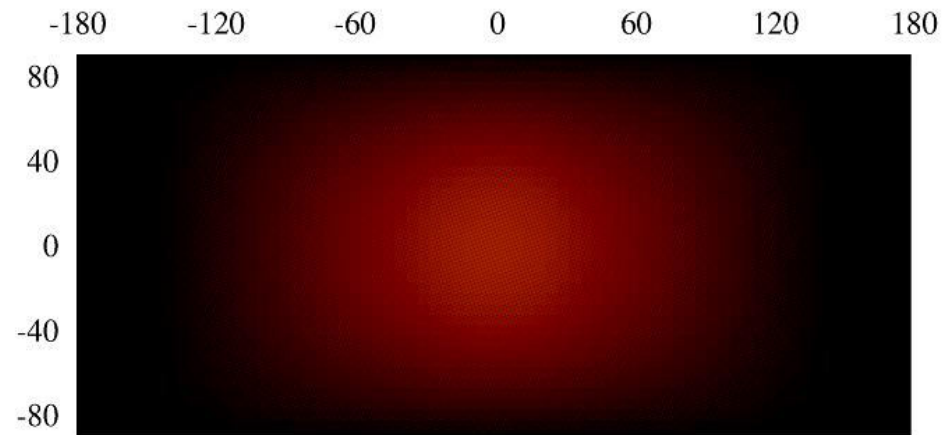
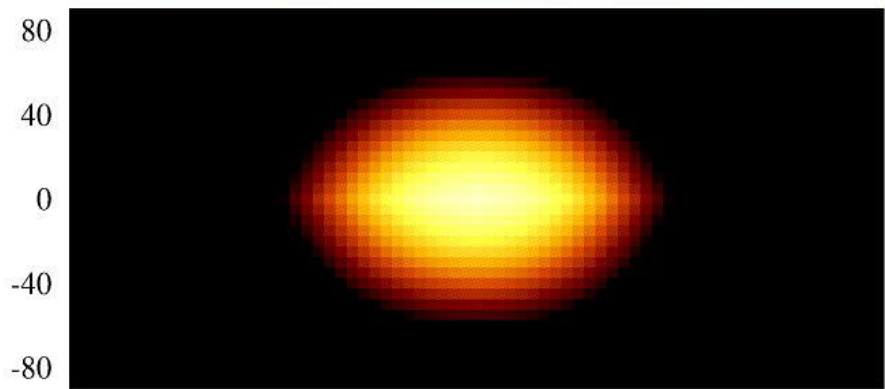
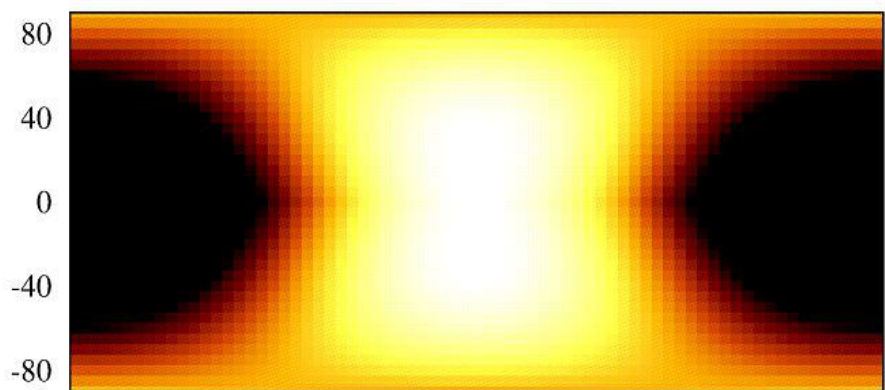
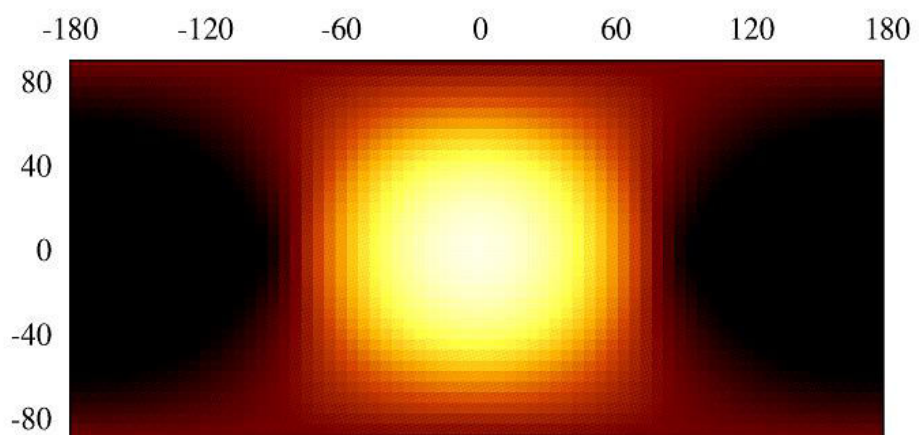
$$\cos \zeta = xx_* + yy_* + zz_*$$

$$r = a(1 - e \cos E)$$

- Keplerova rovnice

$$E - e \sin E = nt$$





Povrchová teplota

rovnice vedení tepla $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + H$

nelineární horní okrajová podmínka

$$S(1 - A) = \varepsilon \sigma T^4 - k \frac{\partial T}{\partial r}$$

ρ - hustota

c_p - měrná tepelná kap.

k - tepelná vodivost

A - albedo

ε - emisivita

S - insolace

na spodním okraji řešené vrstvy zadán tepelný tok

Škálování

- charakteristický čas

$$\tau = \Omega^{-1}$$

- charakteristická hloubka

$$L_{\text{char}} = \sqrt{\frac{2k}{\Omega\rho c_p}}$$

- referenční teplota

$$T_{\text{R}} = \left(\frac{L_*}{16\pi a^2 \varepsilon \sigma} \right)^{1/4}$$

- tepelná setrvačnost

$$I = \sqrt{k\rho c_p}$$

- termální parametr

$$\gamma = \frac{\varepsilon \sigma T_{\text{R}}^3}{I(\Omega/2)^{1/2}}$$

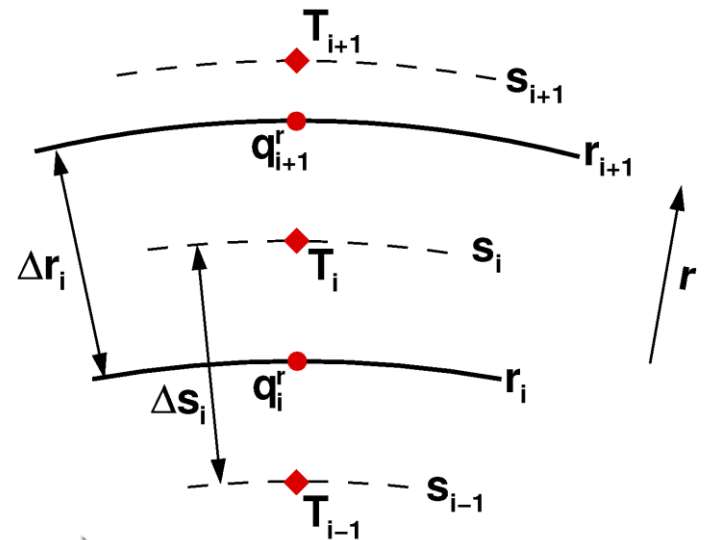
Diskretizace v prostoru

- metoda konečných diferencí s posunutou sítí, sférická geometrie, v radiálním směru obecně nerovnoměrná mřížka
- v 1D inverze za pomoci LU dekompozice (pásová matice, subroutiny *bandec*, *banbks* z NR), ve 3D přímý řešič PARDISO
- stacionární stav $\nabla \cdot (k\nabla T) = -\nabla \cdot q = 0$

$$q_i = k_i[(a_i + w_i b_i)T_{i-1} + (b_i(1 - w_i) + c_i)T_i]$$

$$w_i \equiv 0.5 \frac{\Delta r_i}{\Delta s_i}$$

$$(\nabla \cdot q)_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{r} q + \frac{dq}{dr} \right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{s_i} (q_i + q_{i+1}) + \frac{1}{\Delta r_i} (q_{i+1} - q_i)$$



