

# Simple benchmarks for ocean models, a comparison study

Libor Šachl, David Einšpigel

20.11. 2013

# Struktura prezentace

## 1 Motivace

# Struktura prezentace

- 1 Motivace
- 2 LSG model

## Struktura prezentace

- 1 Motivace
- 2 LSG model
- 3 DEBOT model

## Struktura prezentace

- 1 Motivace
- 2 LSG model
- 3 DEBOT model
- 4 Popis experimentů a metod

## Struktura prezentace

- 1 Motivace
- 2 LSG model
- 3 DEBOT model
- 4 Popis experimentů a metod
- 5 Benchmarky

# Struktura prezentace

- 1 Motivace
- 2 LSG model
- 3 DEBOT model
- 4 Popis experimentů a metod
- 5 Benchmarky
- 6 Shrnutí

# Aktuální sekce

1 Motivace

2 LSG model

3 DEBOT model

4 Popis experimentů a metod

5 Benchmarky

6 Shrnutí



# Motivace první

- LSG model
  - LSG = “Large Scale Geostrophic”
  - 3D barokliní oceánský model
  - děje: velkoškálové, dlouhotrvající
  - nízké prostorové rozlišení ( $5^\circ$ ), dlouhé časové kroky (1 měsíc)
- DEBOT model
  - 2D barotropní oceánský model
  - slapový modul
  - použití, např.: slapově buzené oceánské proudění, slapové vlny (shallow-water tides)  $\Rightarrow$  magnetická odezva oceánů
  - vyšší prostorové rozlišení ( $0.5^\circ?$ , viz. Dostál et al (2012)), kratší časové kroky

# Barotropní verze LSG modelu

- odvozena z původní verze modelu
- další výhody:
  - 1 méně komplexní  $\Rightarrow$  jednodušší k ovládní  $\Rightarrow$  jednodušší pro:
    - test a vylepšení numerického schématu, např. implementace nové numerické metody
    - získání “citu” pro LSG model
  - 2 vliv baroklinicity?

# Motivace druhá

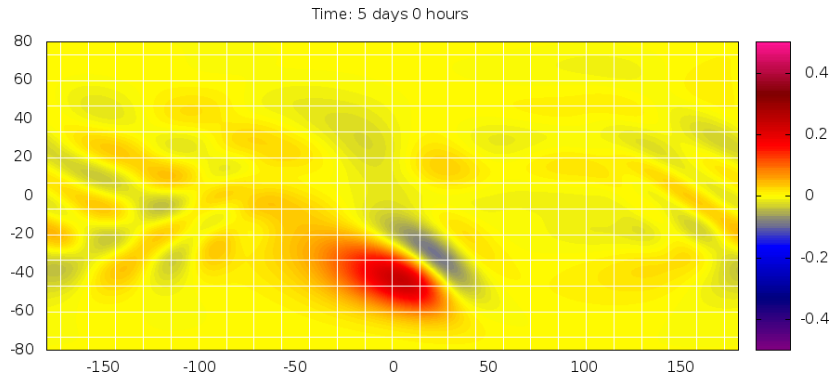


Figure: DEBOT model, 5 dnů.

## Motivace druhá

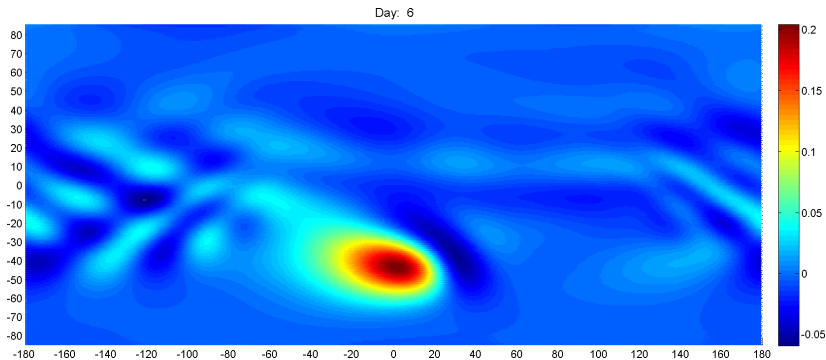


Figure: LSG model, 5 dnů.

## Motivace druhá

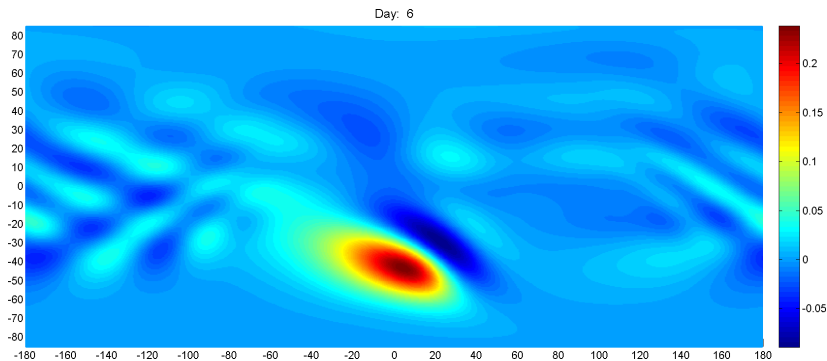


Figure: DEBOT model, 5 dnů.

## Aktuální sekce

- 1 Motivace
- 2 LSG model**
- 3 DEBOT model
- 4 Popis experimentů a metod
- 5 Benchmarky
- 6 Shrnutí

## Cesta k LSG modelu

Dr. Freiwald, osobní komunikace:

- kompletně nový OGCM - příliš složité na Ph.D. projekt!
- FEOM pravděpodobně nevhodný pro dlouhé (tisíce let) časové běhy

Dr. Danilov, mailová komunikace

- 50 let/den,  $\approx 1^\circ$  mřížka na 128 or 256 jádrech.
- $\Rightarrow$  speciální modely, e.g. MITgcm

Prof. Lohmann, mailová komunikace

- LSG: více než 2000 let/den  $\Rightarrow$  vhodný např. pro klimatické studie

## Přechod k barotropní verzi

Vyškrtnuto/přepracováno, např.:

- Fyzikální část
  - teplota a salinita (evoluční rovnice, načítání ...)
  - barokliní systém
  - stavová rovnice
  - tlaky (výpočet, členy v barotropním systému)
- Technická část
  - mřížka (2D, libovolně hustá)
  - časový vstupní formát
  - programy na postprocessing, kreslení (MATLAB)



## Evoluční rovnice

$$u_t - fv + \frac{g}{R \cos \varphi} \zeta_\lambda - A_h \Delta_h u = \frac{\tau^\lambda}{H \rho_0} + F^\lambda,$$

$$v_t + fu + \frac{g}{R} \zeta_\varphi - A_h \Delta_h v = \frac{\tau^\varphi}{H \rho_0} + F^\varphi,$$

$$\zeta_t + \frac{1}{R \cos \varphi} [(H\bar{u})_\lambda + (H\bar{v} \cos \varphi)_\varphi] = 0.$$

$u, v$	(vertikálně zprůměrované) horizontální rychlosti
$\zeta$	elevace hladiny
$\varphi, \lambda$	úhly v geografických souřadnicích
$\rho_0$	průměrná hustota vody v oceánu
$f = f(\varphi)$	Coriolisův parametr
$A_h$	horizontální turbulentní viskozita
$\tau^\lambda, \tau^\varphi, F^\lambda, F^\varphi$	napětí vyvolané větrem, slapová síla
$H, R$	hloubka klidného oceánu, poloměr Země
$g$	gravitační zrychlení

## Evoluční rovnice

$$u_t - fv + \frac{g}{R \cos \varphi} \zeta_\lambda = F^\lambda,$$

$$v_t + fu + \frac{g}{R} \zeta_\varphi = F^\varphi,$$

$$\zeta_t + \frac{1}{R \cos \varphi} [(H\bar{u})_\lambda + (H\bar{v} \cos \varphi)_\varphi] = 0.$$

## Evoluční rovnice

Hraniční podmínky:

$$u = 0,$$

$$v = 0,$$

$$\zeta = 0.$$

## Slapová síla

- pomocí slapového potenciálu vyjádřeného do 2. stupně

$$\mathbf{F} = \gamma \nabla V_2,$$
$$V_2 = \frac{3}{4} \frac{GMR^2}{d^3} \left[ \begin{aligned} &\cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos(2\tau) \\ &+ \sin(2\varphi) \sin(2\delta) \cos \tau \\ &+ 3 \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \end{aligned} \right],$$

např. viz. Einšpigel (2012)

- balík subroutin NOVAS
- Davidova implementace přepsána pro Arakawa E mřížku a model LSG

## Výpočetní mřížka

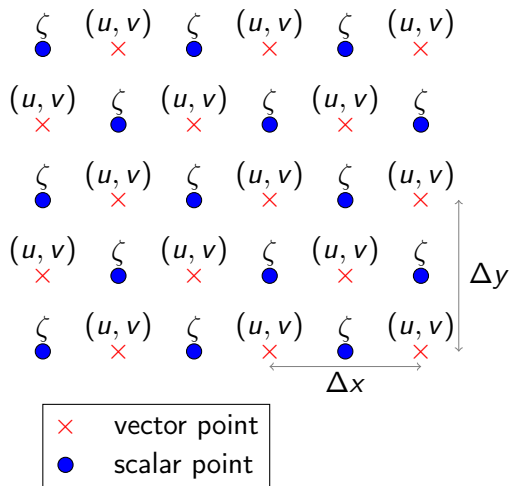


Figure: Arakawa E mřížka. Staggered, rotovaná 45°.

## Evoluční rovnice diskrétně

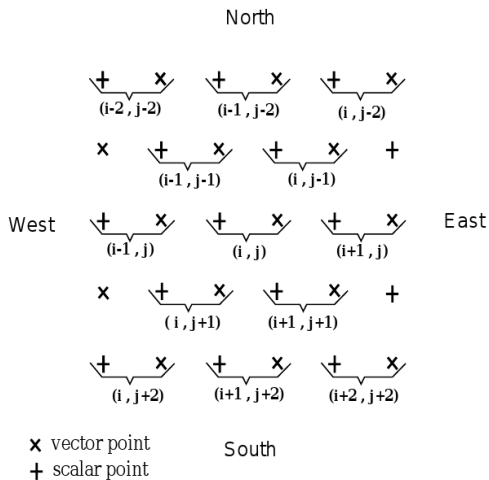


Figure: Číslování bodů v programu LSG.

## Evoluční rovnice diskrétně

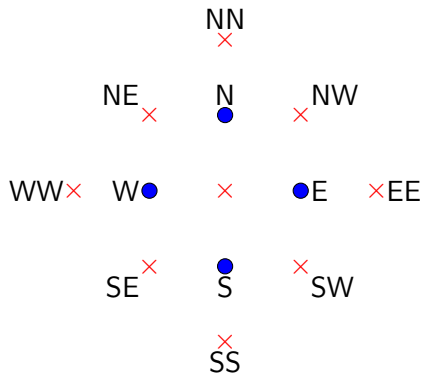


Figure: Značení použité pro zápis momentové rovnice v diskrétní podobě.

## Evoluční rovnice diskrétně

$$\begin{aligned}\frac{u - u_n}{\Delta t} - fv + \frac{g}{R \cos \varphi} \frac{\zeta^E - \zeta^W}{\Delta \lambda} &= 0, \\ \frac{v - v_n}{\Delta t} + fu + \frac{g}{R} \frac{\zeta^N - \zeta^S}{\Delta \varphi} &= 0, \\ \frac{\zeta^E - \zeta_n^E}{\Delta t} + \frac{1}{R \cos \varphi} \left[ \frac{H\bar{u} - H^{EE}\bar{u}^{EE}}{\Delta \lambda} \right. \\ &\left. + \frac{H^{NE}\bar{v}^{NE} \cos \varphi^{NE} - H^{SE}\bar{v}^{SE} \cos \varphi^{SE}}{\Delta \varphi} \right] = 0.\end{aligned}$$



## Evoluční rovnice diskrétně

Předpokládáme

$$\Delta\lambda = \Delta\varphi,$$

platí:

$$\zeta^E = \zeta_n^E - \Delta t \left[ \frac{H\bar{u} - H^{EE}\bar{u}^{EE}}{\Delta x} + \frac{H^{NE}\bar{v}^{NE}\Delta x^{NE} - H^{SE}\bar{v}^{SE}\Delta x^{SE}}{\Delta x\Delta y} \right],$$
$$\zeta^W = \zeta_n^W - \Delta t \left[ \frac{H^{WW}\bar{u}^{WW} - H\bar{u}}{\Delta x} + \frac{H^{NW}\bar{v}^{NW}\Delta x^{NW} - H^{SW}\bar{v}^{SW}\Delta x^{SW}}{\Delta x\Delta y} \right].$$

## Evoluční rovnice diskrétně

Momentová rovnice, zonální složka (zapsaná vůči vektorovému bodu):

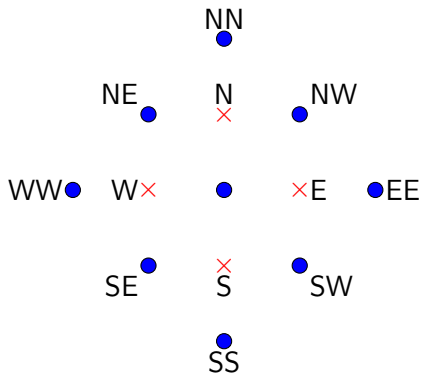
$$\begin{aligned}
 & u + g \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left( 2Hu - H^{EE} u^{EE} - H^{WW} u^{WW} \right) \\
 & - f \Delta t v - g \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 \Delta y} \left( H^{NE} v^{NE} \Delta x^N - H^{NW} v^{NW} \Delta x^N \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + H^{SW} v^{SW} \Delta x^S - H^{SE} v^{SE} \Delta x^S \right) \\
 & = \frac{g \Delta t}{\Delta x} \left( \zeta_n^W - \zeta_n^E \right) + u_n.
 \end{aligned}$$

## Evoluční rovnice diskrétně

Momentová rovnice, meridionální složka (zapsaná vůči vektorovému bodu):

$$\begin{aligned}
 & v + g \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \left[ \Delta x \left( \frac{1}{\Delta x^N} + \frac{1}{\Delta x^S} \right) H_v - \frac{\Delta x^{NN}}{\Delta x^N} H^{NN} v^{NN} - \frac{\Delta x^{SS}}{\Delta x^S} H^{SS} v^{SS} \right] \\
 & + f \Delta t u - g \frac{\Delta t^2}{\Delta y} \left( \frac{H^{NE} u^{NE} - H^{NW} u^{NW}}{\Delta x^N} + \frac{H^{SW} u^{SW} - H^{SE} u^{SE}}{\Delta x^S} \right) \\
 & = \frac{g \Delta t}{\Delta y} \left( \zeta_n^S - \zeta_n^N \right) + v_n.
 \end{aligned}$$

## Evoluční rovnice diskrétně



**Figure:** Značení použité pro zápis evoluční rovnice pro elevaci v diskrétní podobě.

## Evoluční rovnice diskrétně

Evoluční rovnice pro elevaci hladiny (zapsaná vůči skalárnímu bodu):

$$\zeta = \zeta_n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( H^E u^E - H^W u^W \right) + \frac{H^N v^N \Delta x^N - H^S v^S \Delta x^S}{\Delta y} \right].$$

## Evoluční rovnice diskrétně

Upravená evoluční rovnice pro elevaci hladiny (zapsaná vůči skalárnímu bodu):

$$\begin{aligned}
 & + \zeta^{NW} \left( -\frac{u^W \Delta t}{2\Delta x} + \frac{v^N \Delta t \Delta x^N}{2\Delta x \Delta y} \right) + \zeta^{NE} \left( \frac{u^E \Delta t}{2\Delta x} + \frac{v^N \Delta t \Delta x^N}{2\Delta x \Delta y} \right) \\
 & + \zeta \\
 & + \zeta^{SW} \left( -\frac{u^W \Delta t}{2\Delta x} - \frac{v^S \Delta t \Delta x^S}{2\Delta x \Delta y} \right) + \zeta^{SE} \left( \frac{u^E \Delta t}{2\Delta x} - \frac{v^S \Delta t \Delta x^S}{2\Delta x \Delta y} \right) \\
 & = \zeta_n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( H^E u^E - H^W u^W \right) + \frac{H^N v^N \Delta x^N - H^S v^S \Delta x^S}{\Delta y} \right].
 \end{aligned}$$

## Neznámé v rovnicích

- Momentová rce, meridionální složka:

$$u^{NW}, u^{NE}, u^{WW}, u, u^{EE}, u^{SW}, u^{SE}$$
$$v^{NW}, v^{NE}, v, v^{SW}, v^{SE}$$

- Momentová rce, zonální složka:

$$u^{NW}, u^{NE}, u, u^{SW}, u^{SE}$$
$$v^{NN}, v^{NW}, v^{NE}, v, v^{SW}, v^{SE}, v^{SS}$$

## Matice soustavy

- velikost  $N \times N$ , kde  $N = 2 * (\text{počet oceánských bodů})$
- nenulových prvků na 1 řádku: max. 12
- $\Rightarrow$  řídká matice 😊
- $\Rightarrow$  nesymetrická 😞



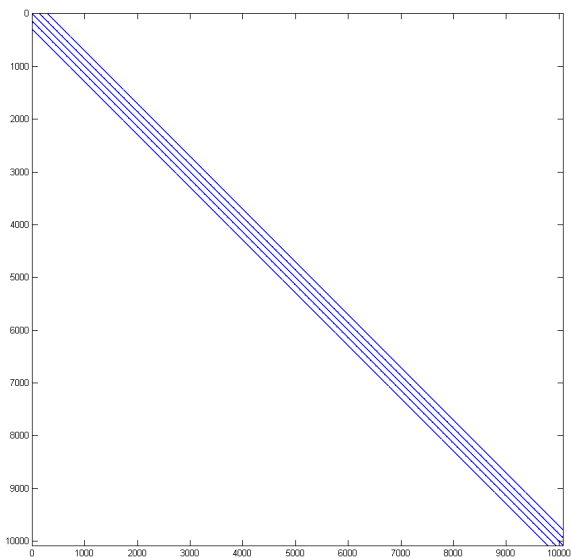


Figure: Matice pro mřížku obsahující 72x72 oceánských bodů.

