

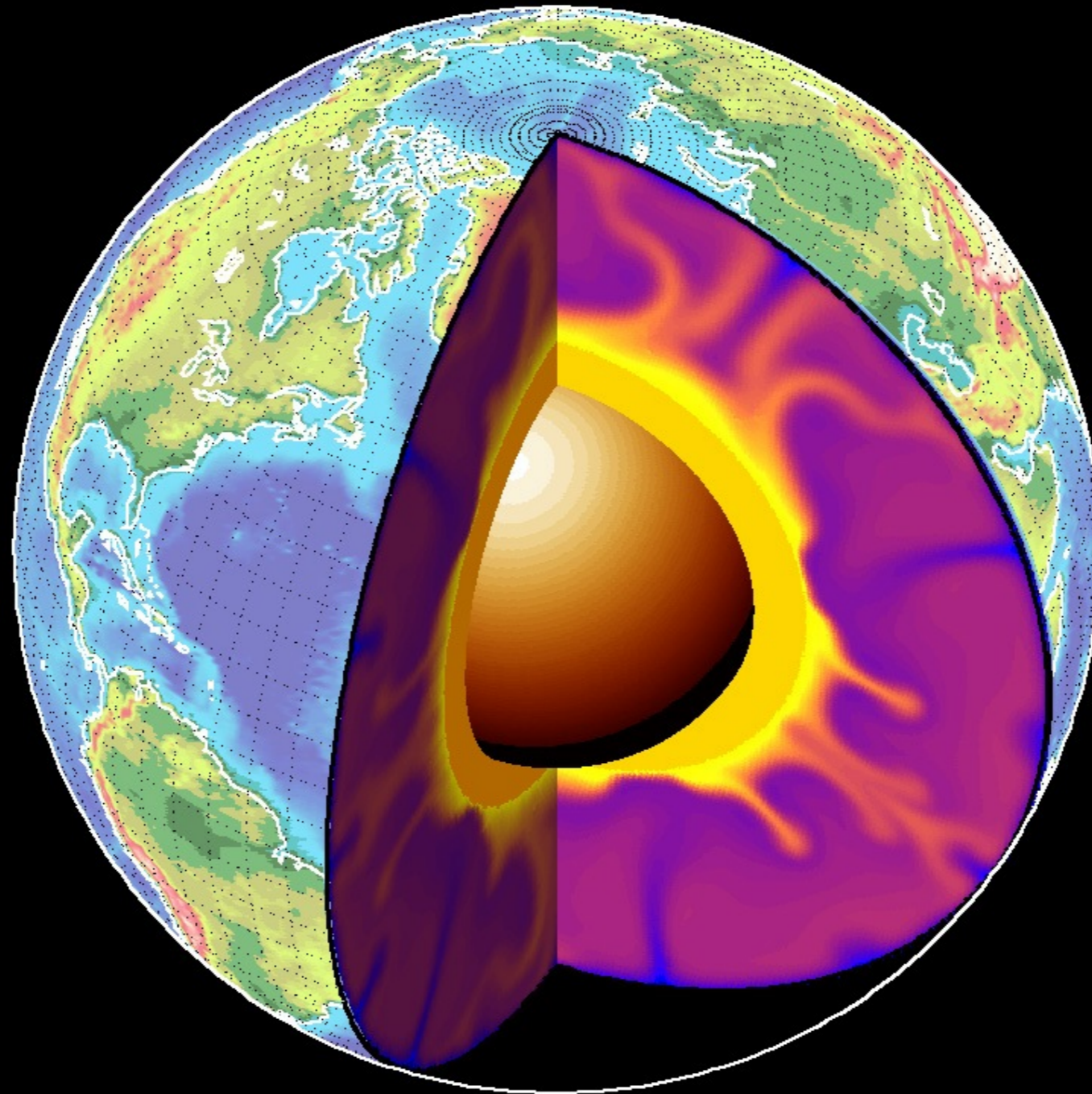
Viskoelastická deformace v geofyzikálních aplikacích

Řešitel: Kateřina Sládková

Vedoucí: doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc. (KG)

Konzultant: RNDr. Ondřej Souček, Ph.D. (MÚ)

Termální konvekce v zemském plášti



PLÁN

PLÁN

- ROVNICE A MODELY

PLÁN

- ROVNICE A MODELY
- CÍL A MOTIVACE

PLÁN

- ROVNICE A MODELY
- CÍL A MOTIVACE
- NUMERICKÉ METODY

PLÁN

- ROVNICE A MODELY
- CÍL A MOTIVACE
- NUMERICKÉ METODY
- POSTUP PRÁCE

PLÁN

- ROVNICE A MODELY
- CÍL A MOTIVACE
- NUMERICKÉ METODY
- POSTUP PRÁCE
- PŘIDÁVÁNÍ VISKOELASTICKÝCH ČLENŮ

PLÁN

- ROVNICE A MODELY
- CÍL A MOTIVACE
- NUMERICKÉ METODY
- POSTUP PRÁCE
- PŘIDÁVÁNÍ VISKOELASTICKÝCH ČLENŮ
- TESTOVÁNÍ KÓDU

PLÁN

- ROVNICE A MODELY
- CÍL A MOTIVACE
- NUMERICKÉ METODY
- POSTUP PRÁCE
- PŘIDÁVÁNÍ VISKOELASTICKÝCH ČLENŮ
- TESTOVÁNÍ KÓDU
- VIZUALIZACE

Zákony zachování

Zákony zachování

- hmoty: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$

Zákony zachování

- hmoty: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
- hybnosti: $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}$

Zákony zachování

- hmoty: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
- hybnosti: $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}$
- momentu hybnosti: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$

Zákony zachování

- hmoty: $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
- hybnosti: $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}$
- momentu hybnosti: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$
- energie: $\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q}$

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T$$

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T$$

$$\mathbf{S} = 2\eta \mathbf{D}$$

viskózní reologie

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T$$

$$\mathbf{S} = 2\eta \mathbf{D}$$

viskózní reologie

$$\eta = \eta(p, T, \mathbf{D}, \mathbf{r})$$

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

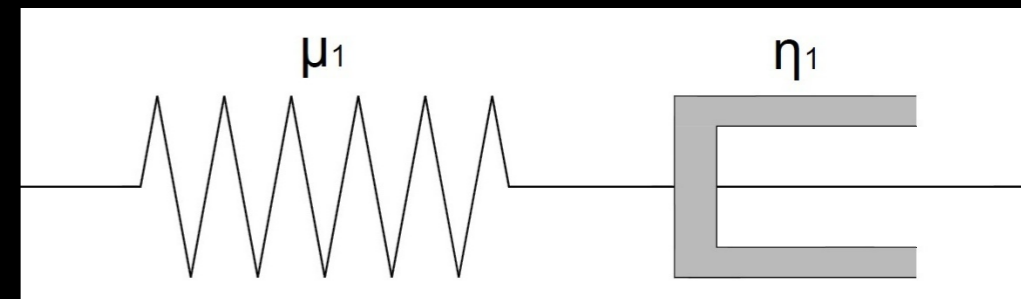
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T$$

$$t_{\text{relax}} \overset{\nabla}{\mathbf{S}} + \mathbf{S} = 2\eta \mathbf{D}$$

$$\eta = \eta(p, T, \mathbf{D}, \mathbf{r})$$



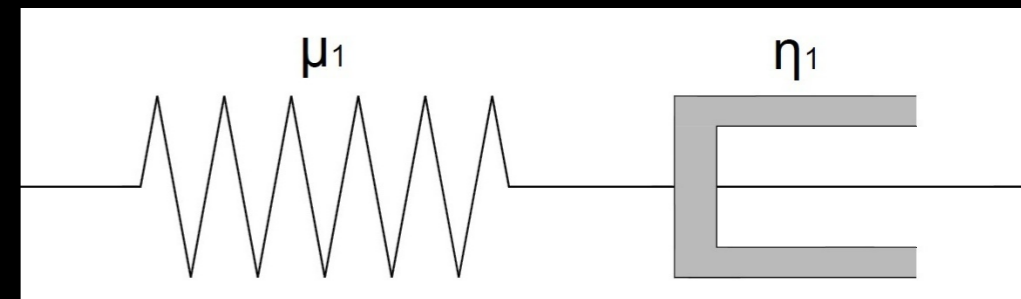
Maxwellovská reologie

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T$$



$$t_{\text{relax}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{S} = 2\eta \mathbf{D}$$

$$\eta = \eta(p, T, \mathbf{D}, \mathbf{r})$$

Maxwellovská reologie

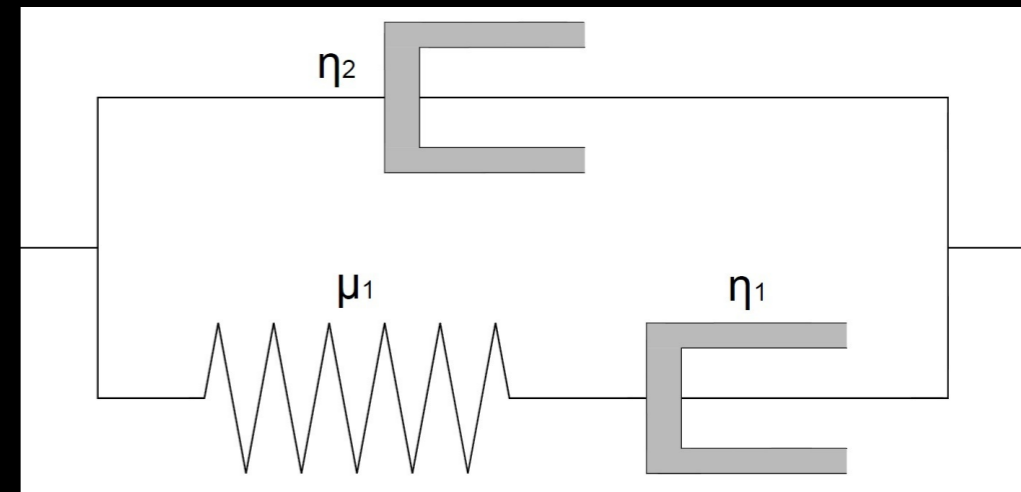
Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T$$

$$\mathbf{S} - 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} = 2D\eta_2\overset{\nabla}{\mathbf{D}} - D\overset{\nabla}{\mathbf{S}}$$



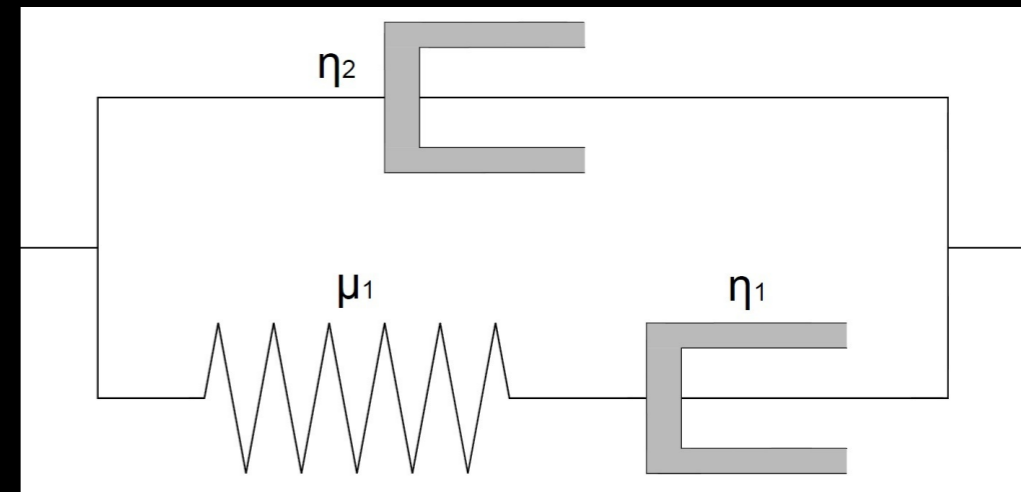
Oldroyd-B reologie

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T$$



Oldroyd-B reologie

$$\mathbf{S} - 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} = 2D\eta_2\overset{\nabla}{\mathbf{D}} - D\overset{\nabla}{\mathbf{S}}$$

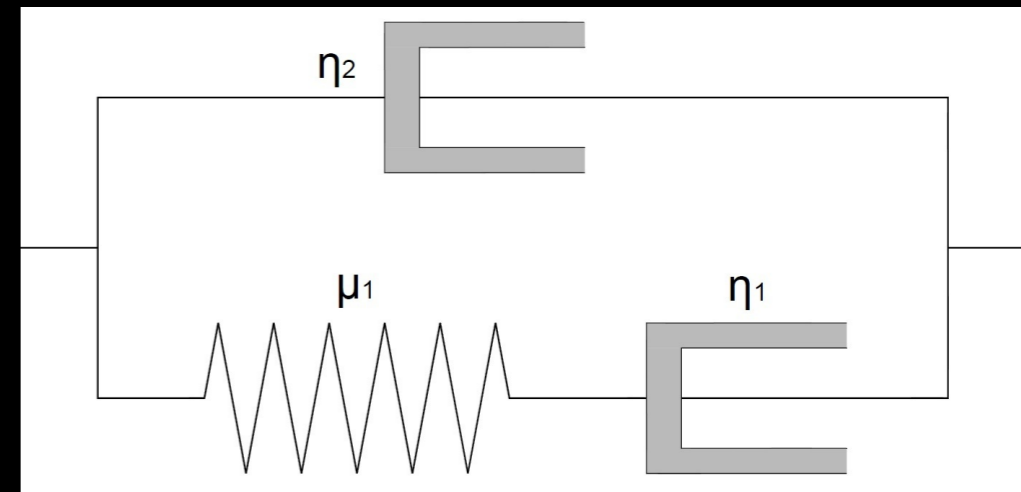
$$\left(\frac{\delta\gamma}{\delta t}\right)_a = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\gamma - (\mathbf{W}\gamma - \gamma\mathbf{W}) + a(\mathbf{D}\gamma + \gamma\mathbf{D}), \quad a \in [-1, 1]$$

Oberbeck-Boussinesqova aproximace

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\mathbf{f}$$

$$\rho_0 c_p \frac{dT}{dt} = k \Delta T$$



Oldroyd-B reologie

$$\mathbf{S} - 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} = 2D\eta_2\overset{\nabla}{\mathbf{D}} - D\overset{\nabla}{\mathbf{S}}$$

$$\left(\frac{\delta\gamma}{\delta t}\right)_a = \frac{\partial\gamma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\gamma - (\mathbf{W}\gamma - \gamma\mathbf{W}) + a(\mathbf{D}\gamma + \gamma\mathbf{D}), \quad a \in [-1, 1]$$

$$a = -1 \longrightarrow \overset{\nabla}{\gamma} := \frac{\partial\gamma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\gamma - \nabla\mathbf{v}\gamma - \gamma(\nabla\mathbf{v})^T$$

MOTIVACE A CÍL

MODELOVÁNÍ GEOMATERIÁLŮ

MOTIVACE A CÍL

MODELOVÁNÍ GEOMATERIÁLŮ

dosud:

viskózní kapaliny

Maxwell,

většinou pouze

$$t_{\text{relax}} \frac{\partial S}{\partial t} + S = 2\eta D$$

MOTIVACE A CÍL

MODELOVÁNÍ GEOMATERIÁLŮ



dosud:

viskózní kapaliny

Maxwell,

většinou pouze

$$t_{\text{relax}} \frac{\partial S}{\partial t} + S = 2\eta D$$

skutečnost:

viskoelastické

kapaliny

MOTIVACE A CÍL

MODELOVÁNÍ GEOMATERIÁLŮ



dosud:

viskózní kapaliny
Maxwell,
většinou pouze

$$t_{\text{relax}} \frac{\partial S}{\partial t} + S = 2\eta D$$

skutečnost:

viskoelastické
kapaliny

CÍL: srovnání viskózní a viskoelastické deformace

MOTIVACE A CÍL

MODELOVÁNÍ GEOMATERIÁLŮ



dosud:

viskózní kapaliny

Maxwell,

většinou pouze

$$t_{\text{relax}} \frac{\partial S}{\partial t} + S = 2\eta D$$

skutečnost:

viskoelastické

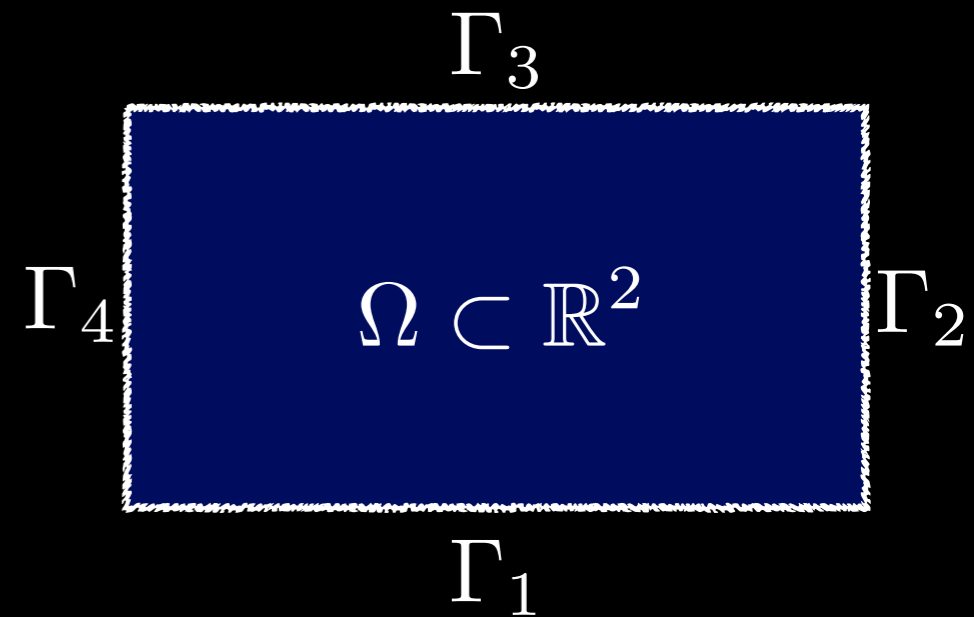
kapaliny

CÍL: srovnání viskózní a viskoelastické deformace

VÝSLEDEK: role elasticity

Oldroydův-B model

1) Rovnice

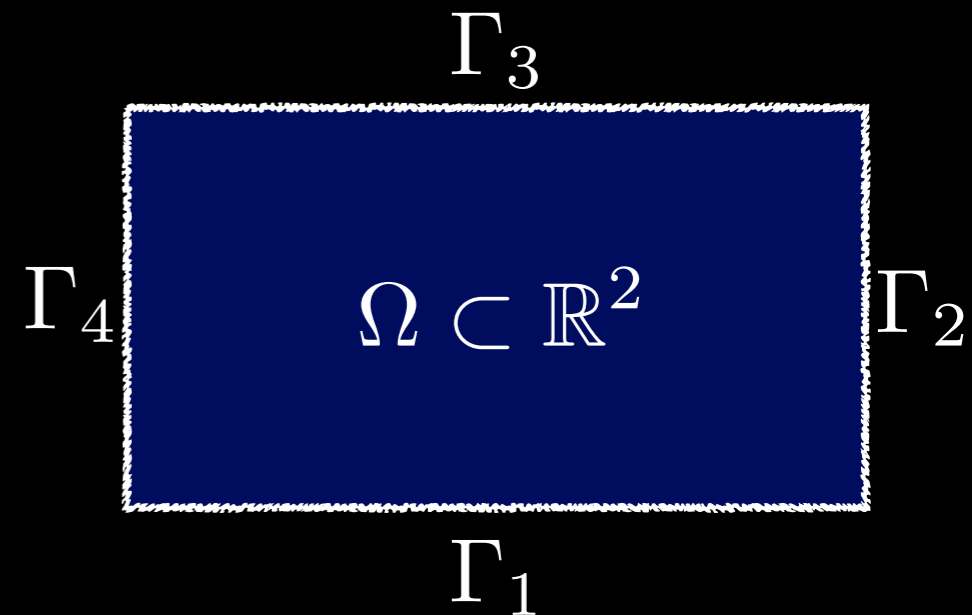


Oldroydův-B model

1) Rovnice

- rovnice kontinuity:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$



Oldroydův-B model

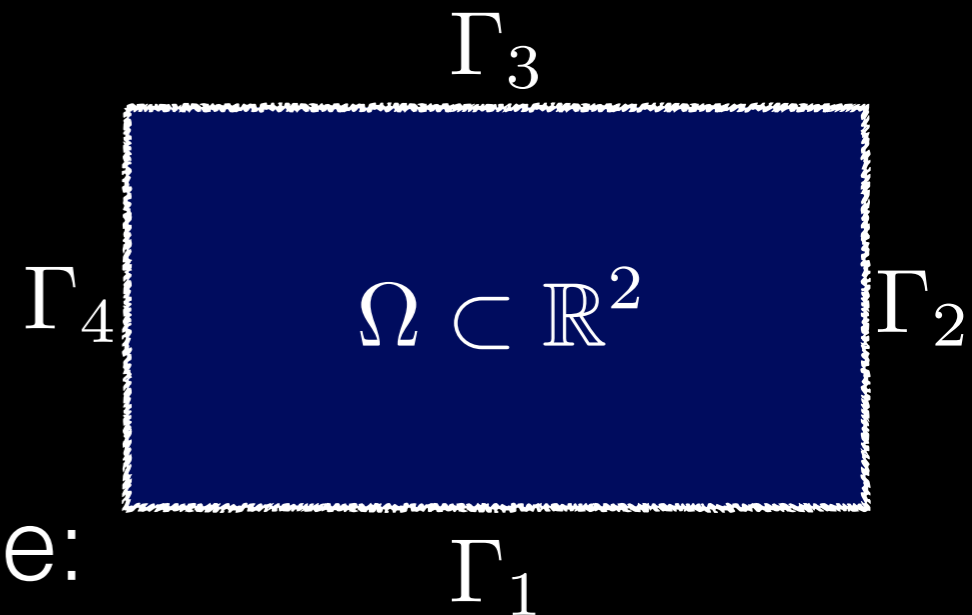
1) Rovnice

- rovnice kontinuity:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

- přírůstková pohybová rovnice:

$$-\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} = RaT \mathbf{e}_z$$



Oldroydův-B model

1) Rovnice

- rovnice kontinuity:

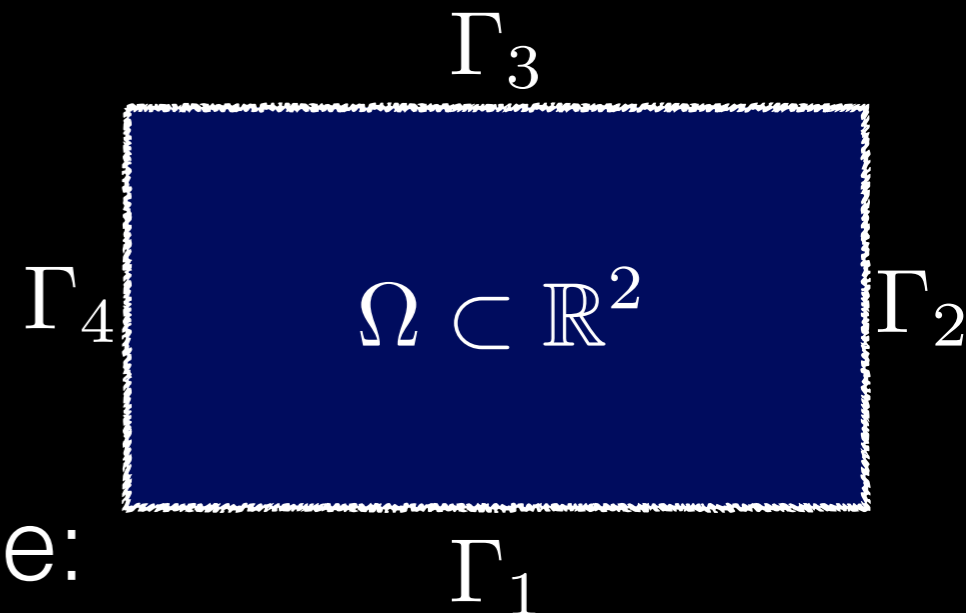
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

- přírůstková pohybová rovnice:

$$-\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} = RaT \mathbf{e}_z$$

- reologický vztah:

$$\mathbf{S} - 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} = 2D\eta_2\overset{\nabla}{\mathbf{D}} - D\overset{\nabla}{\mathbf{S}}$$



Oldroydův-B model

1) Rovnice

- rovnice kontinuity:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

- přírůstková pohybová rovnice:

