

Insolace a povrchová teplota na planetách mimo sluneční soustavu

Michaela Káňová



Obsah

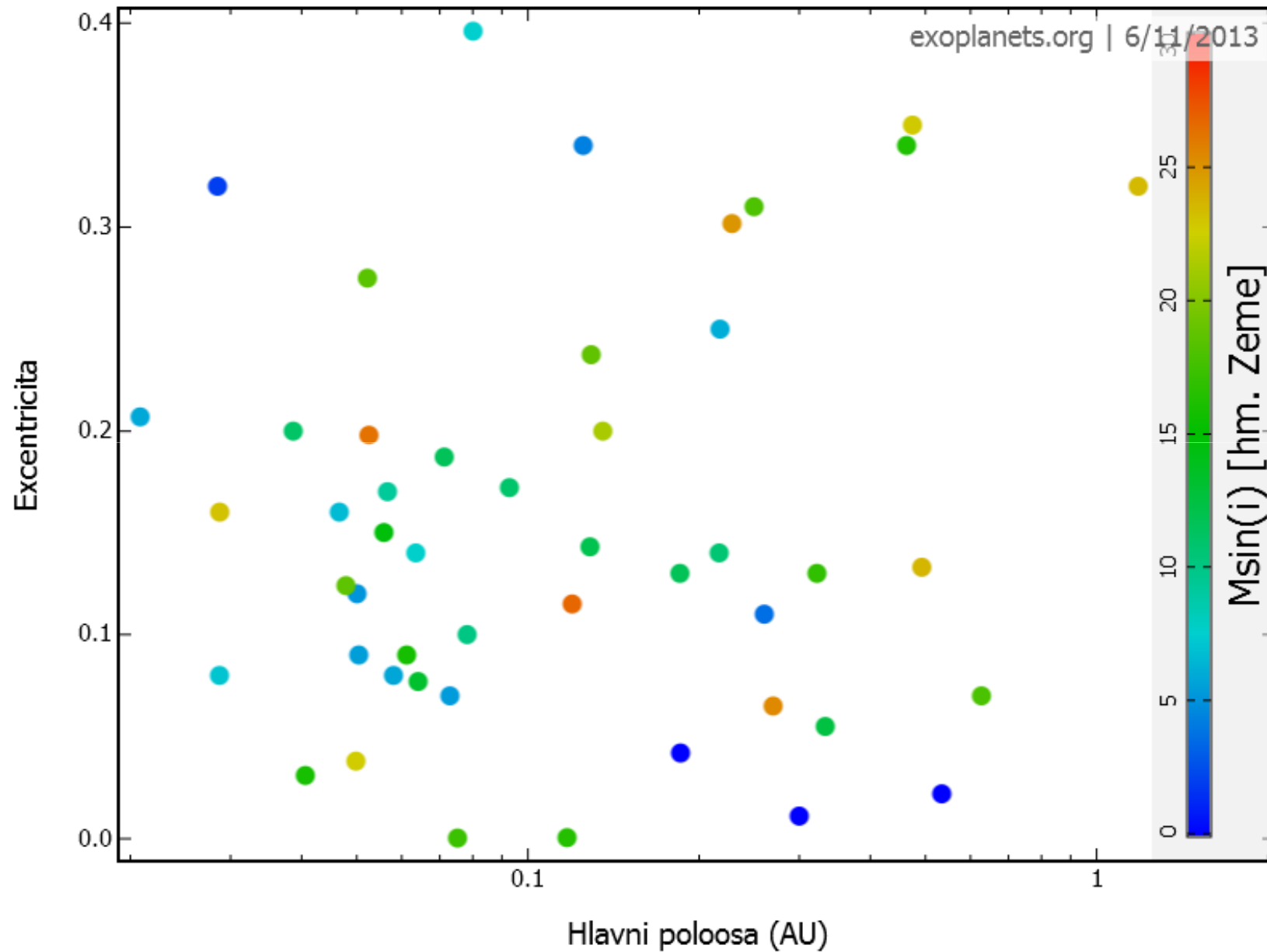
- ❖ Extrasolární planety
- ❖ Insolace
- ❖ Rovnice vedení tepla v 1D a 3D
- ❖ Testy
- ❖ Výsledky
- ❖ Závěr