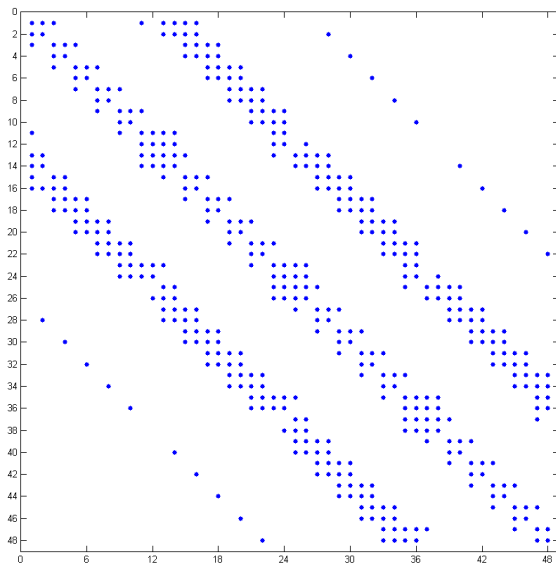


Figure: Matice pro mřížku obsahující 6x4 oceánských bodů.

## Numerické metody, staré a nové

### Původní LSG:

- Gaussova eliminace
  - modifikovaná (pásová matice)
  - bez pivotace
  - málo efektivní?

### Nově implementováno:

- PARDISO řešič z MKL (Intel Math Kernel Library)
- GMRES (Generalized Minimal Residual) metoda z MKL
- GMRES metoda z CULA tools

## Několik slov o řešičích

- PARDISO
  - PARDISO = Parallel Sparse Direct Linear Solver
  - symetrické, strukturálně symetrické, nesymetrické matice
- GMRES z MKL
  - GMRES - iterační metoda
  - není paralelizována!
  - $A \cdot v$  dodá uživatel, `mk1_dcsrgev` - paralelizovaná
- GMRES z CULA tools
  - grafická karta nikoliv CPU
  - CULA sparse

## Implementace a nastavení

- matice v CSR formátu (compressed sparse row format)
- matici resp. její faktorizaci stačí spočítat pouze jednou; rozdílné pro barokliní verzi i pro barotropní verzi s elevací
- PARDISO:
  - analýza a symbolická faktorizace
  - numerická faktorizace
  - přímá a zpětná substituce včetně iteračního zpřesnění
  - ukončení řešiče, uvolnění paměti

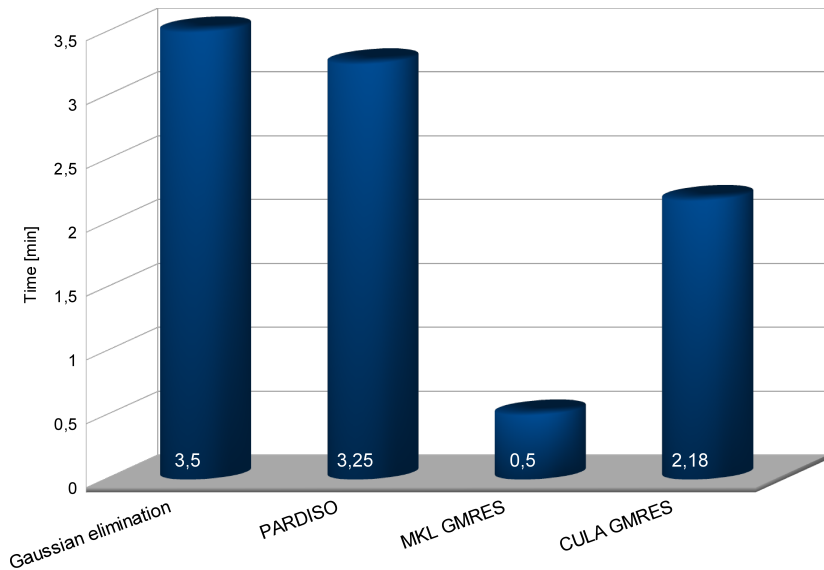


Figure: 5° mřížka, 72x72 oceánských bodů, 1 den, počítáno na Karlovi.

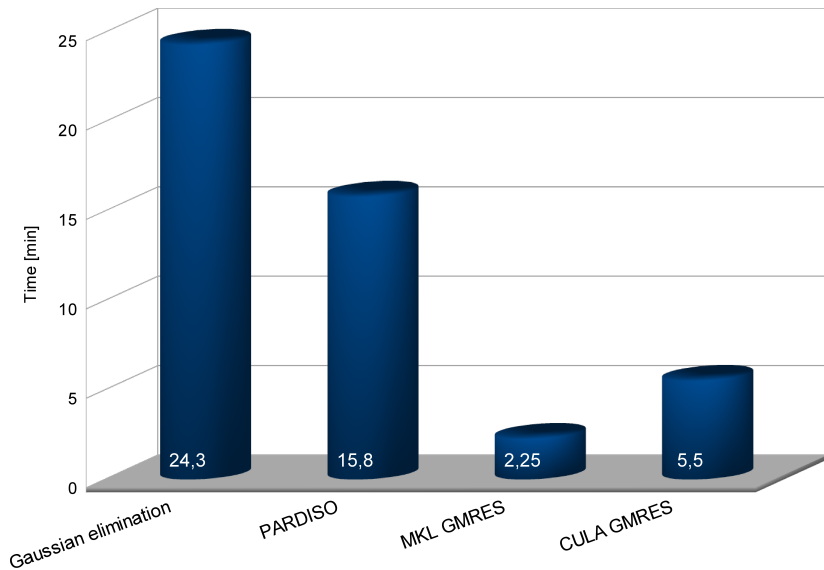


Figure: 2,5° mřížka, 144x144 oceánských bodů, 1 den, počítáno na Karlovi

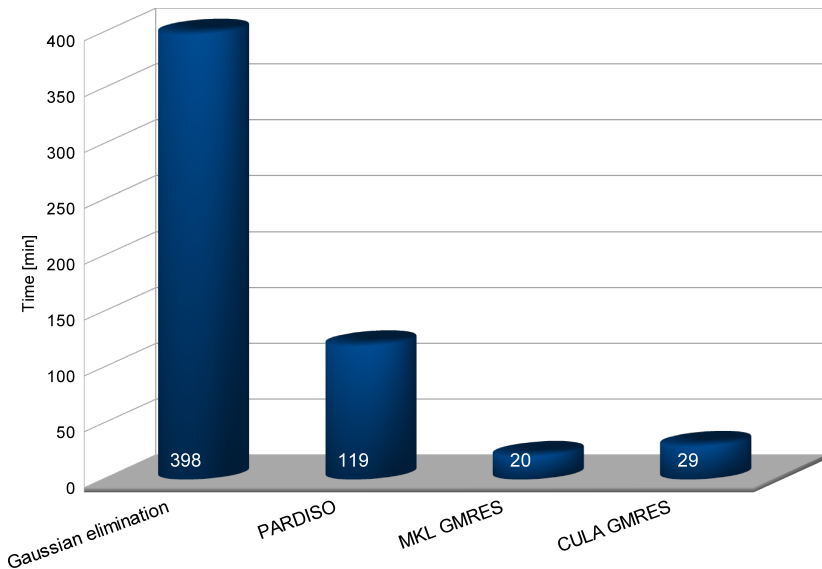


Figure: 1° mřížka, 360x360 oceánských bodů, 1 den, počítáno na Karlovi.



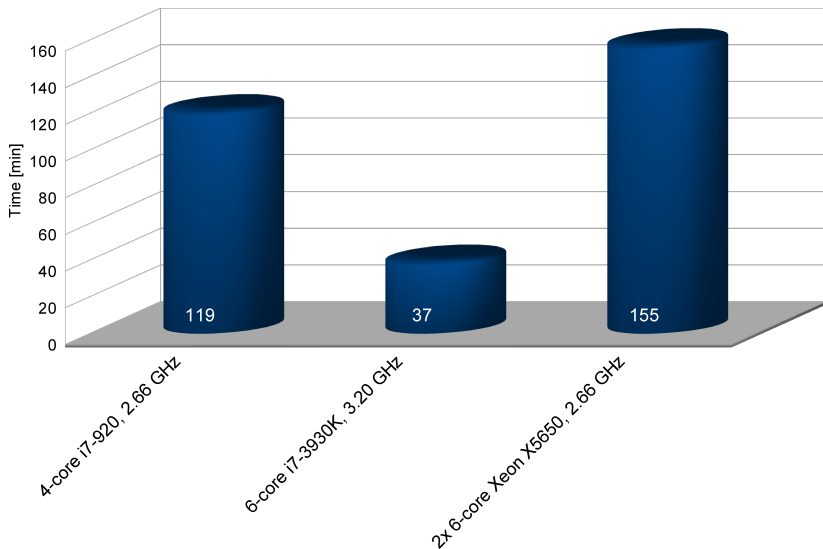


Figure: 1° mřížka, 360x360 oceánských bodů, 1 den, řešič PARDISO.

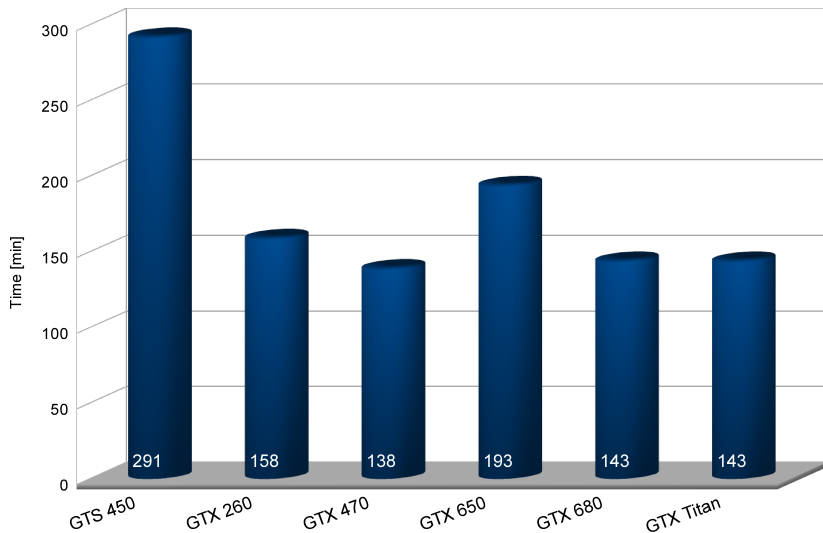


Figure:  $1^\circ$  mřížka, 360x360 oceánských bodů, 10 dní, GMRES CULA.

## Aktuální sekce

- 1 Motivace
- 2 LSG model
- 3 DEBOT model**
- 4 Popis experimentů a metod
- 5 Benchmarky
- 6 Shrnutí

	LSG	DEBOT
advekční člen	ne	ano
výška vodního sloupce	bez elevace hladiny	včetně elevace hladiny
tření na dně	ne	ano
Coriolisův člen	klasicky	Backhausova f.
působení větru	ano	ne, $\mathbf{t} \cdot \vec{n}_s = \vec{0}$
viskózní člen (Laplace)	rotovaná "kartézská"	sférická
Arakawa mřížka	E	C
rychlosti na hranici	$\vec{u} = 0$	$\vec{u} \cdot \vec{n}_c = 0$
numerické schéma	implicitní	semi-implicitní

## Výpočetní mřížka LSG modelu

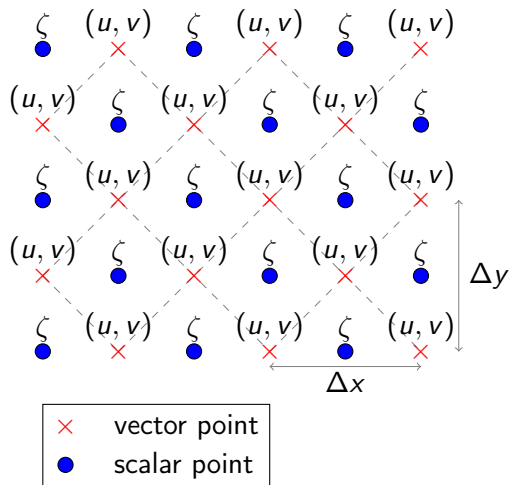


Figure: Arakawa E mřížka.

## Výpočetní mřížka DEBOT modelu

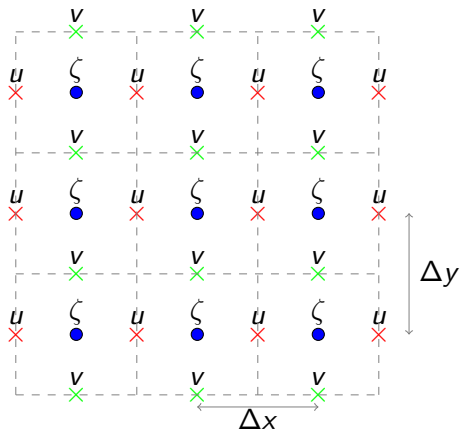


Figure: Arakawa C mřížka.

## Časové schéma

- metoda predictor-corrector
- maticově se řeší rovnice pro elevaci

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2} \left( \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right) + A_{i,j}^{\zeta},$$

$$U_{i,j}^{n+1} = -\frac{gF_{i,j}^x h_{i,j}^x \Delta t}{2\Delta x} \left( \zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1} \right) + A_{i,j}^x,$$

$$V_{i,j}^{n+1} = -\frac{gF_{i,j}^y h_{i,j}^y \Delta t}{2\Delta y} \left( \zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1} \right) + A_{i,j}^y,$$

## Aktuální sekce

- 1 Motivace
- 2 LSG model
- 3 DEBOT model
- 4 Popis experimentů a metod**
- 5 Benchmarky
- 6 Shrnutí



## Popis experimentů

### Experiment s Gaussovskou elevací

- **Počáteční podmínky:**  $u = v = 0$ , Gaussovská elevace  $\lambda=60^\circ$ ,  $\varphi=0$ , amplituda=-200 m, směrodatná odchylka= $5^\circ$ .
- **Vnější síly:** žádné
- **Bathymetrie:** Gaussovská hora  $\lambda=-60^\circ$ ,  $\varphi=0$ , výška 6000 m, ze dna v hloubce 3790 m, pevnina pro  $\varphi \geq 84.5^\circ$ ,  $\varphi \leq -85^\circ$ .

### Experiment se slapy

- **Počáteční podmínky:**  $u = v = \zeta = 0$ , .
- **Vnější síly:** Slapové buzení
- **Bathymetrie:** Ploché dno v hloubce 3790 m, pevnina pro  $\varphi \geq 84.5^\circ$ ,  $\varphi \leq -85^\circ$ .

## Přehled použitých metod

- Časový vývoj v kontrolních bodech.
  - dobrá kontrola v čase, jednoduchá vizualizace
  - prostor méně pod kontrolou
- Prostorové rozložení ve zvolených časech.
  - dobrá kontrola v prostoru
  - volba časových momentů?
- Sférický harmonický rozvoj.
  - globální test (prostor, čas)
  - pro Gaussovskou elevaci asi nepoužitelný
- Invarianty
  - globální test, vycházejí z evolučních rovnic
  - detaily pomíjí

## Metoda 1 (Časový vývoj v kontrolních bodech)

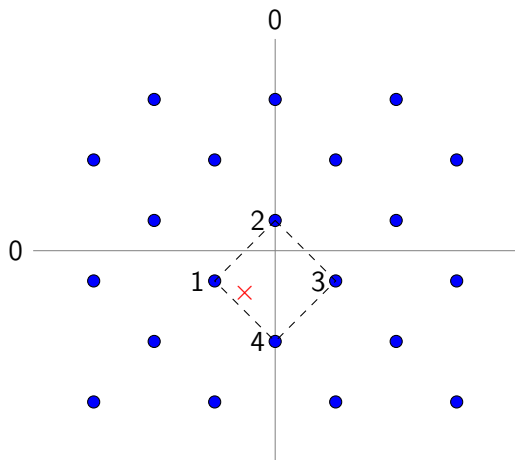


Figure: **Modré** body: mřížka v modelu LSG. **Červený** křížek: Kontrolní bod. Body 1-4: Body použité k určení hodnoty v kontrolním bodě.

## Metoda 1: Výpočet elevace v kontrolním bodě.

$$\zeta_k \approx \frac{\sum_{i=1}^4 w_i \zeta_i}{\sum_{i=1}^4 w_i},$$

kde váhy  $w_i$  jsou rovny

$$w_i = \frac{1}{d_i},$$

kde  $d_i$  je vzdálost  $i$ -tého mřížkového bodu od kontrolního bodu,

$$d_i = R \arccos [\cos \varphi_k \cos \varphi_i \cos(\lambda_k - \lambda_i) + \sin \varphi_k \sin \varphi_i].$$

## Metoda 1: Programové řešení

- 1 souřadnice  $\lambda$ ,  $\varphi$  kontrolního bodu
- 2 přepočítání na indexy sítě
- 3 nalezení nejbližších sousedů (3 možnosti, test)
- 4 vyčíslení a uložení vah
- 5 vyčíslení elevace (v každém kroku)

## Metoda 2 (Prostorové rozložení): Interpolace

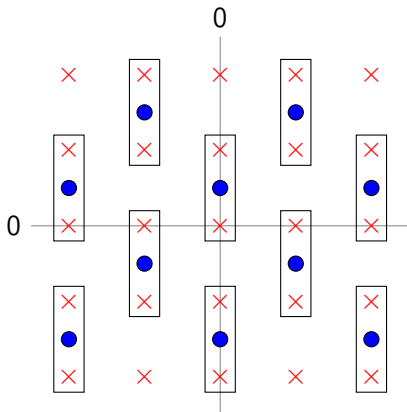


Figure: Arakawa E:  $1^\circ$ , Arakawa C:  $0.5^\circ$ , lineární interpolace.