Diskretizace v čase

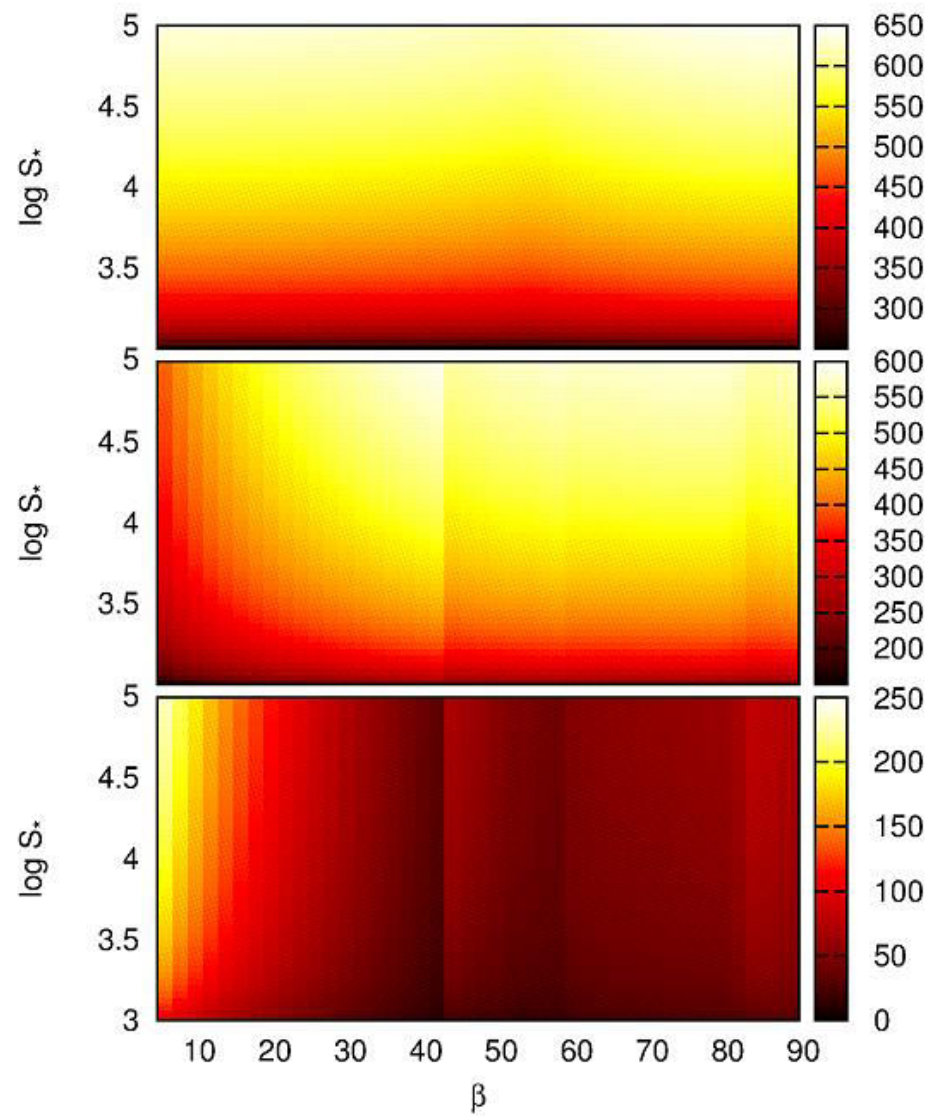
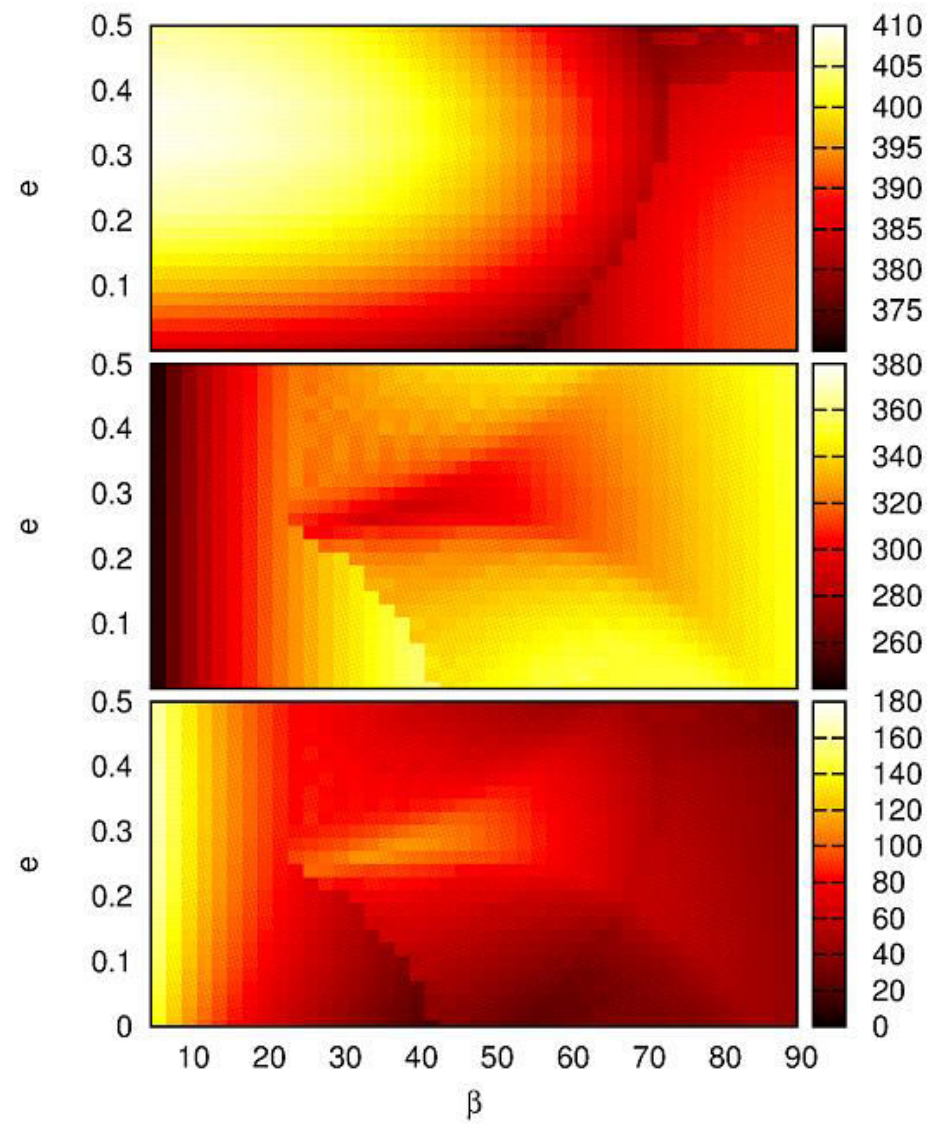
- Crankovo-Nicolsonové schéma, j - časový krok, i - prostorový krok