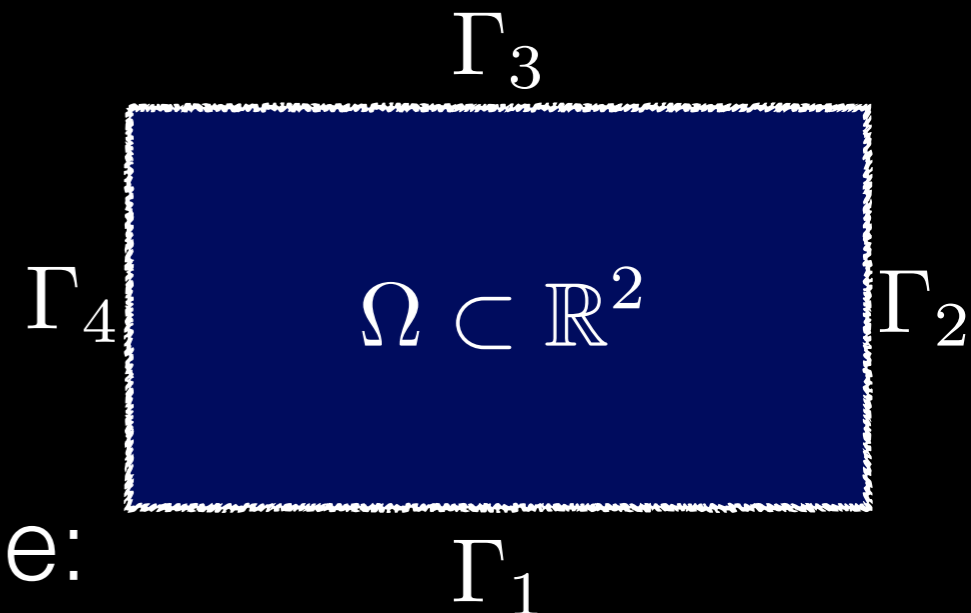
$$-\nabla p + \operatorname{div} \mathbf{S} = RaT \mathbf{e}_z$$

- reologický vztah:

$$\mathbf{S} - 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} = 2D\eta_2\overset{\nabla}{\mathbf{D}} - D\overset{\nabla}{\mathbf{S}}$$

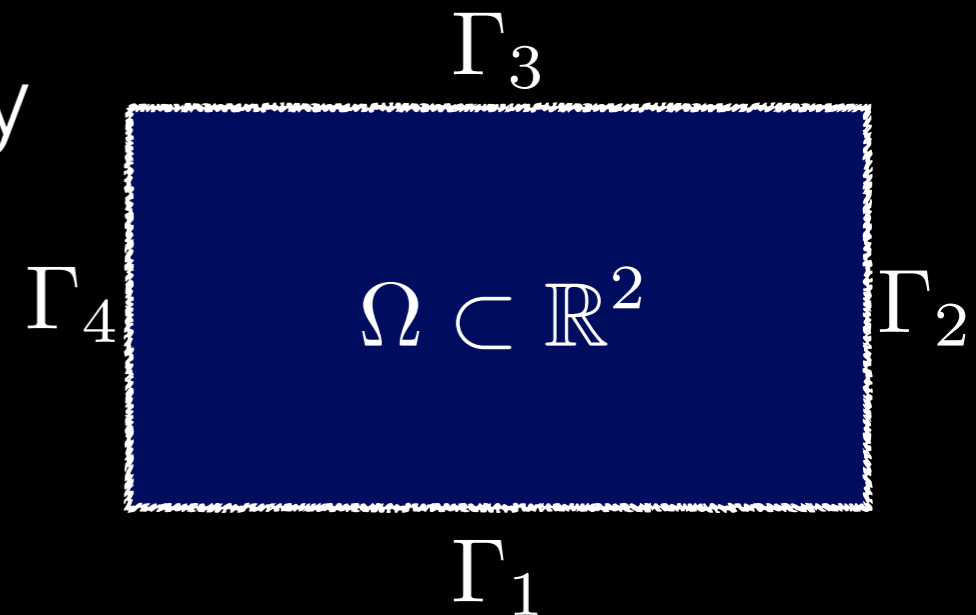
- rovnice přenosu tepla:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - \mathbf{v} \cdot \nabla T$$



Oldroydův-B model

2) Okrajové a počáteční podmínky

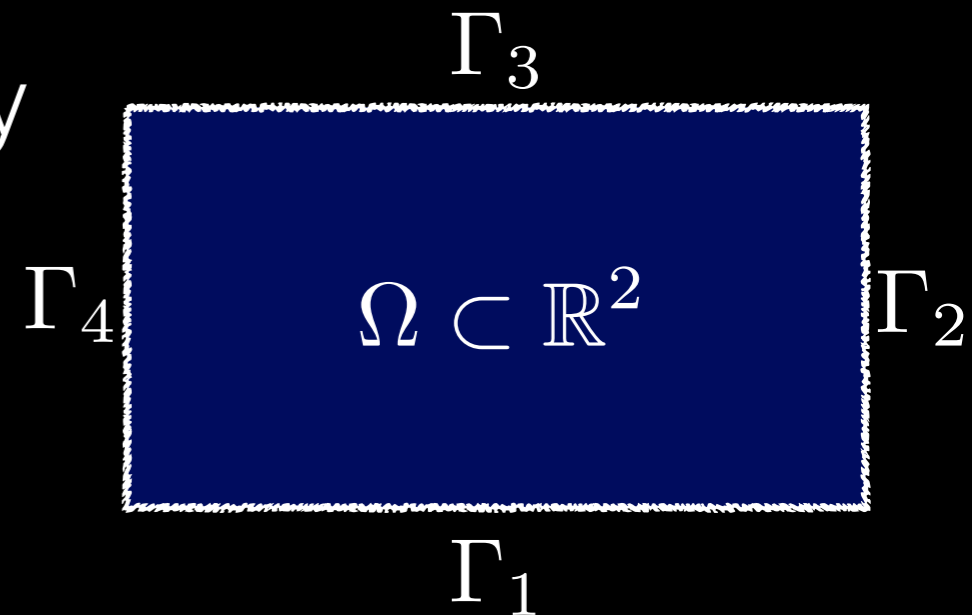


Oldroydův-B model

2) Okrajové a počáteční podmínky

- free-slip: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = ((\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$



Oldroydův-B model

2) Okrajové a počáteční podmínky

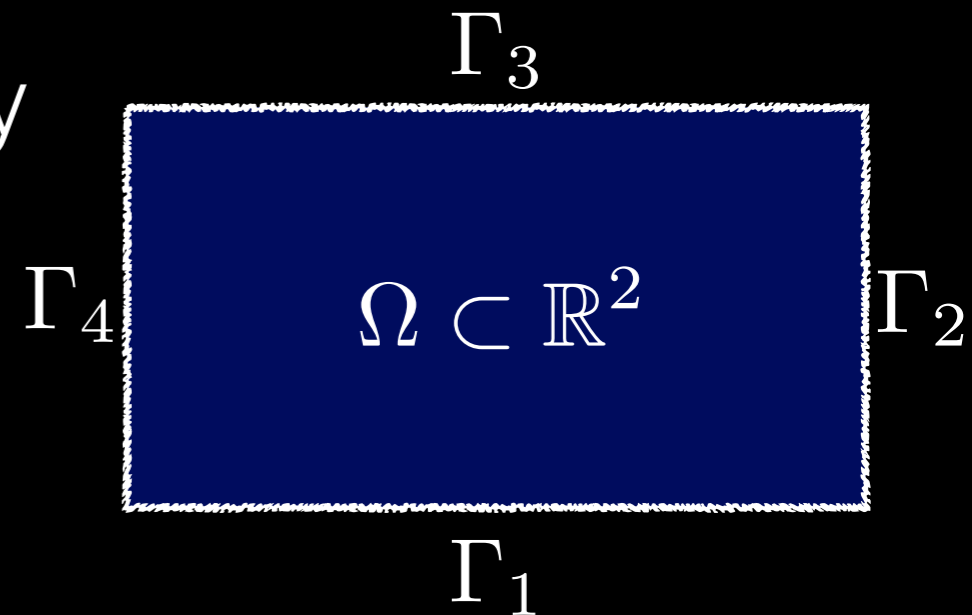
- free-slip: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = ((\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

- konstantní teplota:

$$T|_{\Gamma_1} = T_{bot}$$

$$T|_{\Gamma_3} = T_{top}$$



Oldroydův-B model

2) Okrajové a počáteční podmínky

- free-slip: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = ((\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

- konstantní teplota:

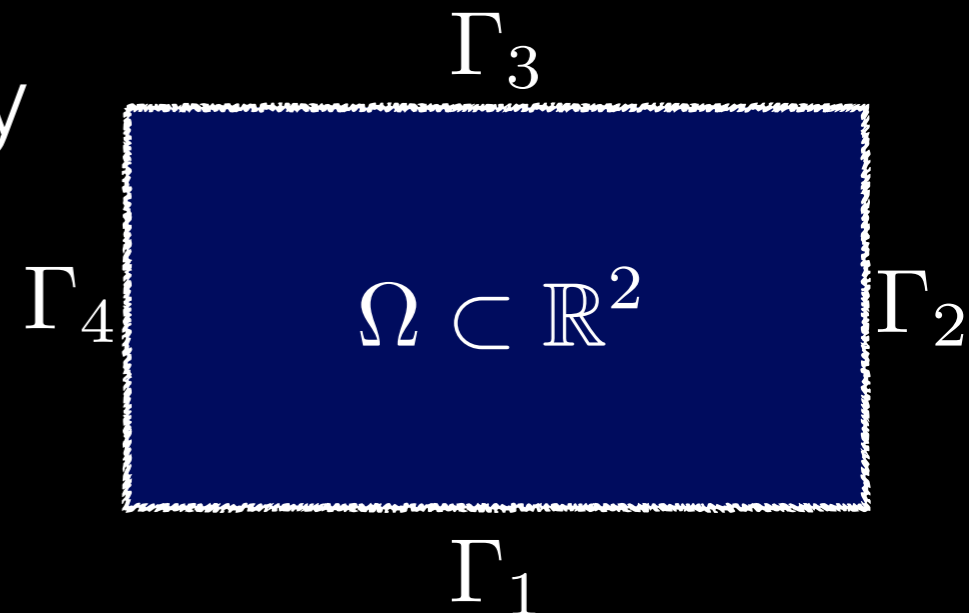
$$T|_{\Gamma_1} = T_{bot}$$

$$T|_{\Gamma_3} = T_{top}$$

- zrcadlové podmínky:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_4} = 0$$



Oldroydův-B model

2) Okrajové a počáteční podmínky

- free-slip: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = ((\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

- konstantní teplota:

$$T|_{\Gamma_1} = T_{bot}$$

$$T|_{\Gamma_3} = T_{top}$$

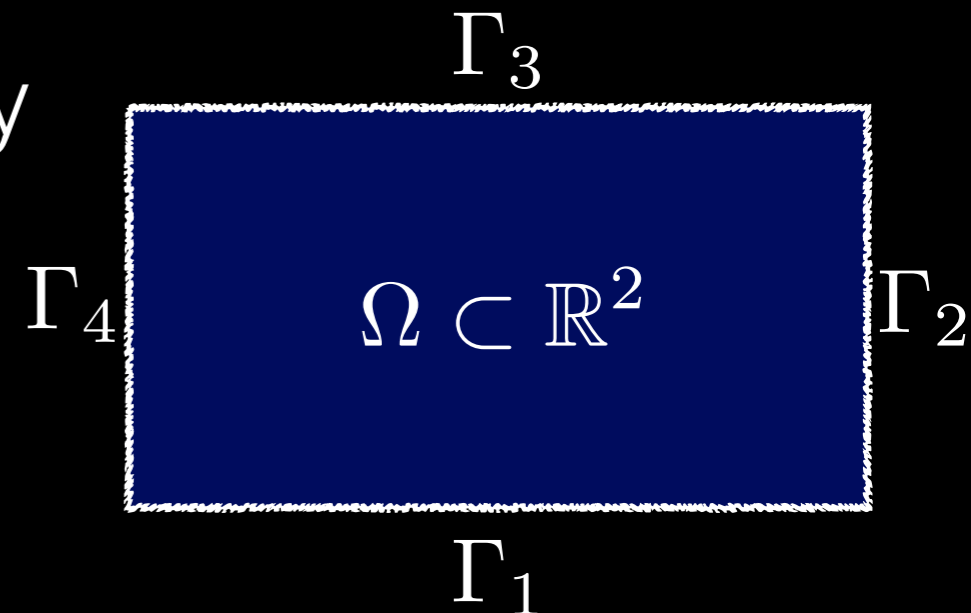
- zrcadlové podmínky:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_4} = 0$$