## Metoda 2: Interpolace

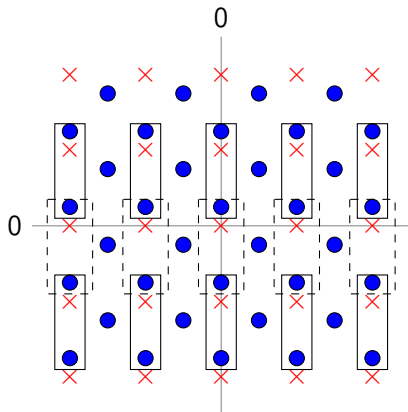


Figure: Arakawa E:  $0.5^\circ$ , Arakawa C:  $0.5^\circ$ , lineární interpolace.

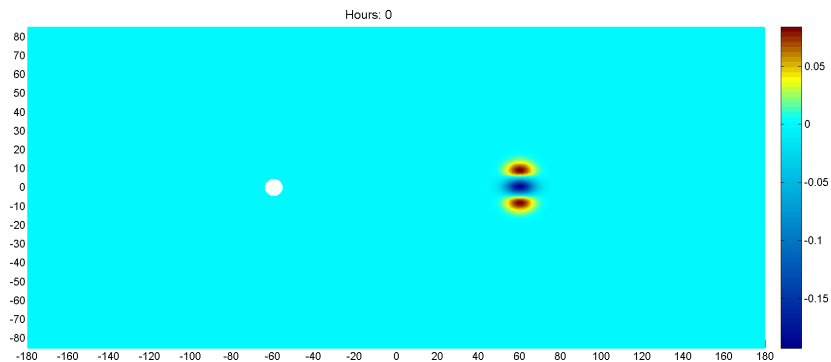


Figure: Arakawa E:  $0.5^\circ$ , Arakawa C:  $0.5^\circ$ , lineární interpolace.



## Metoda 2: Interpolace

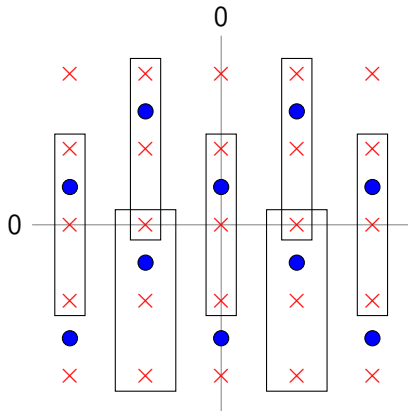


Figure: Arakawa E:  $1^\circ$ , Arakawa C:  $0.5^\circ$ , kvadratická interpolace.

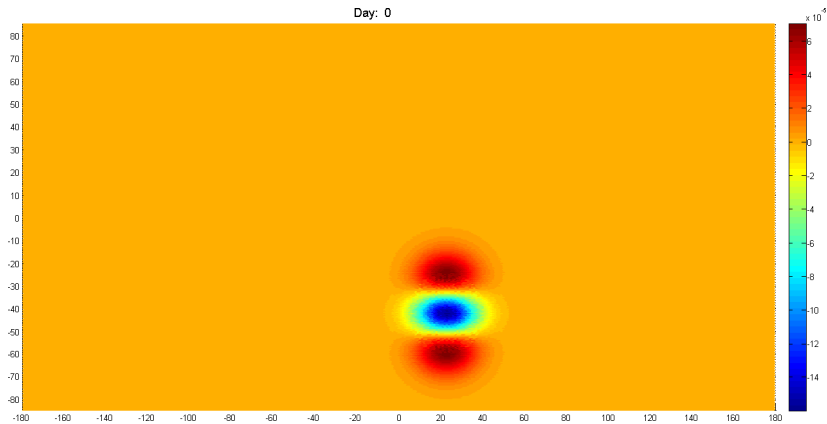


Figure: Arakawa E:  $1^\circ$ , Arakawa C:  $0.5^\circ$ , lineární interpolace.

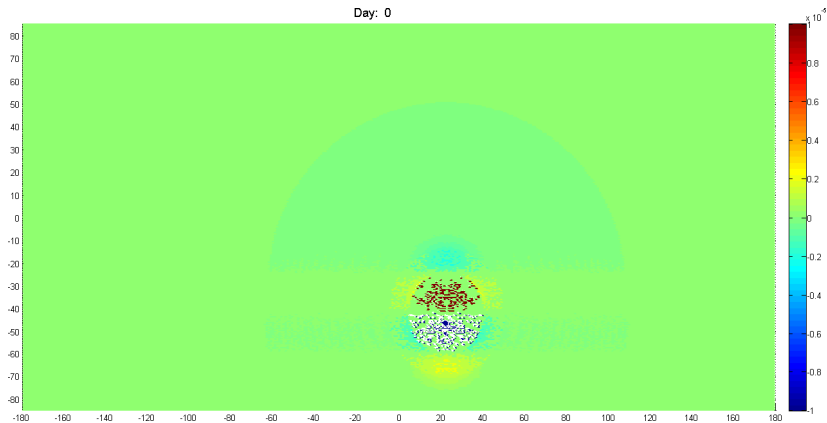


Figure: Arakawa E:  $1^\circ$ , Arakawa C:  $0.5^\circ$ , kvadratická interpolace.

## Metoda 3 (Sférický harmonický rozvoj)

$$f(\lambda, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm} Y_{lm}(\lambda, \varphi),$$

kde

$$Y_{lm}(\lambda, \varphi) = P_{lm}(\sin \varphi) e^{im\lambda}$$

$$A_{lm} = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\lambda, \varphi) P_{lm}(\sin \varphi) e^{-im\lambda} \cos \varphi d\varphi \right) d\lambda$$

## Metoda 3: Programové řešení

- plně normalizované přidružené Legendreovy fce:  $d_{pnm}$ , viz. Martinec (1988)
- integrál aproximován sumou
- vstup: data na Arakwa C nebo E mřížce (více možných formátů)
- výstup: tabulka (testování), soubory s časovým vývojem

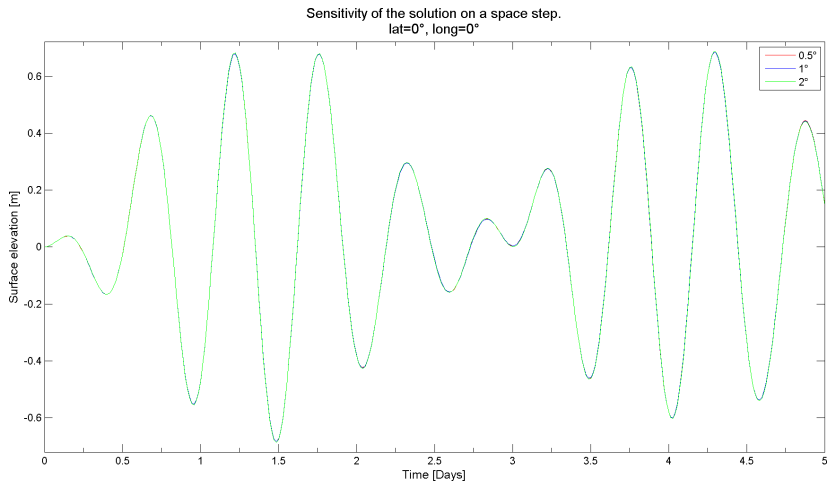
# Aktuální sekce

- 1 Motivace
- 2 LSG model
- 3 DEBOT model
- 4 Popis experimentů a metod
- 5 Benchmarky**
- 6 Shrnutí

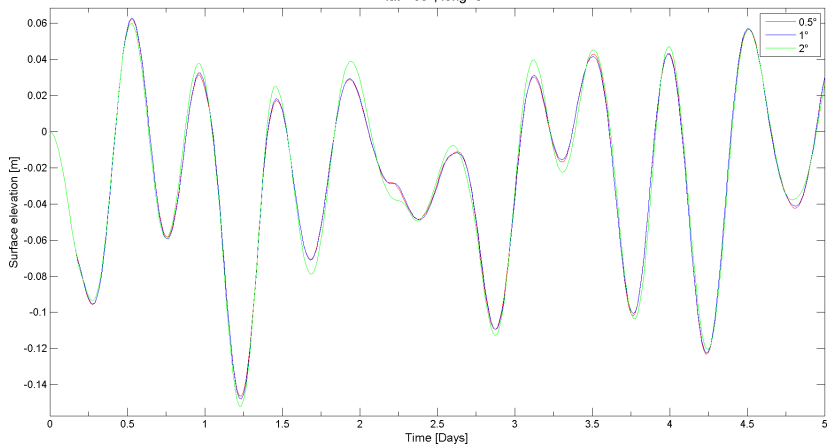
# Benchmark se slapovým buzením

# Volba prostorového kroku, LSG model

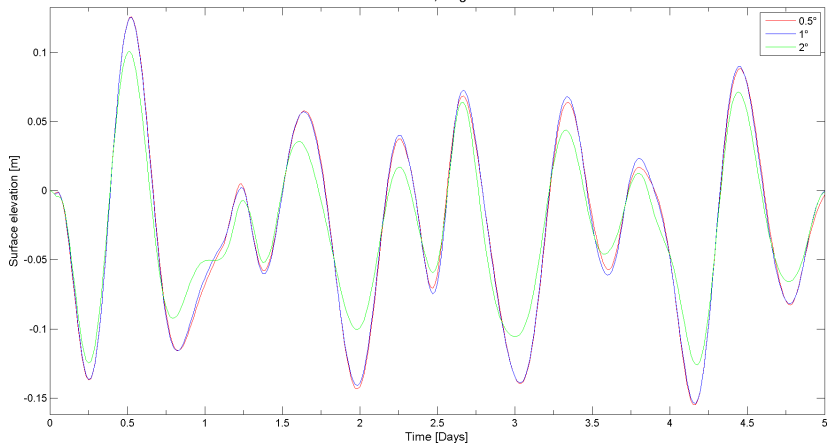




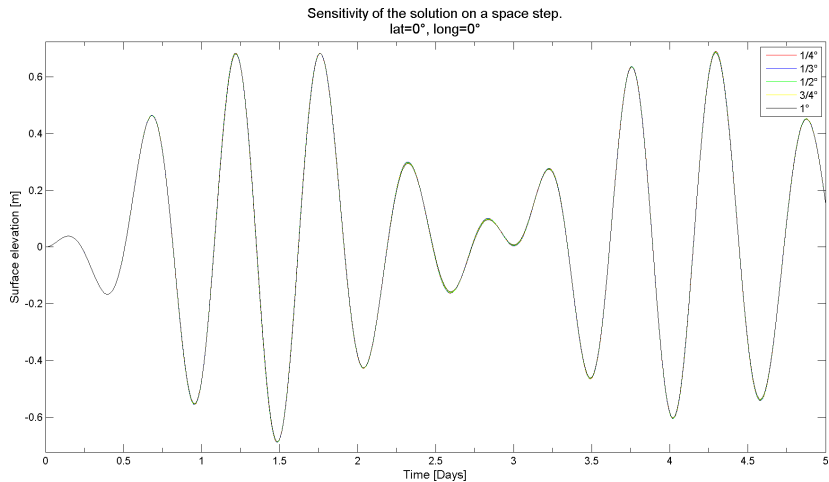
Sensitivity of the solution on a space step.  
lat=-60°, long=0°



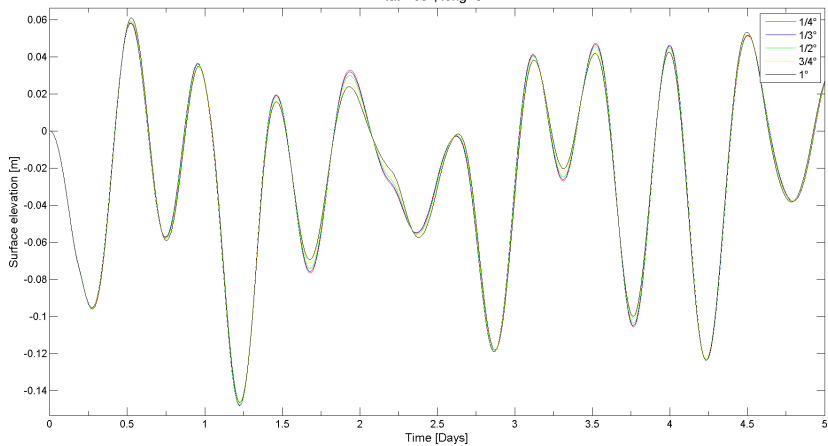
Sensitivity of the solution on a space step.  
lat=-80°, long=0°



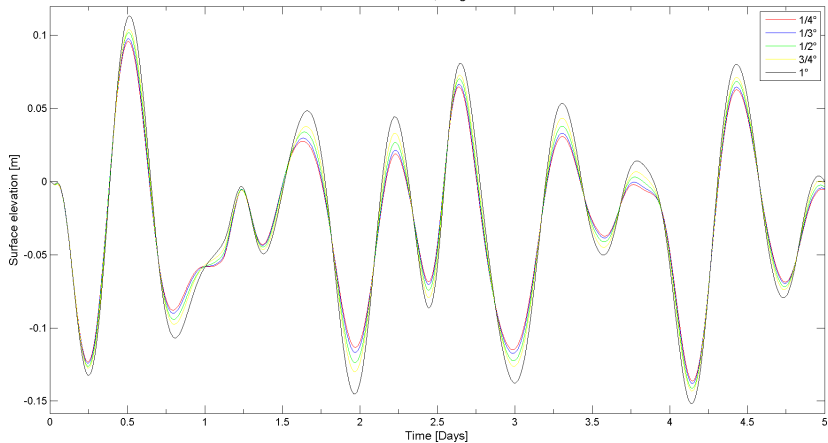
# Volba prostorového kroku, DEBOT model



Sensitivity of the solution on a space step.  
lat=-60°, long=0°



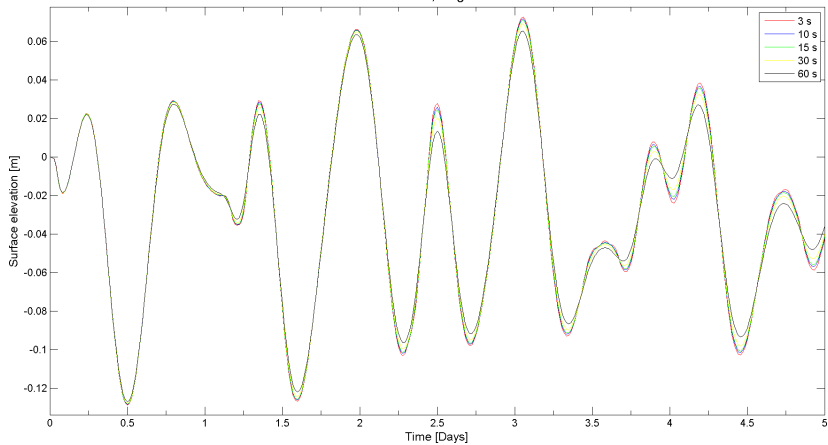
Sensitivity of the solution on a space step.  
lat=-80°, long=0°