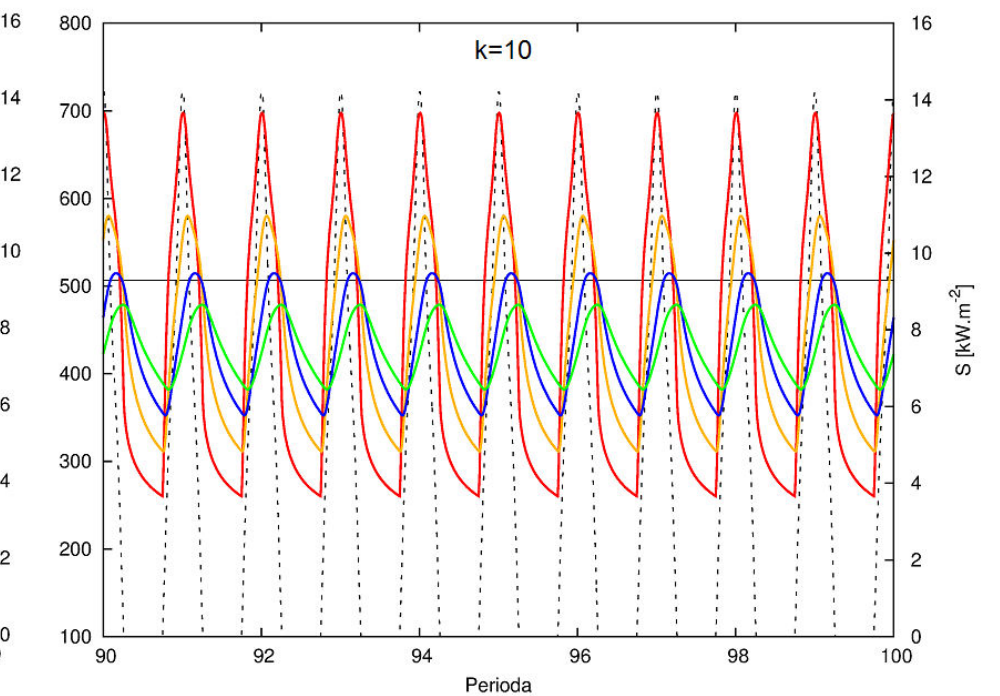
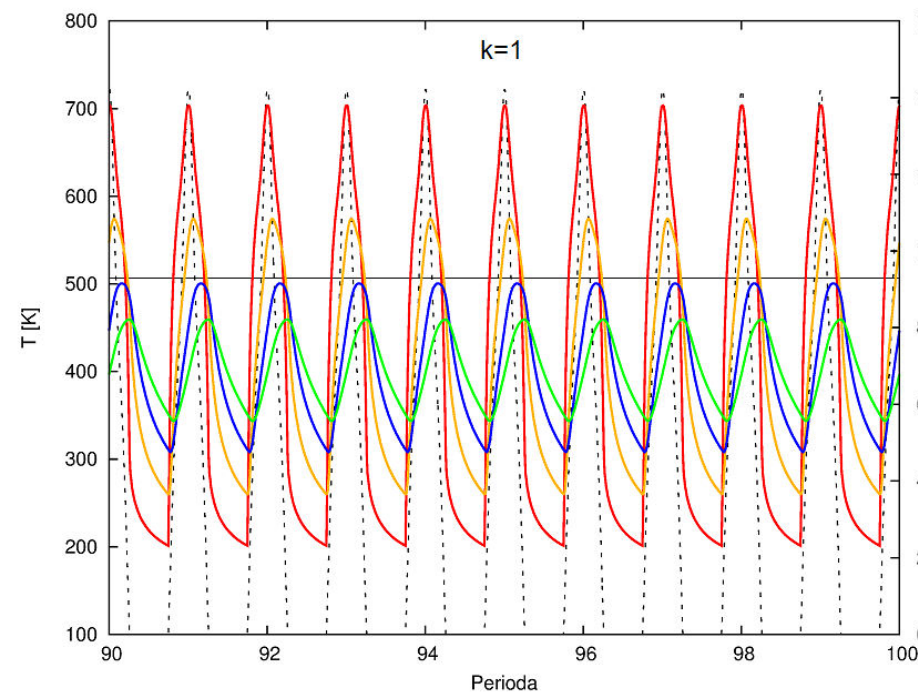
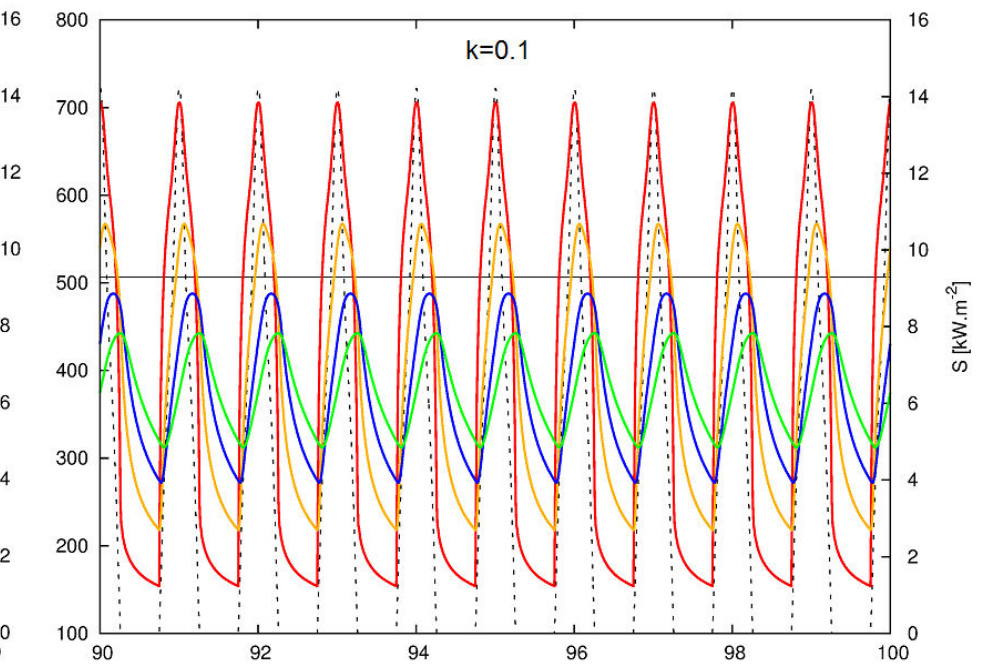
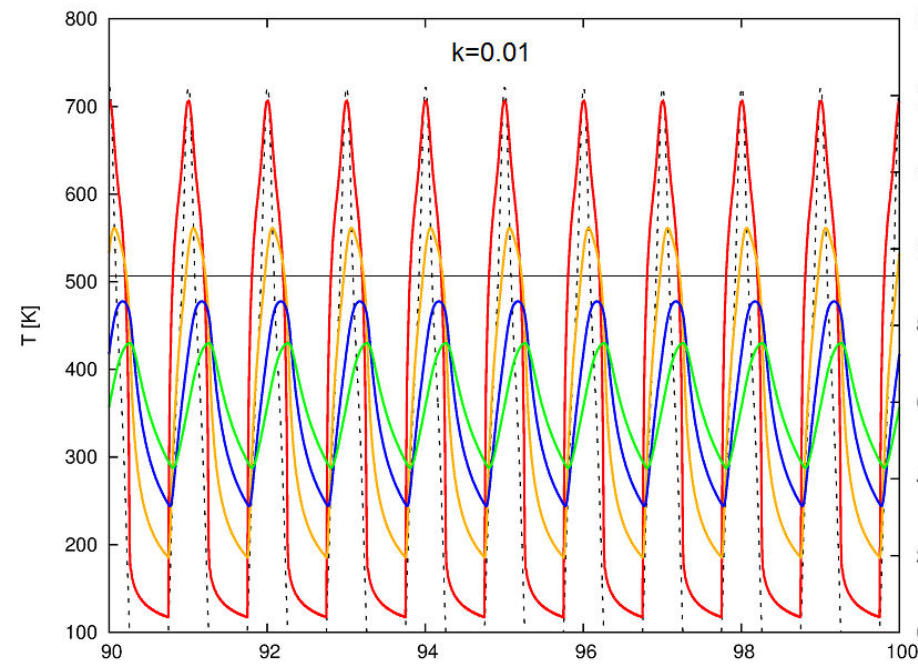
$$\rho c_p \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2} [(\nabla \cdot q)_i^j + (\nabla \cdot q)_i^{j-1}]$$

- počáteční podmínka: stacionární stav za průměrné insolace
- v každém časovém kroku iterativní hledání řešení rovnice vedení tepla kvůli proměnné insolaci (nelineární horní okrajová podmínka)

Shrnutí výsledků

- skutečná průměrná teplota na planetě je menší než teplota stacionárního stavu při průměrné insolaci, a to zvláště pro vyšší spin-orbitální resonanci
- teplotní rozdíl na povrchu v časově proměnném řešení klesá s rostoucí tepelnou setrvačností (slábne vliv nočního chladnutí)
- pro zadanou sluneční konstantu a resonanci 1:1 maximální teplota roste s tepelnou setrvačností, klesá se vzrůstajícím sklonem rotační osy, slabě klesá s rostoucí excentricitou
- nejvyšší a nejnižší střední teploty při resonanci 3:2 jsou bez numerických výpočtů těžko předvídatelné
- maximální teplota krátkoperiodických planet příliš neovlivněna tepelným tokem na spodní hranici





Zpřesnění modelu

- blízkou mateřskou hvězdu je třeba považovat za **plošný zdroj**
- další parametr oběžné dráhy: časový rozestup mezi jarní rovnodenností a průchodem periastrém (nebo **délka periastra**)
- **nekonstantní tepelná setrvačnost**: hloubková závislost ρ a teplotní závislost k , c_p
- změny parametrů oběžné dráhy v důsledku **slapové interakce** s hvězdou