- počáteční podmínka

$$T(t_0) = T_0$$

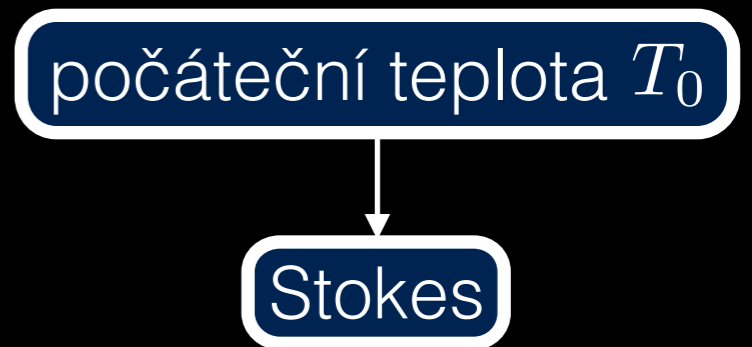


Numerické metody

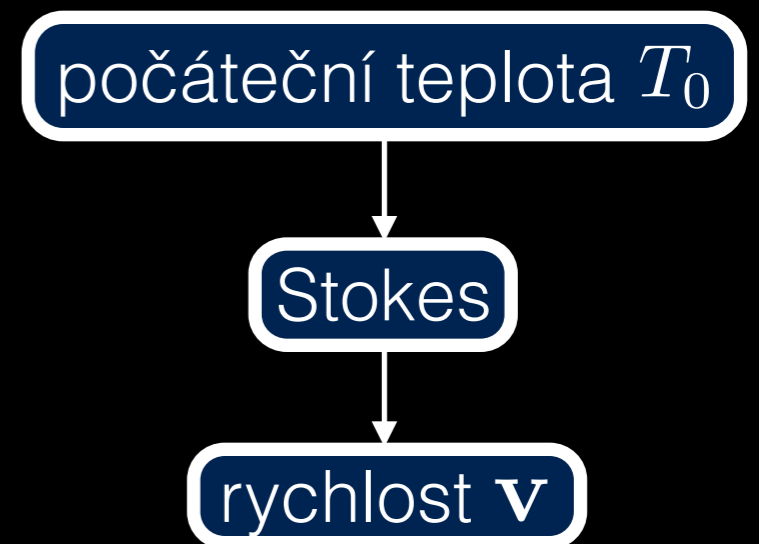
Numerické metody

počáteční teplota T_0

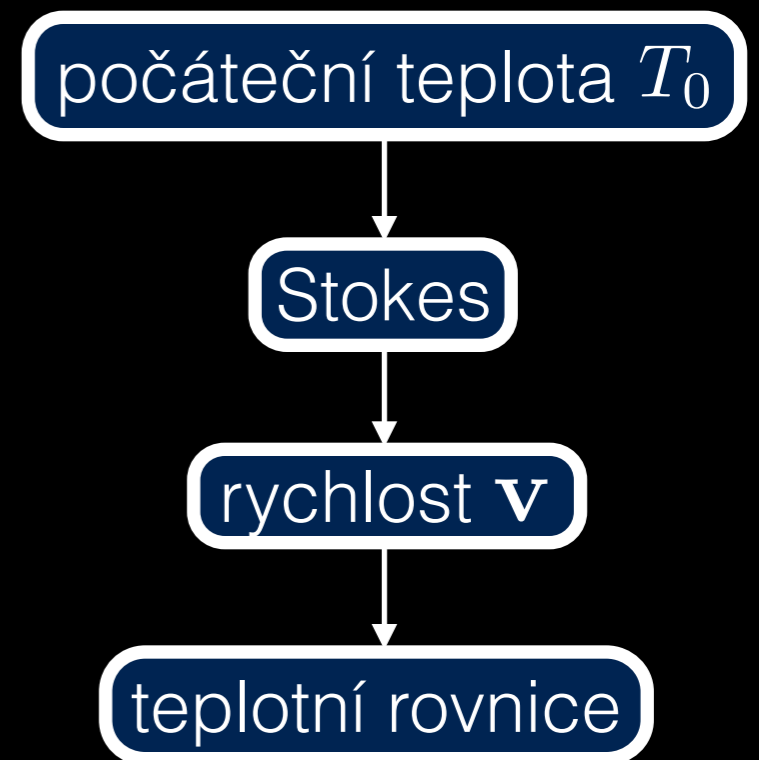
Numerické metody



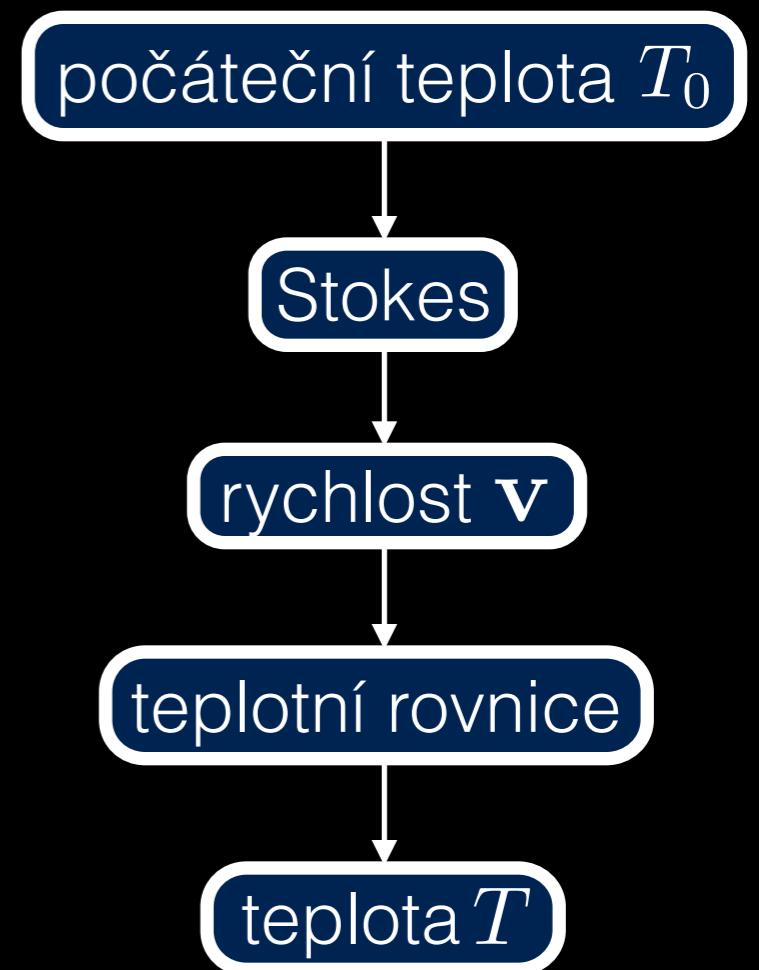
Numerické metody



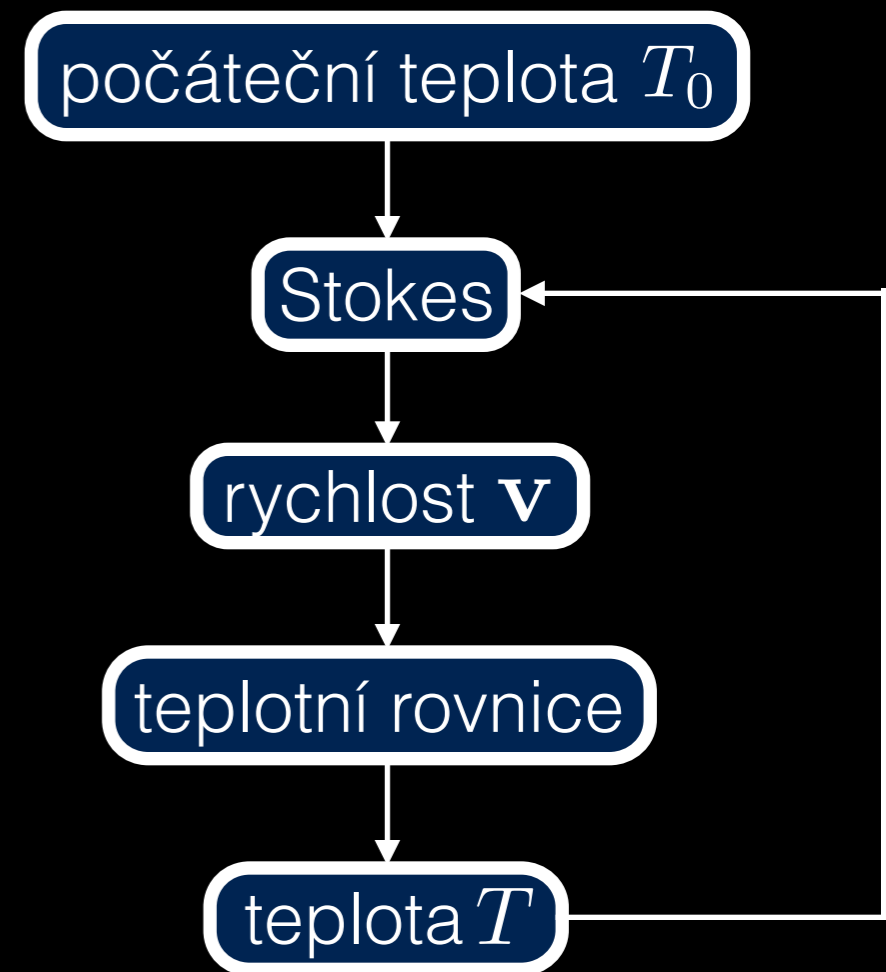
Numerické metody



Numerické metody

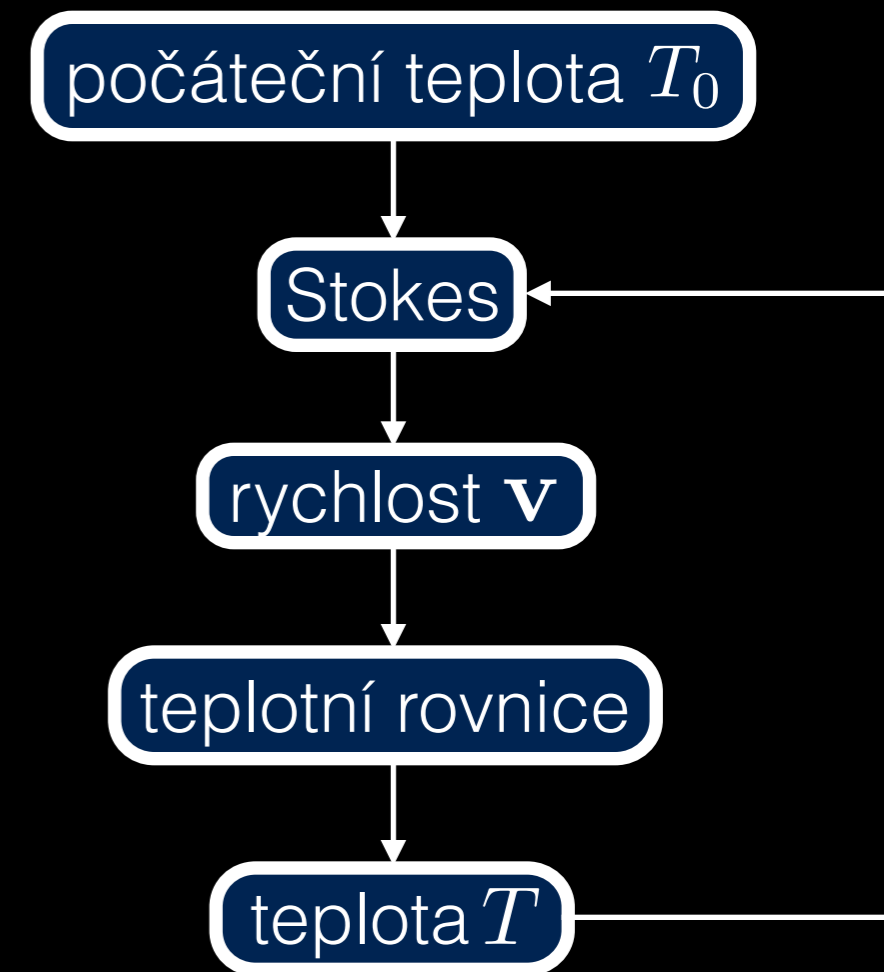


Numerické metody



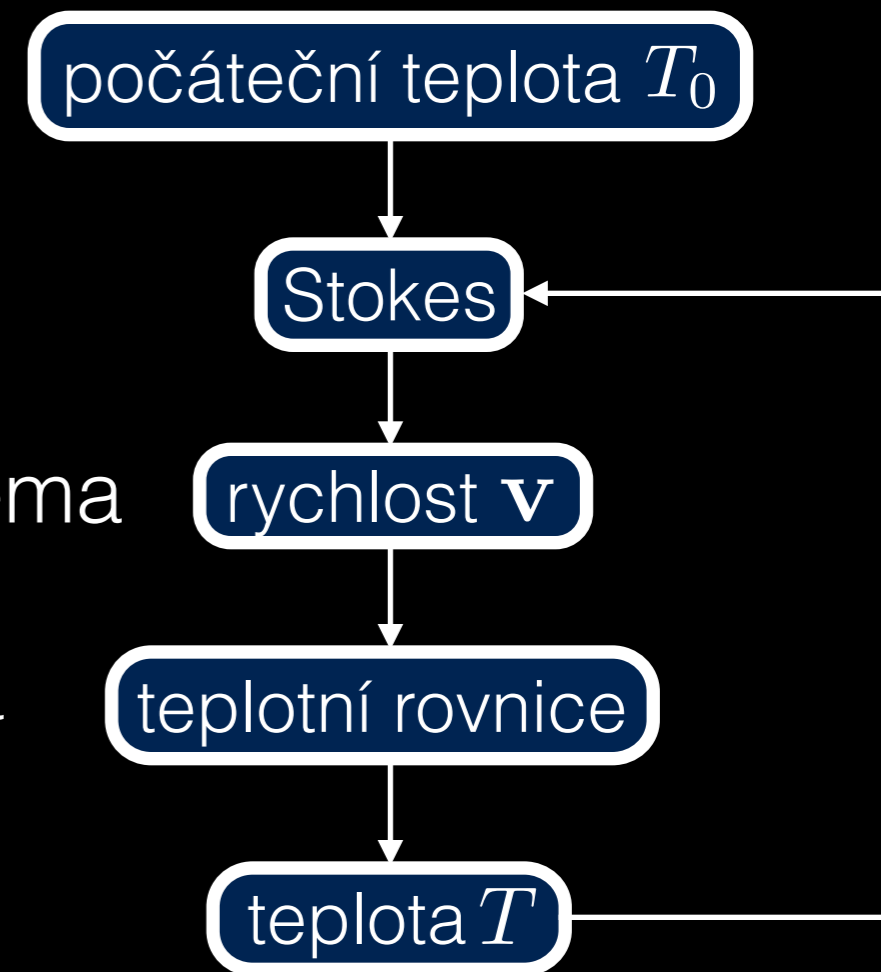
Numerické metody

- prostorová diskretizace:
 - konečné diference



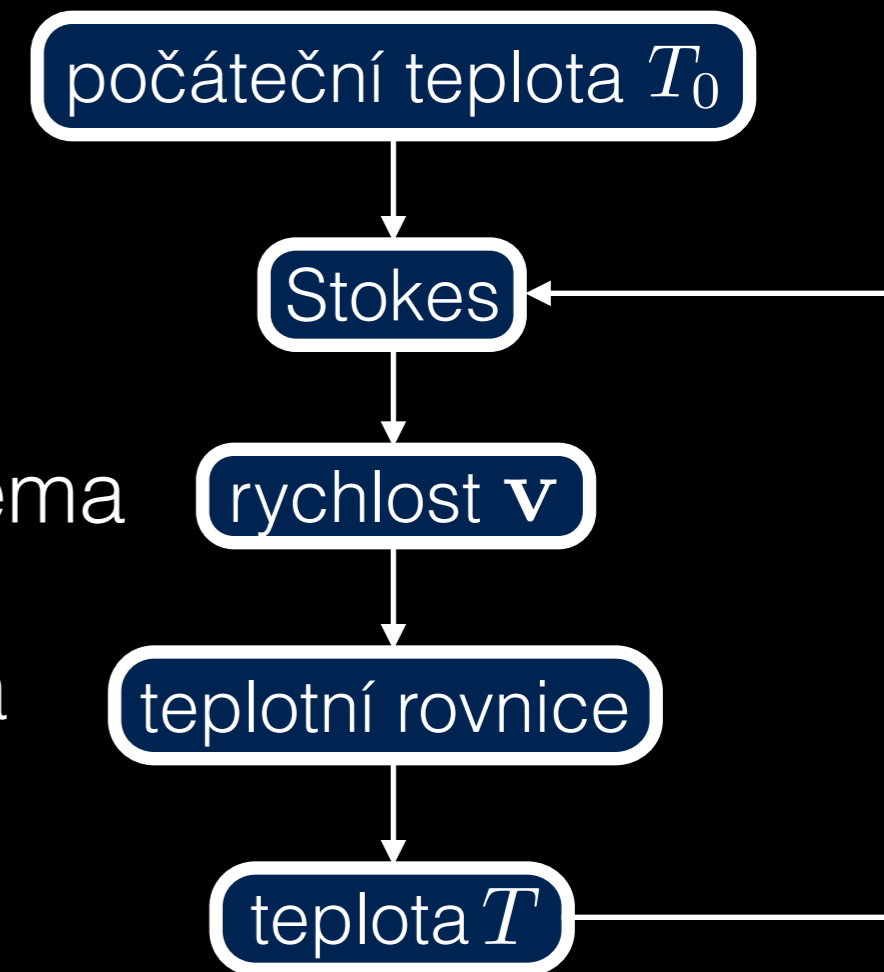
Numerické metody

- prostorová diskretizace:
 - konečné diference
- časová diskretizace
 - teplotní rovnice: Adams-Bashfortovo schéma
 - reologický vztah: zpětná Eulerova metoda

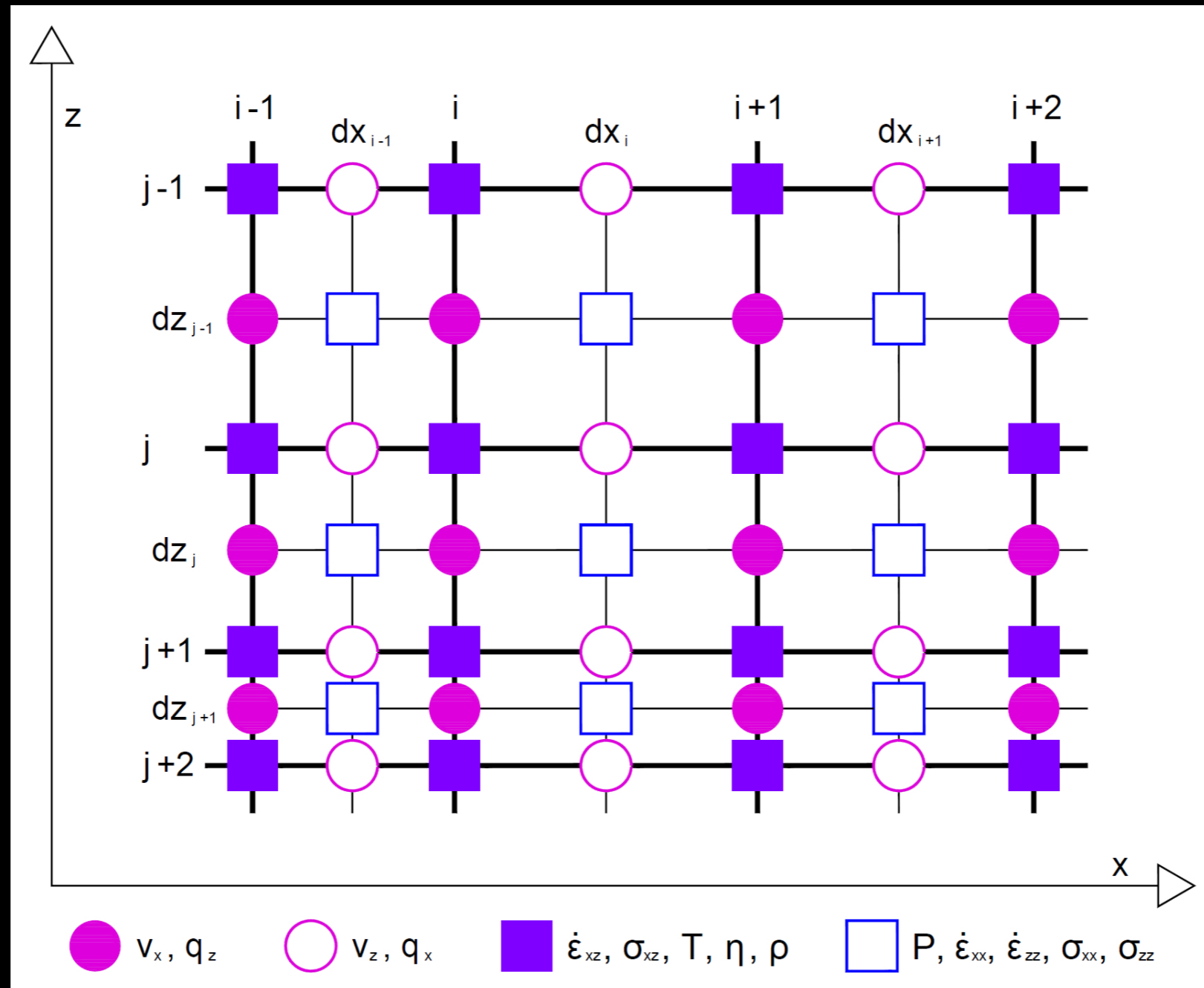


Numerické metody

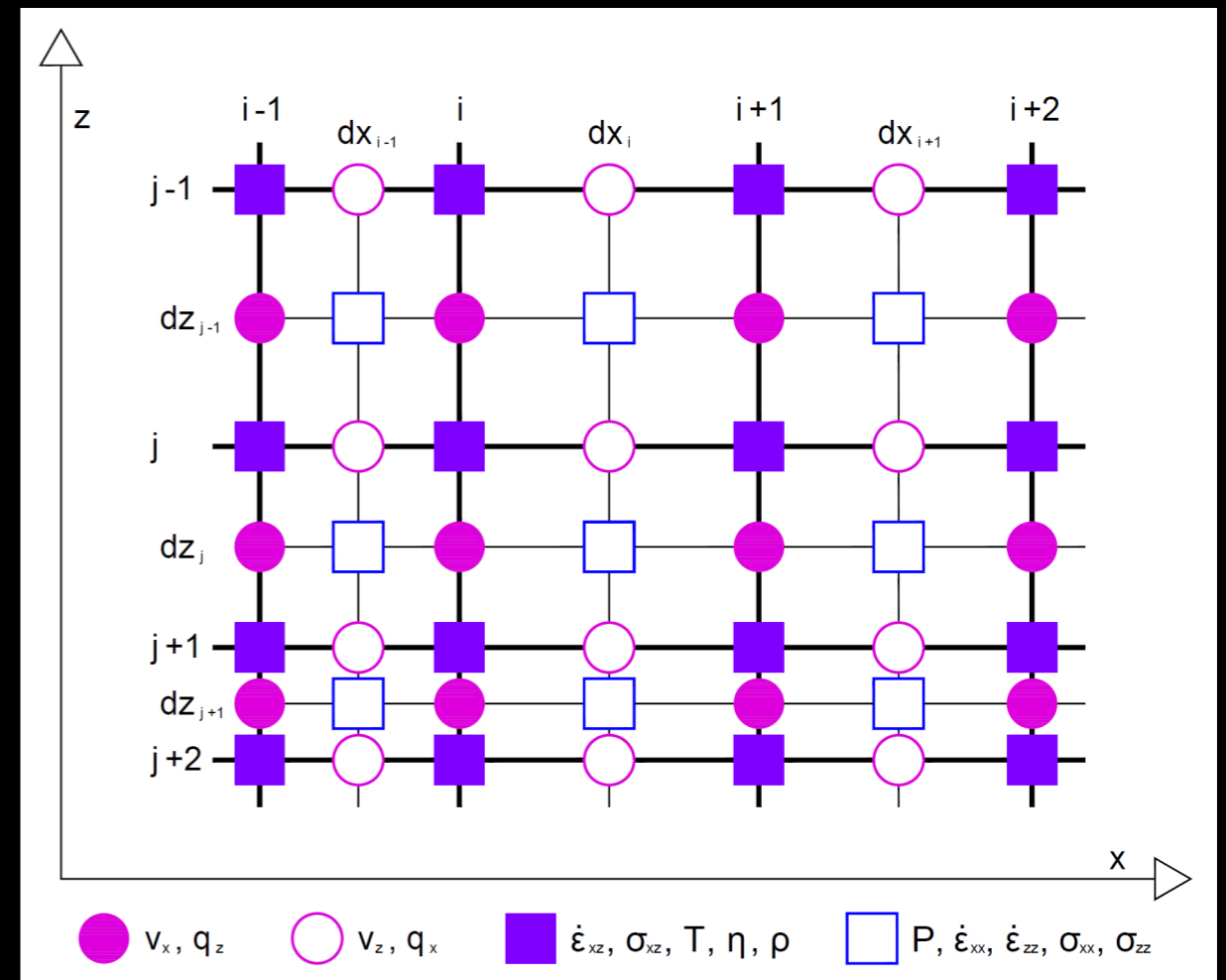
- prostorová diskretizace:
 - konečné diference
- časová diskretizace
 - teplotní rovnice: Adams-Bashfortovo schéma
 - reologický vztah: zpětná Eulerova metoda
- implementace:
 - vlastní program v jazyce Fortran 90



Konečné diference - síť

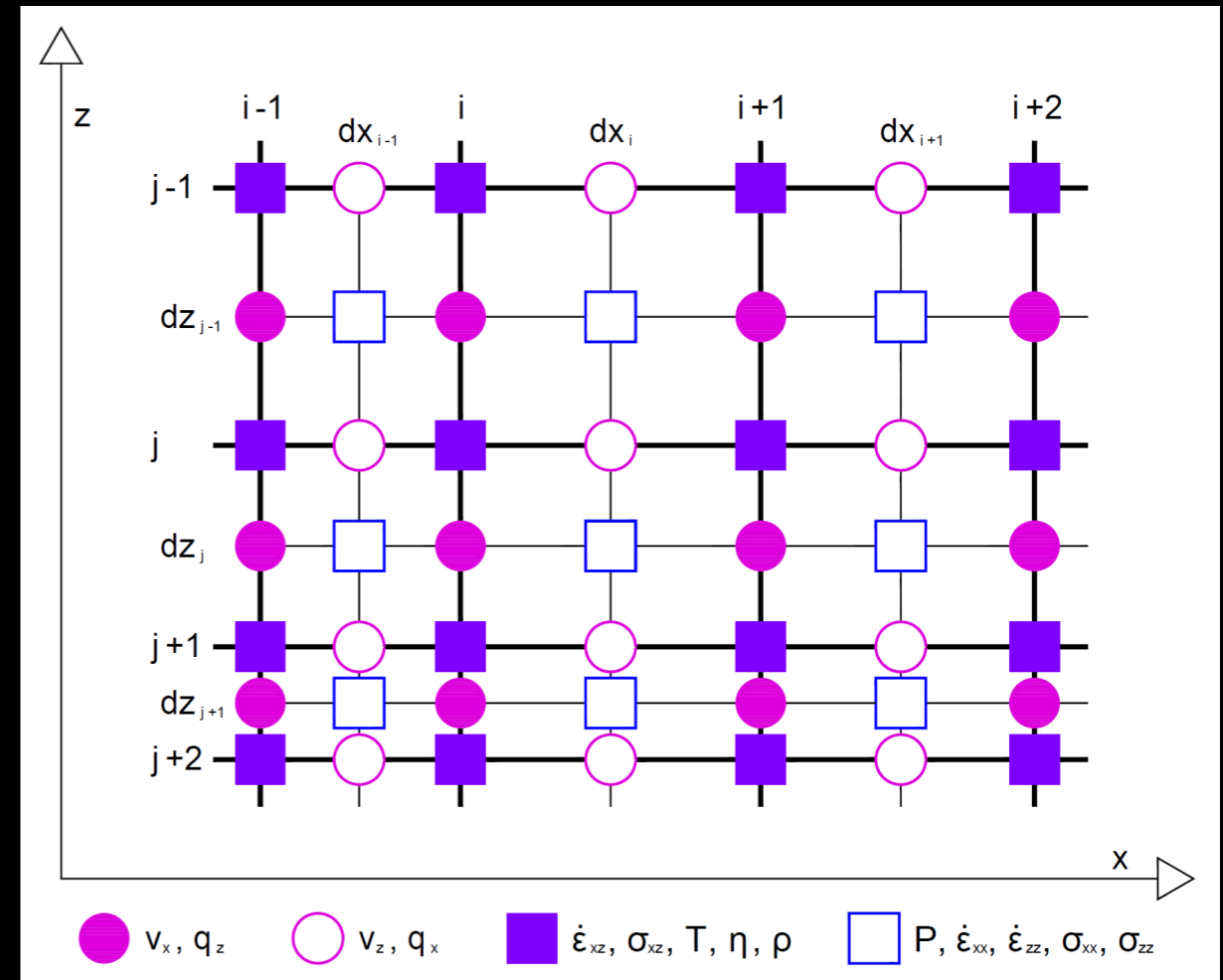


Konečné diference - proč?



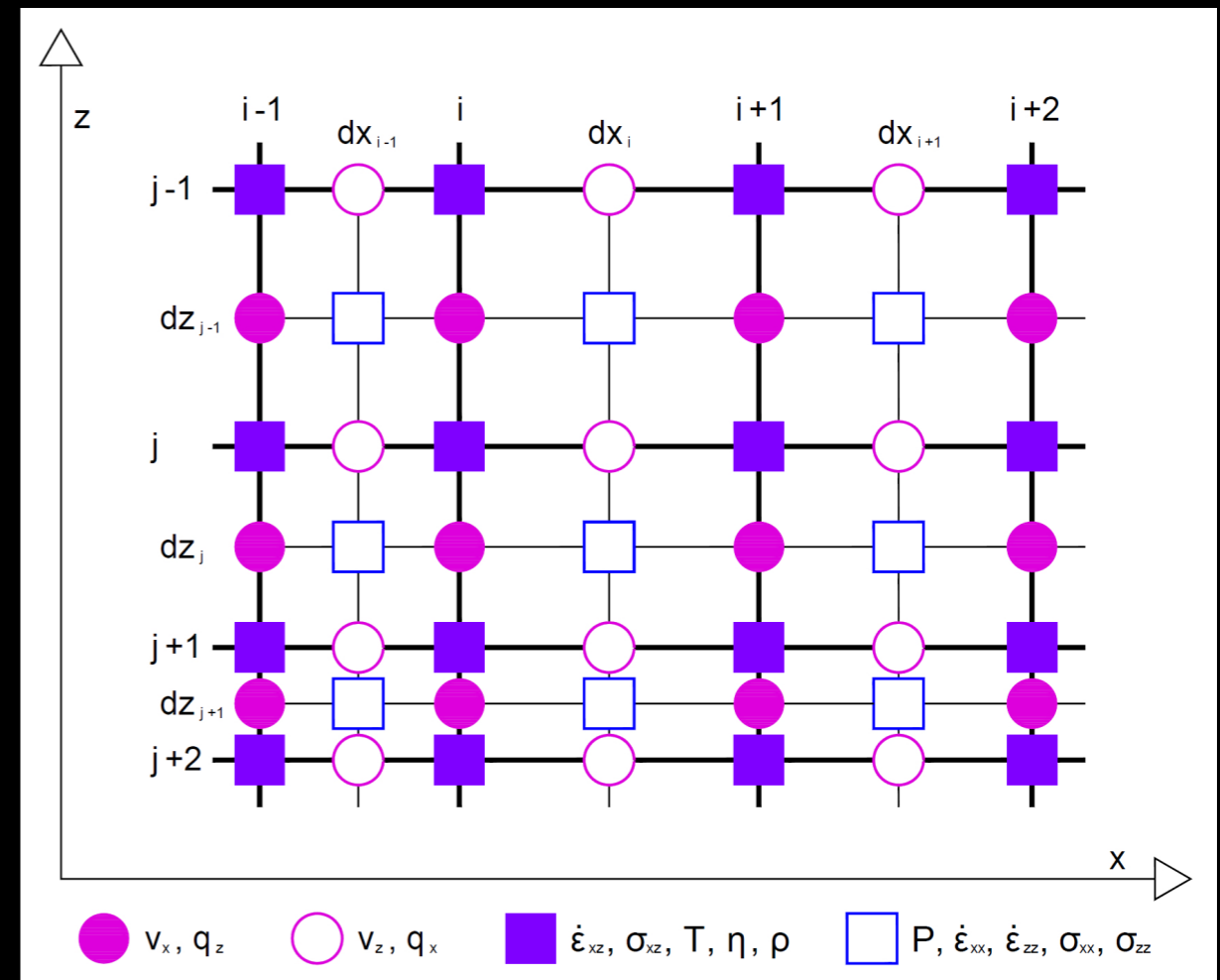
Konečné diference - proč?

- pravidelná oblast



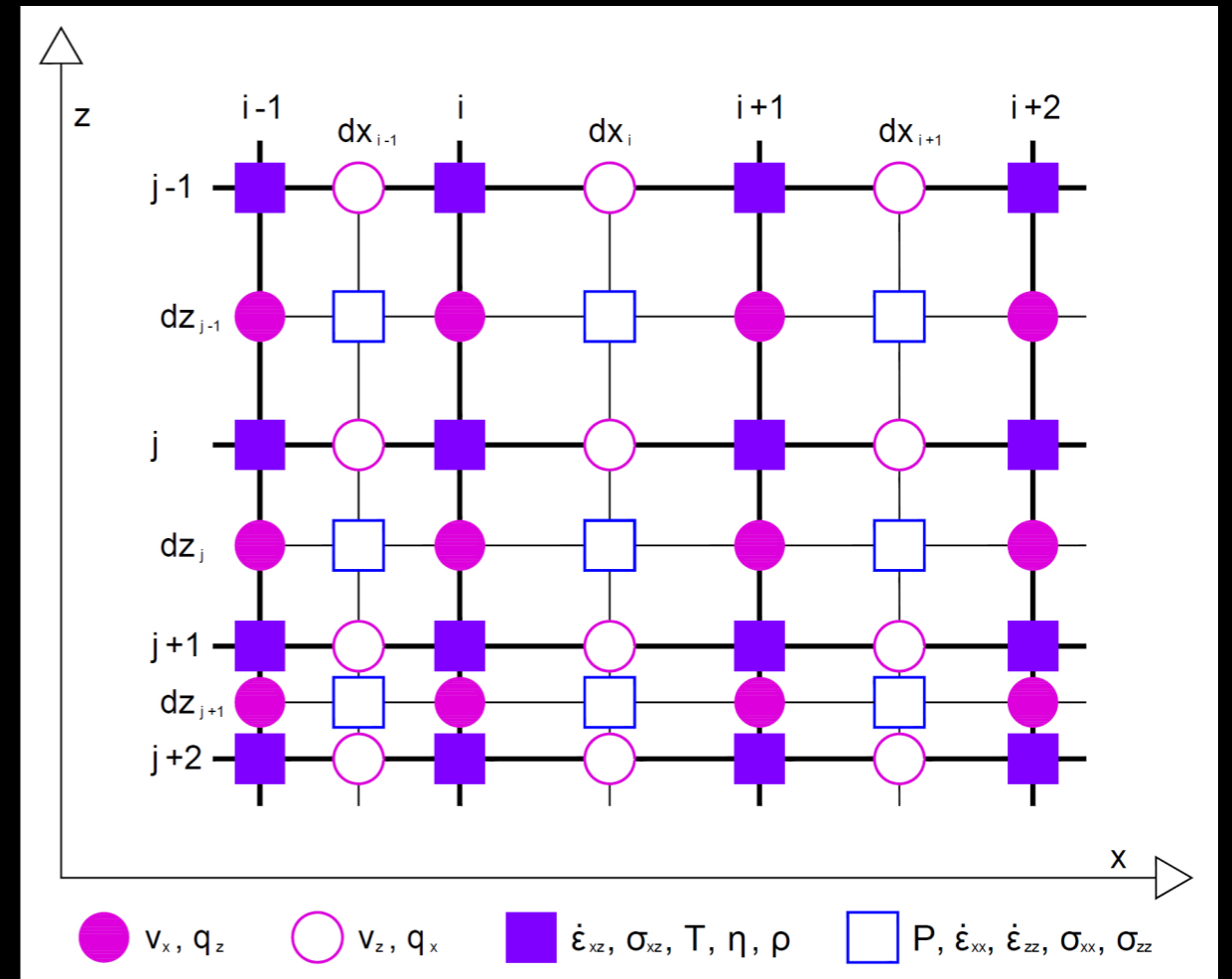
Konečné diference - proč?