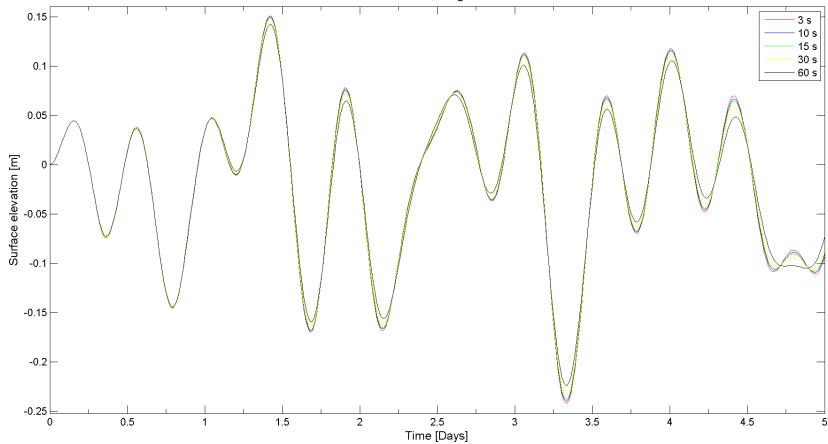
# Volba časového kroku, LSG model



Sensitivity of the solution on a time step.  
lat=80°, long=0°

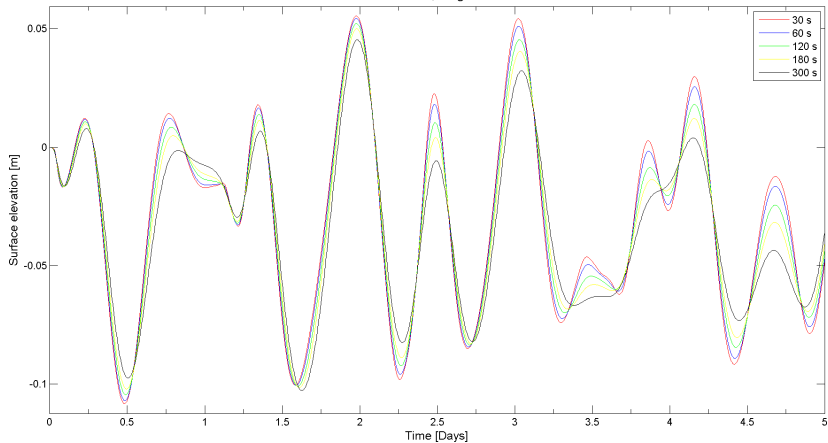


Sensitivity of the solution on a time step.  
lat=40°, long=0°

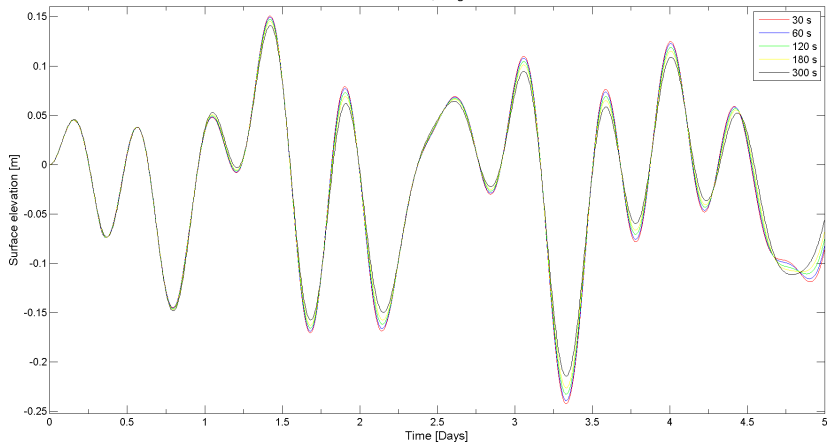


# Volba časového kroku, DEBOT model

Sensitivity of the solution on a time step.  
lat=80°, long=0°

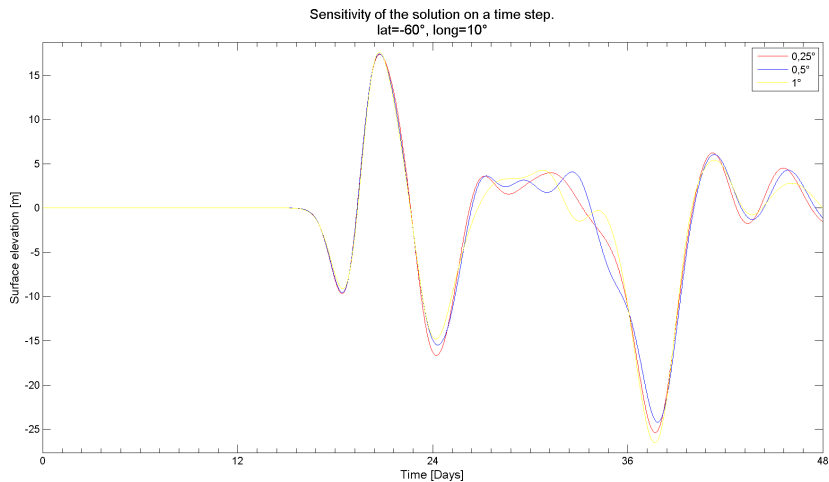


Sensitivity of the solution on a time step.  
lat=40°, long=0°

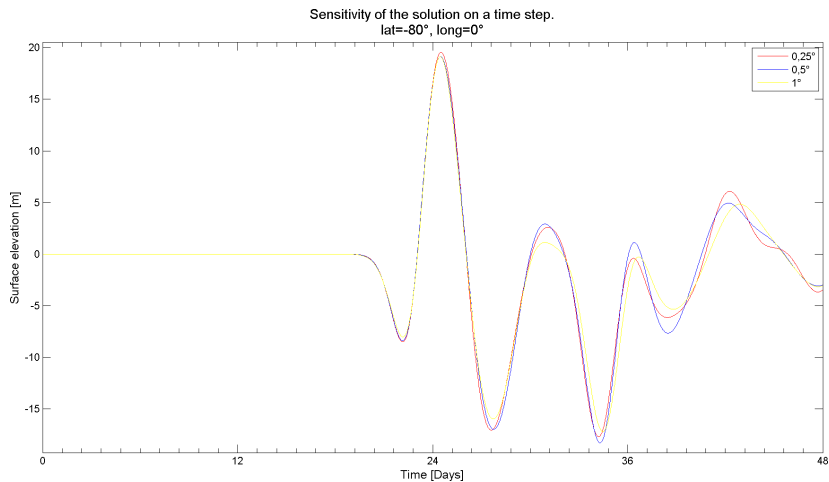


# Benchmark s Gaussovskou elevací

# Volba prostorového kroku, LSG model

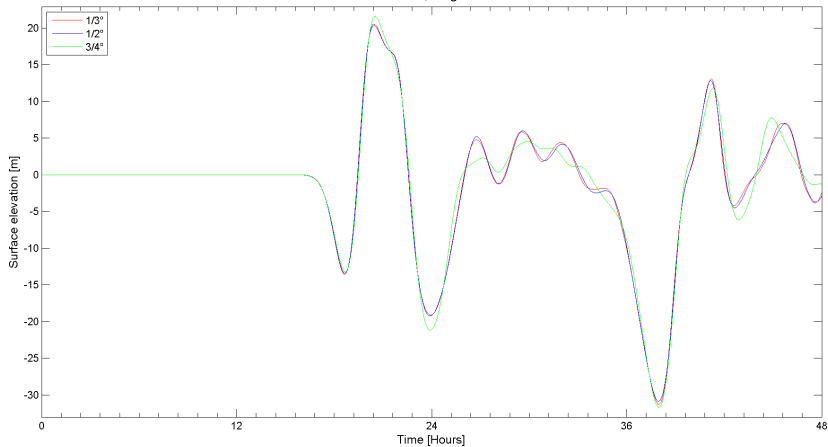




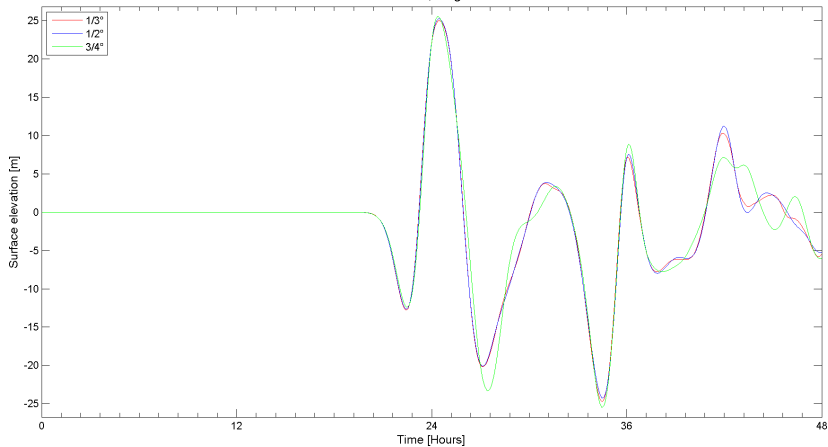


# Volba prostorového kroku, DEBOT model

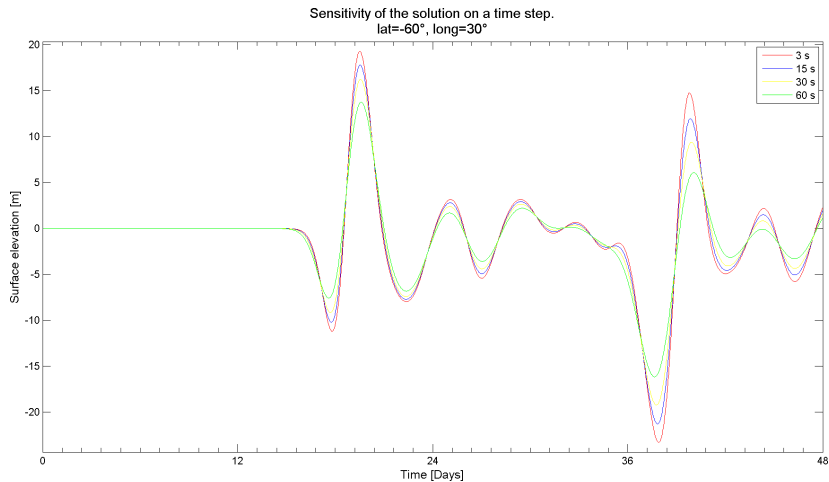
Sensitivity of the solution on a space step.  
lat=-60°, long=10°



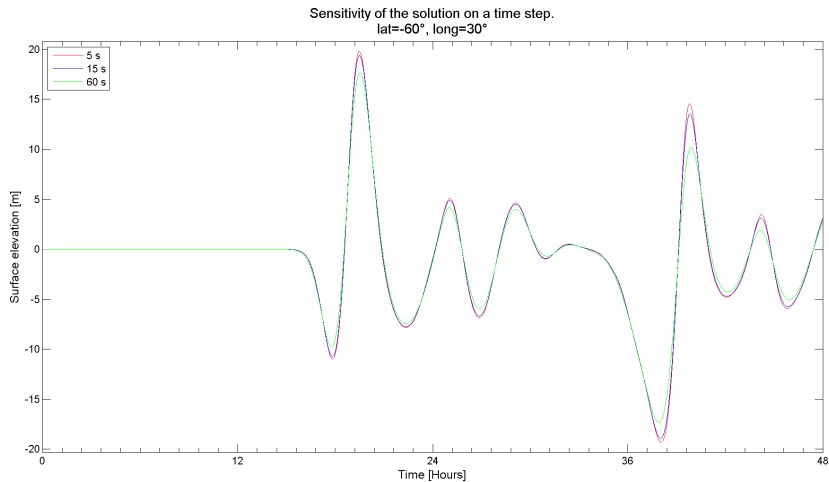
Sensitivity of the solution on a space step.  
lat=-80°, long=0°



# Volba časového kroku, LSG model



# Volba časového kroku, DEBOT model





## Finální volba diskretizace

- Benchmark se slapovým buzením

LSG	1°	60 s
DEBOT	0.5°	60 s

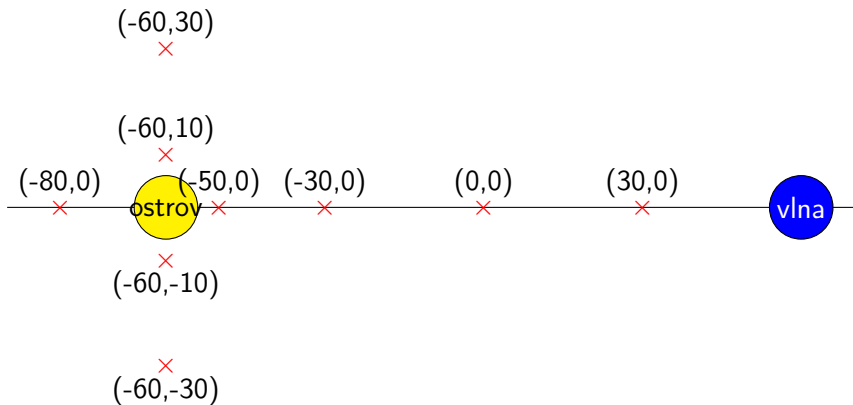
- Benchmark s Gaussovskou elevací

LSG	0.5°	15 s
DEBOT	0.5°	15 s

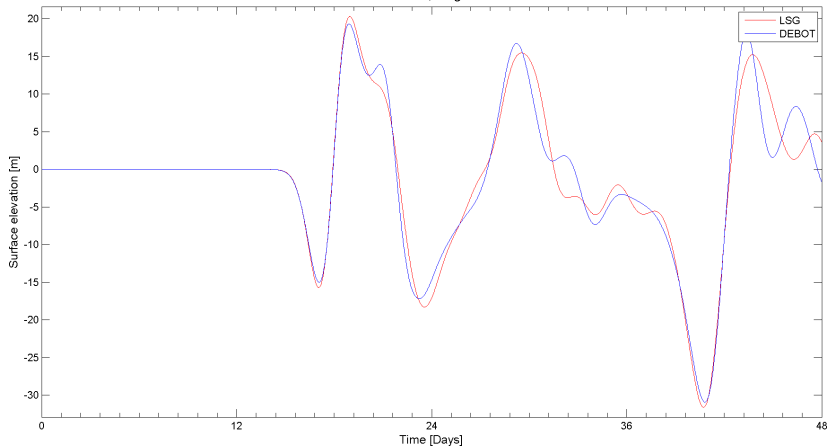
# Benchmark s Gaussovskou elevací

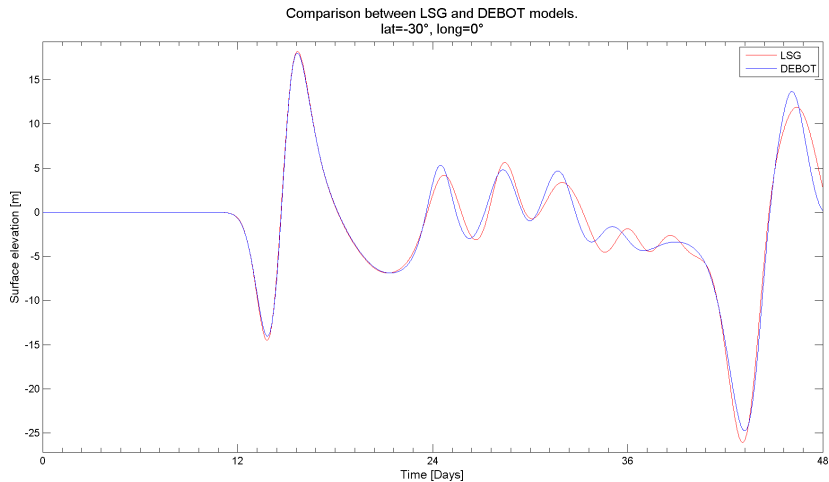
Časový vývoj ve zvolených  
bodech.

## Poloha kontrolních bodů

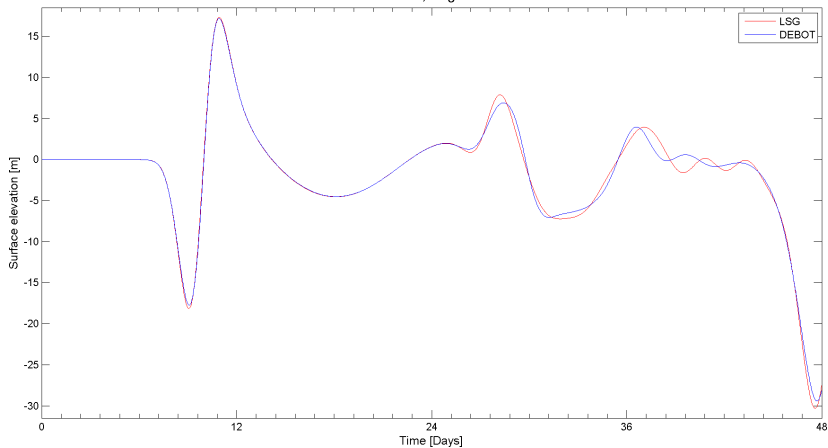


Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=-50°, long=0°

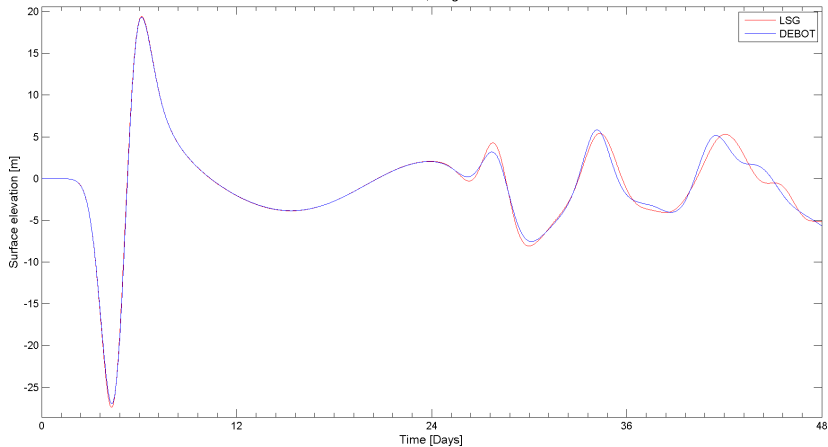




Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=0°, long=0°

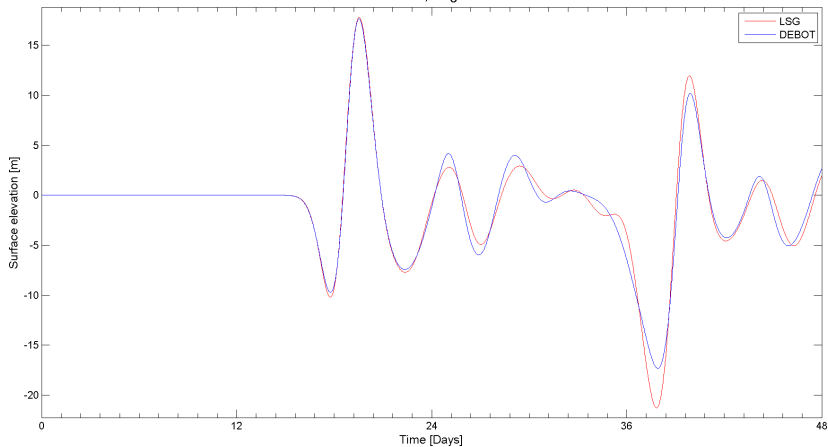


Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=30°, long=0°

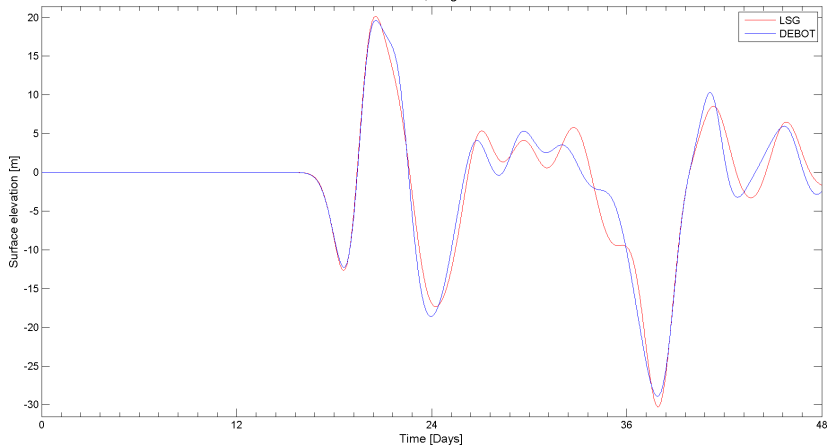




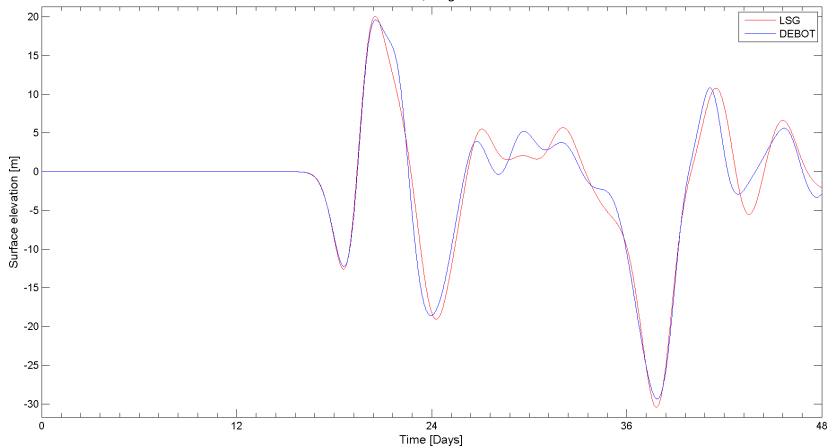
Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=-60°, long=30°