Hvězda jako plošný zdroj

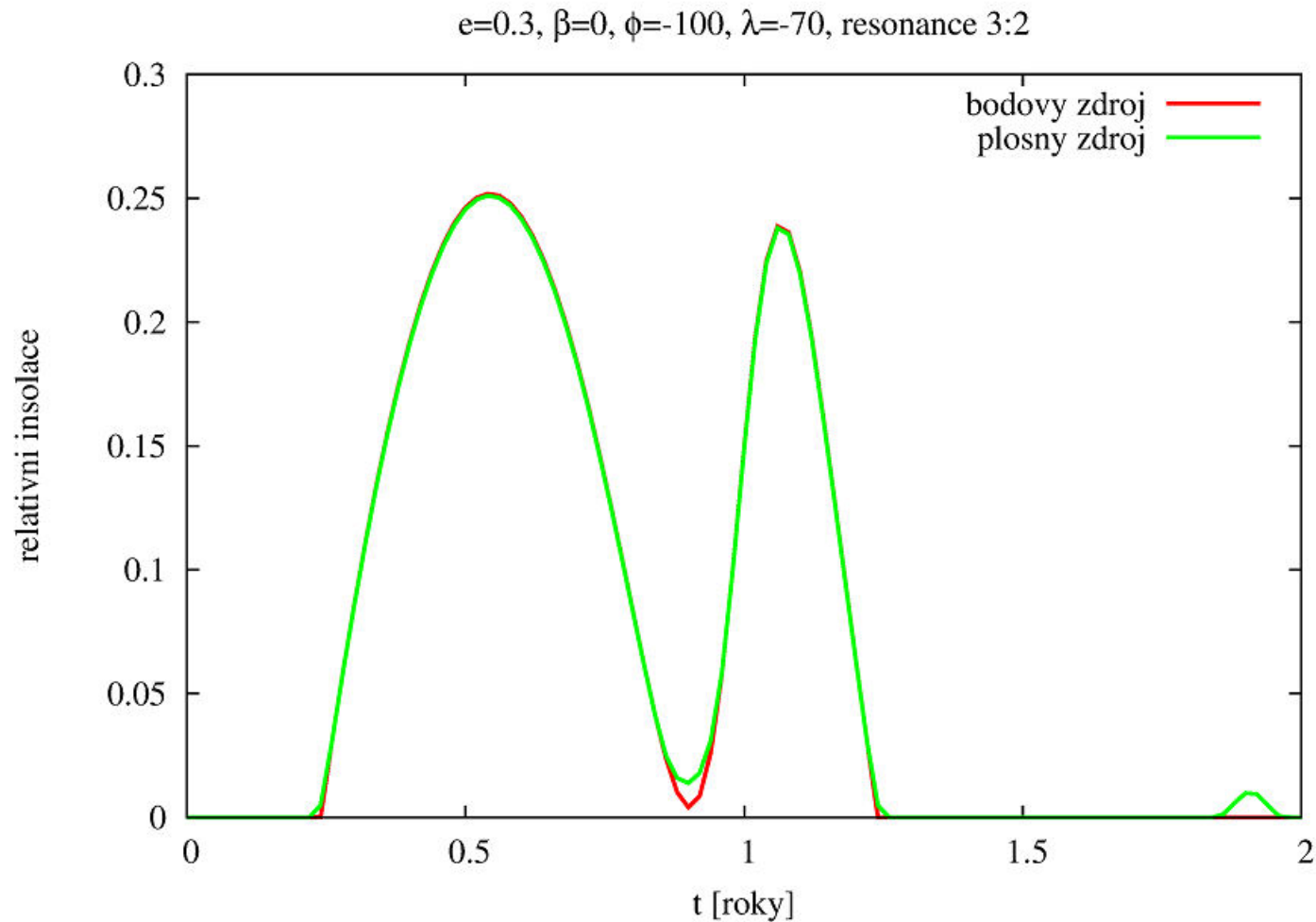
- započtení plošnosti zvýší insolaci v těch místech na povrchu planety, kde se hvězda právě nachází na obzoru
- význam například na pólech při nulovém sklonu rotační osy
- empirické vztahy mezi hmotnostmi, poloměrem a zářivým výkonem hvězd na hlavní posloupnosti (pro $M_* \lesssim M_S$) :

$$\log_{10} \frac{R_*}{R_S} = 1,03 \log_{10} \frac{M_*}{M_S} + 0,1$$

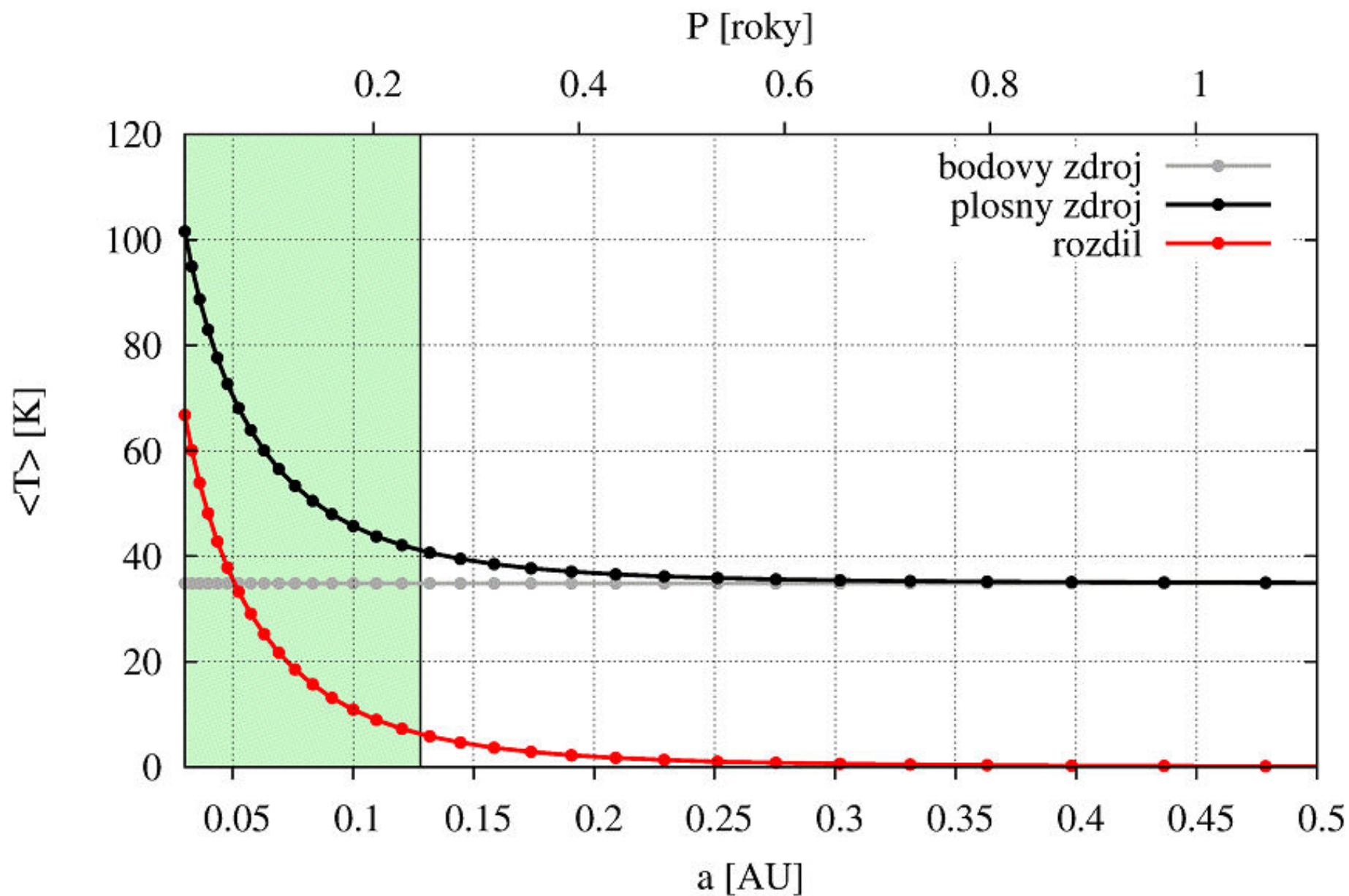
$$\lambda = 4,101\mu^3 + 8,162\mu^2 + 7,108\mu + 0,065$$