Extrasolární planety

- k 11.6. potvrzeno 723 exoplanet, na potvrzení čeká 3098 kandidátů
- současnou technikou dosažitelné i terestrické planety
- snadnější detekce krátkoperiodických planet → statistika
- rozličné excentricity – u „exozemí“ od 0 do 0.4

- záchyt ve spin-orbitální resonanci (1:1, 3:2, 2:1...)
- nerovnoměrné zahřívání
- odezva v infračervených fotometrických křivkách
- při absenci atmosféry tepelný kontrast v řádu stovek až tisíců Kelvinů
- vliv na konvekci kvůli závislosti viskozity na teplotě (v případě resonance 1:1 simulován na denní straně vzestupný proud, na noční subdukce)

Parametry kamenných planet (minimální hmotnost pod $30 M_{\text{Země}}$)



Insolace a její výpočet

- sluneční konstanta

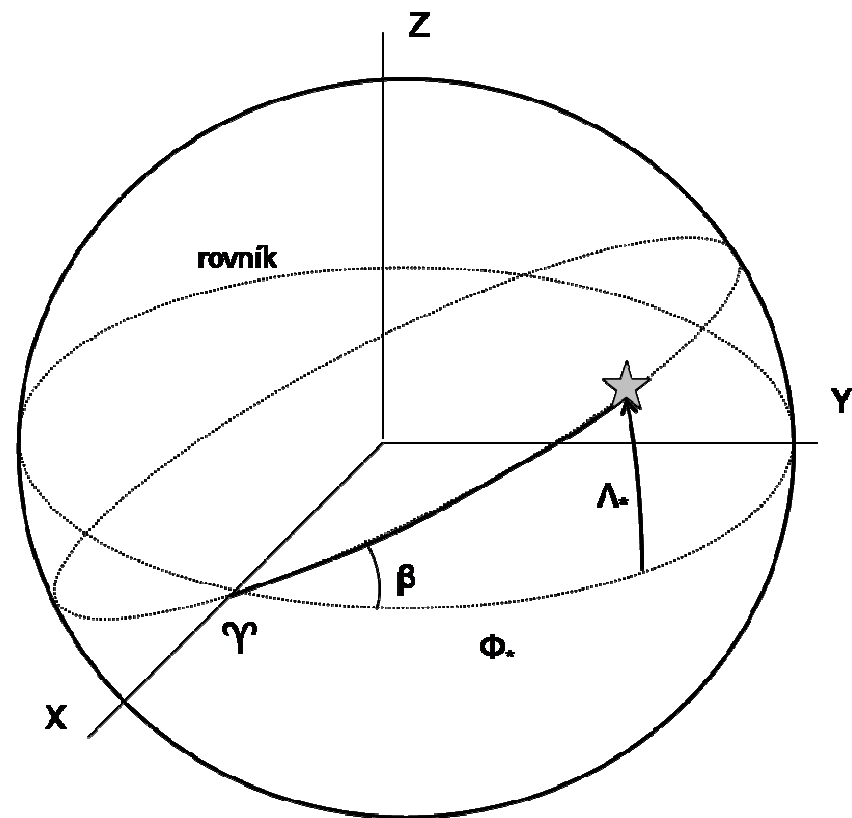
$$S_* = \frac{L_*}{4\pi a^2}$$

- insolace

$$S = S_* \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \zeta$$

$$\cos \zeta = xx_* + yy_* + zz_*$$

$$r = a(1 - e \cos E)$$



Insolace a její výpočet

- souřadnice pozorovatele

$$x = \cos \lambda \cos \phi$$

$$y = \cos \lambda \sin \phi$$

$$z = \sin \lambda$$

- souřadnice substelárního bodu

$$x_* = \cos(\omega t) \cos[v(t + T) - v(T)] + \sin(\omega t) \sin[v(t + T) - v(T)] \cos \beta$$