- pravidelná oblast
- stabilní schéma i pro velké kontrasty viskozit



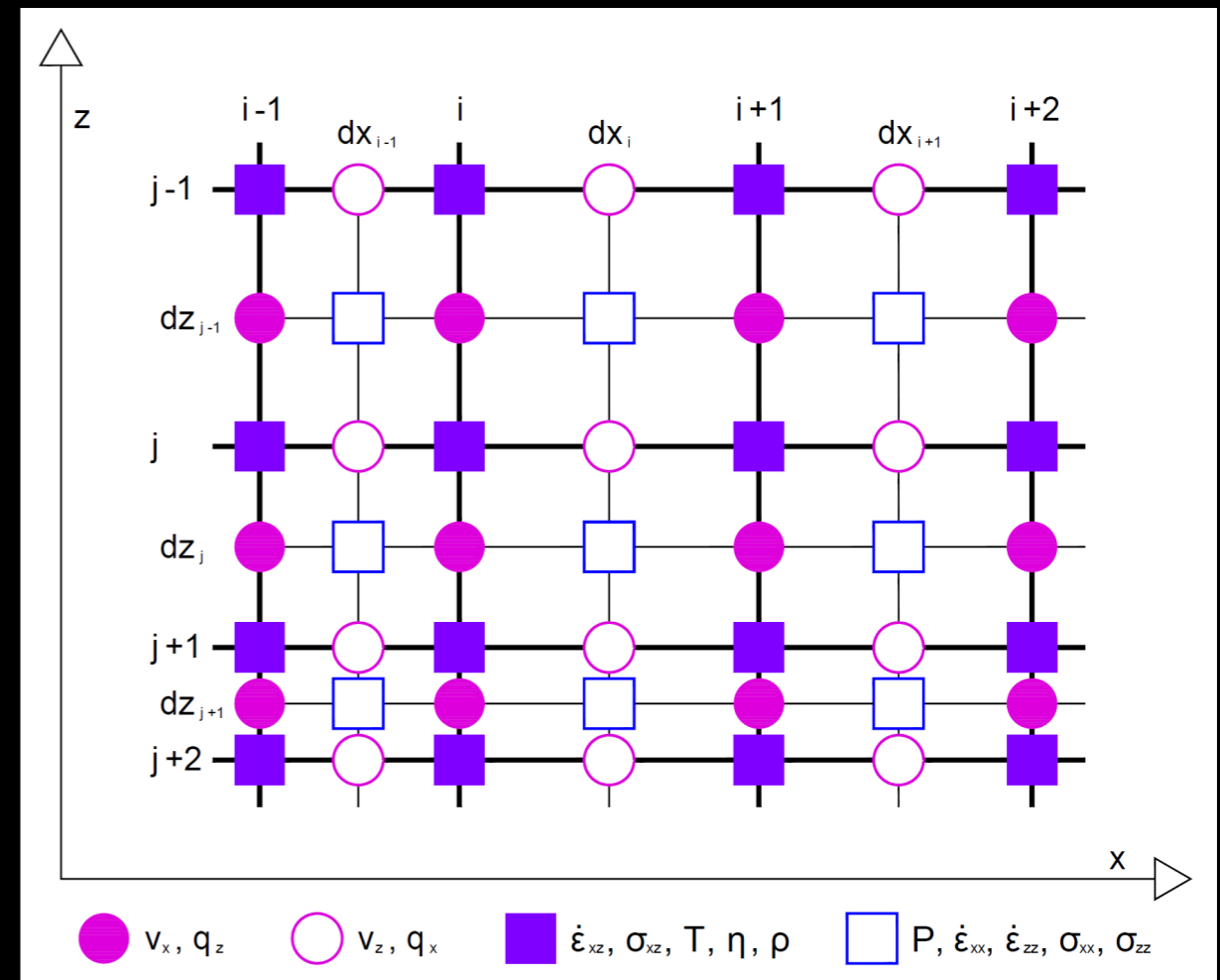
Konečné diference - proč?

- pravidelná oblast
- stabilní schéma i pro velké kontrasty viskozit
- i v nejjednodušším provedení, poměrně přesné: $O(h^2)$



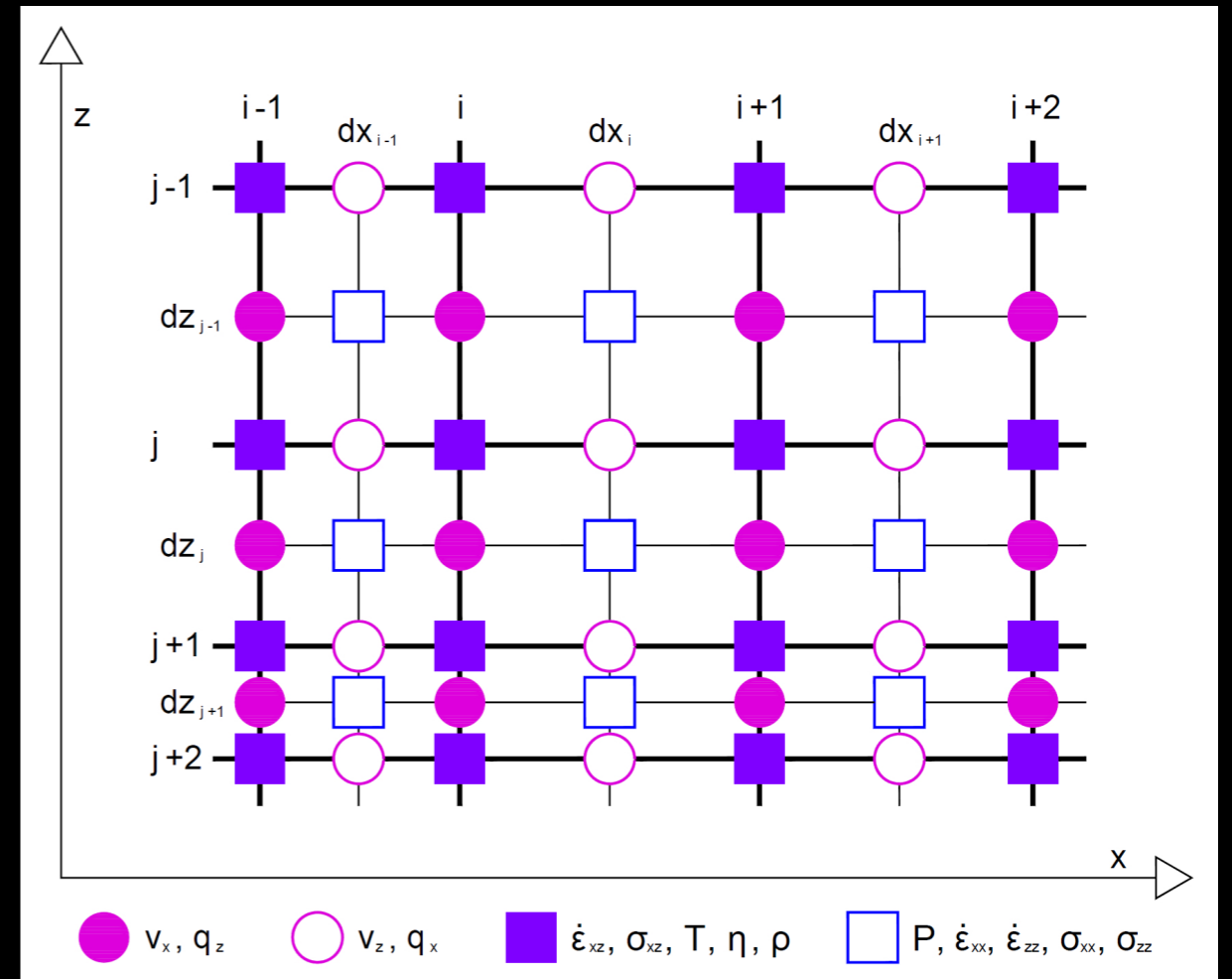
Konečné diference - proč?

- pravidelná oblast
- stabilní schéma i pro velké kontrasty viskozit
- i v nejjednodušším provedení, poměrně přesné: $O(h^2)$
- standardně používané



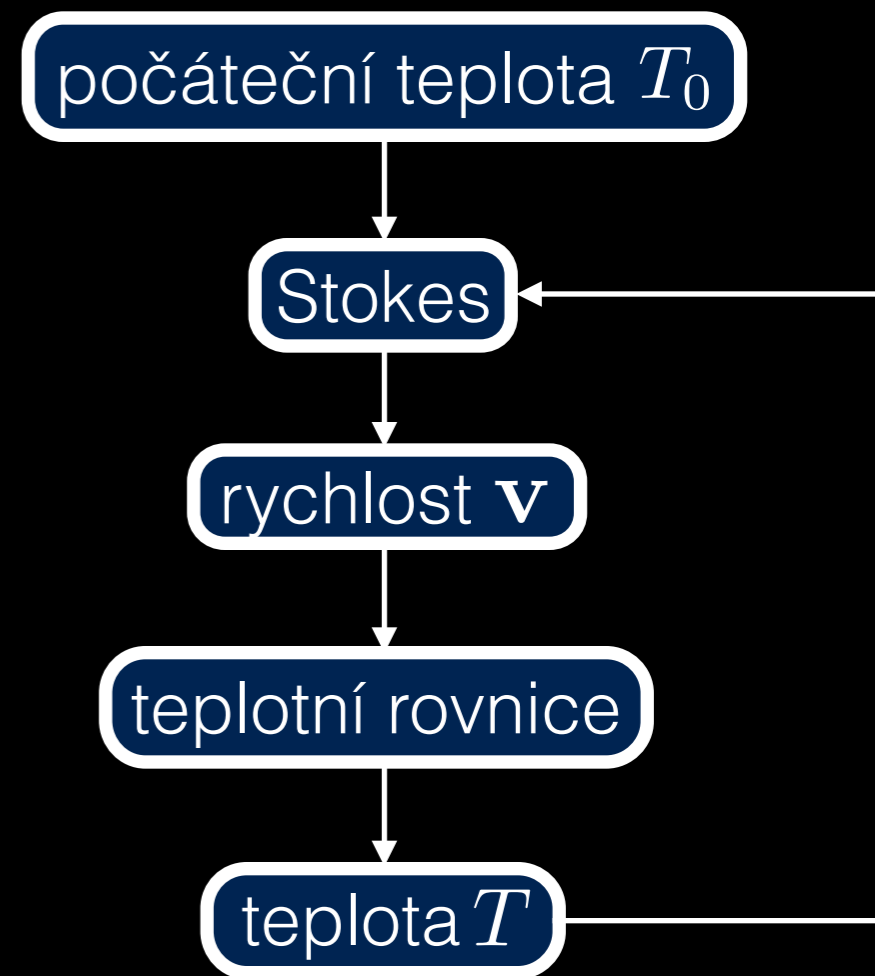
Konečné diference - proč?

- pravidelná oblast
- stabilní schéma i pro velké kontrasty viskozit
- i v nejjednodušším provedení, poměrně přesné: $O(h^2)$
- standardně používané
- náš úkol:
 - nadstavba nad standardními geofyzikálními kódy



Numerické knihovny

Numerické knihovny



Numerické knihovny

Stokes

Numerické knihovny

- $Ax=b$

Stokes



Numerické knihovny

- $Ax=b$
- knihovna LAPACK

Stokes



Numerické knihovny

- $Ax=b$
- knihovna LAPACK
- subroutiny DGBTRF, DGBTRS

Stokes



Numerické knihovny

- $Ax=b$ ←.....
- knihovna LAPACK
- subroutiny DGBTRF, DGBTRS
- DGBTRF:
 - LU rozklad pásové matice A
 - částečné pivotování se záměnou řádků

Stokes

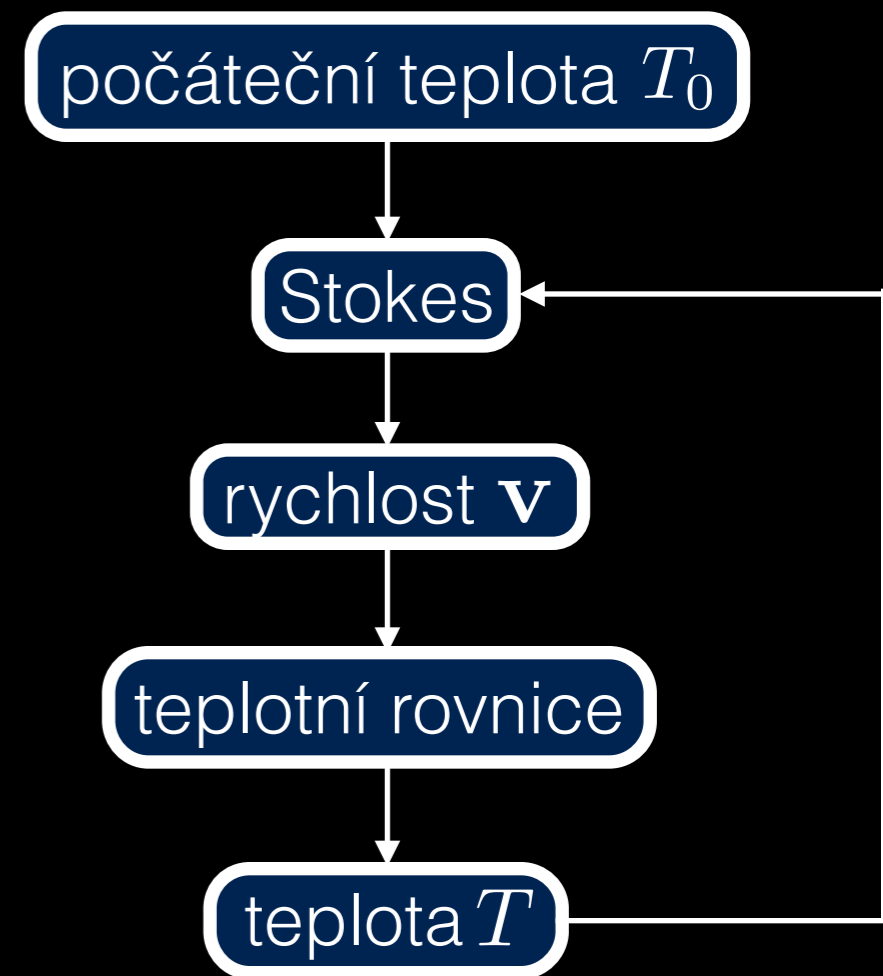
Numerické knihovny

- $Ax=b$ ←.....
- knihovna LAPACK
- subroutiny DGBTRF, DGBTRS
- DGBTRF:
 - LU rozklad pásové matice A
 - částečné pivotování se záměnou řádků
- DGBTRS: řeší systém $Ax=b$

Stokes

Numerické knihovny

Numerické knihovny



Numerické knihovny

teplotní rovnice

Numerické knihovny



teplotní rovnice

Numerické knihovny

- časová integrace

teplotní rovnice



Numerické knihovny

- časová integrace
- explicitně - Adams-Bashforťova metoda:
 - metoda řádu k
 - silně stabilní
 - 1x vyhodnocování funkce za krok

teplotní rovnice

Numerické knihovny

- časová integrace
- explicitně - Adams-Bashforťova metoda:
 - metoda řádu k
 - silně stabilní
 - 1x vyhodnocování funkce za krok
- knihovna IMSL

teplotní rovnice

Numerické knihovny

- časová integrace
- explicitně - Adams-Bashforťova metoda:
 - metoda řádu k
 - silně stabilní
 - 1x vyhodnocování funkce za krok
- knihovna IMSL
- subroutina DIVPAG

teplotní rovnice

Časový krok

Časový krok

- omezení pro zaručení stability
- kontrolujeme Courrantovým kritériem

Časový krok

- omezení pro zaručení stability
- kontrolujeme Courrantovým kritériem

$$dt_{konv} = \min_{i,j} \left(\frac{dx_i}{v_x(i,j)}, \frac{dz_j}{v_z(i,j)} \right)$$

Časový krok

- omezení pro zaručení stability
- kontrolujeme Courrantovým kritériem

$$dt_{konv} = \min_{i,j} \left(\frac{dx_i}{v_x(i,j)}, \frac{dz_j}{v_z(i,j)} \right)$$

$$dt_{dif} = \frac{dx^2}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{k}{\rho_0 c_p}$$

Časový krok

- omezení pro zaručení stability
- kontrolujeme Courrantovým kritériem

$$dt_{konv} = \min_{i,j} \left(\frac{dx_i}{v_x(i,j)}, \frac{dz_j}{v_z(i,j)} \right)$$

$$dt_{dif} = \frac{dx^2}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{k}{\rho_0 c_p}$$

$$dt_{cour} = c \min(dt_{cour}, dt_{dif}), \quad c \in (0, 1)$$

Postup práce

$$S = 2\eta_1 D$$

1. Oberbeck-Boussinesq pro newtonovskou tekutinu

Postup práce

$$S = 2(\eta_1 + \eta_2)D + 2D\eta_2 \frac{\partial D}{\partial t} - D \frac{\partial S}{\partial t}$$

1. Oberbeck-Boussinesq pro newtonovskou tekutinu
2. + časová parciální derivace

Postup práce

$$S = 2(\eta_1 + \eta_2)D + 2D\eta_2 \frac{\partial D}{\partial t} - D \frac{\partial S}{\partial t} + 2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla D - D\mathbf{v} \cdot \nabla S$$

1. Oberbeck-Boussinesq pro newtonovskou tekutinu
2. + časová parciální derivace
3. + advekční členy

Postup práce

$$\begin{aligned} S = & 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} + 2D\eta_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - D \frac{\partial S}{\partial t} + 2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D} - D\mathbf{v} \cdot \nabla S \\ & - 2D\eta_2 \left(\nabla \mathbf{v} \mathbf{D} + \mathbf{D} (\nabla \mathbf{v})^T \right) + D \left(\nabla \mathbf{v} S + S (\nabla \mathbf{v})^T \right) \end{aligned}$$

1. Oberbeck-Boussinesq pro newtonovskou tekutinu
2. + časová parciální derivace
3. + advekční členy
4. + korotační členy

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} + 2D\eta_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - D \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + 2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D} - D\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{S} \\ & - 2D\eta_2 \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{D} + \mathbf{D} (\nabla_{\mathbf{v}})^T \right) + D \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{S} + \mathcal{S} (\nabla_{\mathbf{v}})^T \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} + 2D\eta_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - D \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + 2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D} - D\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{S} \\ & - 2D\eta_2 \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{D} + \mathbf{D} (\nabla_{\mathbf{v}})^T \right) + D \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{S} + \mathbf{S} (\nabla_{\mathbf{v}})^T \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial t}$$

- zpětné Eulerovo schéma
- členy v aktuálním čase převedem na LS rovnice, tedy do matice
- zbylé členy zůstanou na PS

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$S = 2(\eta_1 + \eta_2)D + 2D\eta_2 \frac{\partial D}{\partial t} - D \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$S = 2(\eta_1 + \eta_2)D + 2D\eta_2 \frac{\partial D}{\partial t} - D \frac{\partial D}{\partial t}$$

+

$$D = \frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right), \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{D_n - D_{n-1}}{dt}, \quad \frac{S}{\partial t} = \frac{S_n - S_{n-1}}{dt}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$S = 2(\eta_1 + \eta_2)D + 2D\eta_2 \frac{\partial D}{\partial t} - D \frac{\partial D}{\partial t}$$

+

$$D = \frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right), \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{D_n - D_{n-1}}{dt}, \quad \frac{S}{\partial t} = \frac{S_n - S_{n-1}}{dt}$$

↓

$$S_n = (\eta_1 + \eta_2) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) + \frac{D\eta_2}{dt} \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T - \nabla v_{n-1} - (\nabla v_{n-1})^T \right) - \frac{D}{dt} (S_n - S_{n-1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{S} = 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} + 2D\eta_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - D \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

+

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right), \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\mathbf{D}_n - \mathbf{D}_{n-1}}{dt}, \quad \frac{\mathbf{S}}{\partial t} = \frac{\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n-1}}{dt}$$



$$\mathbf{S}_n = (\eta_1 + \eta_2) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) + \frac{D\eta_2}{dt} \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T - \nabla v_{n-1} - (\nabla v_{n-1})^T \right) - \frac{D}{dt} (\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n-1})$$



$$\mathbf{S}_n \left(1 + \frac{D}{dt} \right) = \left(\eta_1 + \eta_2 + \frac{D\eta_2}{dt} \right) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) - \frac{D\eta_2}{dt} \left(\nabla v_{n-1} + (\nabla v_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt} \mathbf{S}_{n-1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{S} = 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} + 2D\eta_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - D \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

+

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right), \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\mathbf{D}_n - \mathbf{D}_{n-1}}{dt}, \quad \frac{\mathbf{S}}{\partial t} = \frac{\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n-1}}{dt}$$



$$\mathbf{S}_n = (\eta_1 + \eta_2) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) + \frac{D\eta_2}{dt} \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T - \nabla v_{n-1} - (\nabla v_{n-1})^T \right) - \frac{D}{dt} (\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n-1})$$



$$\mathbf{S}_n \left(1 + \frac{D}{dt} \right) = \left(\eta_1 + \eta_2 + \frac{D\eta_2}{dt} \right) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) - \frac{D\eta_2}{dt} \left(\nabla v_{n-1} + (\nabla v_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt} \mathbf{S}_{n-1}$$



$$\mathbf{S}_n - \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) = - \frac{D\eta_2}{dt + D} \left(\nabla v_{n-1} + (\nabla v_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} \mathbf{S}_{n-1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$S_n - \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) = - \frac{D \eta_2}{dt + D} \left(\nabla v_{n-1} + (\nabla v_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} S_{n-1}$$

“virtuální viskozita”

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$S_n - \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) = - \frac{D \eta_2}{dt + D} \left(\nabla v_{n-1} + (\nabla v_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} S_{n-1}$$

“virtuální viskozita”

$$w = \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) v$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$S_n - \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) = - \frac{D\eta_2}{dt + D} \left(\nabla v_{n-1} + (\nabla v_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} S_{n-1}$$

“virtuální viskozita”

$$w = \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) v$$



$$S_n - \left(\nabla w_n + (\nabla w_n)^T \right) = - \frac{D\eta_2}{dt + \eta_2 dt + D} \left(\nabla w_{n-1} + (\nabla w_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} S_{n-1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$S_n - \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) = - \frac{D\eta_2}{dt + D} \left(\nabla v_{n-1} + (\nabla v_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} S_{n-1}$$

“virtuální viskozita”

$$w = \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) v$$



$$S_n - \left(\nabla w_n + (\nabla w_n)^T \right) = - \frac{D\eta_2}{dt + \eta_2 dt + D} \left(\nabla w_{n-1} + (\nabla w_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} S_{n-1}$$

levá strana rovnice
zavedeme do “viskózní části”

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$S_n - \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) \left(\nabla v_n + (\nabla v_n)^T \right) = - \frac{D\eta_2}{dt + D} \left(\nabla v_{n-1} + (\nabla v_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} S_{n-1}$$

“virtuální viskozita”

$$w = \left(\eta_2 + \eta_1 \frac{dt}{dt + D} \right) v$$



$$S_n - \left(\nabla w_n + (\nabla w_n)^T \right) = - \frac{D\eta_2}{dt + \eta_2 dt + D} \left(\nabla w_{n-1} + (\nabla w_{n-1})^T \right) + \frac{D}{dt + D} S_{n-1}$$

levá strana rovnice
zavedeme do “viskózní části”

pravá strana rovnice
přidáme k silám z viskózního modelu

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & 2(\eta_1 + \eta_2)\mathbf{D} + 2D\eta_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - D \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + 2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D} - D\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{S} \\ & - 2D\eta_2 \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{D} + \mathbf{D} (\nabla_{\mathbf{v}})^T \right) + D \left(\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{S} + \mathbf{S} (\nabla_{\mathbf{v}})^T \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S = & 2(\eta_1 + \eta_2)D + 2D\eta_2 \frac{\partial D}{\partial t} - D \frac{\partial S}{\partial t} + 2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla D - D\mathbf{v} \cdot \nabla S \\ & - 2D\eta_2 \left(\nabla_{\mathbf{v}} D + D(\nabla_{\mathbf{v}})^T \right) + D \left(\nabla_{\mathbf{v}} S + S(\nabla_{\mathbf{v}})^T \right) \end{aligned}$$

$$2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla D$$

$$-D \mathbf{v} \cdot \nabla S$$

$$2D\eta_2\mathbf{v} \cdot \nabla D$$

$$-D\mathbf{v} \cdot \nabla S$$

- řešíme explicitně
- výpočet derivací pomocí Fornbergova schématu 2.řádu

$$2D\eta_2\mathbf{v} \cdot \nabla D \longrightarrow D\eta_2\mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla \left(\nabla\mathbf{v}_{n-1} + (\nabla\mathbf{v}_{n-1})^T \right)$$

$$-D\mathbf{v} \cdot \nabla S$$

- řešíme explicitně
- výpočet derivací pomocí Fornbergova schématu 2.řádu

$$2D\eta_2\mathbf{v} \cdot \nabla D \longrightarrow D\eta_2\mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla \left(\nabla\mathbf{v}_{n-1} + (\nabla\mathbf{v}_{n-1})^T \right)$$

$$-D\mathbf{v} \cdot \nabla S \longrightarrow -D\mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla S_{n-1}$$

- řešíme explicitně
- výpočet derivací pomocí Fornbergova schématu 2.řádu

$$2D\eta_2\mathbf{v} \cdot \nabla D \longrightarrow D\eta_2\mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla \left(\nabla\mathbf{v}_{n-1} + (\nabla\mathbf{v}_{n-1})^T \right)$$

$$-D\mathbf{v} \cdot \nabla S \longrightarrow -D\mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla S_{n-1}$$