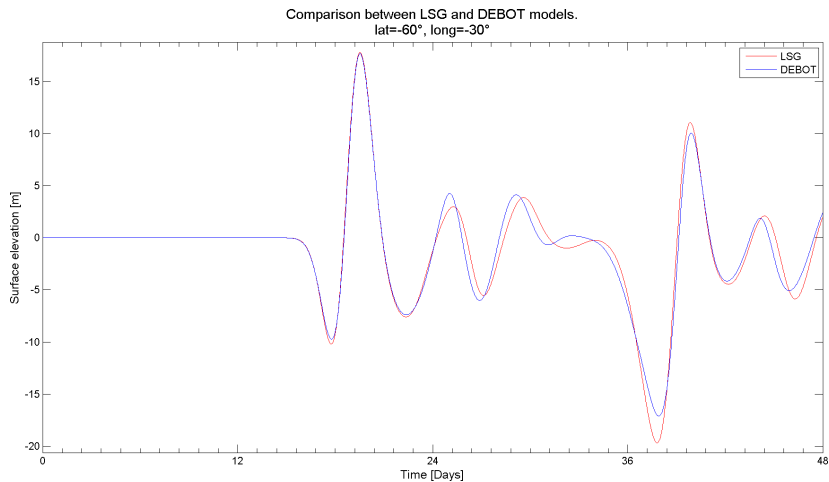


Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=-60°, long=10°

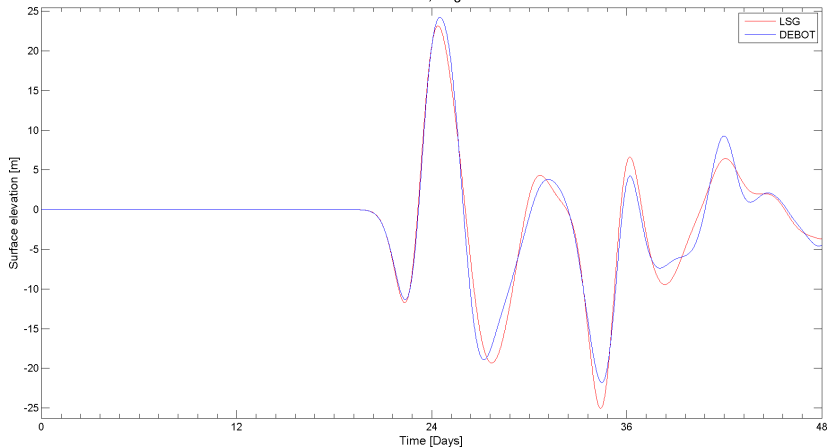


Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=-60°, long=-10°





Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=-80°, long=0°



Prostorové rozložení.

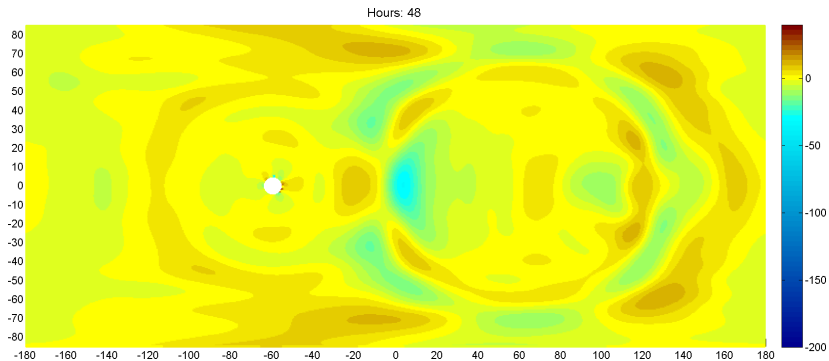


Figure: Výsledek LSG modelu.

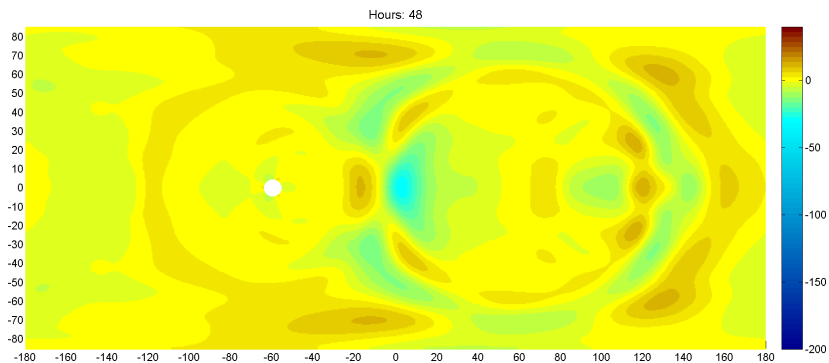


Figure: Výsledek DEBOT modelu.



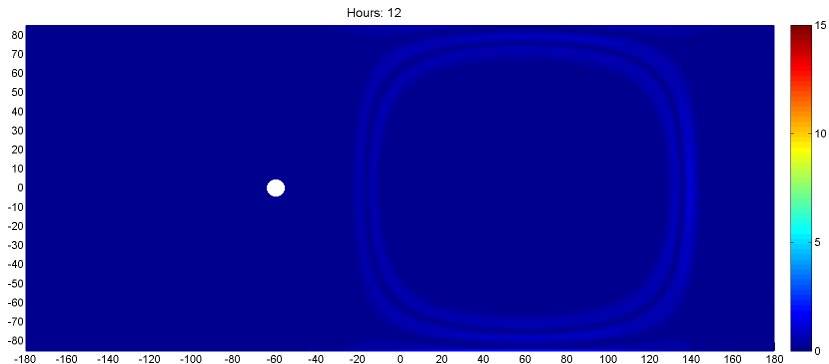


Figure: Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě.

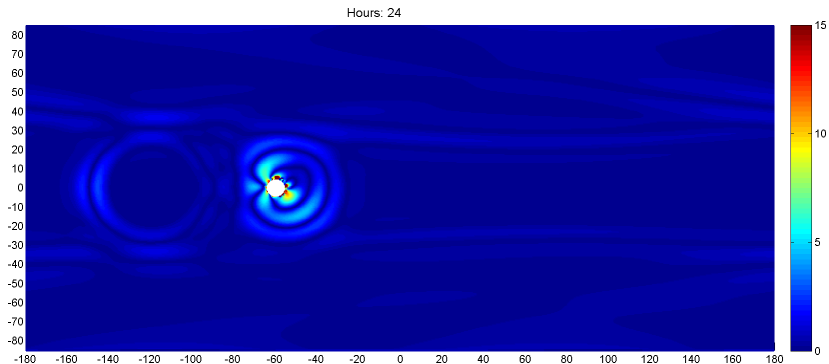


Figure: Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě.

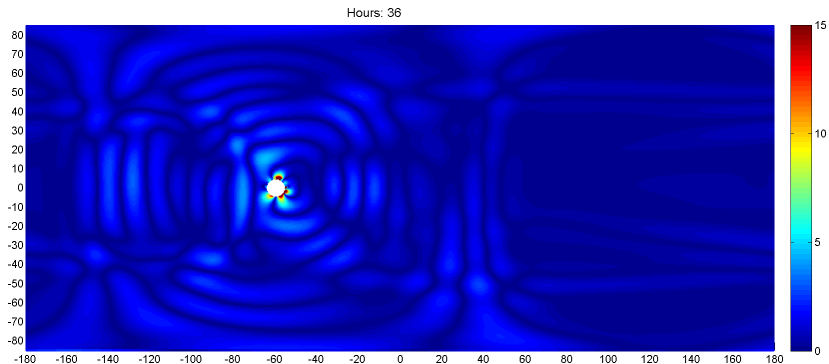


Figure: Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě.

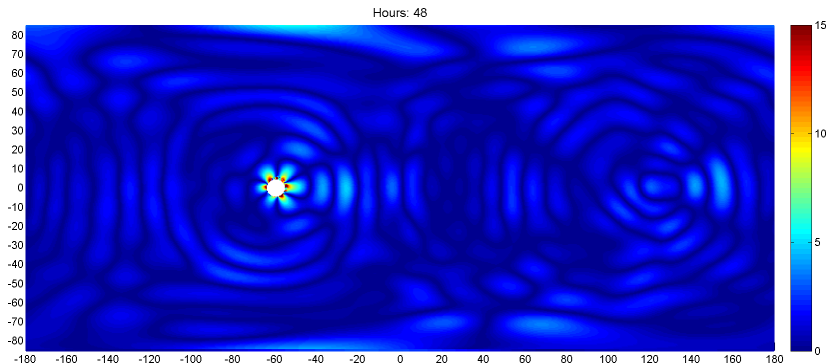
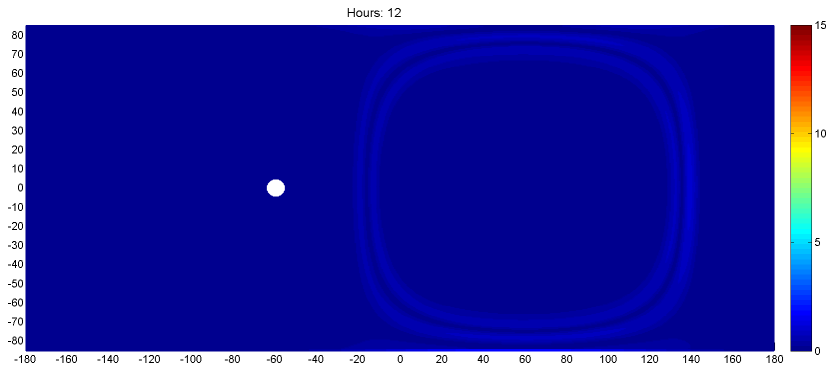
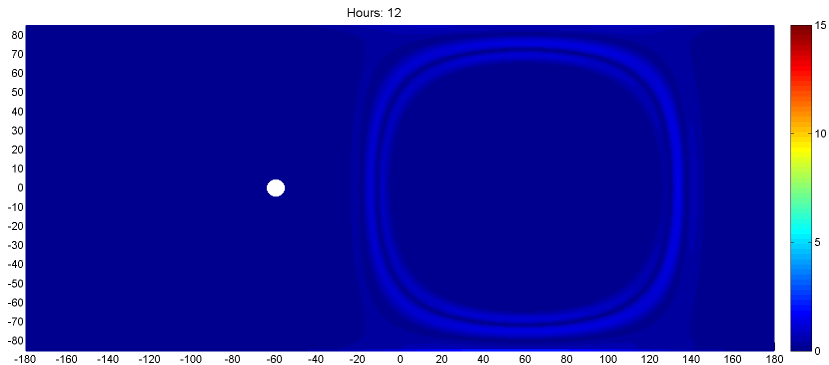


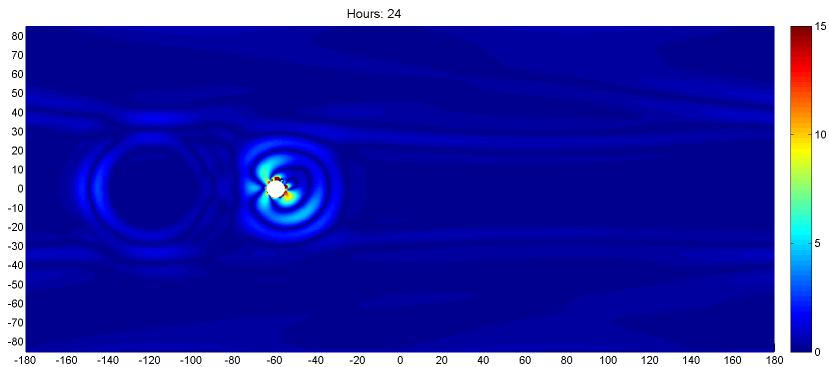
Figure: Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě.



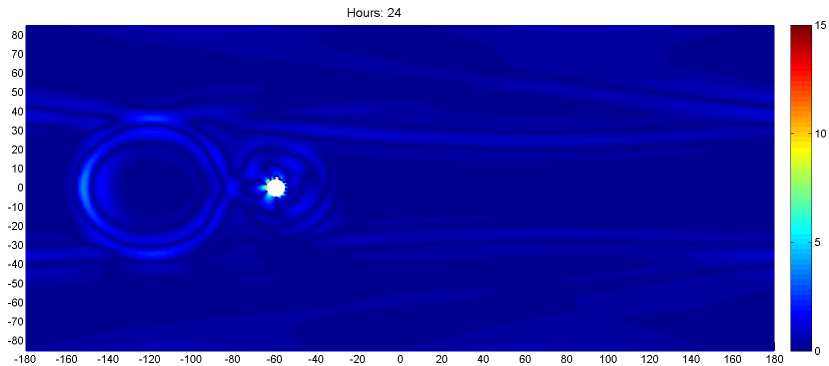
**Figure:** Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě. Výška vodního sloupce bez elevace hladiny.



**Figure:** Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě. Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny.

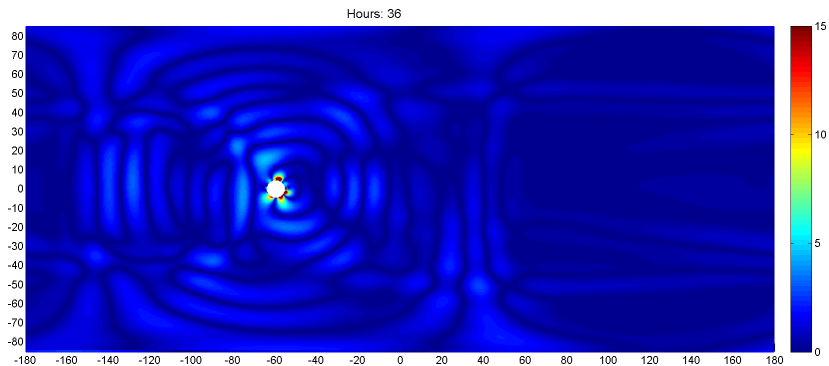


**Figure:** Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě. Výška vodního sloupce bez elevace hladiny.

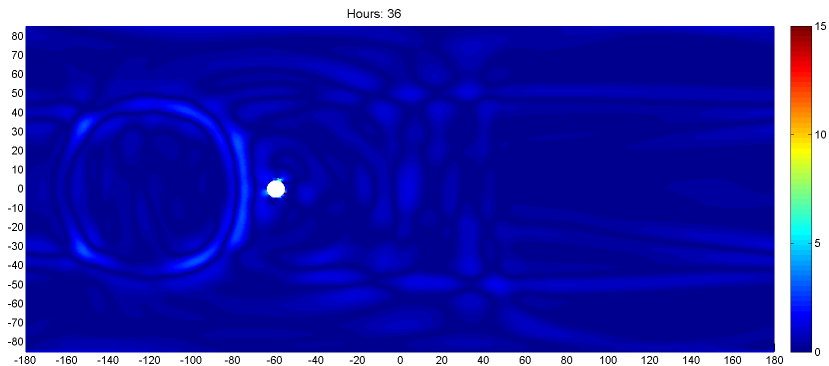


**Figure:** Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě. Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny

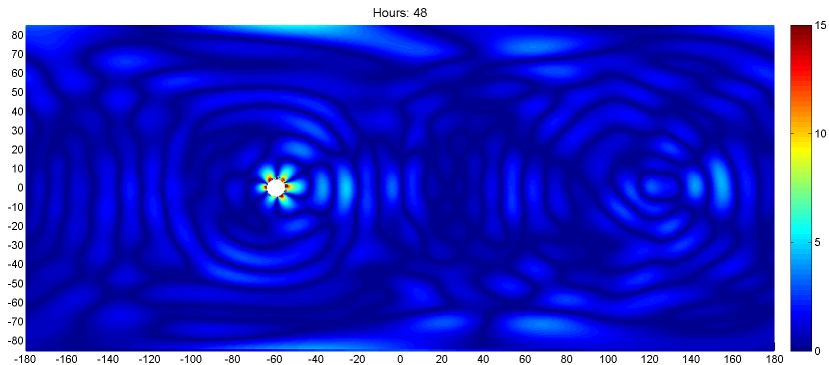




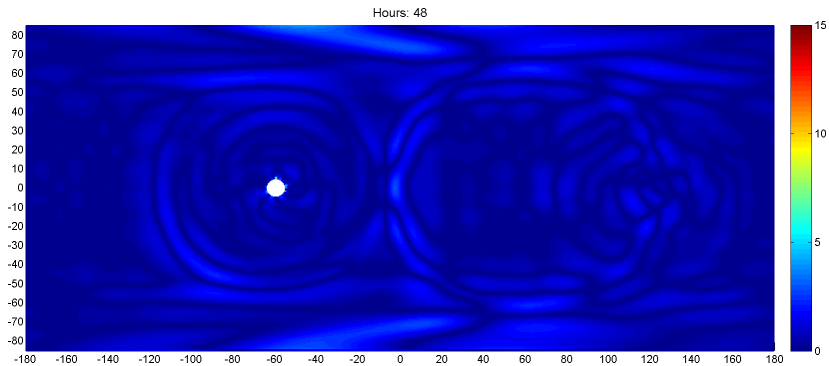
**Figure:** Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě. Výška vodního sloupce bez elevace hladiny.