$$\lambda = \log_{10} \frac{L_*}{L_S} \qquad \mu = \log_{10} \frac{M_*}{M_S}$$

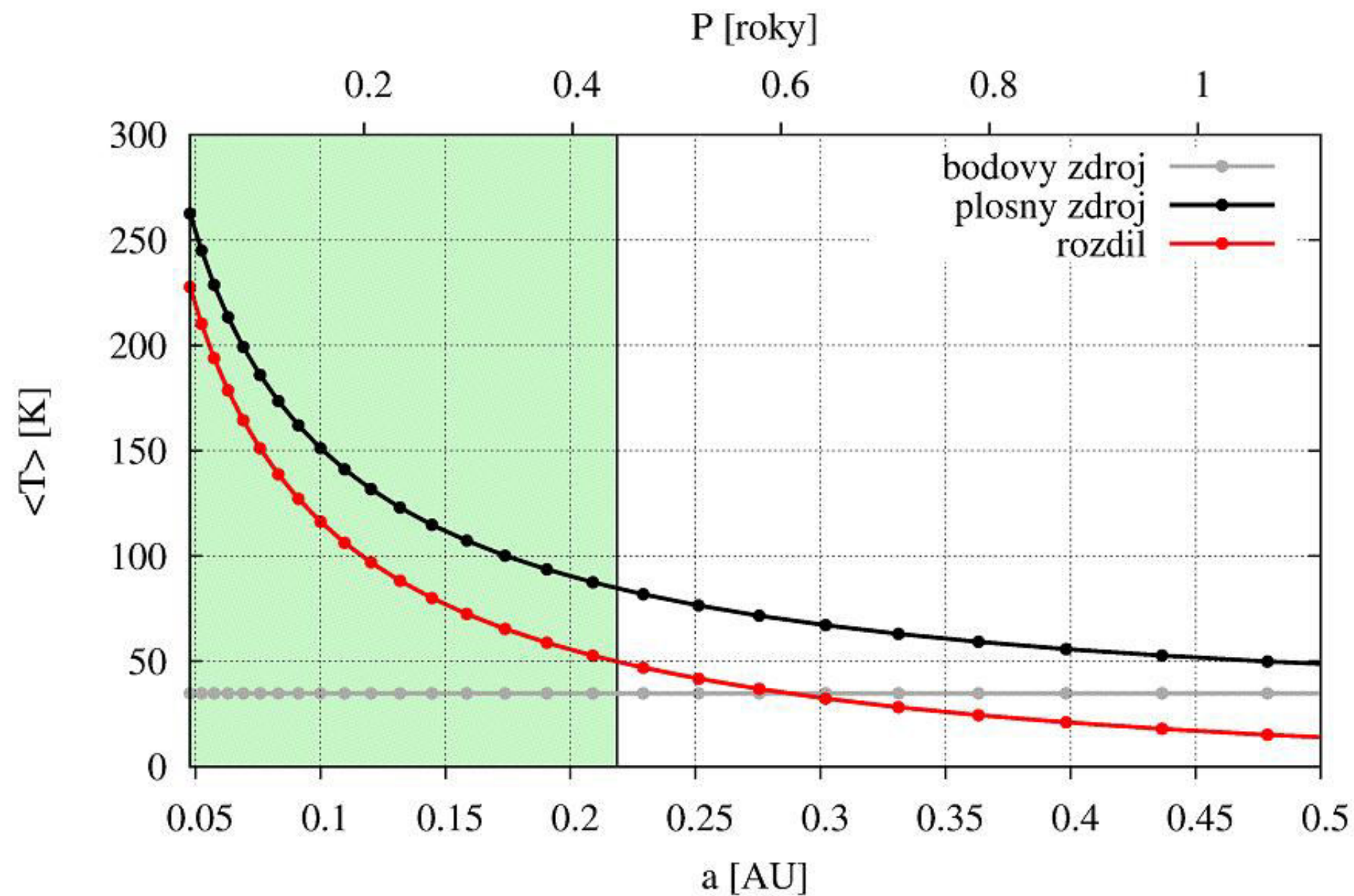
Hvězda jako plošný zdroj



Vliv bodove aproximace na teplotu, $M_*/M_S=0.1$

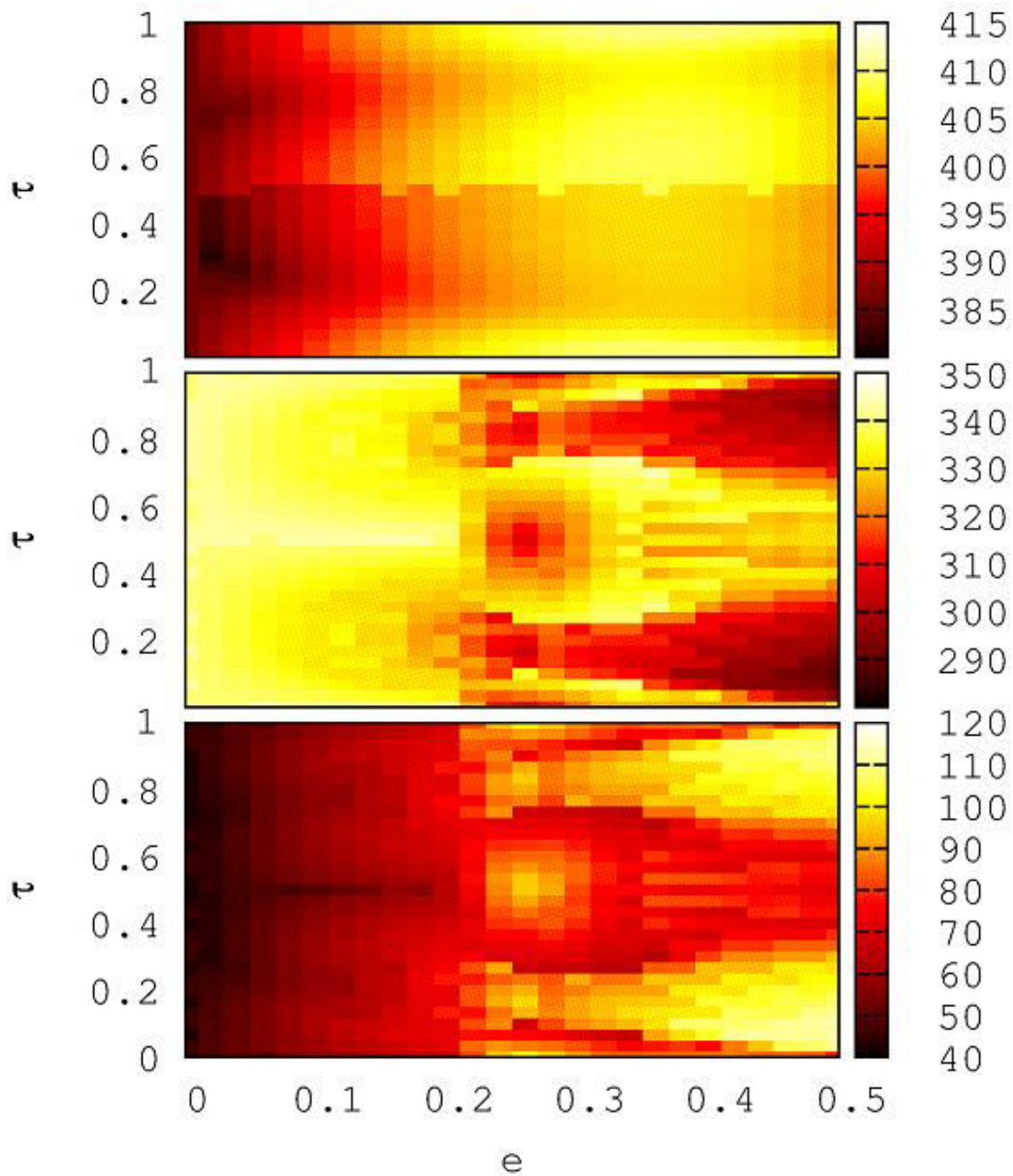


Vliv bodove aproximace na teplotu, $M_*/M_S=0.5$



Délka periastra

- pozice periastra vůči směru k jarnímu bodu určuje, které místo na povrchu planety bude vystaveno nejvyšší insolaci
- v resonanci 1:1 zanedbatelný vliv
- v resonanci 3:2 vliv na nejnižší průměrnou teplotu v řádu desítek kelvinů (zvláště pro velké excentricity)



Tepelná setrvačnost $l = l(z, T)$

- charakteristická hloubka uvažované úlohy se pohybuje nejvýše v řádu metrů
- povrch planet bez atmosféry pokryt vrstvou regolitu vzniklého především v důsledku dopadu meteoritů
- regolit na povrchu Měsíce sahá do hloubek 5 až 20 metrů
- laboratorní měření tepelných vlastností v omezeném rozmezí teplot, dále extrapolace

- hustota teplotně nezávislá
- k , c_p regolitu s teplotou vzrůstá, tedy roste také l
- zmírněno noční chladnutí, **průměrná teplota je při uvážení nekonstantní tepelné setrvačnosti vyšší**, zvláště pod povrchem

Tepelná setrvačnost $I \equiv I(z, T)$

- hustota: $\rho = 1,920 \frac{z + 0,122}{z + 0,18}$

- tepelná vodivost: $k = A + BT^3$

$$A = (2,019\rho - 1,388) \cdot 10^{-3}$$

$$B = (0,1788\rho^3 - 0,1289\rho^2 - 0,1856\rho + 0,3082) \cdot 10^{-10}$$

- měrná tepelná kapacita:

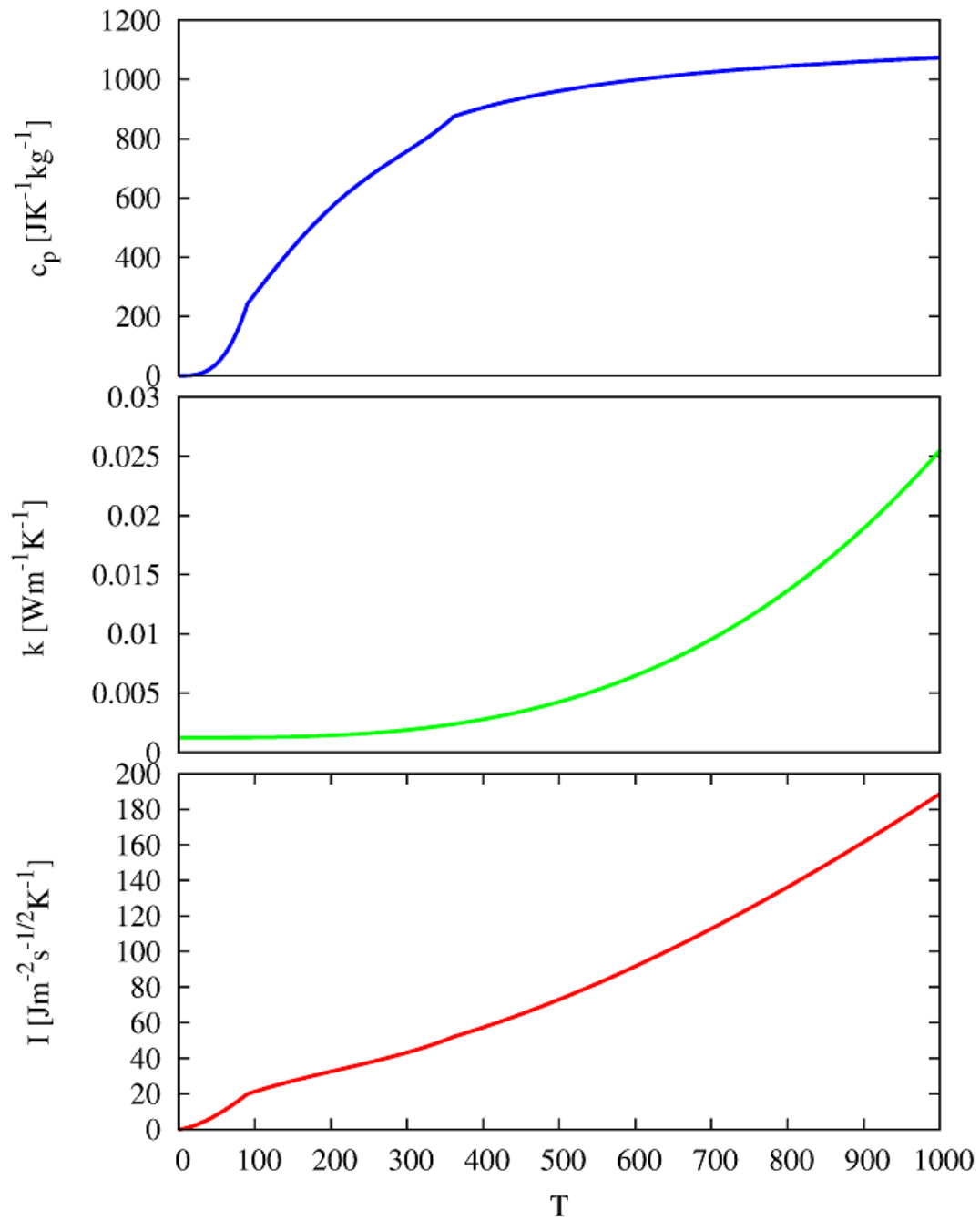
$$c_p = 9,66 \times 10^{-8}T^4 - 7,37 \times 10^{-5}T^3 + 1,50 \times 10^{-2}T^2 + 2,13T - 23,173$$

$$T \in (90,360) \text{ K}$$

$$c_p = 1185 - \frac{1,12 \times 10^5}{T} \quad T > 360 \text{ K}$$

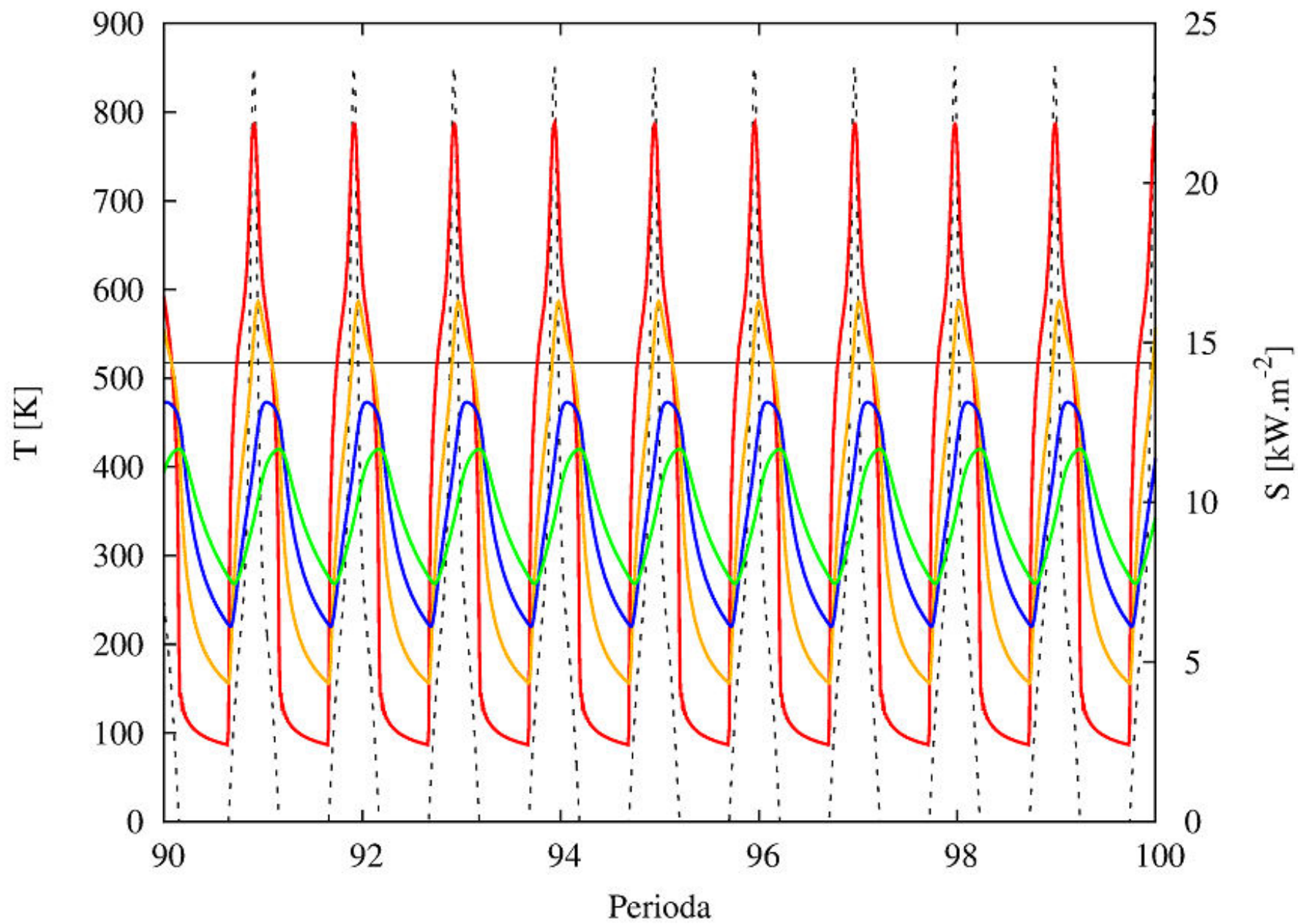
$$c_p = 3,32 \times 10^{-4}T^3 \quad T < 90 \text{ K}$$