- řešíme explicitně
- výpočet derivací pomocí Fornbergova schématu 2.řádu
- převedeme na škálované rychlosti \mathbf{w}_n

$$\mathbf{v}_n = \frac{dt + D}{dt + \eta_2(dt + D)} \mathbf{w}_n$$

$$\begin{aligned}
2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla D &\longrightarrow D\eta_2 \mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla \left(\nabla \mathbf{v}_{n-1} + (\nabla \mathbf{v}_{n-1})^T \right) \\
&\longrightarrow -D\eta_2 \left(\frac{dt + D}{dt + \eta_2(dt + D)} \right)^2 \mathbf{w}_{n-1} \cdot \left(\nabla \mathbf{w}_{n-1} + (\nabla \mathbf{w}_{n-1})^T \right) \\
-D\mathbf{v} \cdot \nabla S &\longrightarrow -D\mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla S_{n-1}
\end{aligned}$$

- řešíme explicitně
- výpočet derivací pomocí Fornbergova schématu 2.řádu
- převedeme na škálované rychlosti \mathbf{w}_n

$$\mathbf{v}_n = \frac{dt + D}{dt + \eta_2(dt + D)} \mathbf{w}_n$$

$$\begin{aligned}
2D\eta_2 \mathbf{v} \cdot \nabla D &\longrightarrow D\eta_2 \mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla \left(\nabla \mathbf{v}_{n-1} + (\nabla \mathbf{v}_{n-1})^T \right) \\
&\longrightarrow -D\eta_2 \left(\frac{dt + D}{dt + \eta_2(dt + D)} \right)^2 \mathbf{w}_{n-1} \cdot \left(\nabla \mathbf{w}_{n-1} + (\nabla \mathbf{w}_{n-1})^T \right) \\
-D\mathbf{v} \cdot \nabla S &\longrightarrow -D\mathbf{v}_{n-1} \cdot \nabla S_{n-1} \\
&\longrightarrow -D \frac{dt + D}{dt + \eta_2(dt + D)} \mathbf{w}_{n-1} \nabla S_{n-1}
\end{aligned}$$

- řešíme explicitně
- výpočet derivací pomocí Fornbergova schématu 2.řádu
- převedeme na škálované rychlosti \mathbf{w}_n

$$\mathbf{v}_n = \frac{dt + D}{dt + \eta_2(dt + D)} \mathbf{w}_n$$

Fornbergovo schéma

- pseudospektrální metoda
- 2.řád - jako ve viskózním případě

Fornbergovo schéma

FORNBERG Bengt,
A Practical Guide to Pseudospectral Methods,
 Cambridge University Press, 1998 ISBN 0-521-64564-6

- pseudospektrální metoda
- 2.řád - jako ve viskózním případě

Table 3.1-3. Schematic illustration of the notation used for weights generated by the fast algorithm

Order of accuracy	Approximations at $x = \xi$; x coordinates at nodes:					
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_n
<i>0th derivative</i>						
1	$c_{0,0}^0$					
2	$c_{1,0}^0$	$c_{1,1}^0$				
3	$c_{2,0}^0$	$c_{2,1}^0$	$c_{2,2}^0$			
4	$c_{3,0}^0$	$c_{3,1}^0$	$c_{3,2}^0$	$c_{3,3}^0$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
$n+1$	$c_{n,0}^0$	$c_{n,1}^0$	$c_{n,2}^0$	$c_{n,3}^0$	$c_{n,n}^0$
<i>1st derivative</i>						
1	$c_{1,0}^1$	$c_{1,1}^1$				
2	$c_{2,0}^1$	$c_{2,1}^1$	$c_{2,2}^1$			
3	$c_{3,0}^1$	$c_{3,1}^1$	$c_{3,2}^1$	$c_{3,3}^1$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
n	$c_{n,0}^1$	$c_{n,1}^1$	$c_{n,2}^1$	$c_{n,3}^1$	$c_{n,n}^1$
⋮						
<i>mth derivative</i>						
1	$c_{m,0}^m$	$c_{m,1}^m$	$c_{m,2}^m$	$c_{m,3}^m$	$c_{m,m}^m$
2	$c_{m+1,0}^m$	$c_{m+1,1}^m$	$c_{m+1,2}^m$	$c_{m+1,3}^m$	$c_{m+1,m}^m$ $c_{m+1,m+1}^m$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
$n-m+1$	$c_{n,0}^m$	$c_{n,1}^m$	$c_{n,2}^m$	$c_{n,3}^m$	$c_{n,n}^m$

$$\frac{d^k f}{dx^k} \Big|_{x=\xi} \approx \sum_{j=0}^i c_{i,j}^k f(x_j), \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad i = k, k+1, \dots, n$$

Fornbergovo schéma

FORNBERG Bengt,
A Practical Guide to Pseudospectral Methods,
 Cambridge University Press, 1998 ISBN 0-521-64564-6

- pseudospektrální metoda
- 2.řád - jako ve viskózním případě

Order of accuracy	Approximations at $x = 0$; x coordinates at nodes:								
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
<i>0th derivative</i>									
∞					1				
<i>1st derivative</i>									
2				$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
4			$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
6		$-\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$	
8	$\frac{1}{280}$	$-\frac{4}{105}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{105}$	$-\frac{1}{280}$
<i>2nd derivative</i>									
2				1	-2	1			
4			$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
6		$\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$	
8	$-\frac{1}{560}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$
<i>3rd derivative</i>									
2			$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	$\frac{1}{2}$		
4		$\frac{1}{8}$	-1	$\frac{13}{8}$	0	$-\frac{13}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	
6	$-\frac{7}{240}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{169}{120}$	$\frac{61}{30}$	0	$-\frac{61}{30}$	$\frac{169}{120}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{240}$
<i>4th derivative</i>									
2			1	-4	6	-4	1		
4		$-\frac{1}{6}$	2	$-\frac{13}{2}$	$\frac{28}{3}$	$-\frac{13}{2}$	2	$-\frac{1}{6}$	
6	$\frac{7}{240}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{169}{60}$	$-\frac{122}{15}$	$\frac{91}{8}$	$-\frac{122}{15}$	$\frac{169}{60}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{7}{240}$

$$\frac{d^k f}{dx^k} \Big|_{x=\xi} \approx \sum_{j=0}^i c_{i,j}^k f(x_j), \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad i = k, k+1, \dots, n$$

Testování kódu - Newton

Testování kódu - Newton

BLANKENBACH B., BUSSE F., CHRISTENSEN U., GUNKEL D., HANSEN U.,
HARDER H., JARVIS G., KOCH M., MARQUART G., MOORE D., OLSON P.,
SCHMELING H., SCHNAUBELT T.

A benchmark comparison for mantle convection codes,
Geophysical Journal International, vol. 98, issue 1, pp. 23-38,
DOI: 10.1111/j.1365-246X.1989.tb05511.x

- Blankenbachův benchmark

- 2D teplotní konvekce tekutiny Boussinesqova typu v obdelníkové oblasti

- kontrola Nusseltova čísla:
$$Nu = \frac{\int q_z dx}{\int \kappa \frac{\Delta T}{d} dx}$$

Testování kódu - Newton

BLANKENBACH B., BUSSE F., CHRISTENSEN U., GUNKEL D., HANSEN U.,
HARDER H., JARVIS G., KOCH M., MARQUART G., MOORE D., OLSON P.,
SCHMELING H., SCHNAUBELT T.

A benchmark comparison for mantle convection codes,
Geophysical Journal International, vol. 98, issue 1, pp. 23-38,
DOI: 10.1111/j.1365-246X.1989.tb05511.x

- Blankenbachův benchmark

- 2D teplotní konvekce tekutiny Boussinesqova typu v obdelníkové oblasti

- kontrola Nusseltova čísla:
$$Nu = \frac{\int q_z dx}{\int \kappa \frac{\Delta T}{d} dx}$$

- energetický test, tj. platnost
$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$$

- vychází s přesností nejméně 0,1%

Blankenbachův benchmark

- výpočty pro různá Rayleighova čísla $Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\eta_1}$
a různá rozlišení

Blankenbachův benchmark

- výpočty pro různá Rayleighova čísla $Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\eta_1}$
a různá rozlišení
- D. Moore (Courrantovo kritérium, konečné difference, rovnoměrné posunuté sítě, T explicitně)

Blankenbachův benchmark

- výpočty pro různá Rayleighova čísla $Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\eta_1}$ a různá rozlišení
- D. Moore (Courrantovo kritérium, konečné difference, rovnoměrné posunuté sítě, T explicitně)

Rayleigh	10^4		10^5		10^6	
rozlišení	Moore	výpočet	Moore	výpočet	Moore	výpočet
48x48	4,870	4,870	10,423	10,409	21,078	20,950
96x96	4,881	4,881	10,507	10,504	21,759	21,729

Testování kódu - Oldroyd-B

Testování kódu - Oldroyd-B

- zatím implementovaná parciální časová derivace

Testování kódu - Oldroyd-B

- zatím implementovaná parciální časová derivace
- testujeme limity jdoucí k viskóznímu případu

Testování kódu - Oldroyd-B

- zatím implementovaná parciální časová derivace
- testujeme limity jdoucí k viskóznímu případu
 - 1) $D \ll 1, \eta_2 \ll 1$

Testování kódu - Oldroyd-B

- zatím implementovaná parciální časová derivace
- testujeme limity jdoucí k viskóznímu případu
 - 1) $D \ll 1, \eta_2 \ll 1$
 - 2) běh s parciální časovou derivací - D, η_2 konečné \rightarrow ustálený stav $\rightarrow \eta_2 \rightarrow 0$

VIZUALIZACE

VIZUALIZACE

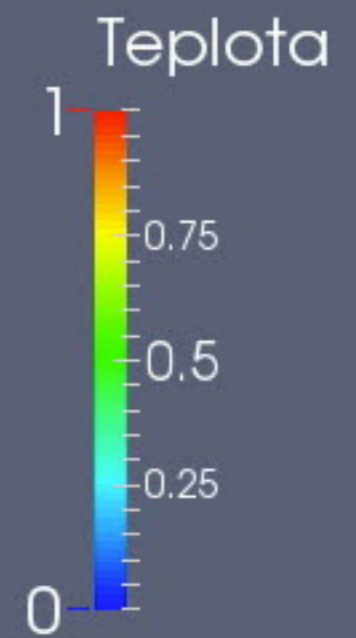
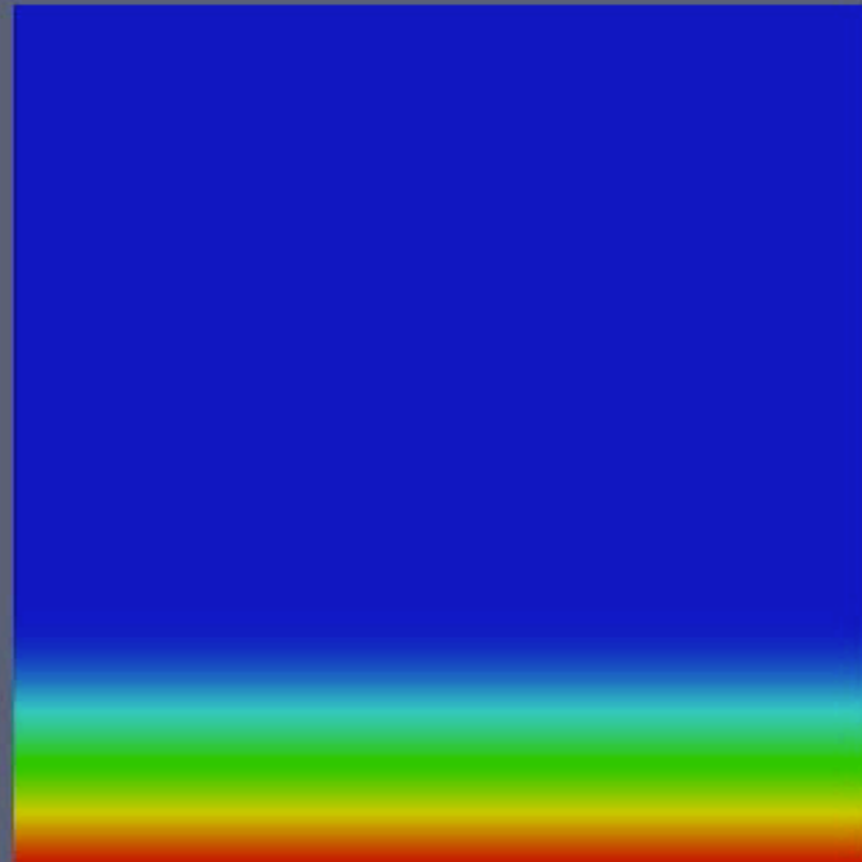
- 1) viskózní model s různými Rayleighovými čísly:
 - $Ra = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$; $Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\eta_1}$

VIZUALIZACE

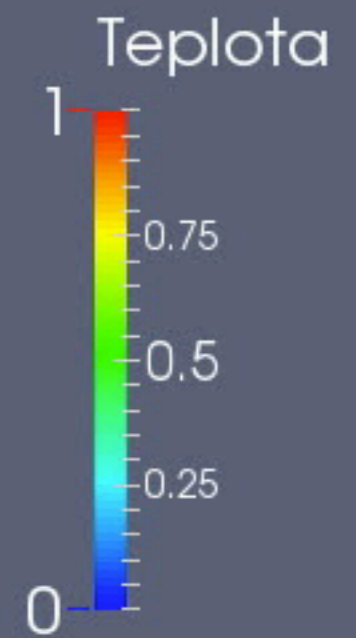
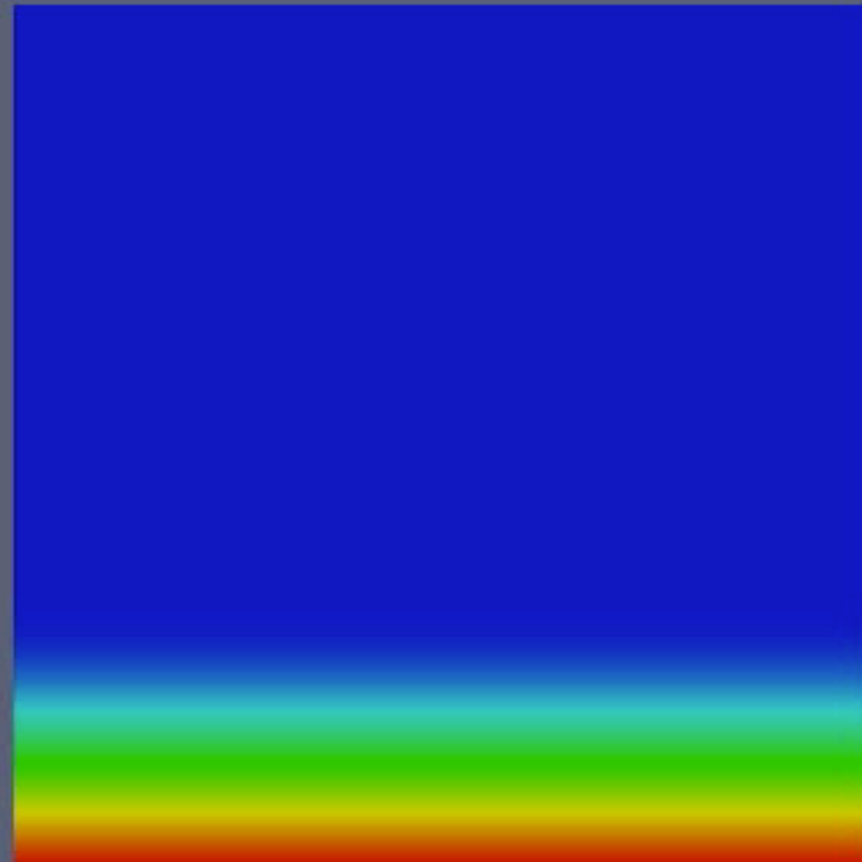
- 1) viskózní model s různými Rayleighovými čísly:
 - $Ra = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$; $Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\eta_1}$
- 2) běhy s parciální časovou derivací, pro různá Deborah čísla a η_2
 - $D = 10^{-2}, 10^{-1}$; $D = \frac{\eta_1}{\mu_1}$; $\eta_2 = 10^{-4}, 10^{-3}$

VISKÓZNÍ BĚHY

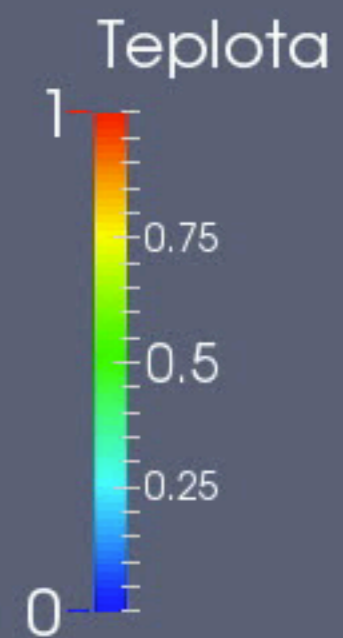
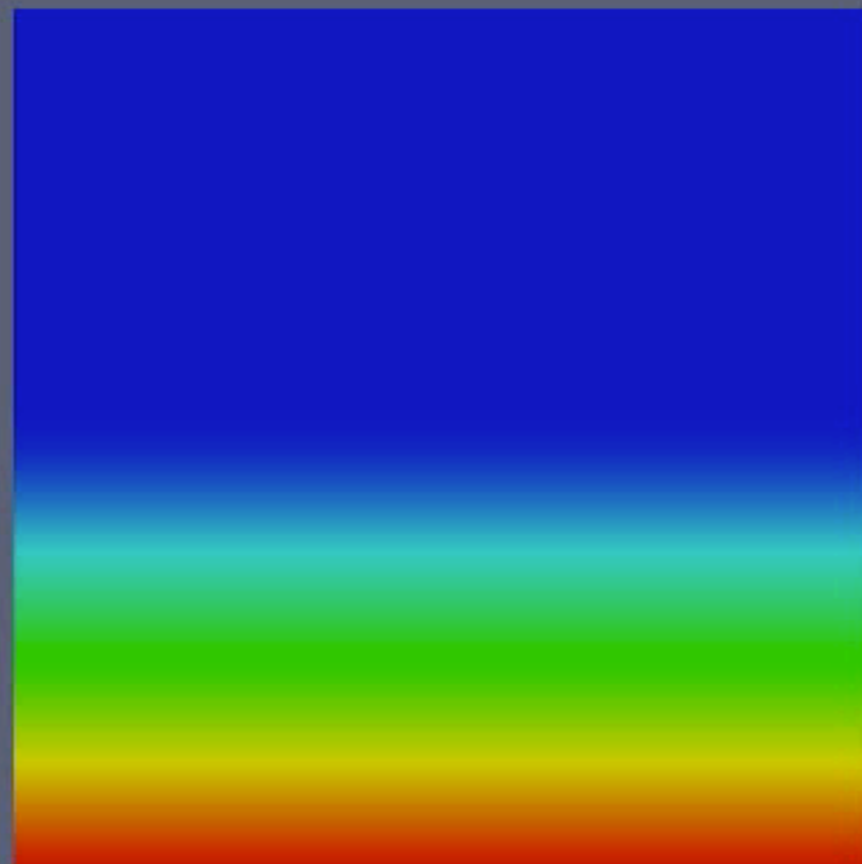
Rayleighovo číslo $1e4$



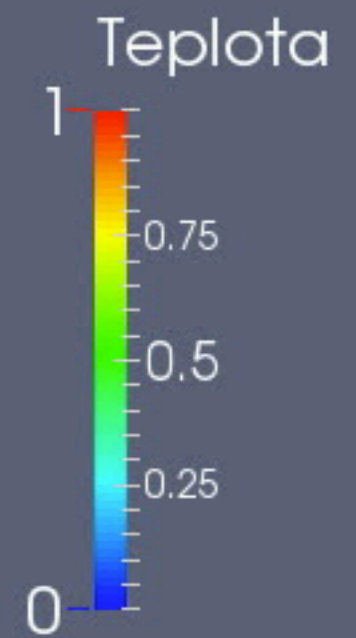
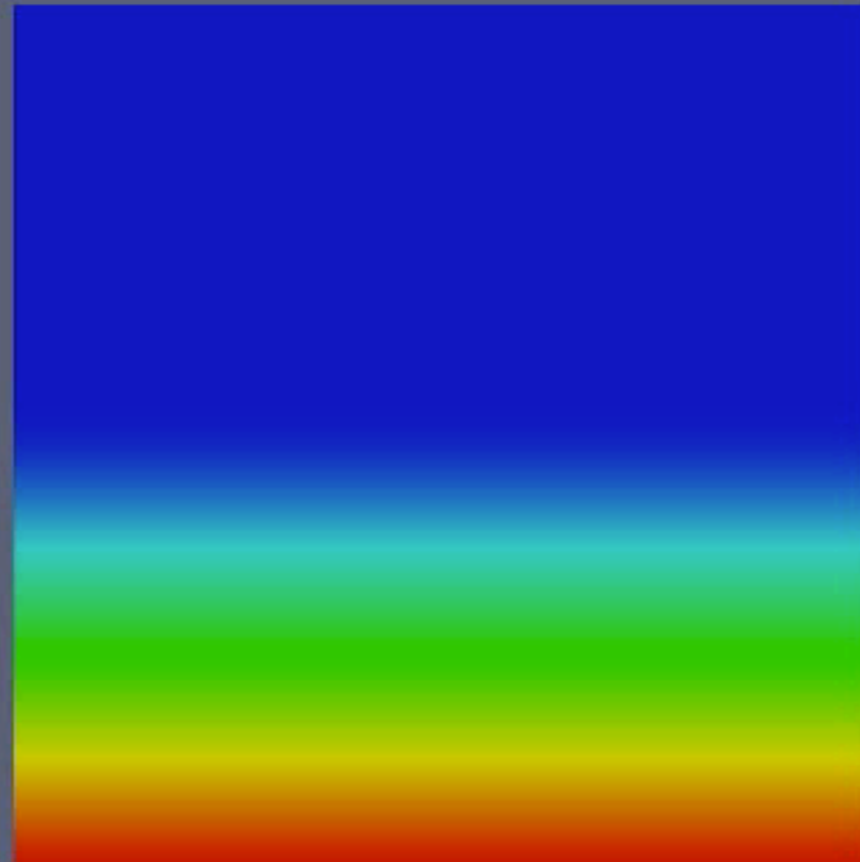
Rayleighovo číslo $1e4$



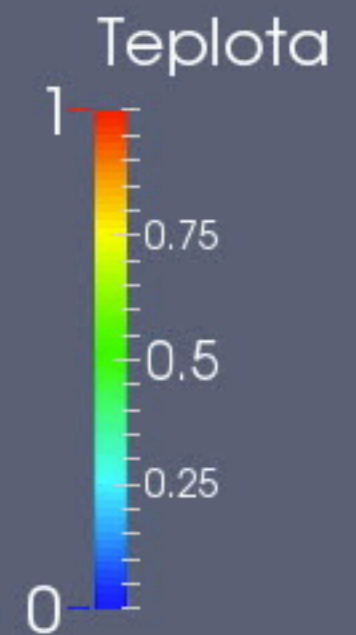
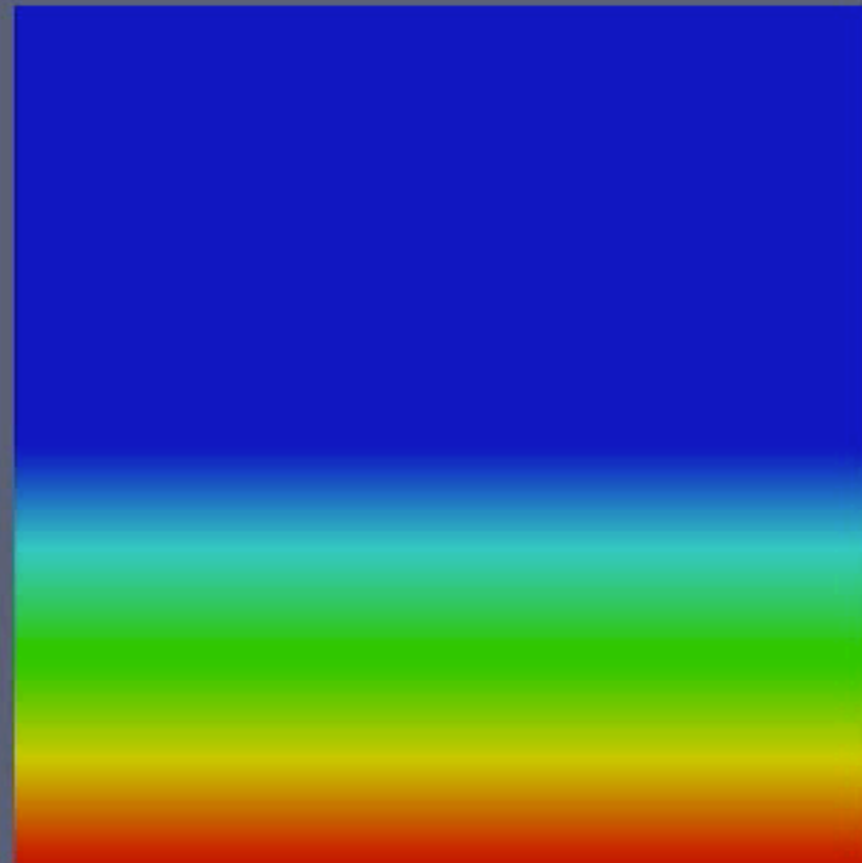
Rayleighovo číslo $1e5$



