Viskoelasticita v konvekčních modelech

Mgr. Vojtěch Patočka

Univerzita Karlova v Praze

[patocka@karel.troja.mff.cuni.cz]

April 23, 2014

Obsah

Convection2D.m - Paul Tackley

- kód v prostředí Matlab
- klasický Boussinesq
  - + teplotně/hloubkově závislá viskozita
- jednoduchý model, konečné diference
- současné numerické metody: multigrid, upwind ...

Řešené rovnice, bezrozměrné

Pohybová rovnice + z.z.e. + z.z.hm.

$$-\nabla p + \nabla \cdot \sigma = -R_a T \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T - \vec{v} \cdot \nabla T$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Reologie, teplotní závislost viskozity

$$\sigma = 2\eta \mathbb{D}$$

$$\eta(T) = \exp(-A(T - 0.5))$$

Multigrid

iterační metoda

ilustrace: Poisson ("stream function" formulace)

operátory: Restrikce, Prolongace, Zhlazení

Zhlazení - dva náhledy: bodově vs. maticově

$$x^n = x^{n-1} - (L+D)^{-1} \cdot \xi^{n-1}$$

Multigrid - možnosti

- práce s operátory restrikce, prolongace a zhlazení
    - formulace úlohy na řídké síti - fyzikální vhled
    - prolongace tlaku - problém s přehnanou korekcí
    - diferenciální operátor na řídké síti - nemusí být stejný
- Srovnání s přímým řešičem, vliv restrikce/prolongace
- Problém: korekce tlaku!

Tlak obecně

Termodynamický vs. Mean normal stress

$$p := \rho^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \text{ versus } m := \frac{1}{3} tr\sigma$$

$$(m + p)\nabla \cdot \vec{v} \to (m + p) = \beta \nabla \cdot \vec{v}$$

V nestlačitelném případě sférická část tenzoru napětí nereaguje na vlastnosti materiálu

Numerický problém: rovnice kontinuity

Role tlaku

Role tlaku v pohybové rovnici - zajištění nestlačitelnosti

$$-\nabla \cdot (\eta(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) = -\nabla p + R_a T \vec{e}_z$$

$$-div(\mathbb{A} \nabla u) = f$$

$$\xi^T \cdot \mathbb{A} \xi > C_1 |\xi|^2$$

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} A_{i,j}^{\alpha,\beta}(x) \xi_i^\alpha \xi_j^\beta = 2\eta((\xi_1^1)^2 + (\xi_2^2)^2) + \eta(\xi_2^1 + \xi_2^1)^2$$

Korekce tlaku

Korekce tlaku: SIMPLE, SIMPLER, $\delta p = -\eta \nabla \cdot \vec{v}$

Maxwellův element

Síly: $F = F_S = F_D$, Geometrie: $\Delta = \Delta_S + \Delta_D$

Výsledný reologický vztah: $\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon}$

Objektivita/PMFI : $\mathbb{A}^* = \mathbb{Q}\mathbb{A}\mathbb{Q}^t$

tenzor napětí předpokládáme objektivní, $\mathbb{D}$ je objektivní

Požadavek: $\mathbb{Q}\sigma(\rho, \mathbb{D})\mathbb{Q}^t = \sigma(\rho, \mathbb{Q}\mathbb{D}\mathbb{Q}^t)$

Proto: $t_{rel}(\frac{D\sigma}{Dt} - \mathbb{L}\sigma - \sigma\mathbb{L}^t) + \sigma = \mathbb{D}$

Implementace - Maxwell

$$D\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \sigma = 2\eta\mathbb{D}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{dt} \quad \mathbb{D} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^t)$$

$$\sigma_n(1 + \frac{D}{dt}) = \eta(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^t) + \frac{D}{dt}\sigma_{n-1}$$

$$\sigma_n = \frac{dt+D}{D}\eta(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^t) + \frac{D}{dt+D}\sigma_{n-1}$$

Děkuji za pozornost