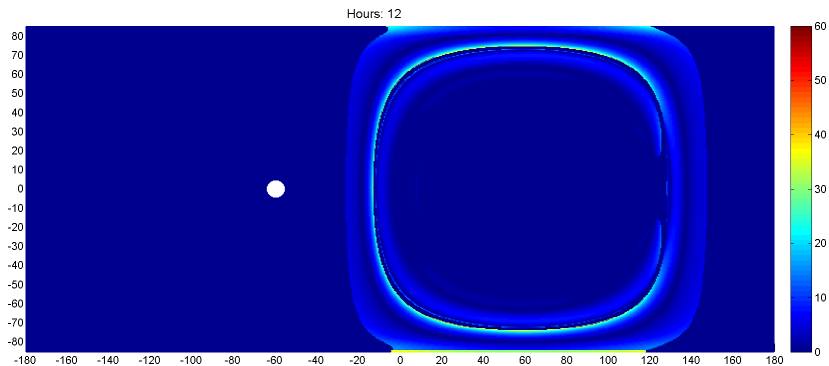
**Figure:** Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě. Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



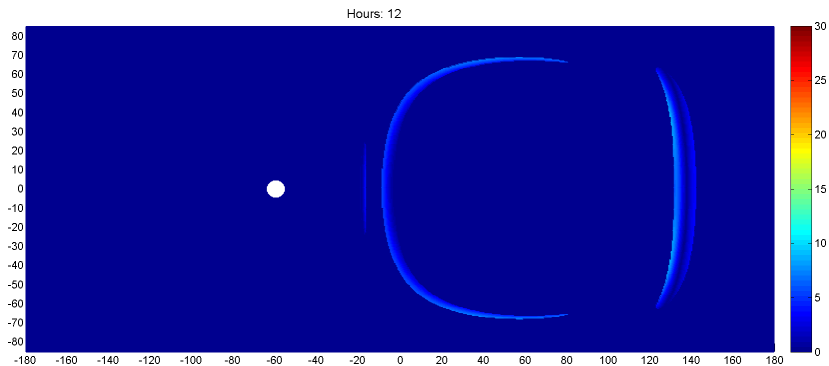
**Figure:** Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě. Výška vodního sloupce bez elevace hladiny.



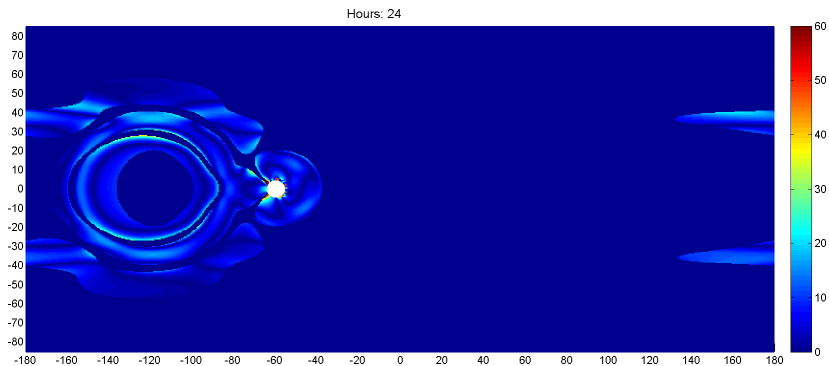
**Figure:** Rozdíl mezi výsledky obou modelů v absolutní hodnotě. Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 10%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 10%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny

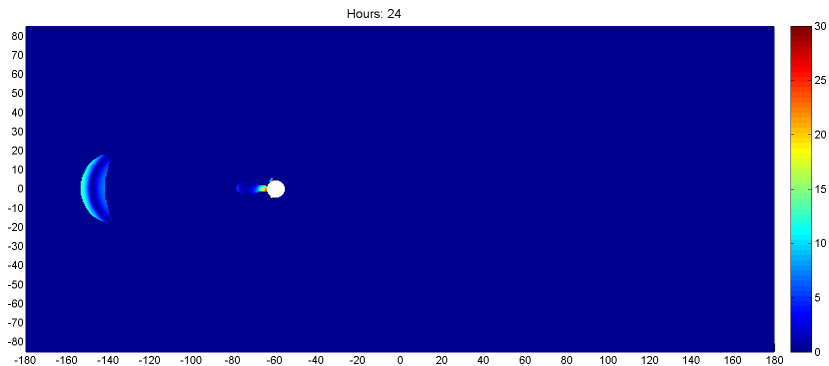


Figure: Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



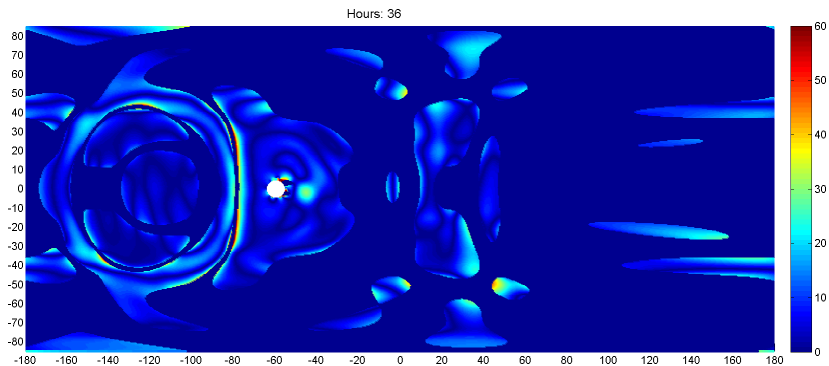
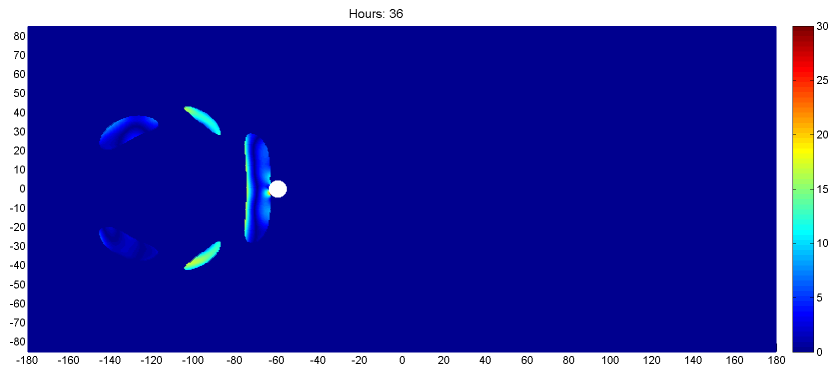
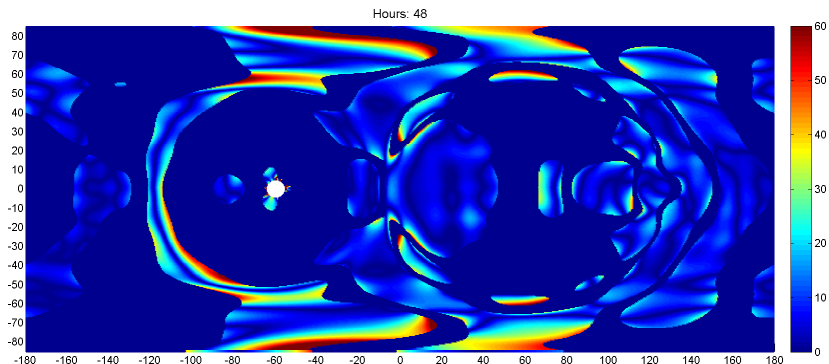


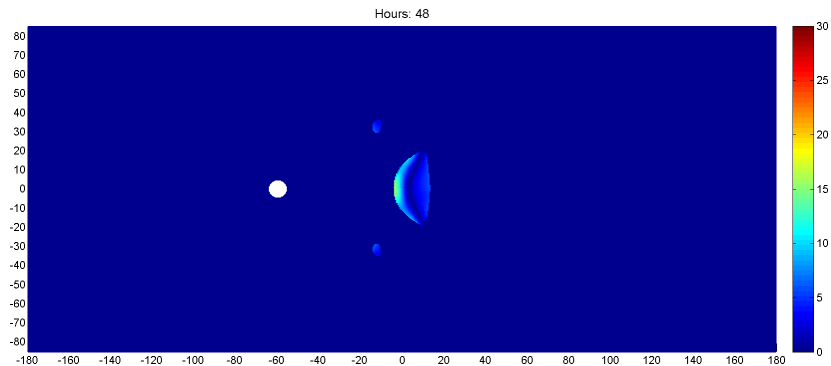
Figure: Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 10%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 10%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny

Invarianty.

## Metoda 4: Invarianty

Bez působení vnějších sil,

$$\mathbf{F} = 0,$$

Povrchové integrály z

- elevace hladiny  $\Rightarrow$  zachování celkového objemu

$$\frac{d}{dt} \int_S \zeta = 0,$$

- hustoty energie (děleno  $\rho_0$ )

$$\frac{d}{dt} \int_S \frac{1}{2} (hu^2 + g\zeta^2) = 0,$$

- výška vodního sloupce krát potenciální vorticita na n-tou

$$\frac{d}{dt} \int_S (hq^n) = 0,$$

## Metoda 4: Invarianty

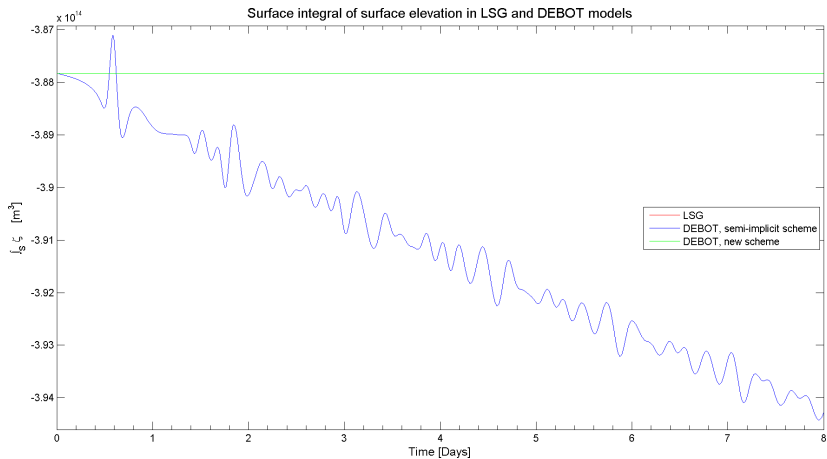
kde

$$q = \frac{f + \xi}{h}$$

$$\xi = (\nabla \times \mathbf{u})_r$$

Speciálně,  $n=1 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \int_S (f + \xi) = 0$$



**Figure:** Srovnání časového vývoje celkového objemu v modelech LSG a DEBOT.



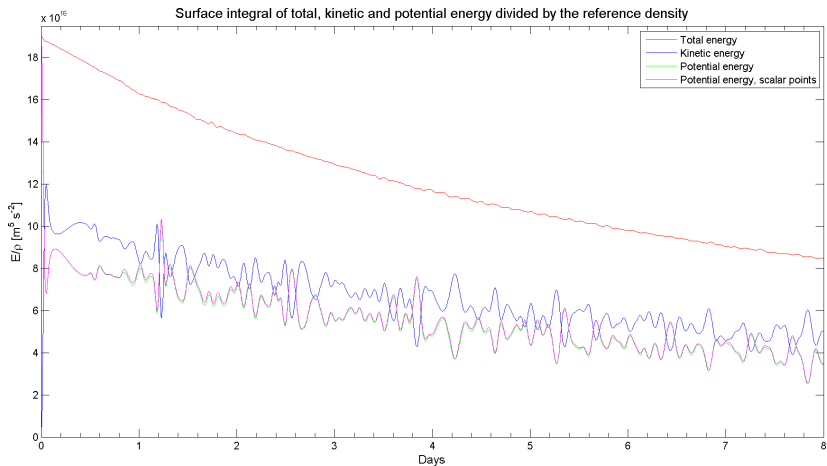


Figure: Časový vývoj energie v LSG modelu.

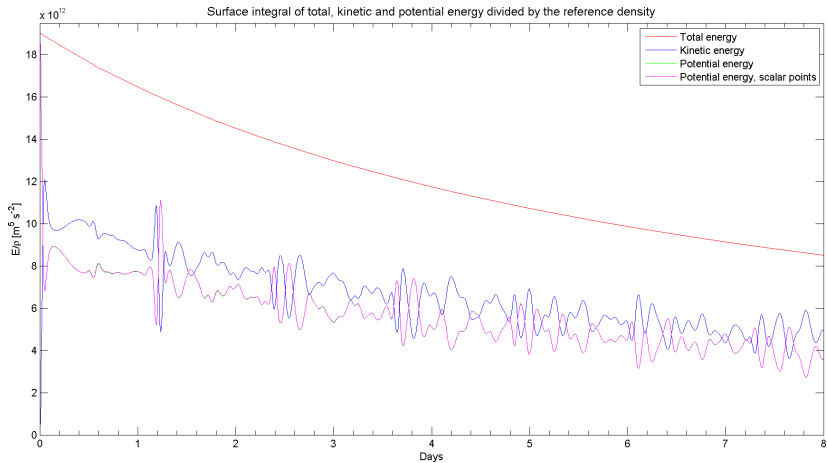


Figure: Časový vývoj energie v LSG modelu. Bathymetrie=3790 m, elevace=-2m.

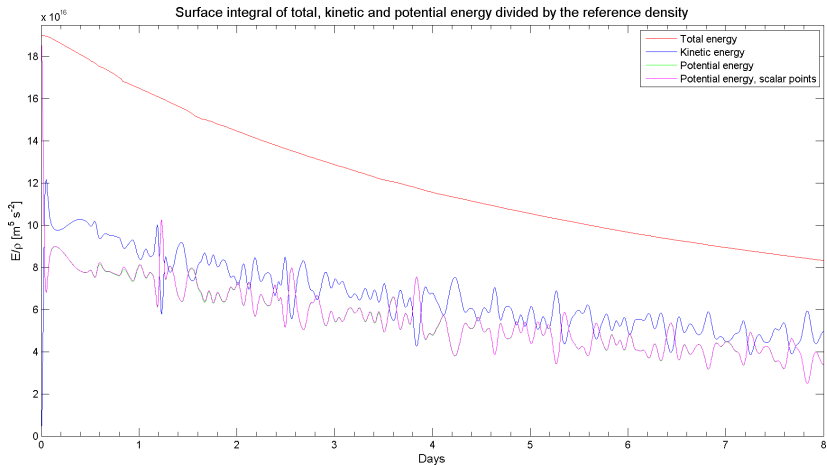


Figure: Časový vývoj energie v LSG modelu. Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny

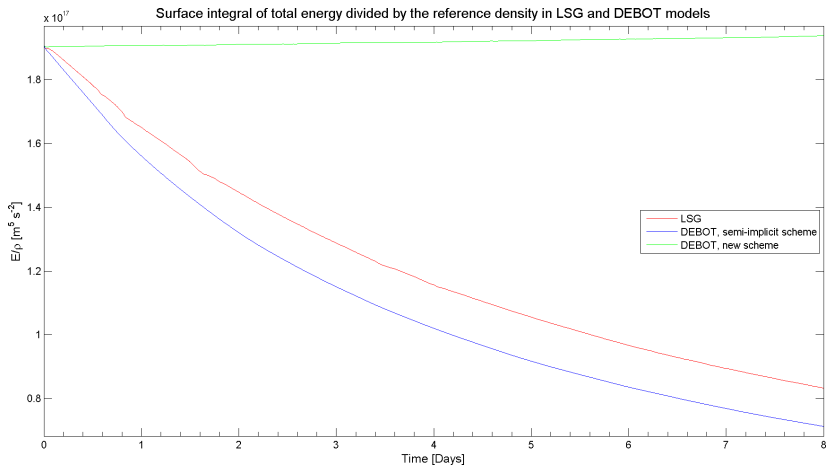


Figure: Srovnání časového vývoje energie v modelech LSG a DEBOT.