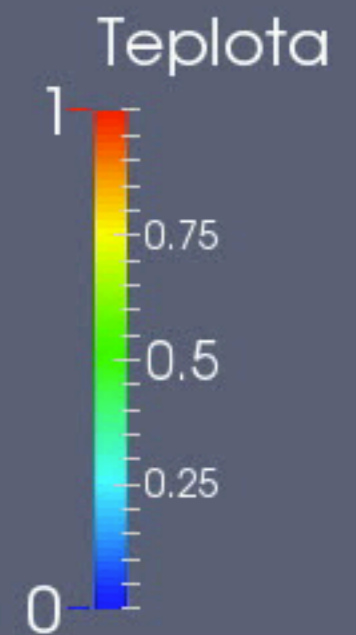
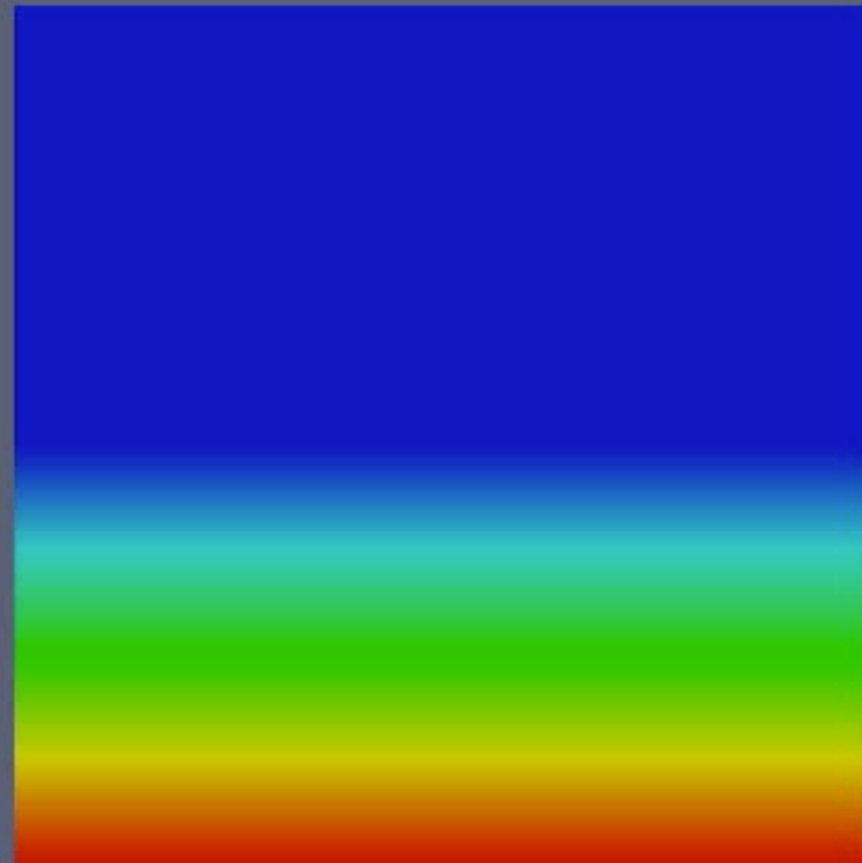
Rayleighovo číslo $1e5$



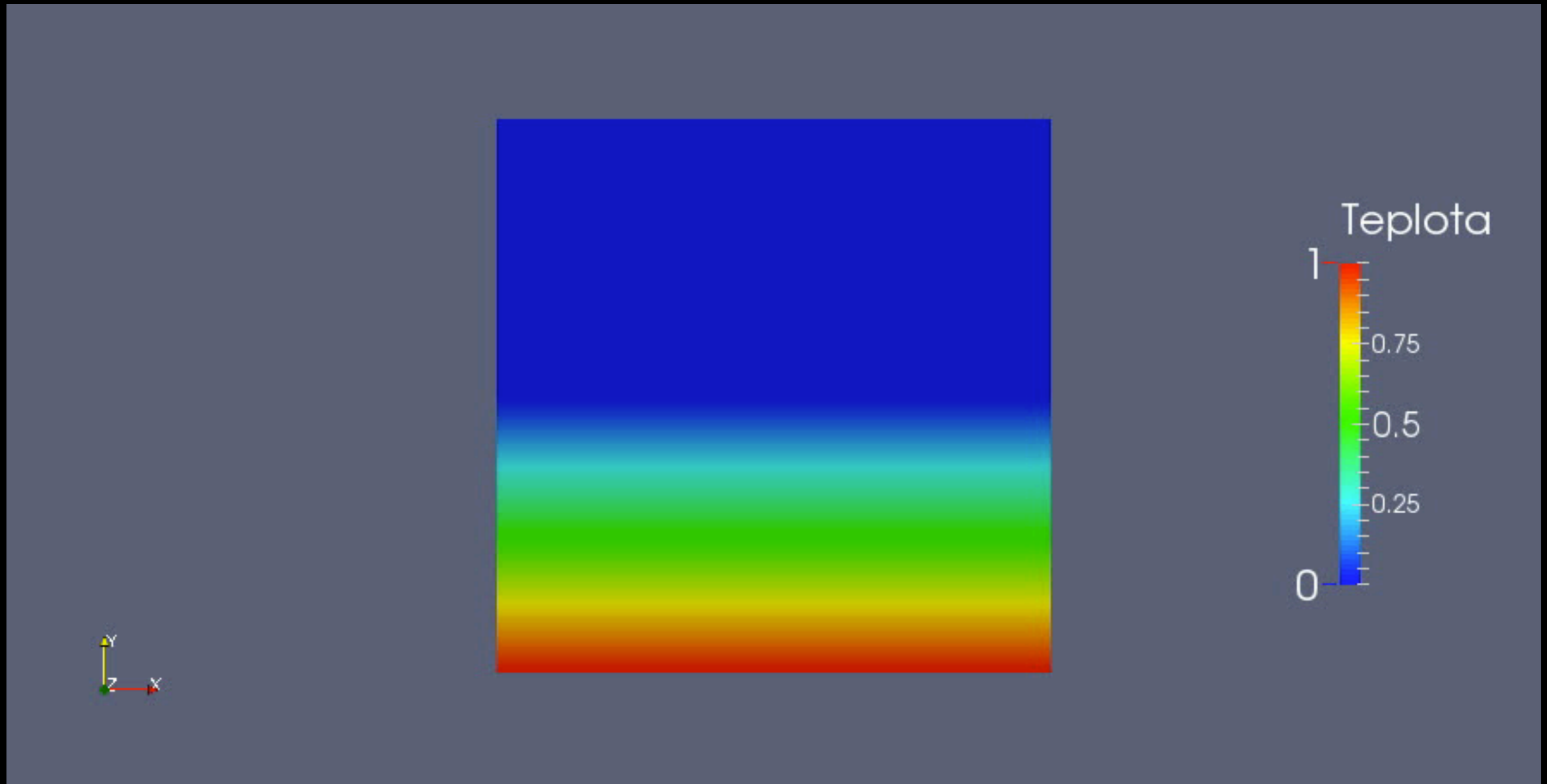
Rayleighovo číslo $1e6$



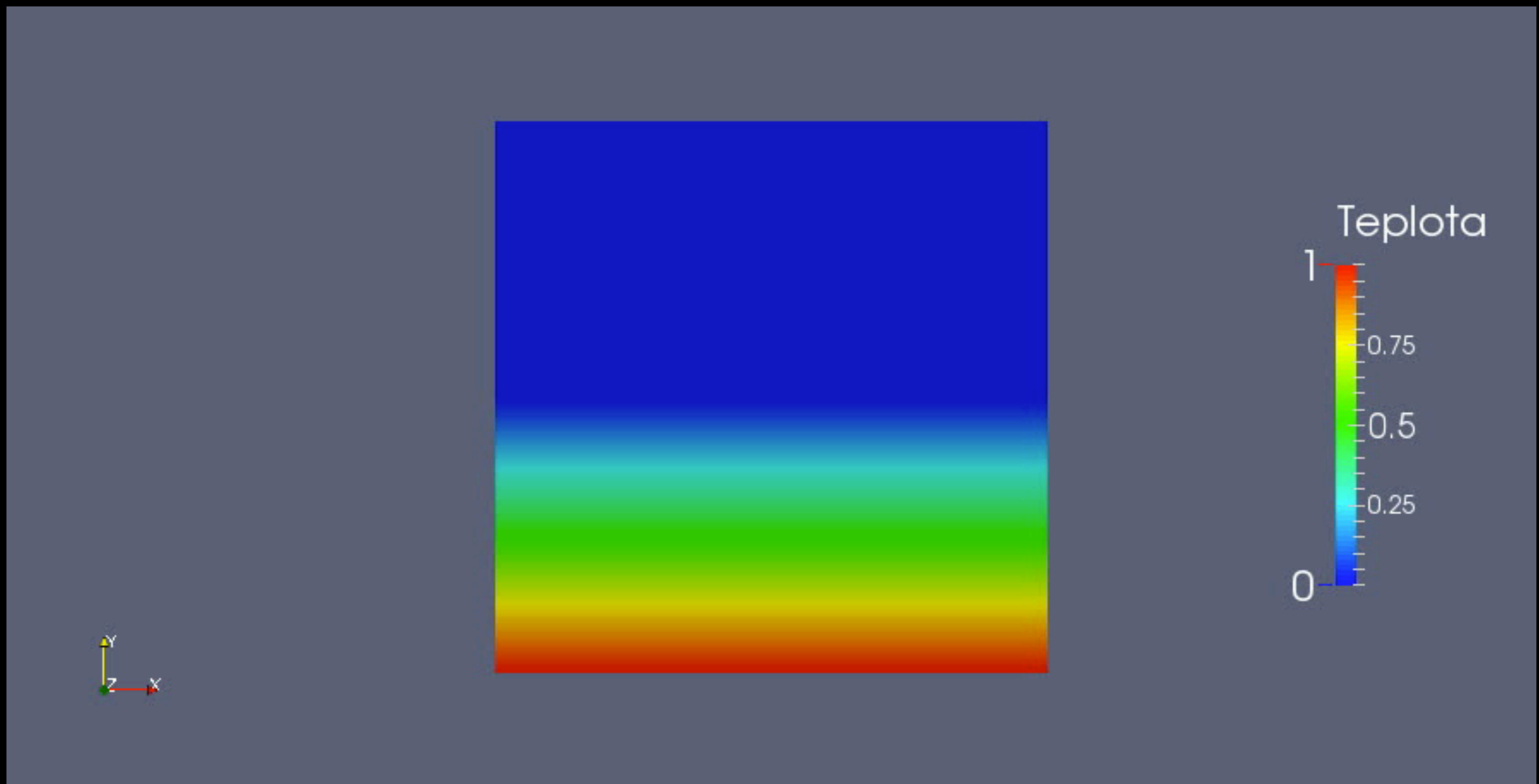
Rayleighovo číslo $1e6$



Rayleighovo číslo $1e7$

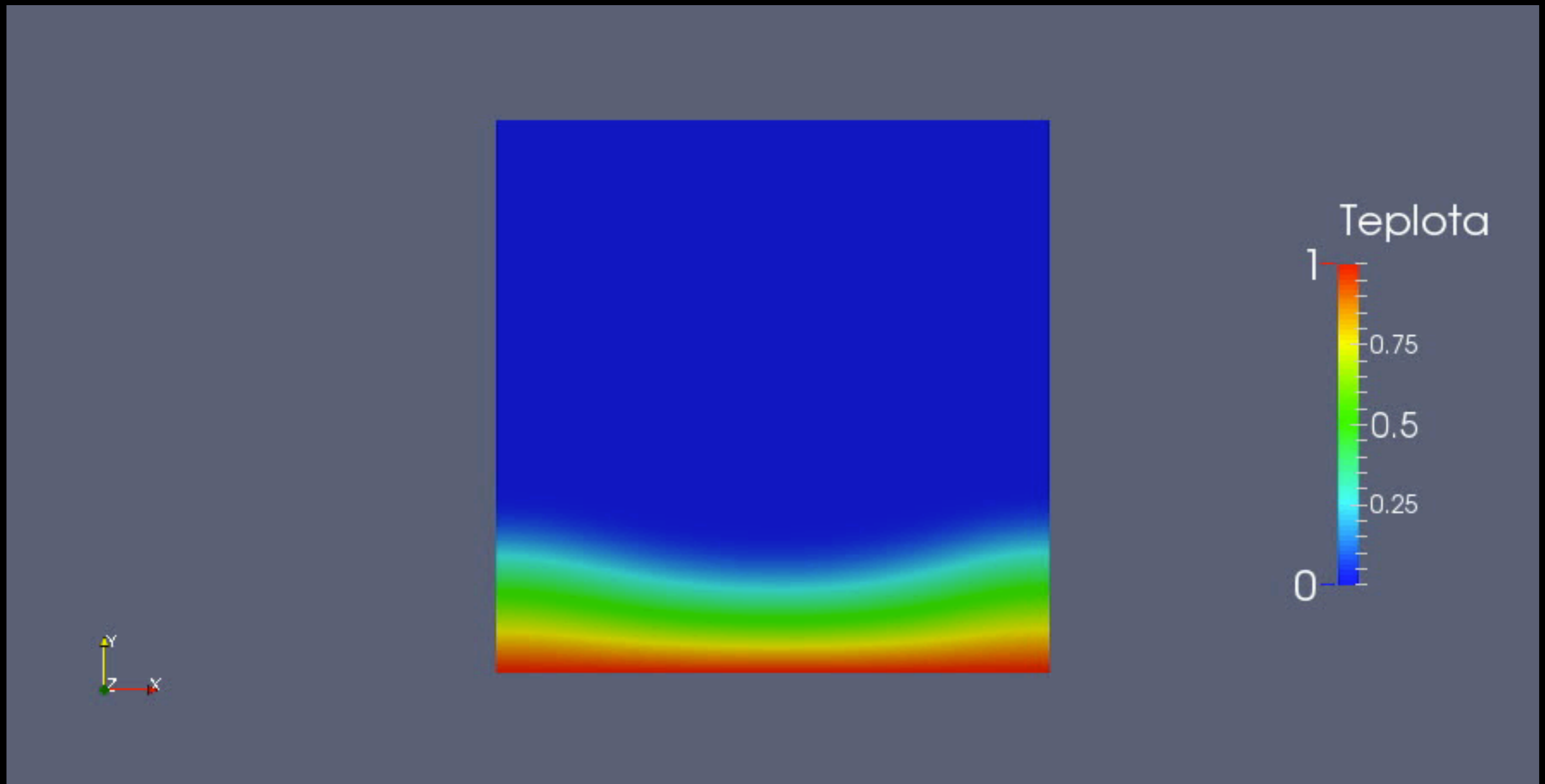


Rayleighovo číslo $1e7$



VISKOELASTICKÉ BĚHY

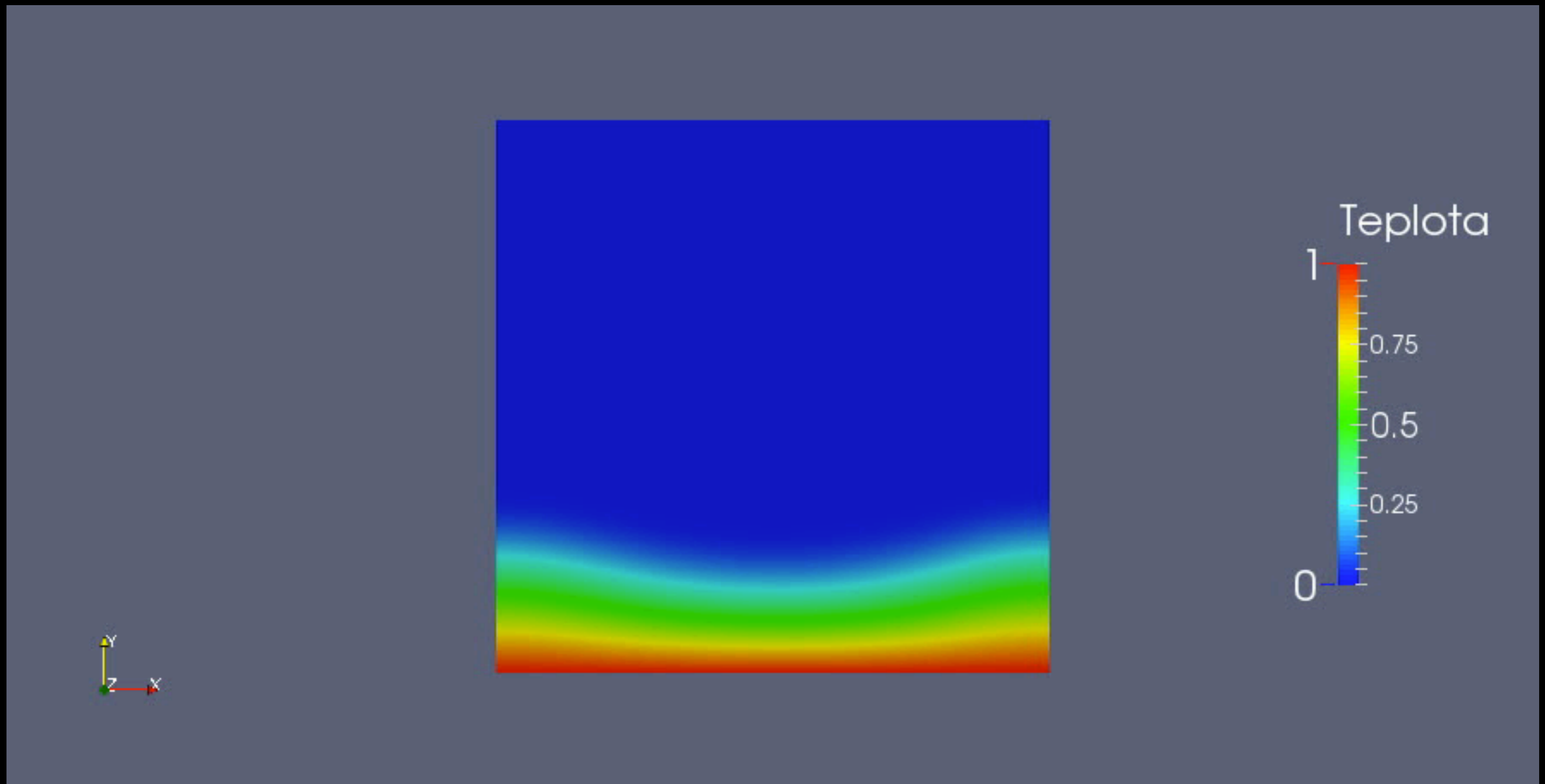
$$Ra = 10^4, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-4}, 60 \times 60$$



$Nu = 4,3879$

$Nu(\text{visko}) = 4,8757$

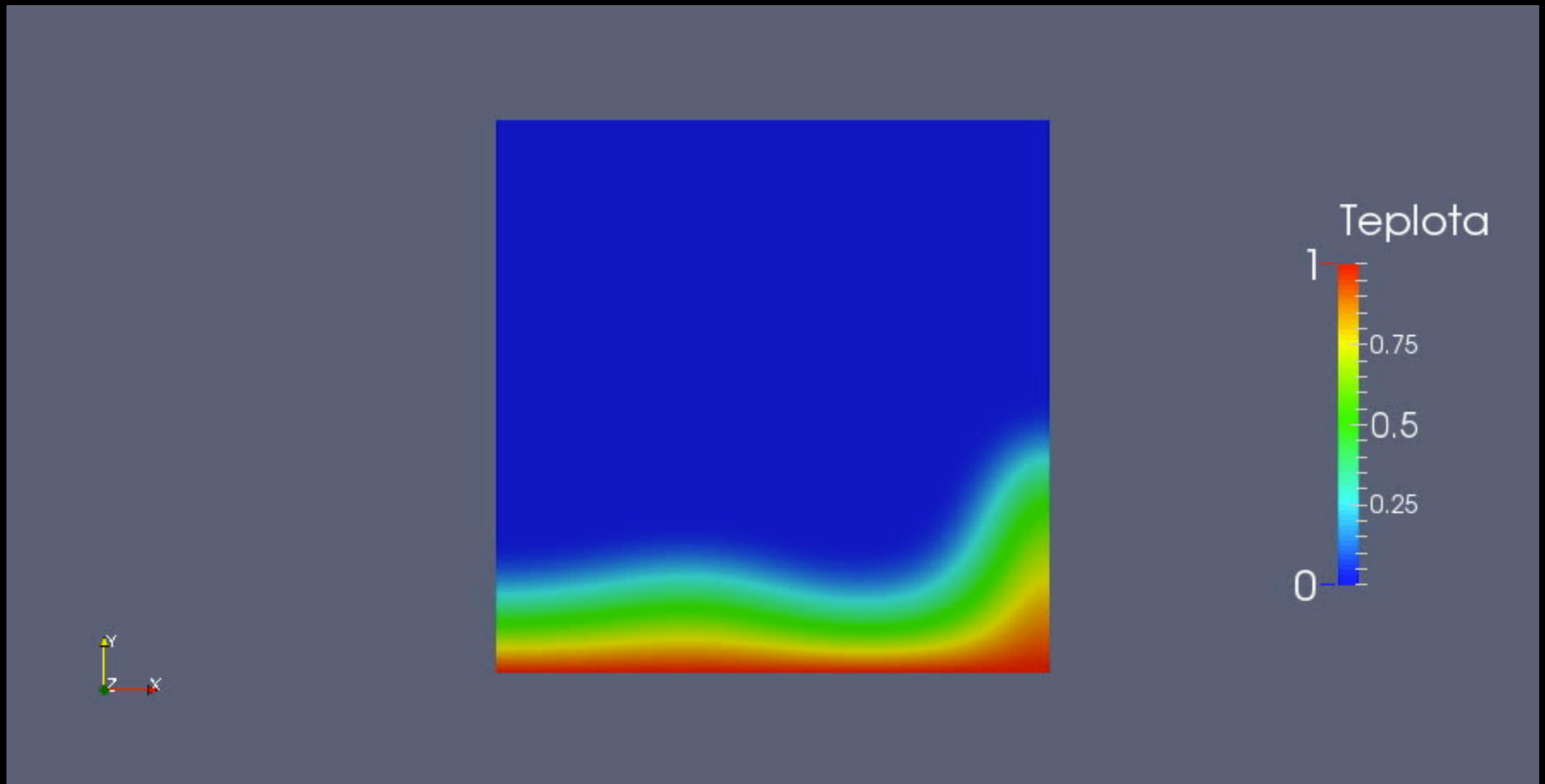
$$Ra = 10^4, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-4}, 60 \times 60$$



$Nu = 4,3879$

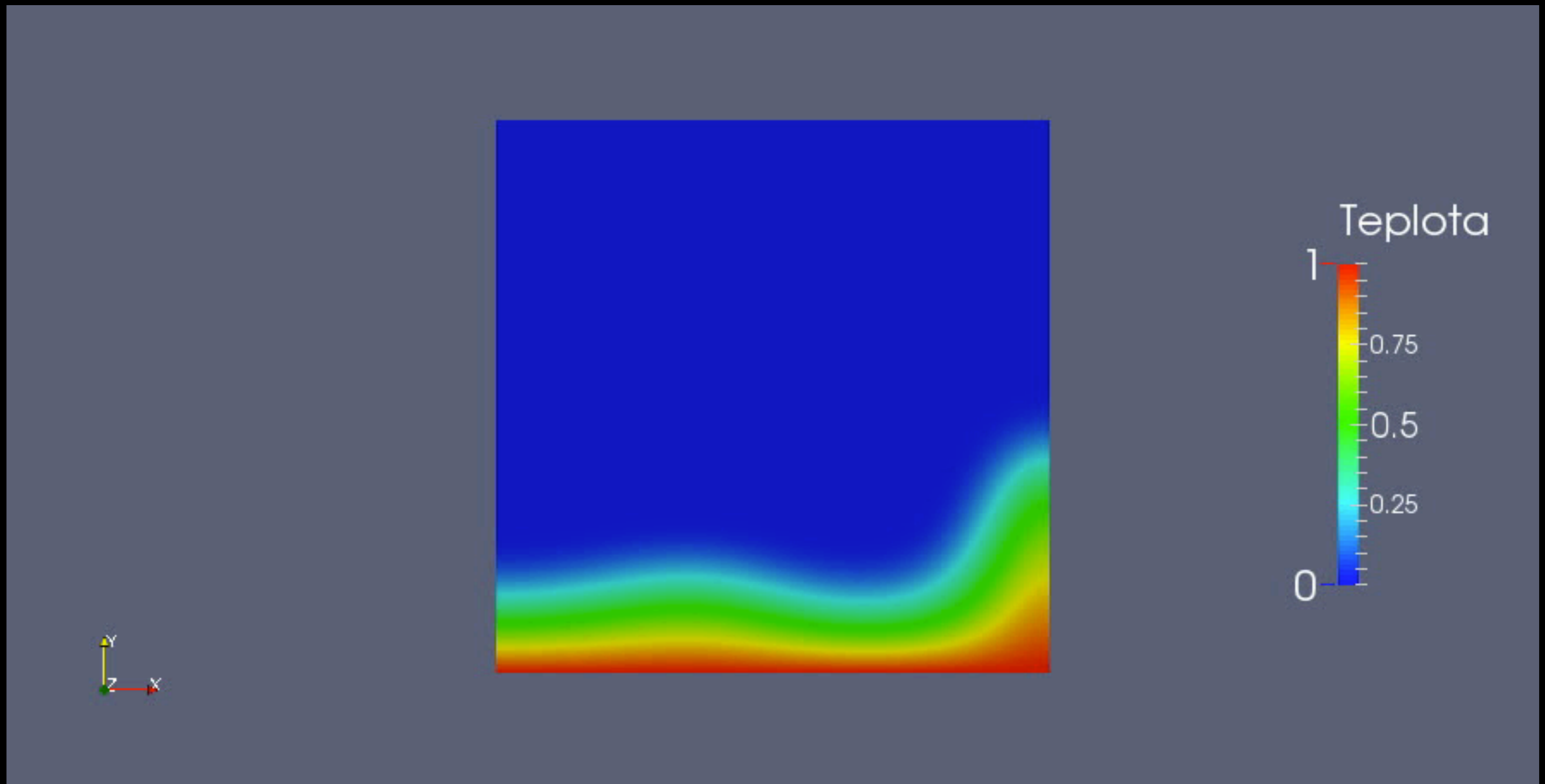
$Nu(\text{visko}) = 4,8757$

$$Ra = 10^5, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-4}, 60 \times 60$$