$$y_* = -\sin(\omega t) \cos[v(t + T) - v(T)] + \cos(\omega t) \sin[v(t + T) - v(T)] \cos \beta$$

$$z_* = \sin[v(t + T) - v(T)] \sin \beta$$

ω – rychlost rotace planety

$v(t)$ – pravá anomálie

Keplerova rovnice

- nerovnoměrný pohyb planety po eliptické dráze

$$E - e \sin E = nt$$

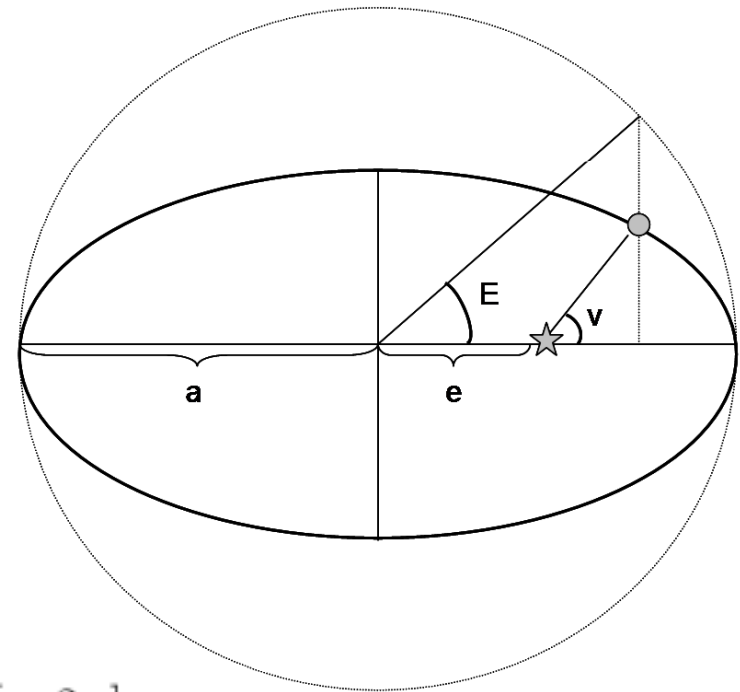
- řešena přímou metodou