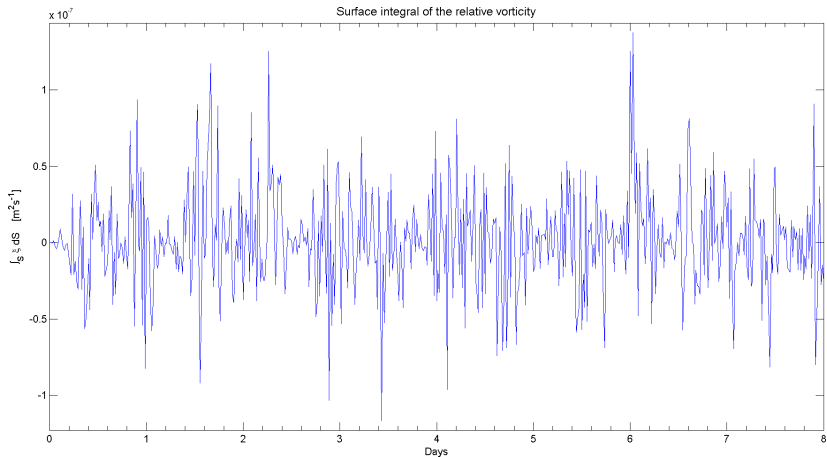
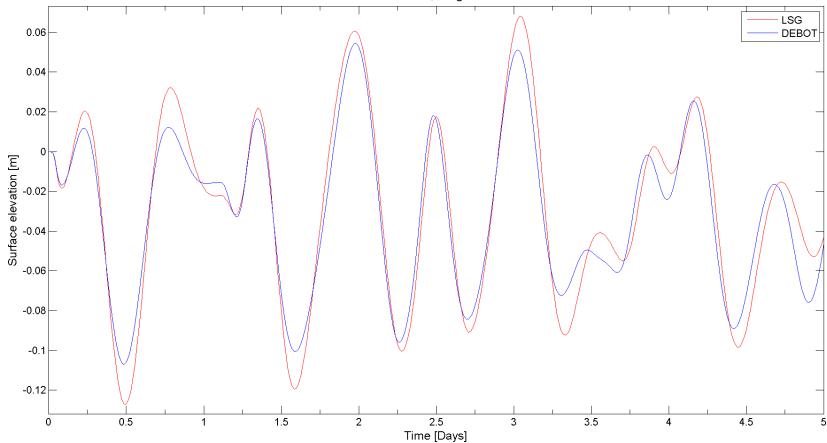


Figure: Časový vývoj integrálu z relativní vorticity v modelu LSG.

# Benchmark se slapovým buzením

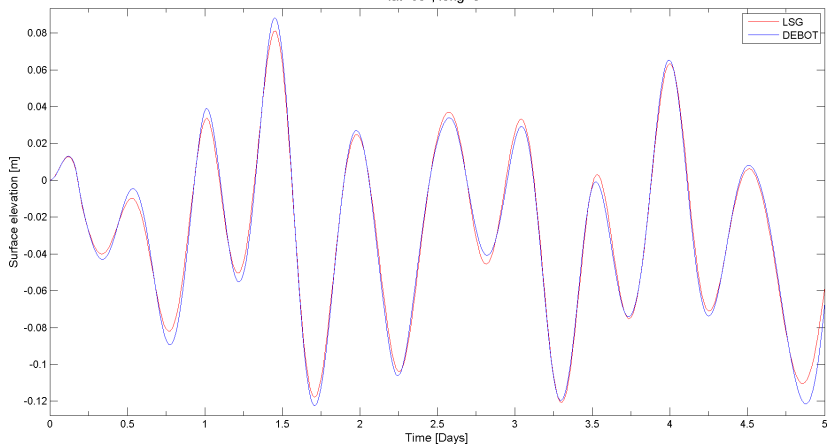
Časový vývoj ve zvolených  
bodech.

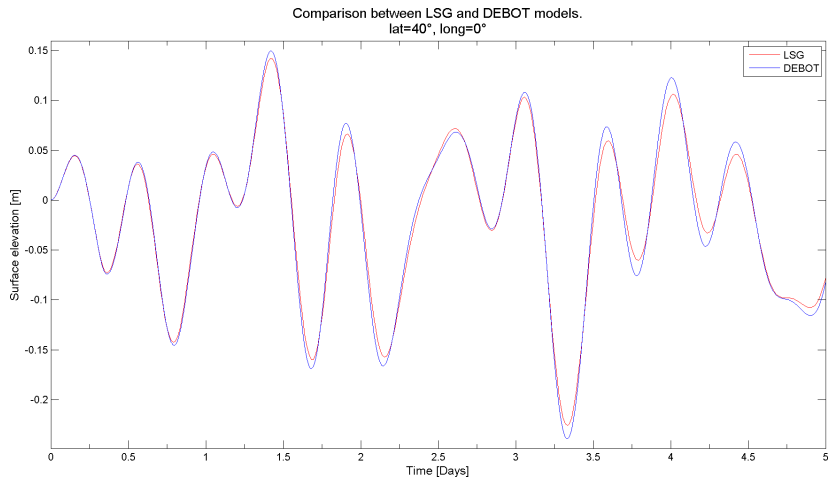
Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=80°, long=0°



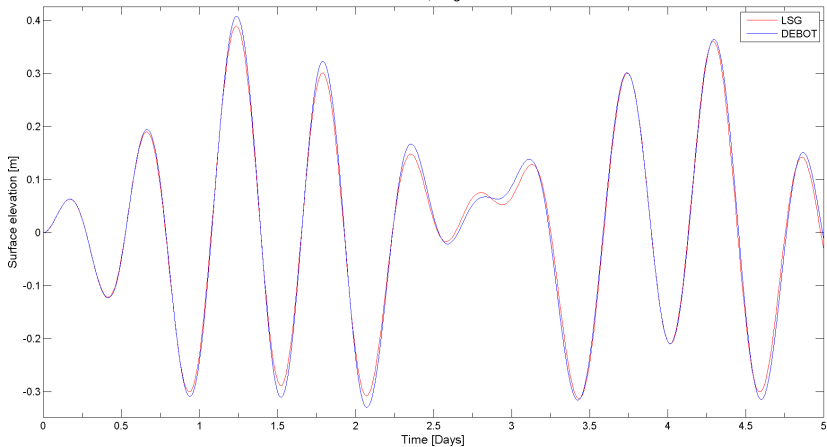


Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=60°, long=0°

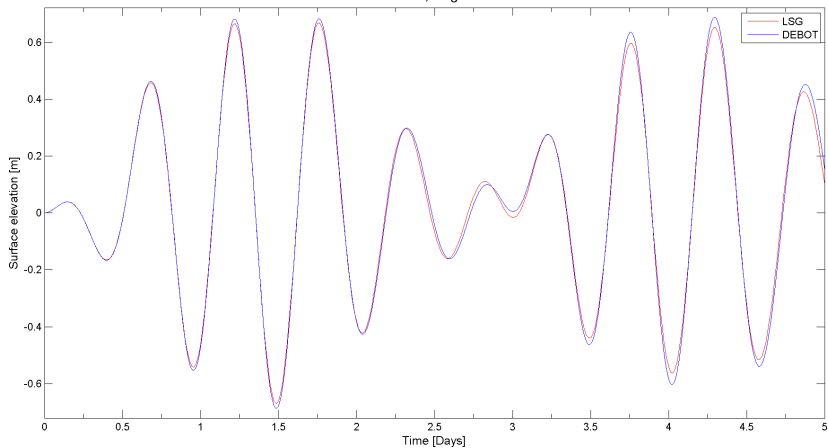


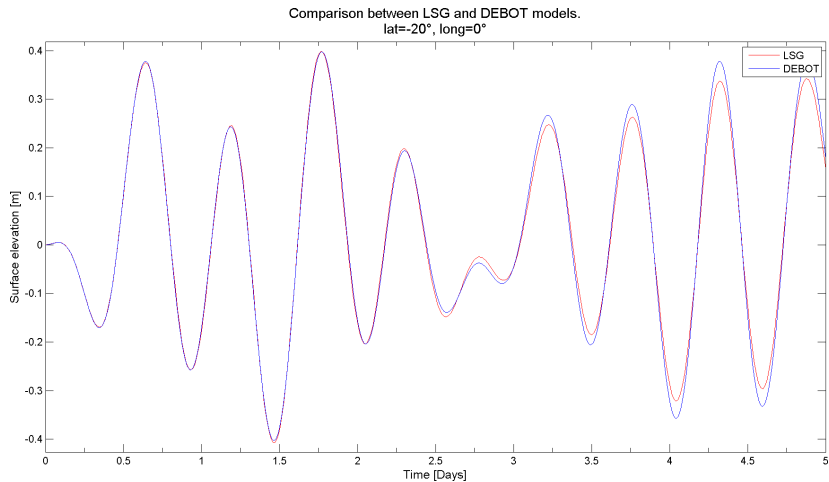


Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=20°, long=0°

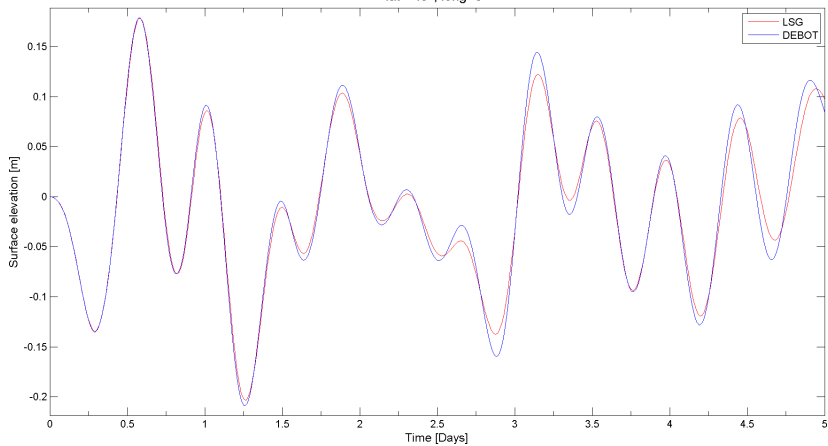


Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=0°, long=0°

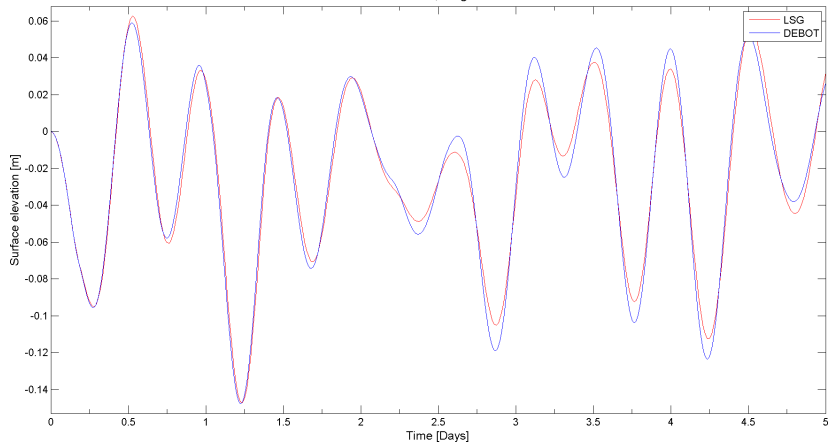




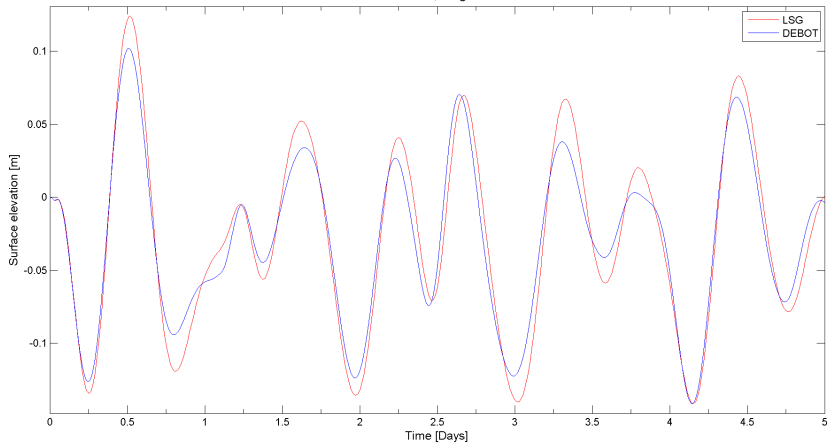
Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=-40°, long=0°



Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=-60°, long=0°



Comparison between LSG and DEBOT models.  
lat=-80°, long=0°





Prostorové rozložení.

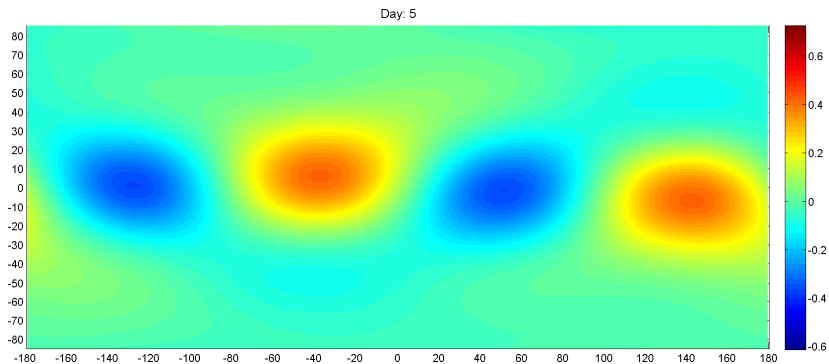


Figure: Výsledek LSG modelu

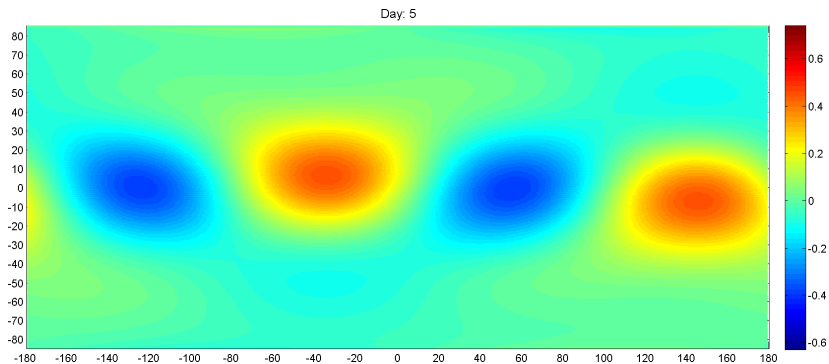
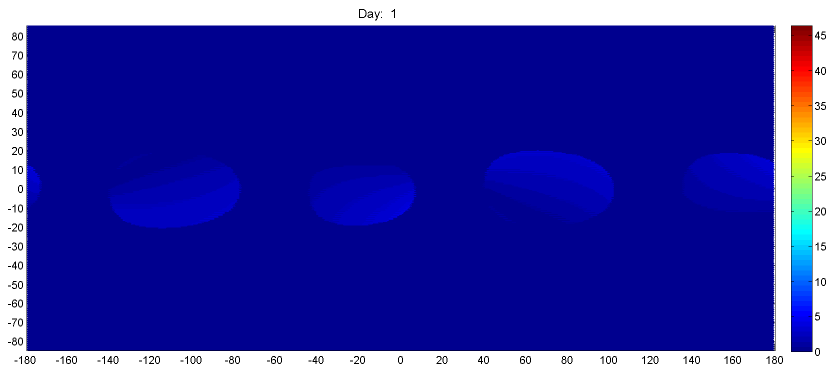
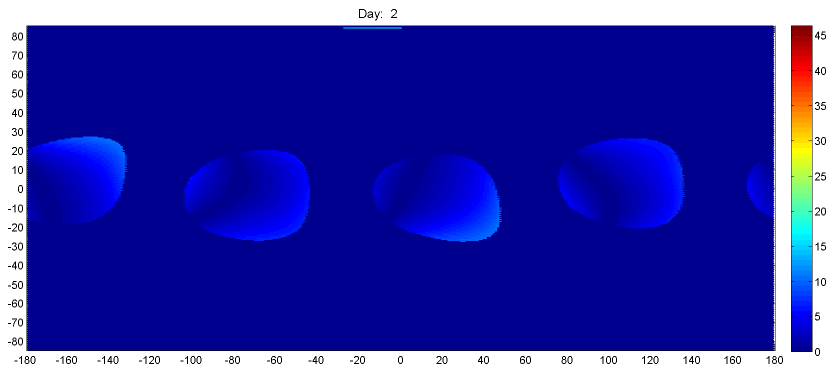


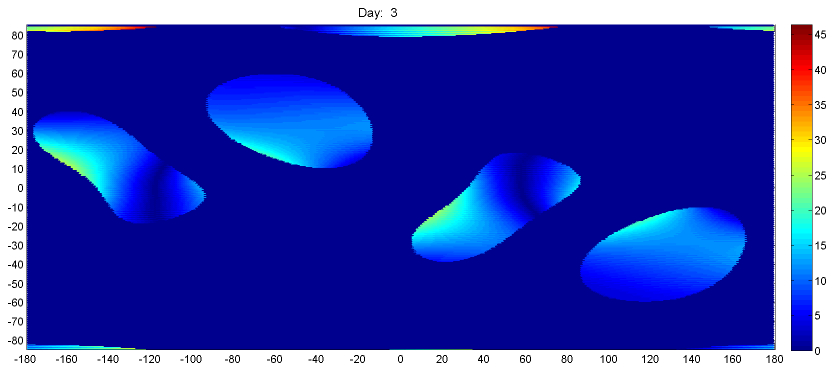
Figure: Výsledek DEBOT modelu



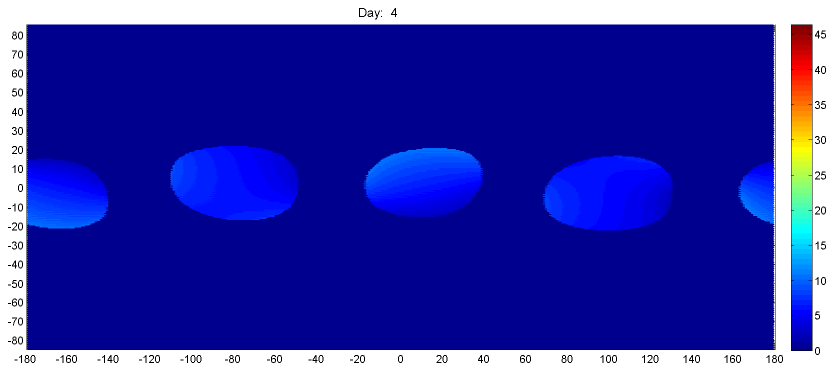
**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



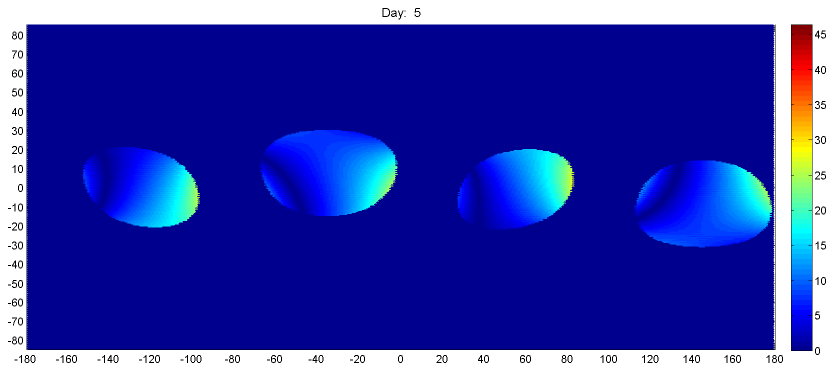
**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



**Figure:** Relativní rozdíl mezi výsledky obou modelů. Threshold 50%.  
Výška vodního sloupce včetně elevace hladiny



Koeficienty sférického  
harmonického rozvoje.