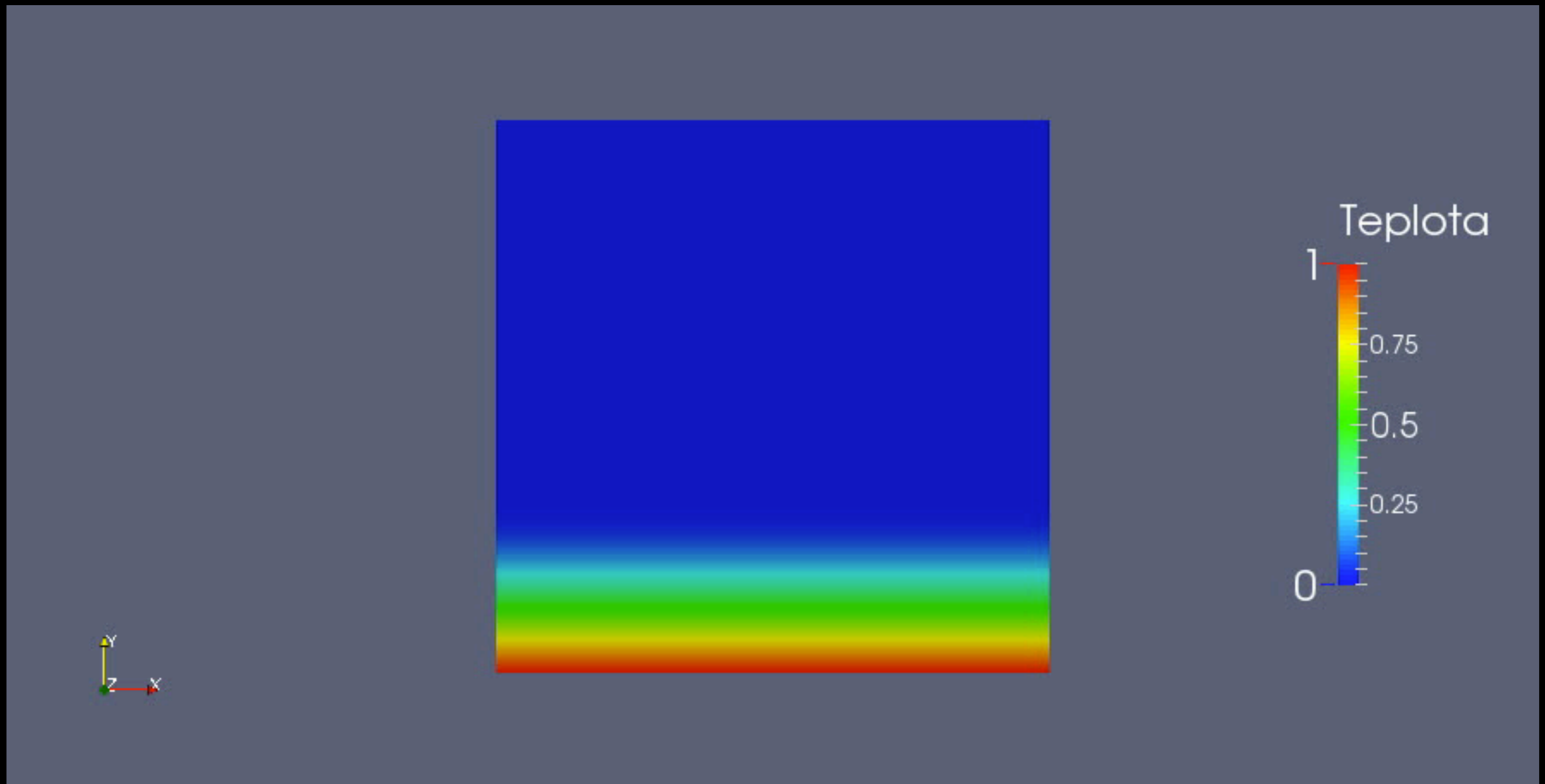
Nusselt: 6.9 - 7.0
Nu(visko)=10,4548

$$Ra = 10^5, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-4}, 60 \times 60$$



Nusselt: 6.9 - 7.0
Nu(visko)=10,4548

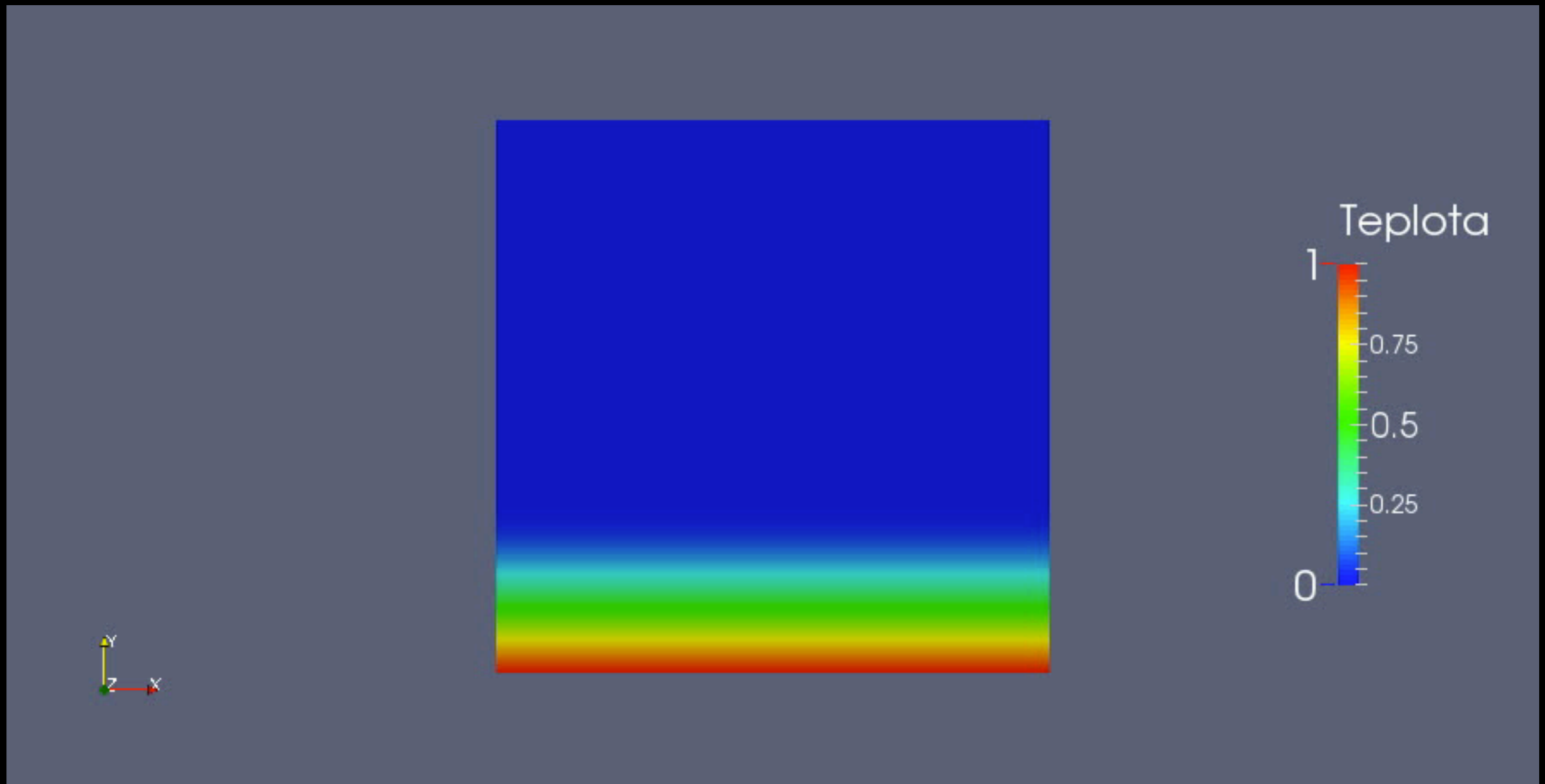
$$Ra = 10^4, D = 10^{-1}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



Nu: 0.9999

Nu(visko)=4,8757

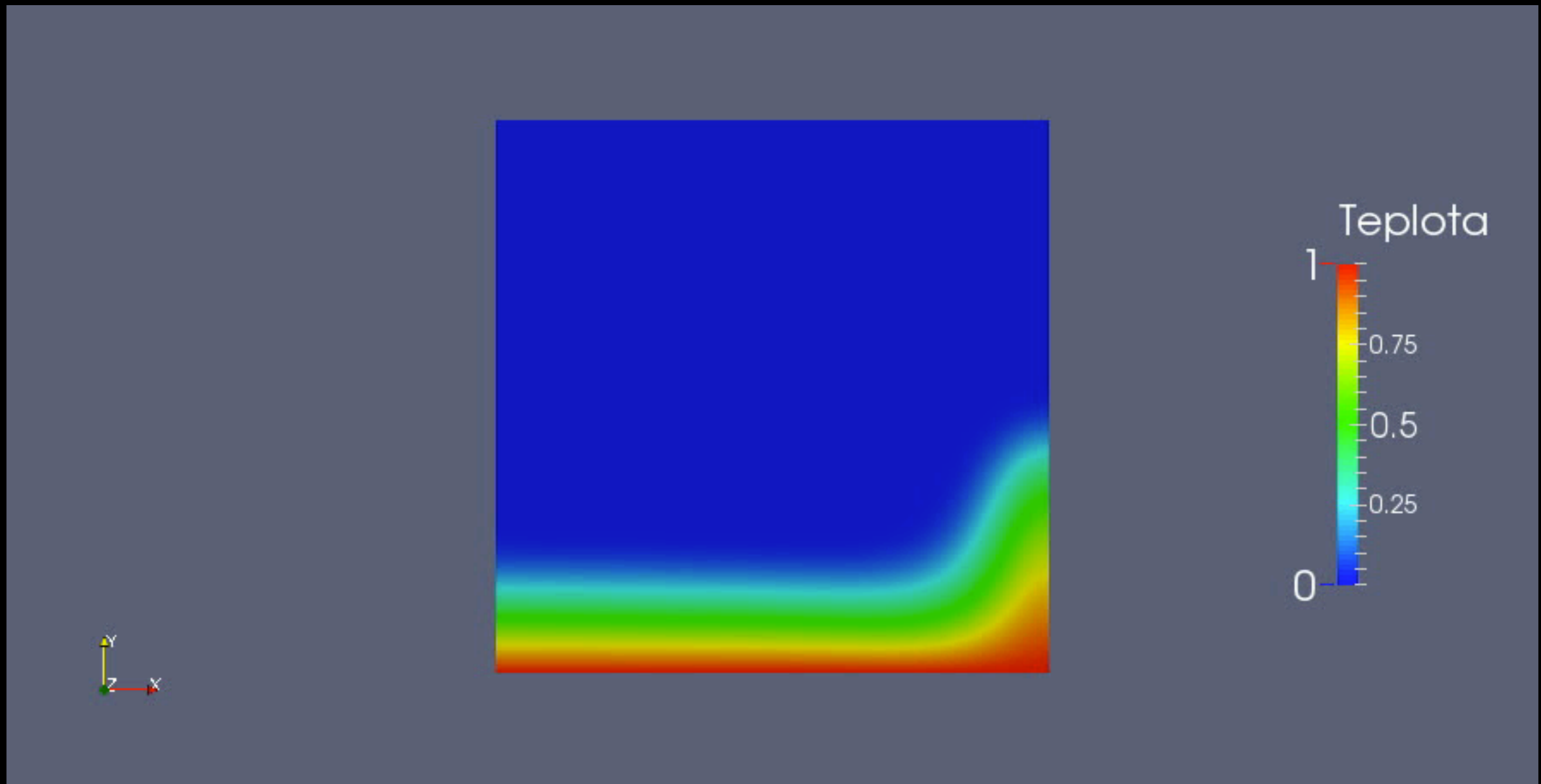
$$Ra = 10^4, D = 10^{-1}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