nt – střední anomálie

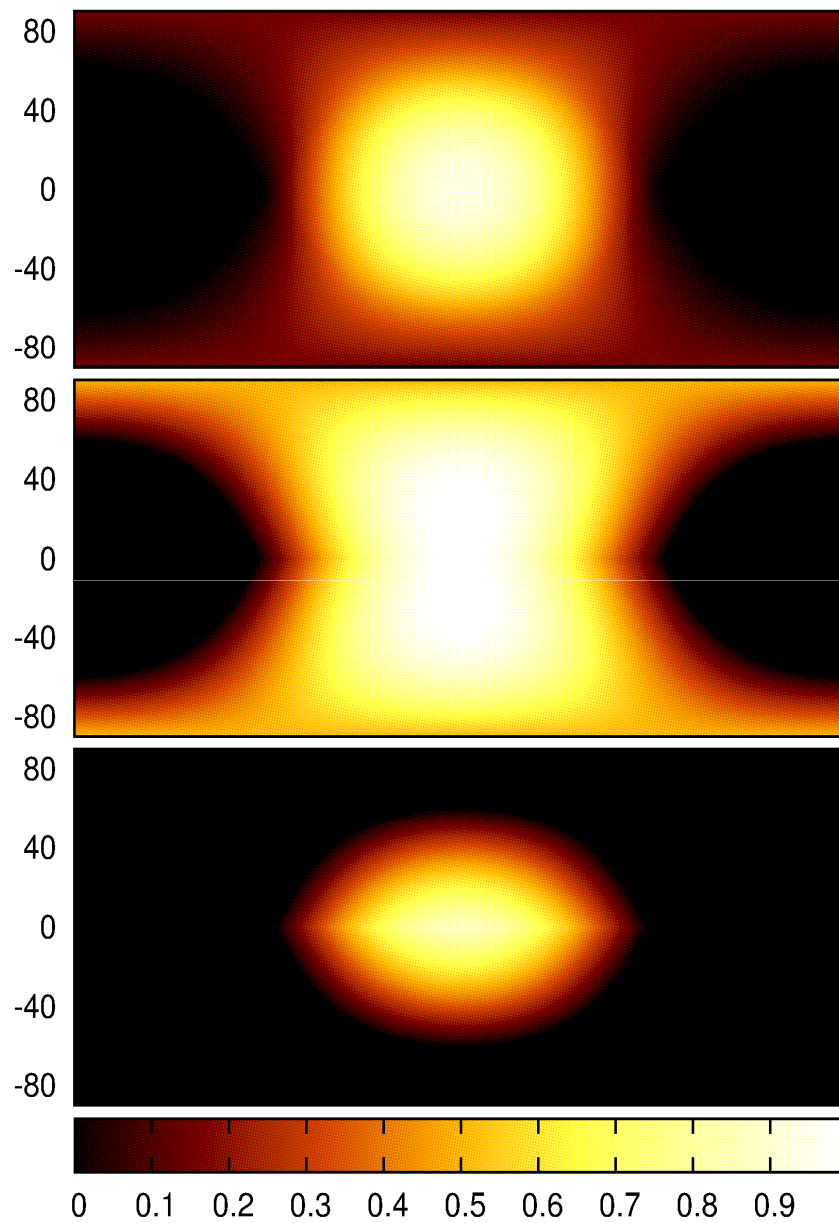
E – excentrická anomálie

$$v = \arccos \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad \text{pro } E \in [0, \pi]$$

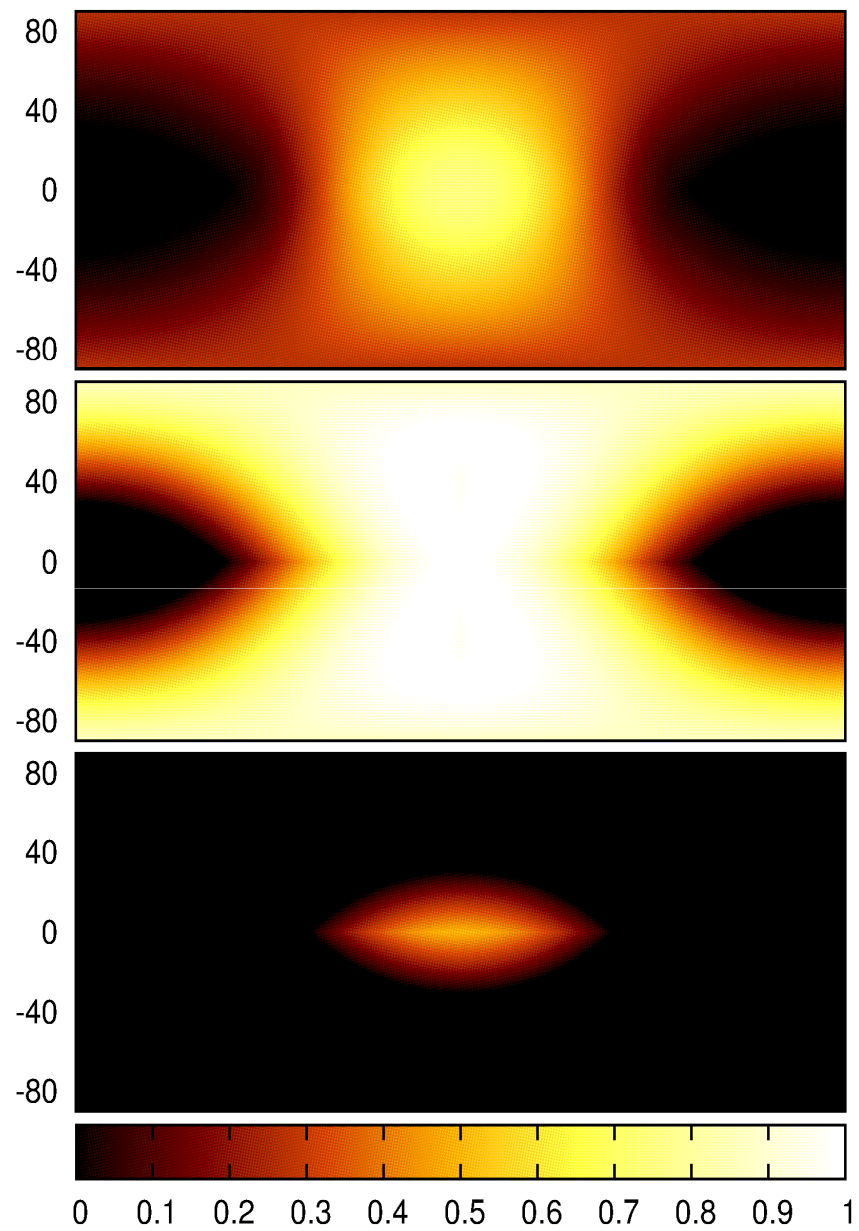
$$v = 2\pi - \arccos \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad \text{pro } E \in [\pi, 2\pi]$$