## Hlavní charakteristika

- dominují “správné” stupně a řády
- dobrá shoda pro nejsilnější koeficienty
- slabé koeficienty?

## Koeficienty s nejvyšší amplitudou

- řádu  $10^{-1}$

l	2	2	2	4
m	0	1	2	2

- řádu  $10^{-2}$

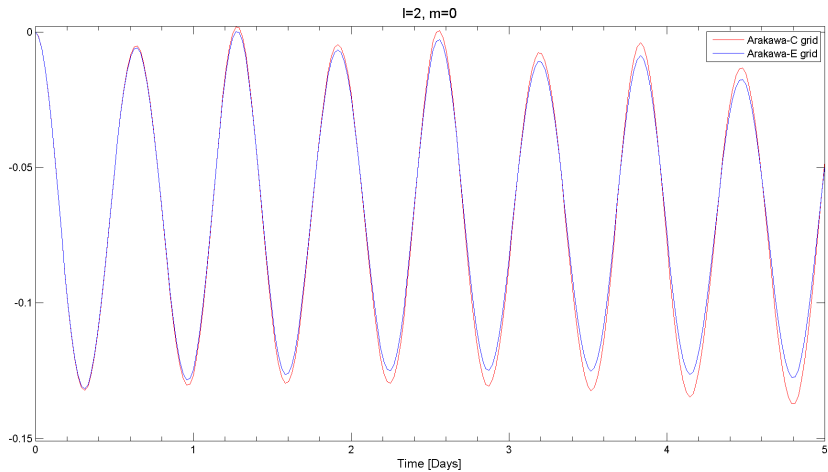
l	4	4	6	6	6	8	10
m	0	1	0	1	2	1	1

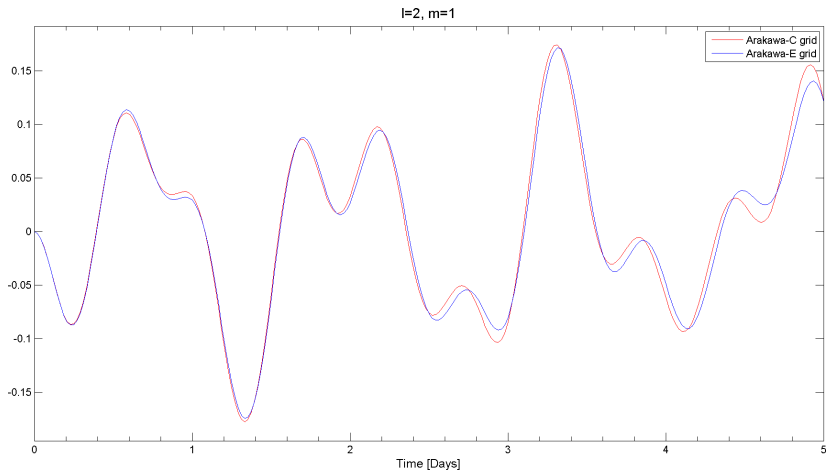
- řádu  $10^{-3}$

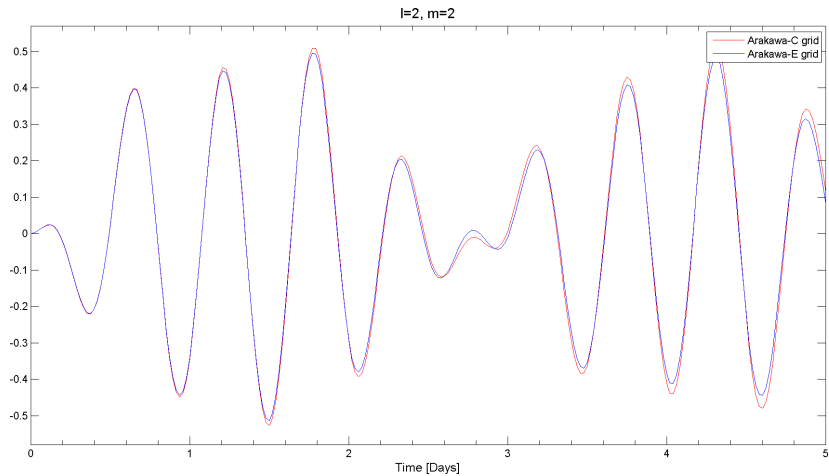
l	1	3	5	7	8	8	9	10
m	1	1	1	1	0	2	1	0

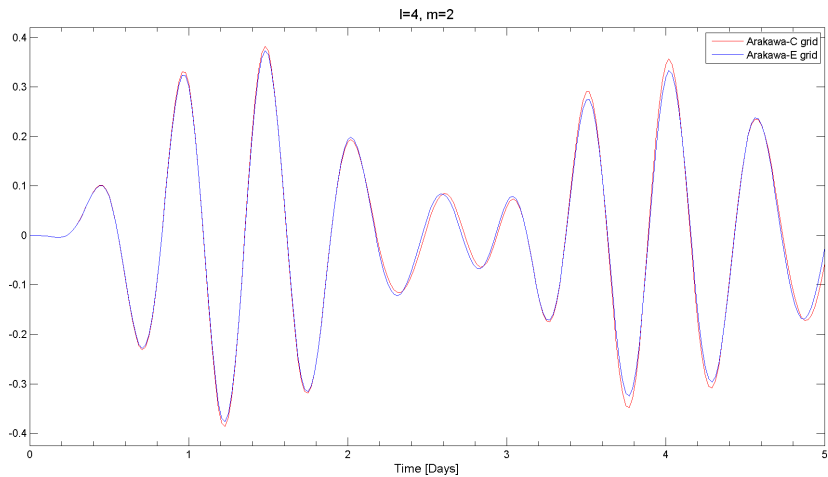
# Simple benchmarks for ocean models, a comparison study

## Benchmarky



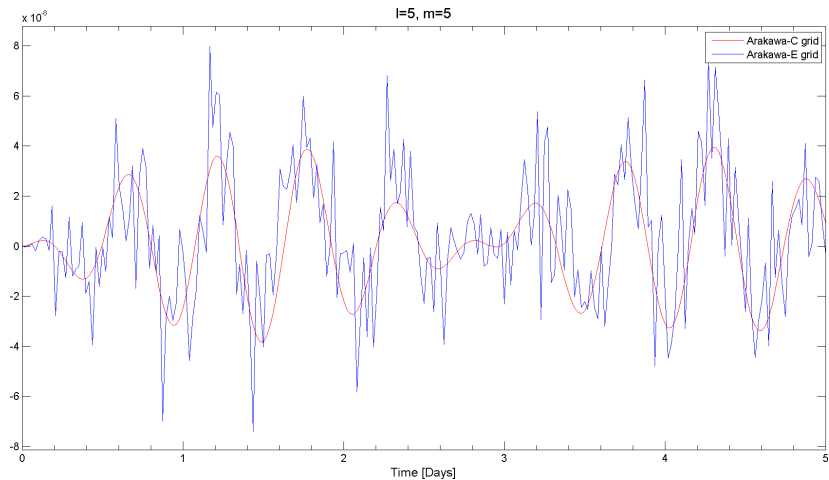






# Simple benchmarks for ocean models, a comparison study

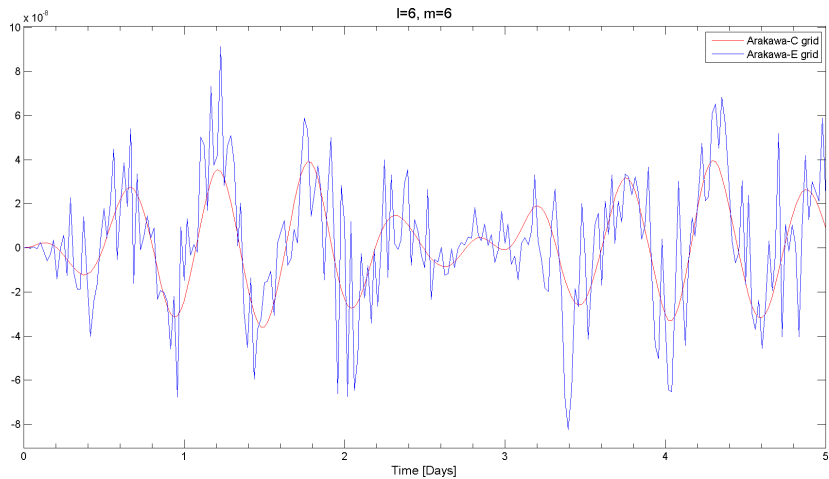
## Benchmarky





# Simple benchmarks for ocean models, a comparison study

## Benchmarky



Invarianty.

## Metoda 4: Invarianty

Nenulové vnější síly,

$$\mathbf{F} \neq 0,$$

⇒ modifikace.

Energie:

$$\frac{dE}{dt} = \int_S h\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$$

$$E(t) - E(0) - \int_0^t \int_S h\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0$$

Vorticita:

$$\left( \int_S hq^n \right) (t) - \left( \int_S hq^n \right) (0) - \int_0^t \int_S nq^{n-1} (\nabla \times \mathbf{F})_r = 0. \quad (1)$$

## Metoda 4 (Invarianty): Slapový experiment

Energie:

$$E(t) - \int_0^t \int_S h \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = 0$$

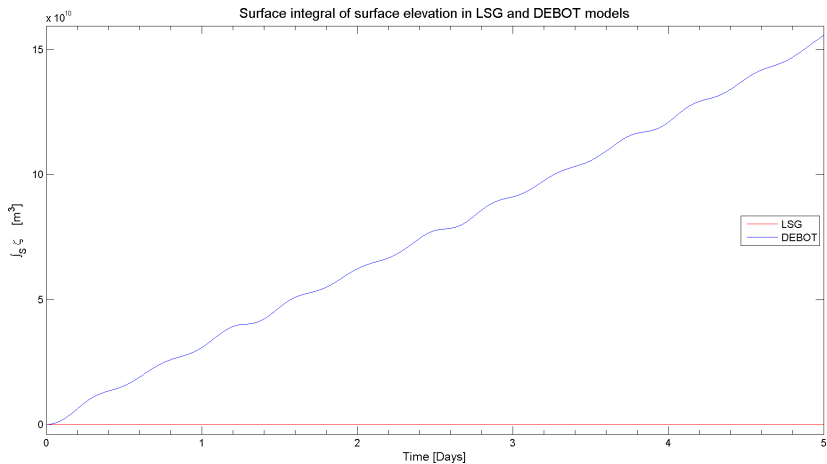
Vorticita:

$$\xi(0) = (\nabla \times \mathbf{u})_r = 0,$$

$$\left( \int_S \frac{(f + \xi)^n}{h^{n-1}} \right) (t) - \left( \int_S \frac{f^n}{h^{n-1}} \right) (0) - \int_0^t \int_S n q^{n-1} (\nabla \times \mathbf{F})_r = 0.$$

Pro  $n = 1$  dostaneme finální bilanci:

$$\int_S \xi - \int_0^t \int_S (\nabla \times \mathbf{F})_r = 0.$$



**Figure:** Srovnání časového vývoje celkového objemu v modelech LSG a DEBOT.

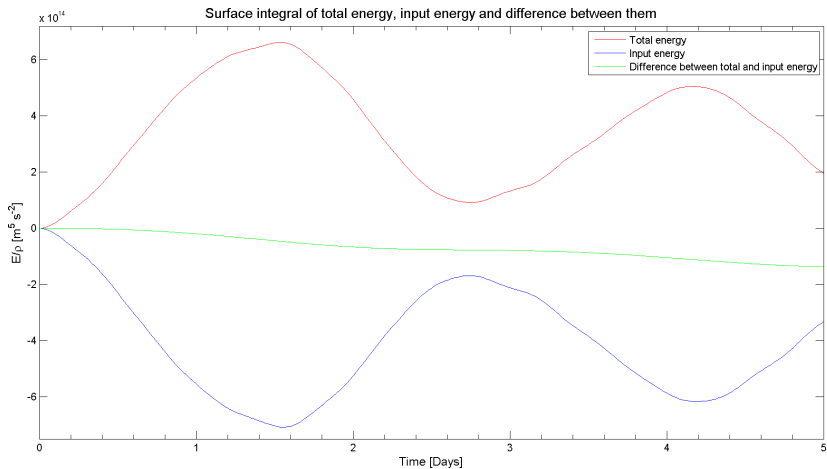


Figure: Časový vývoj energie v LSG modelu.

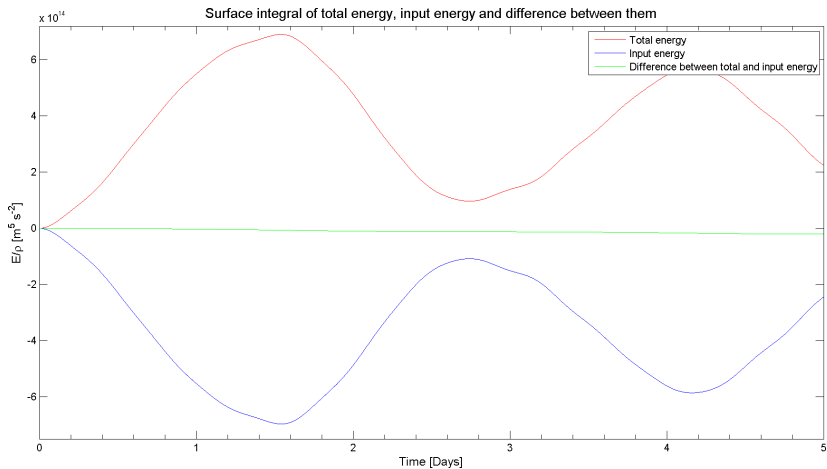


Figure: Časový vývoj energie v DEBOT modelu.

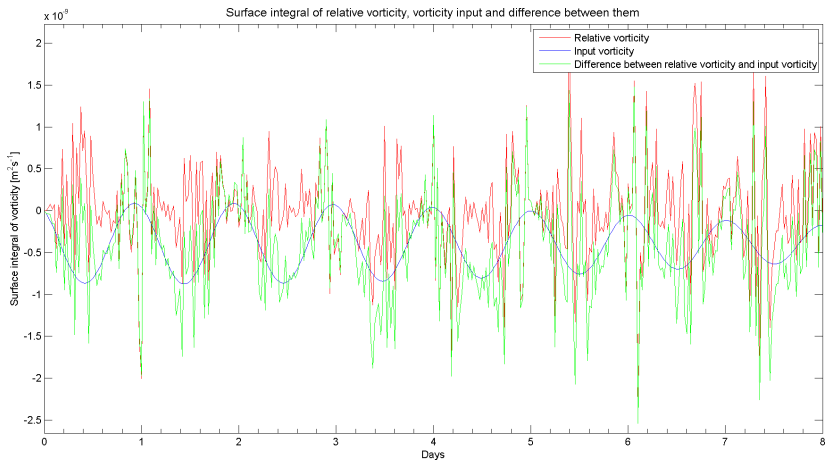


Figure: Časový vývoj vorticity v LSG modelu.



## Aktuální sekce

- 1 Motivace
- 2 LSG model
- 3 DEBOT model
- 4 Popis experimentů a metod
- 5 Benchmarky
- 6 Shrnutí**

# Shrnutí

- naučil jsem se pracovat s LSG modelem (chybějící manuál, pouze report!)
- úpravy a vylepšení
  - plně barokliní model převeden na čistě barotropní
  - implementovány a otestovány 3 nové numerické řešiče
  - výška vodního sloupce v evolučních rovnicích zahrnuje elevaci hladiny
- naprogramovali jsme a otestovali metody pro srovnání obou modelů
  - podobné časové křivky ve zvolených bodech
  - výrazné rozdíly v blízkosti ostrova a zlepšení při zahrnutí elevace do výšky vodního sloupce v evolučních rovnicích
  - nejsilnější koeficienty pro  $l$  sudé,  $m \in \{0, 1, 2\}$ , především  $l=2$ ,  $m=2$  a  $l=4$ ,  $m=2$  (dobrá shoda)
  - objem vody zachován v LSG modelu, v DEBOT modelu až pro nové časové schéma
  - pokles energie v LSG a DEBOT modelu, implicitnost schématu

## Reference

- Dostál J., Martinec Z. and Thomas M., 2012. The modelling of the toroidal magnetic field induced by tidal ocean circulation, *Geophys. J. Int.*, **189**(2), 782–798.
- Einšpigel D., 2012. Barotropní oceánický slapový model, diplomová práce,  
<http://geo.mff.cuni.cz/theses/2012-Einspigel-Mgr.pdf>.
- Martinec Z., 1988. Program to calculate the spectral harmonic expansion coefficients of the two scalar fields product, *Comput. Phys. Commun.*, **54**, 177–182.

## Poděkování

Rád bych poděkoval

- panu profesoru Martincovi za rady a vedení při práci,
- Láďovi za pomoc při práci s numerickými řešiči,
- Davidovi za poskytnutí kódu se slapovým buzením a výsledků, jež získal pomocí modelu DEBOT.



DĚKUJI ZA POZORNOST