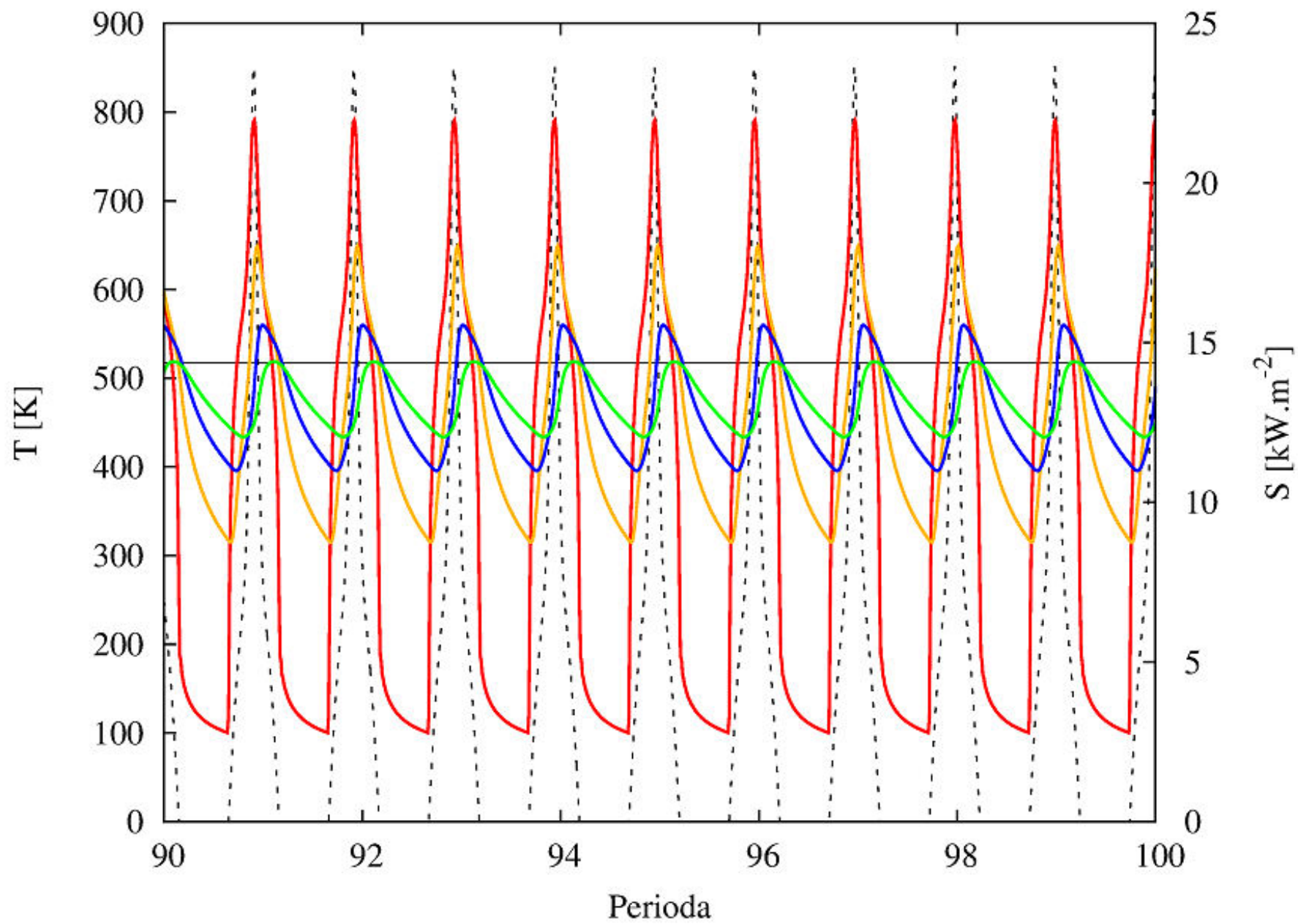
Prubehy parametru povrchu



Tepelná setrvačnost $I = I(z, T)$

- závislost k a c_p na teplotě je nelineární \rightarrow iterativní řešení v každé vrstvě
- referenční teplota (z předešlého časového kroku) $\rightarrow k, c_p \rightarrow$ nová teplota
- kombinace s nelineární horní okrajovou podmínkou





Změny parametrů oběžné dráhy

- doposud jsme uvažovali konstantní a , e , β a poměr rotační a oběžné frekvence (planeta ve spin-orbitální resonanci)
- dva hmotné body: vzájemný oběh po stálých keplerovských drahách
- skutečnost: poruchy od ostatních těles, zploštělá hvězda, slapy
- dlouhodobý vývoj dráhy - **Lagrangeovy poruchové rovnice**

- nadále pro jednoduchost uvažujme kulová tělesa, hvězdu s jedinou planetou
- **slapový vývoj** - cirkularizace dráhy v řádu 10^8 až 10^{10} let, rychlé zarovnání rotační osy a zpomalení rotace planety

Lagrangeovy poruchové rovnice

- vývoj dráhy planety pod působením poruchy, kterou lze vyjádřit pomocí potenciálu V

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{\mu n a} \frac{\partial V}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\mu n a^2 e} \left[\sqrt{1-e^2} \frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\partial V}{\partial \varpi} \right]$$

M - střední anomálie

ϖ - délka periastra

μ - redukovaná hmotnost

n - střední denní pohyb

- zde za V dosadíme slapový potenciál (omezení na člen s P_2)

$$V = -k_2 \frac{Gm_*}{R_p} \left(\frac{R_p}{r} \right)^3 \left(\frac{R_p}{r'} \right)^3 P_2(\cos \psi)$$

- namísto r, r' elementy dráhy \rightarrow vyjádření pomocí řad

Slapový vývoj

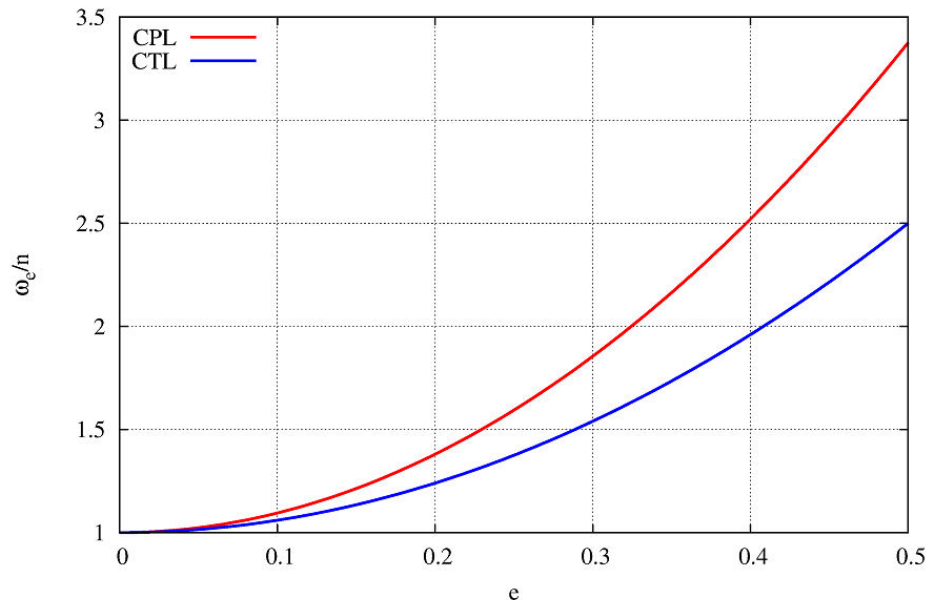
- slapová výduť v důsledku disipativních procesů pootočena od spojnice planety a hvězdy
- fázový rozestup $\varepsilon(\chi)$, kde χ značí lineární kombinaci rotační a oběžné frekvence
- časová prodleva Δt $2\varepsilon(\chi) = \chi\Delta t(\chi)$
- specifická disipační funkce $Q^{-1}(\chi) = \frac{\Delta E}{2\pi E_0} = \tan \varepsilon(\chi)$
- klíčová otázka: jak závisí Q a ε na frekvenci?
- dva běžné modely
 - 1) konstantní fázový rozestup
 - 2) konstantní časový rozestup

Konstantní fázový rozestup (*constant phase lag, CPL*)

$$\varepsilon(\chi) \sim \chi^0 \quad Q = \textit{konst.}$$

- opodstatněný pro Zemi
- nespojitosti při $\chi \rightarrow 0$
- pseudosynchronní rotace

$$\omega = n \left(1 + \frac{19}{2} e^2 \right)$$



Konstantní časový rozestup (*constant time lag, CTL*)