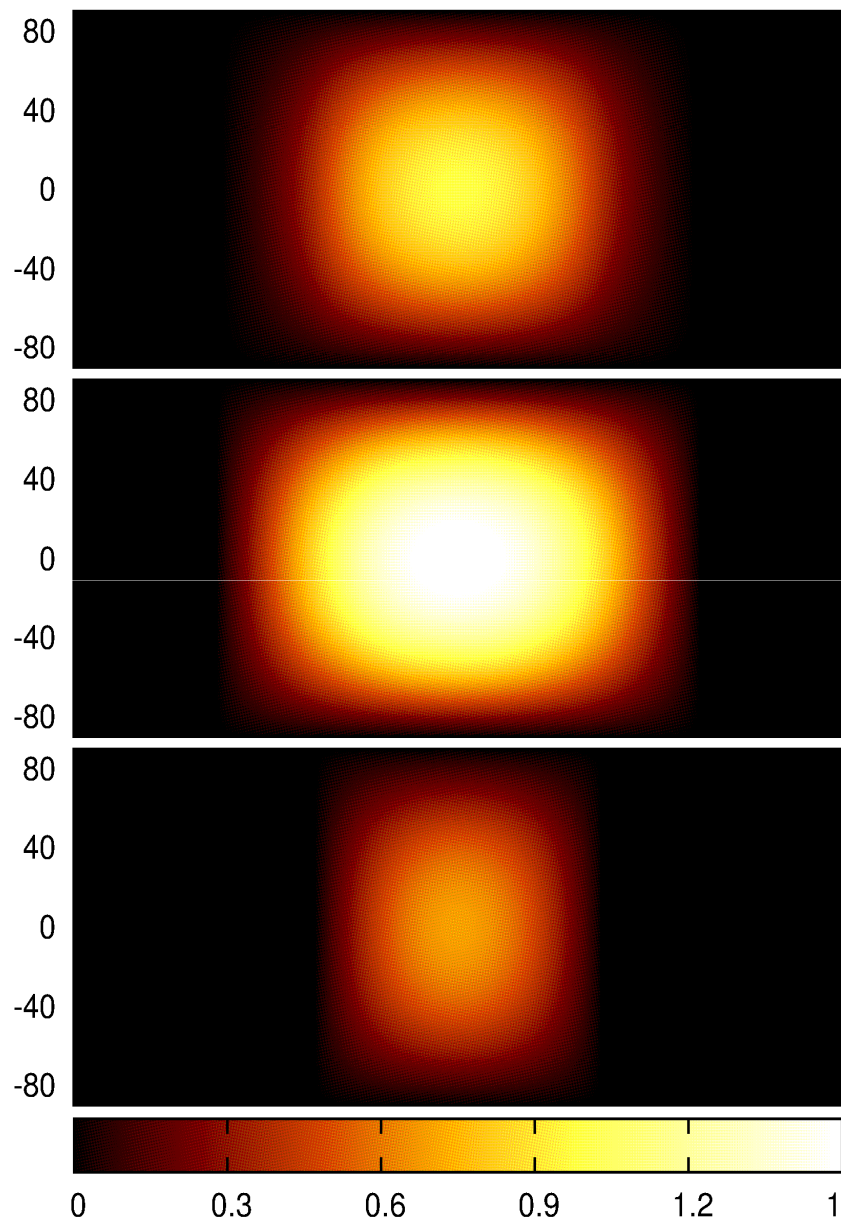
$\beta=30, e=0.0$