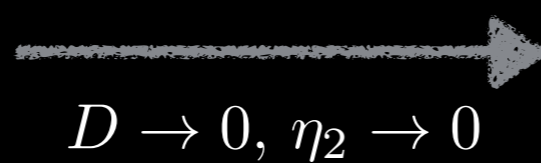
Nu: 0.9999

Nu(visko)=4,8757

$$Ra = 10^5, D = 10^{-1}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



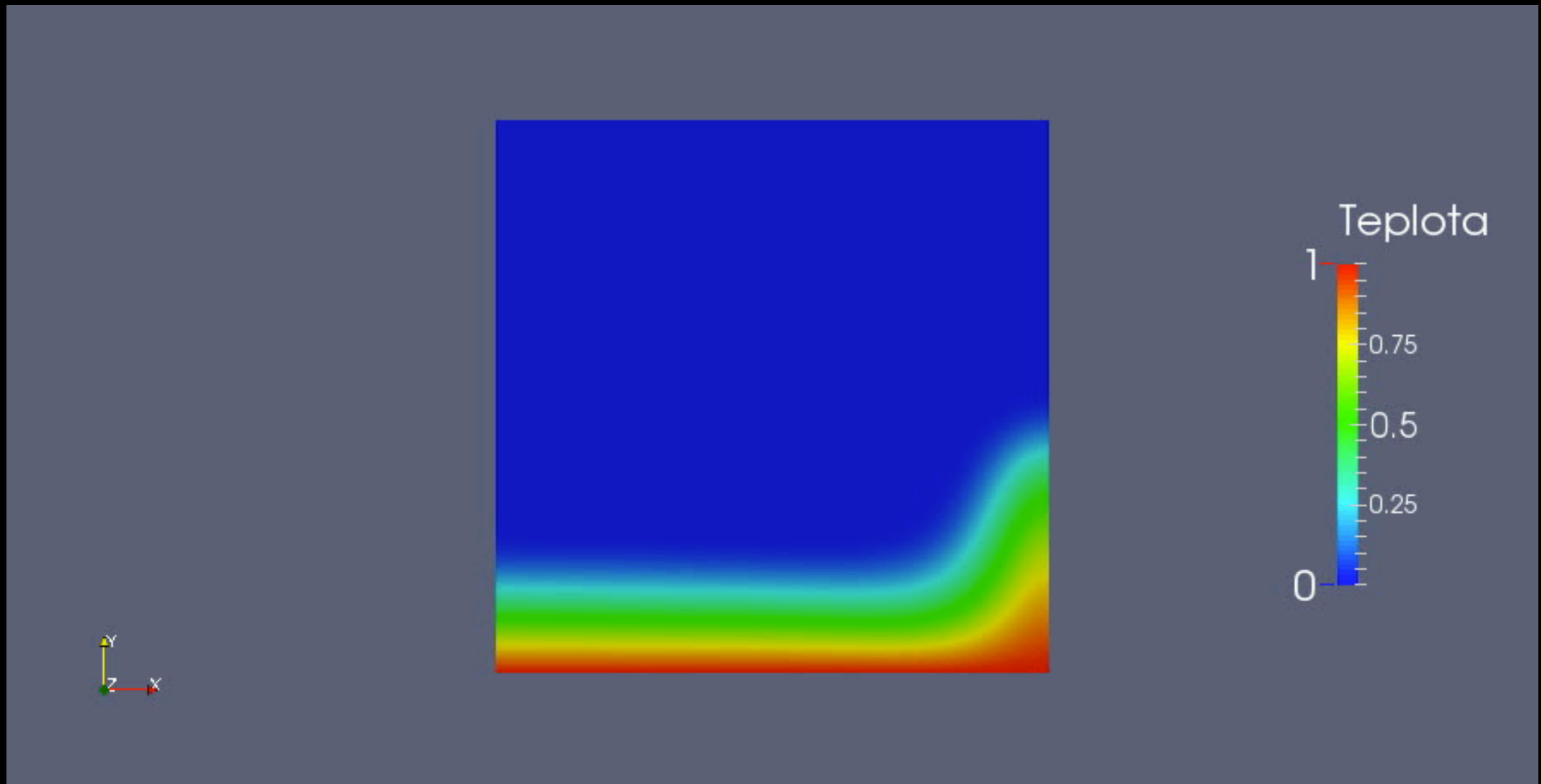
Nu: 1.1 - 3.1



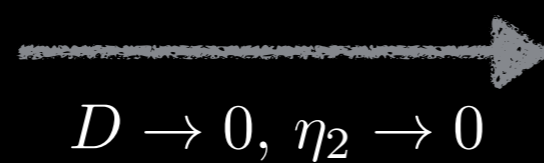
Nu: 10,4542

Nu(visko)=10,4548

$$Ra = 10^5, D = 10^{-1}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



Nu: 1.1 - 3.1

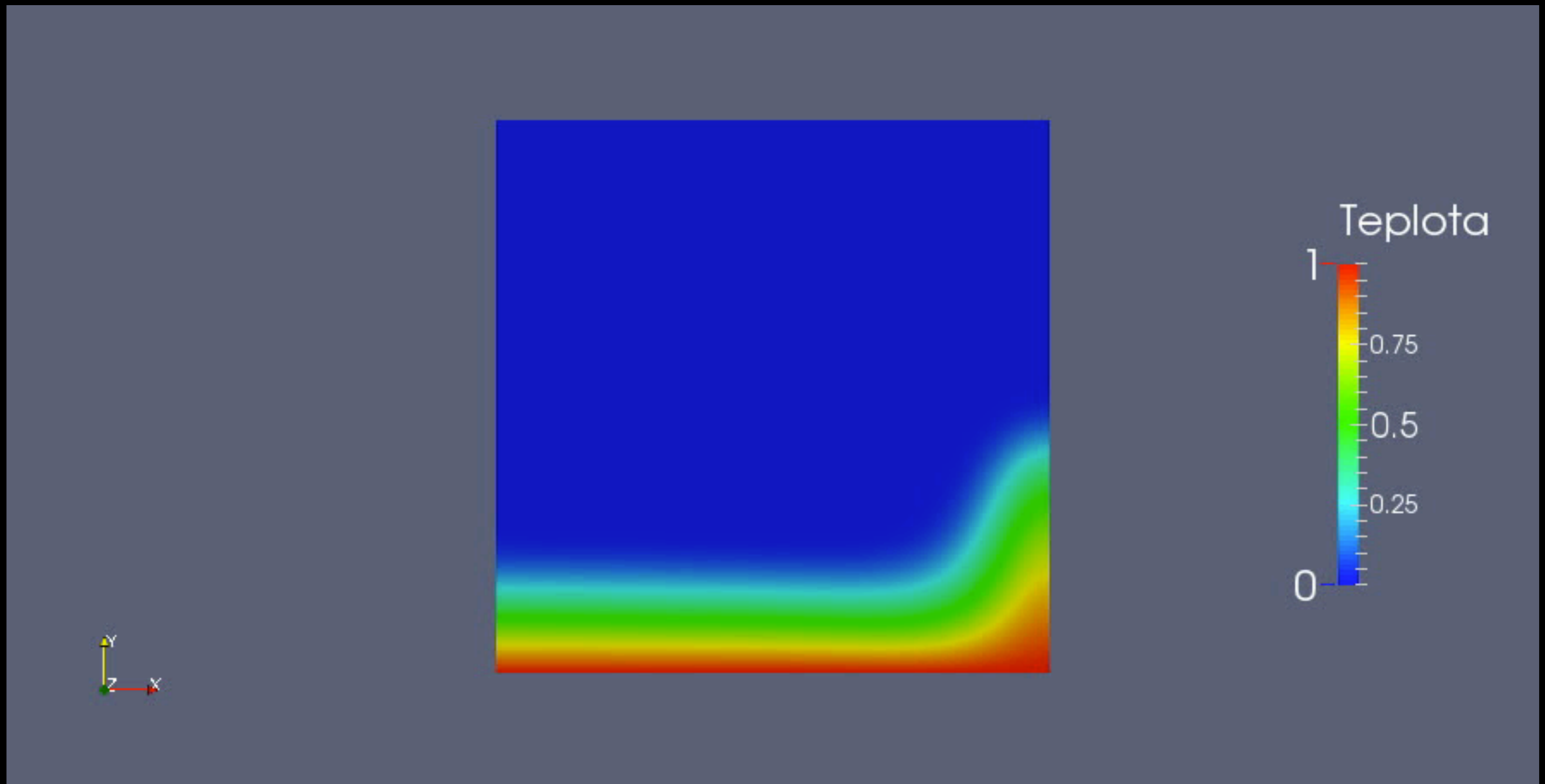


$D \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0$

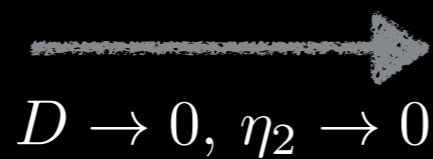
Nu: 10,4542

Nu(visko)=10,4548

$$Ra = 10^6, D = 10^{-1}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



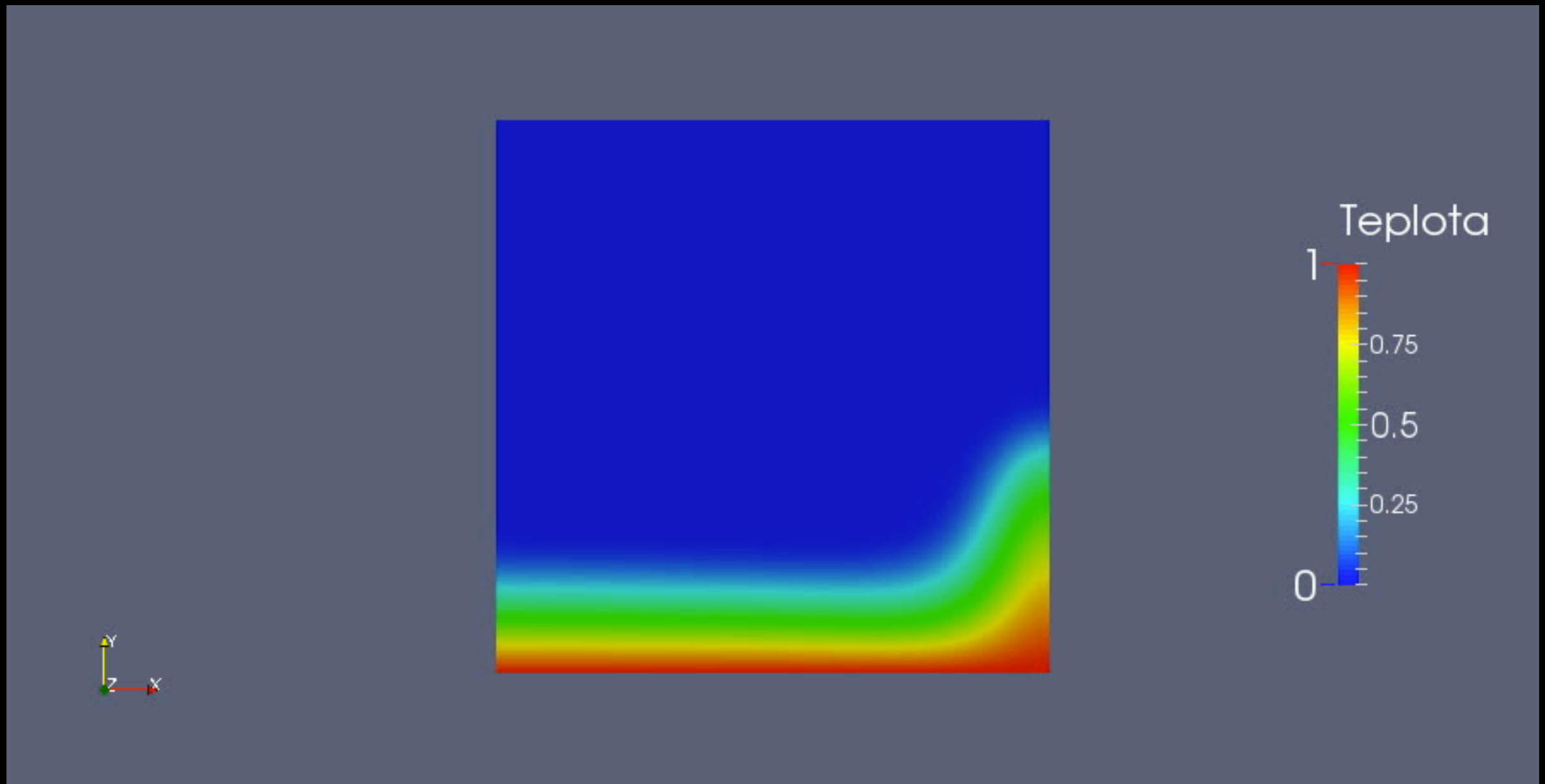
Nu: 1.0 - 3.7



Nu: 21,69

Nu(visko)=21,6943

$$Ra = 10^6, D = 10^{-1}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



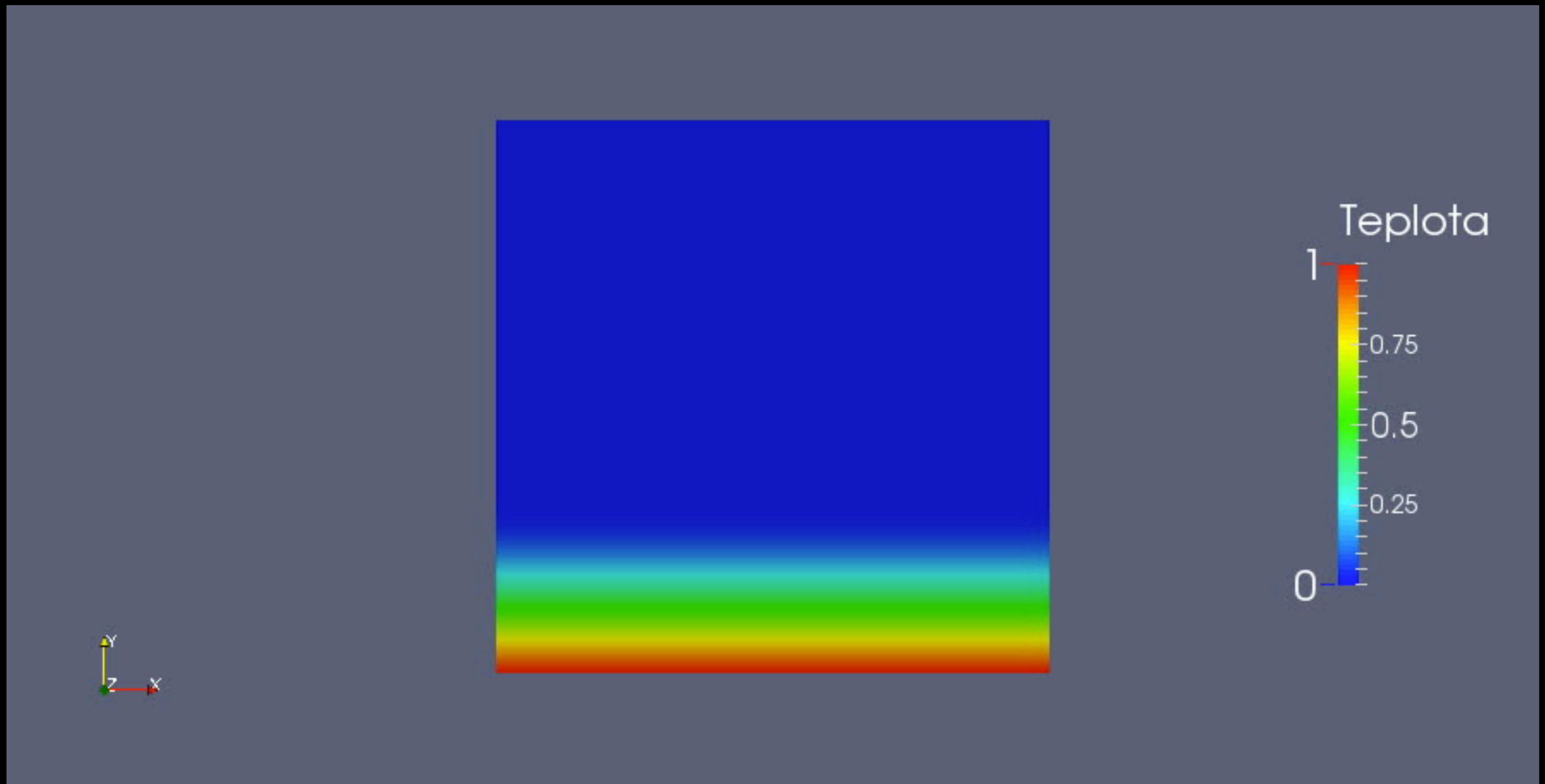
Nu: 1.0 - 3.7

→
 $D \rightarrow 0, \eta_2 \rightarrow 0$

Nu: 21,69

Nu(visko)=21,6943

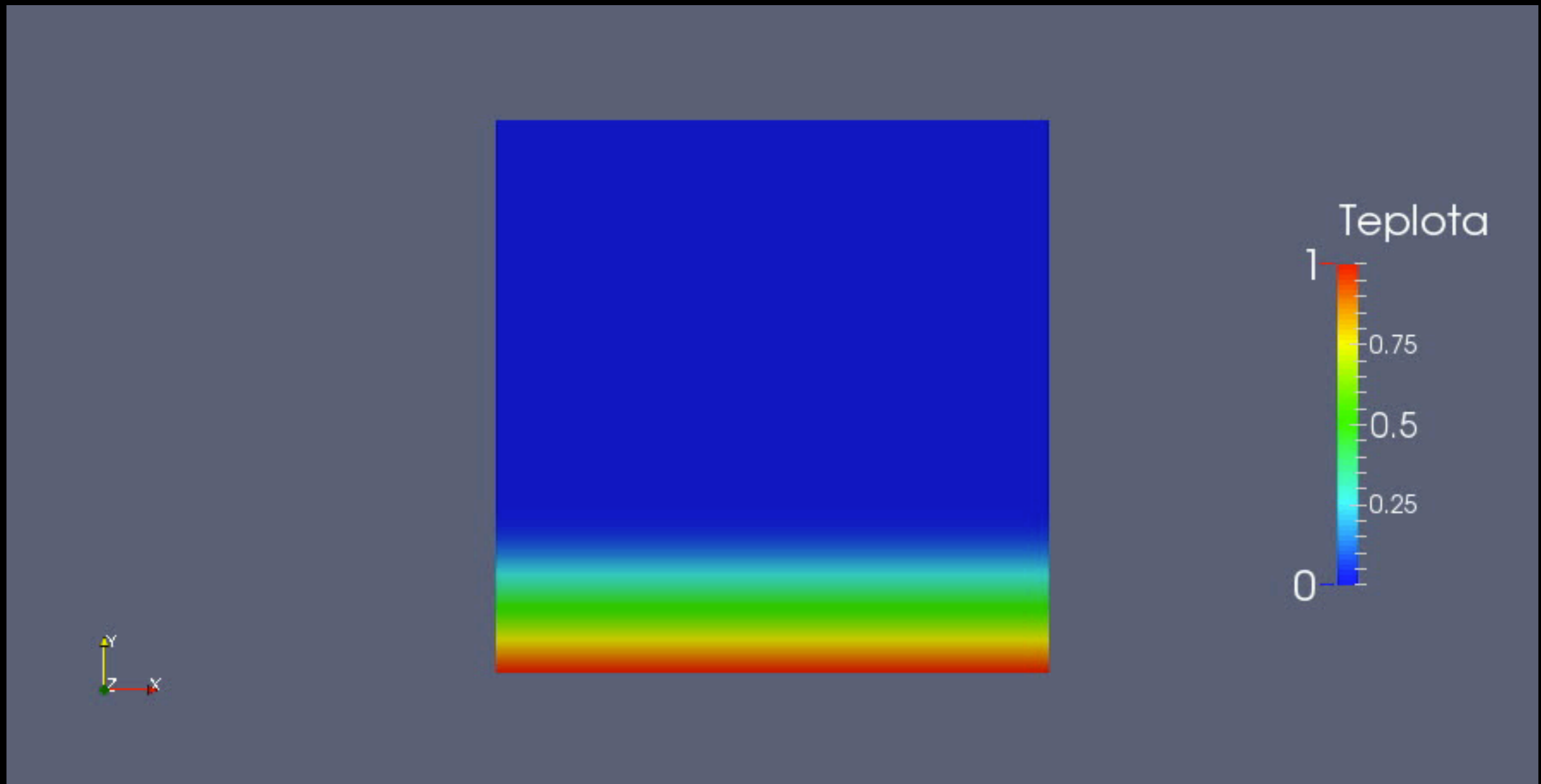
$$Ra = 10^4, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



$Nu = 4,3851$

$Nu(\text{visko}) = 4,8757$

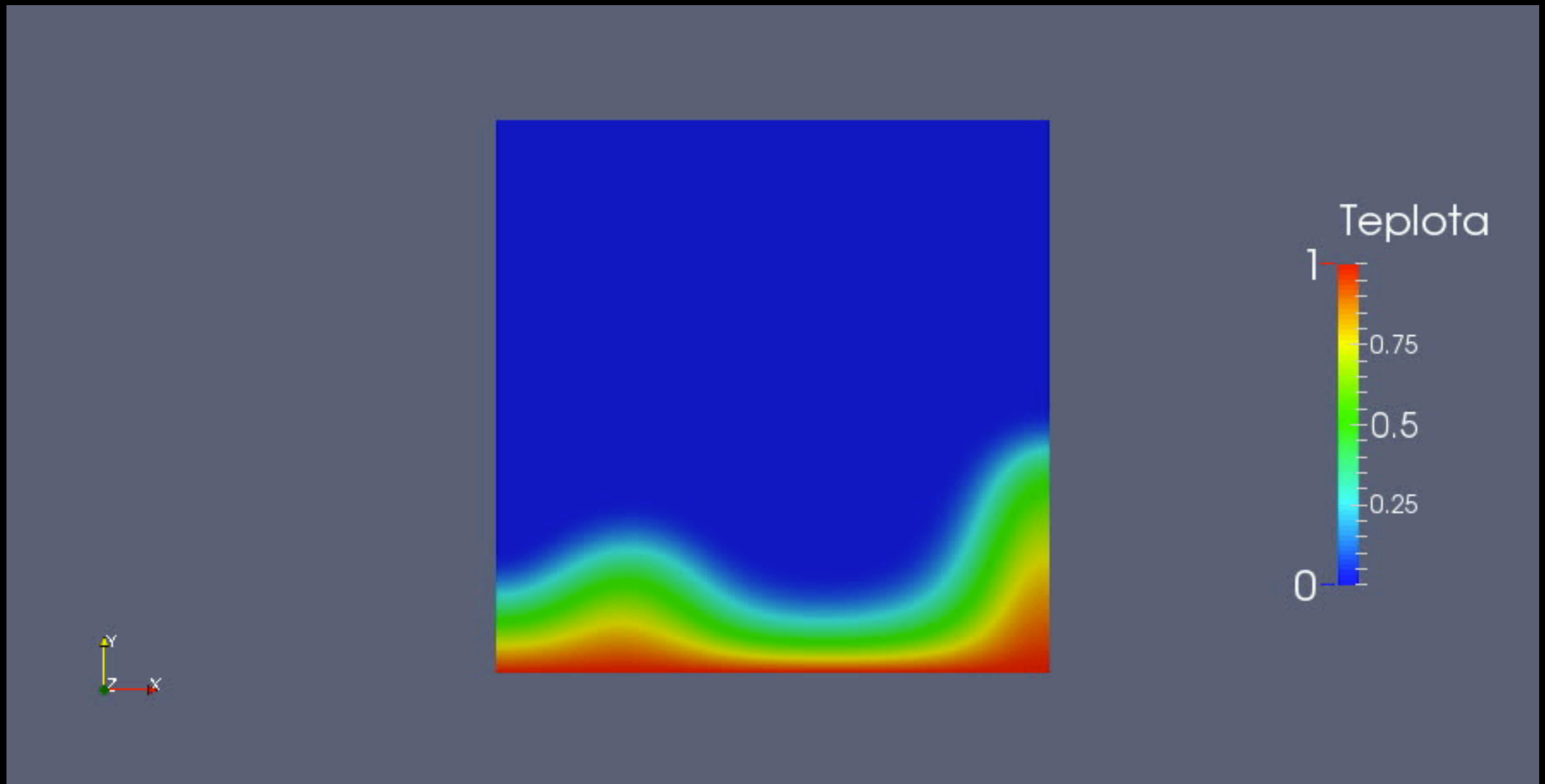
$$Ra = 10^4, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



$Nu = 4,3851$

$Nu(\text{visko}) = 4,8757$

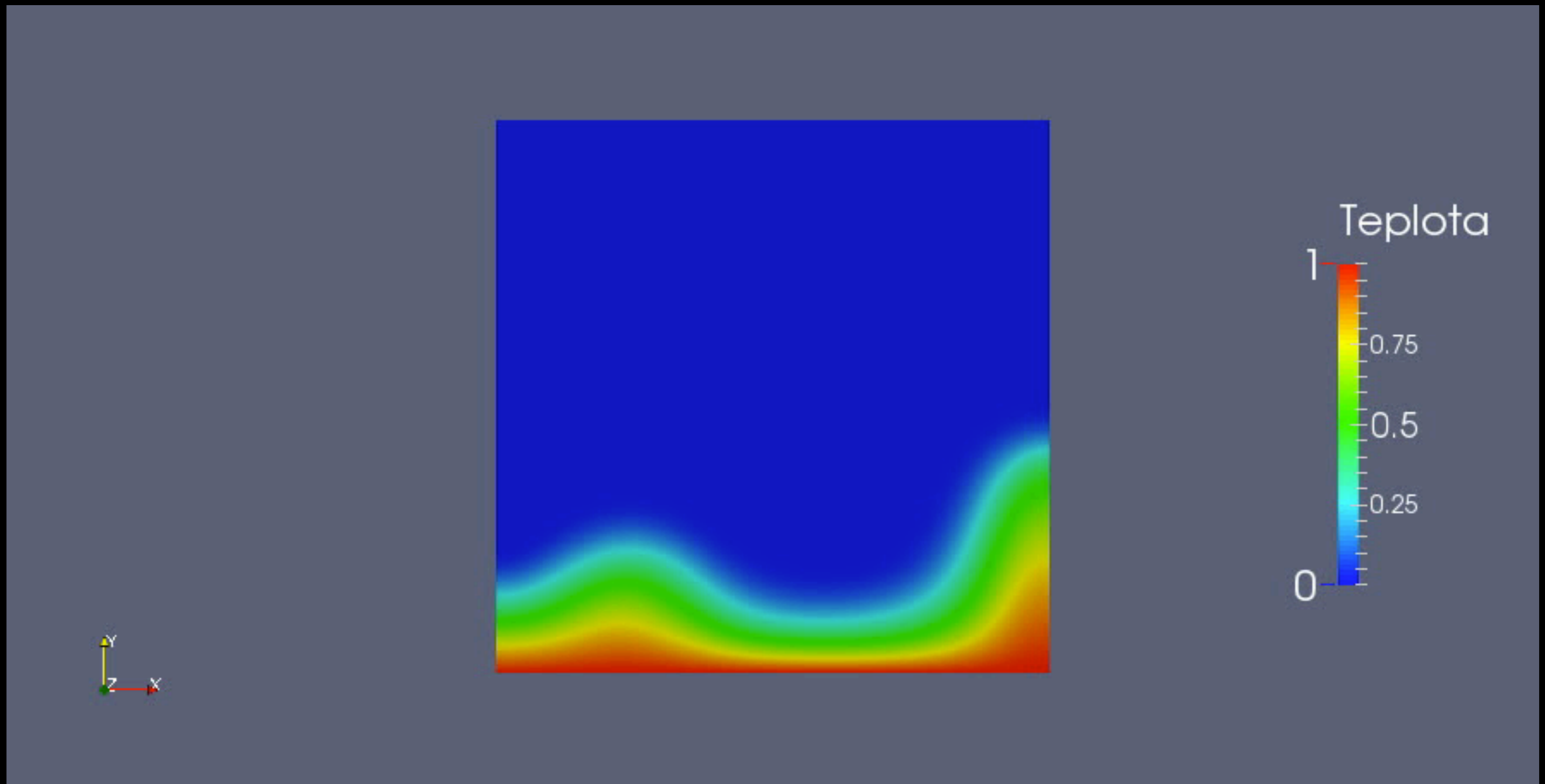
$$Ra = 10^5, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



$Nu = 6.8 - 7.3$

$Nu(\text{visko}) = 10,4548$

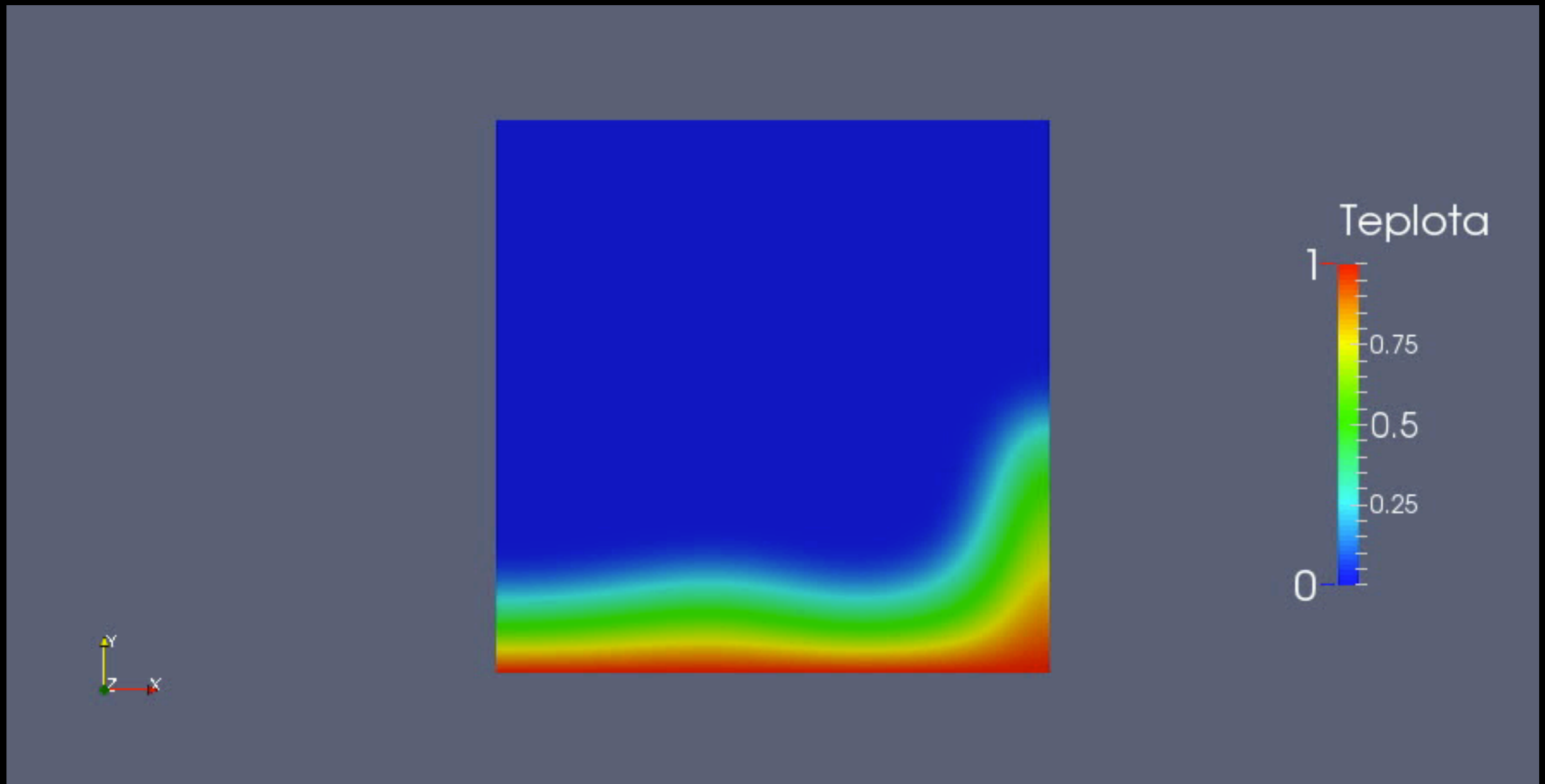
$$Ra = 10^5, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



$$Nu = 6.8 - 7.3$$

$$Nu(\text{visko}) = 10,4548$$

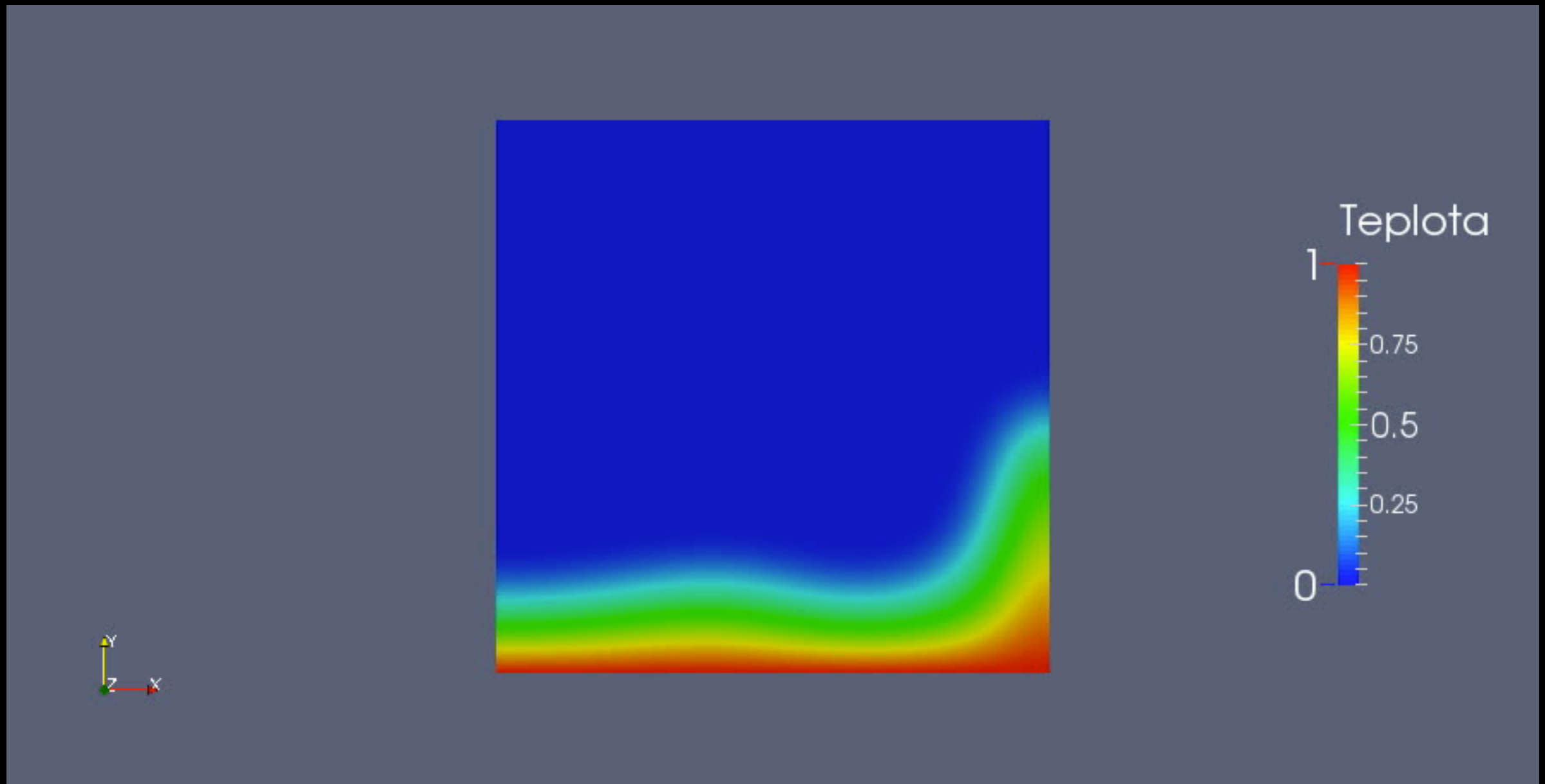
$$Ra = 10^6, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



$$Nu = 6.89 - 7.1$$

$$Nu(\text{visko}) = 21,6943$$

$$Ra = 10^6, D = 10^{-2}, \eta_2 = 10^{-3}, 60 \times 60$$



$$Nu = 6.89 - 7.1$$

$$Nu(\text{visko}) = 21,6943$$

Děkuji za pozornost.