$$\varepsilon(\chi) \sim \chi^1 \quad \Delta t = \textit{konst.}$$

- viskózní model
- pomalu rotující tělesa
- pseudosynchronní rotace

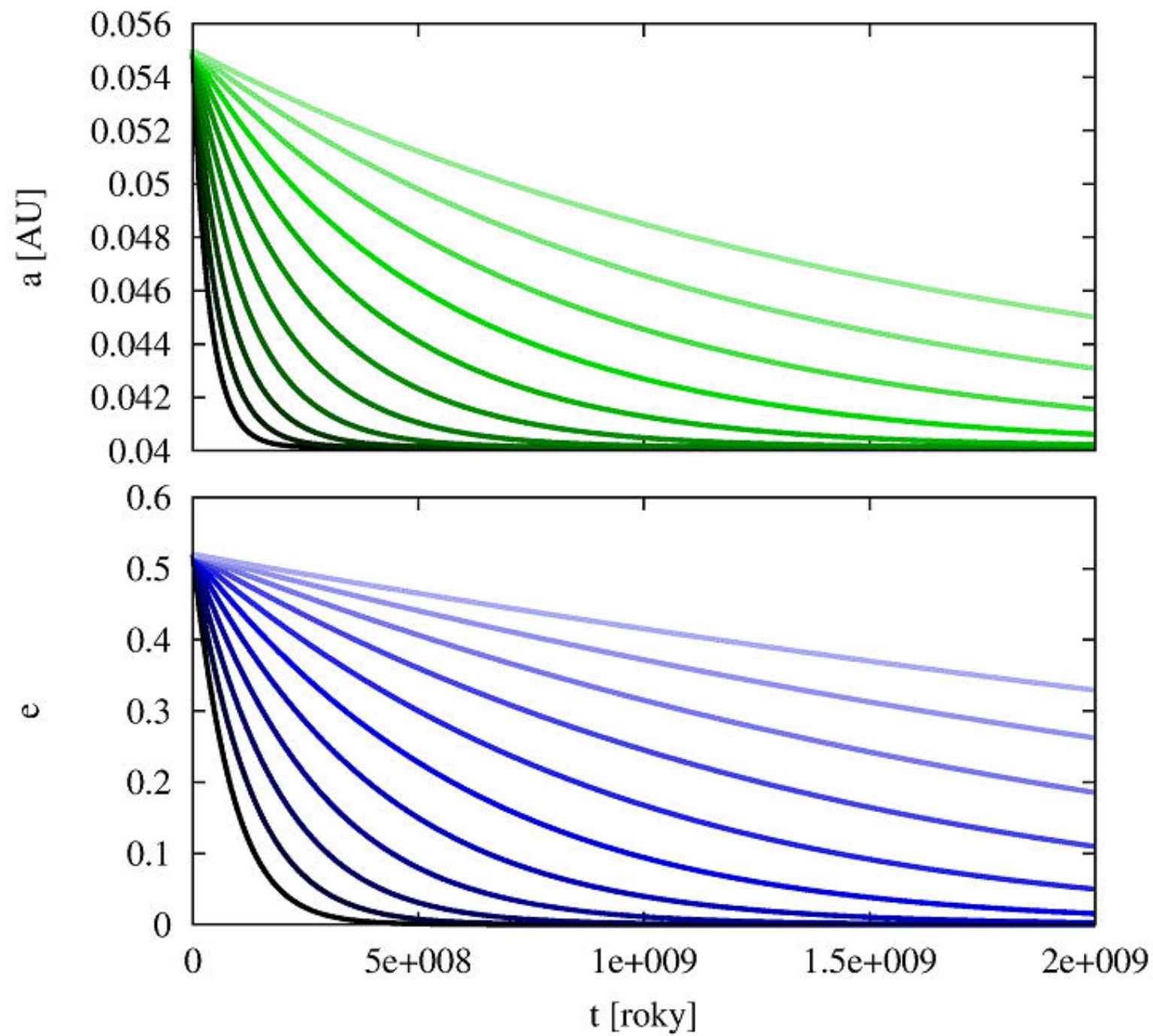
$$\omega = n \left(1 + 6e^2 \right)$$

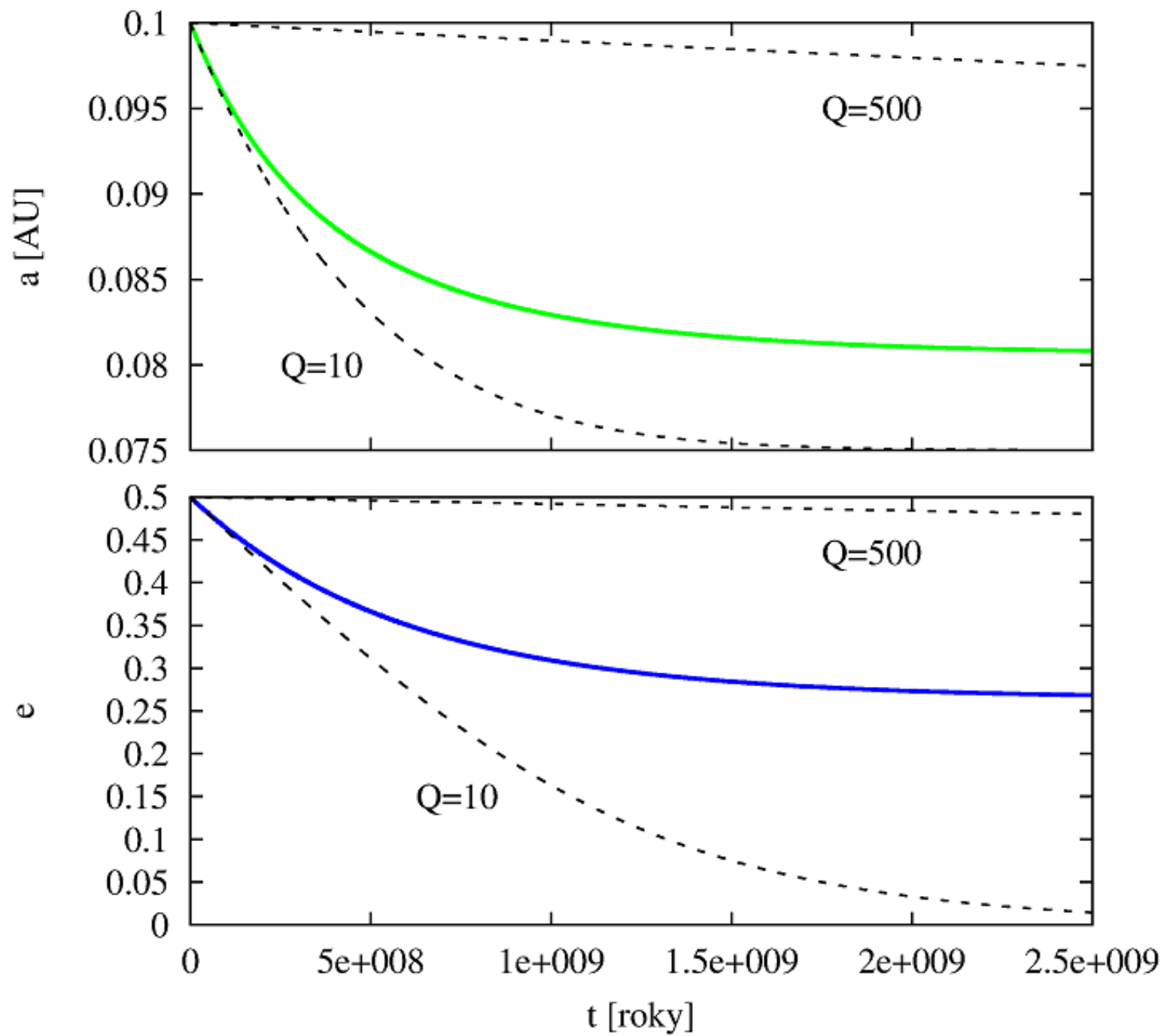
Slapový vývoj

- oba uvedené modely značně zjednodušené
- záchyt do resonancí je třeba studovat zvlášť
- *Makarov & Efroimsky (2013)*:
 - CPL pro pomalu rotující planety na výstředné dráze vyžaduje změnu znaménka ε dvakrát za periodu, nefyzikální
 - CTL uvažuje odezvu pouze viskózního tělesa, použitelné pro plynné planety, méně již pro kamenné
 - pseudosynchronní rotace pouze důsledkem zjednodušení
- mezi konstantním Q a konstantním Δt neexistuje jednoznačný vztah
- v limitě $\beta \rightarrow 0$, $e \rightarrow 0$ a blízko vázané rotace platí $Q^{-1} \approx n\Delta t$

Specifická disipační funkce Q

- pro kamenné planety a měsíce $10 < Q < 500$
- Q v modelech dlouhodobého vývoje oběžné dráhy často uvažována konstantní (v čase)
- obecně však $Q = Q(\mu, \eta, T)$, $\eta = \eta(P, T)$
- průběžné změny Q v důsledku vnitřního dynamického vývoje planety \rightarrow vliv na vývoj dráhy \rightarrow vliv na průměrnou povrchovou teplotu





Závěr

- uvážení nebodové hvězdy může zvýšit teplotu v některých místech povrchu o desítky až stovky kelvinů, pro blízké oběžnice je nezbytné
- vliv nenulové délky periastra: při vyšších výstřednostech mění maximální teplotní kontrast na planetě o desítky kelvinů
- teplotně závislá tepelná setrvačnost zmírňuje chladnutí povrchu

Do budoucna

- vývoj oběžné dráhy
- škálovací zákony pro průměrnou povrchovou teplotu $T = T(a, e, \beta, \dots)$
- nekonstantní tepelný tok na spodní hranici vrstvy
- realističtější vývoj Q
- světelné křivky exoplanet