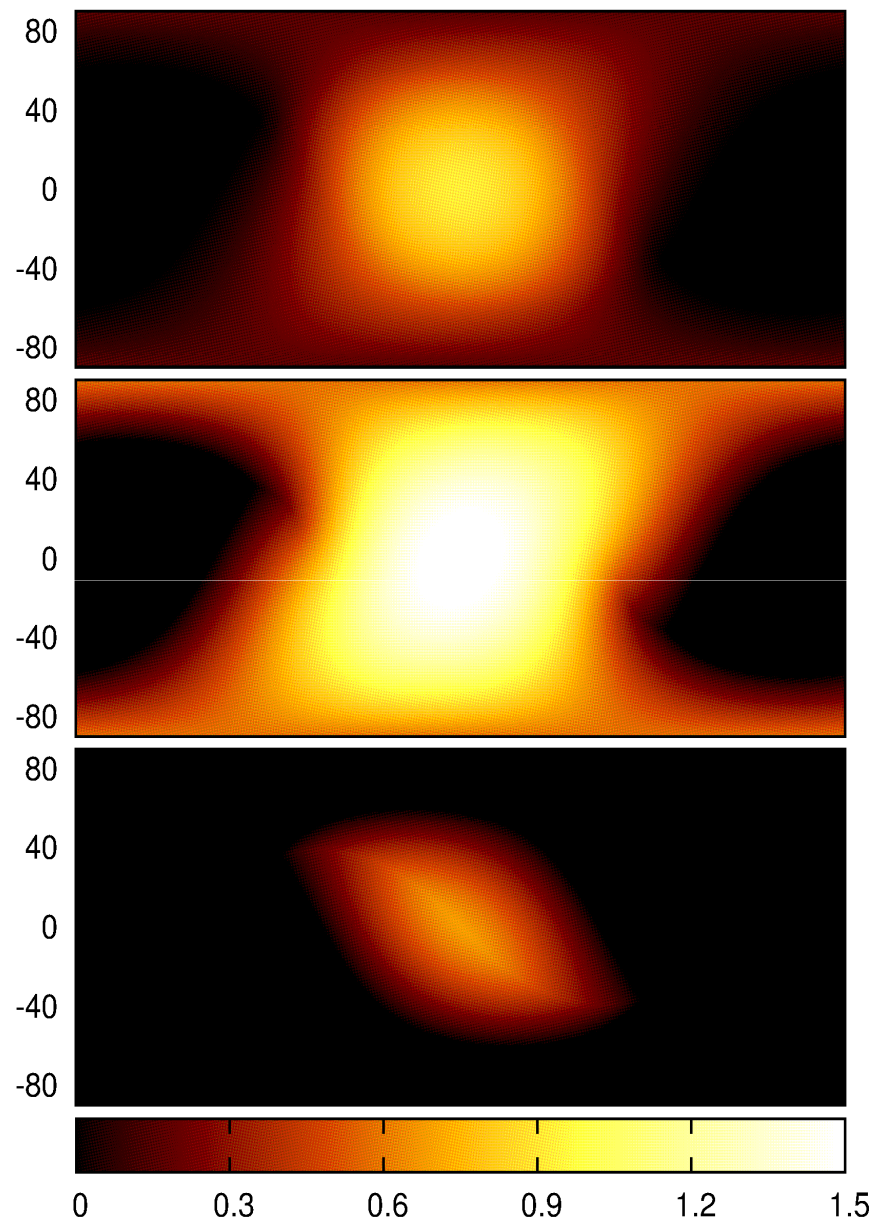
$\beta=60, e=0.0$



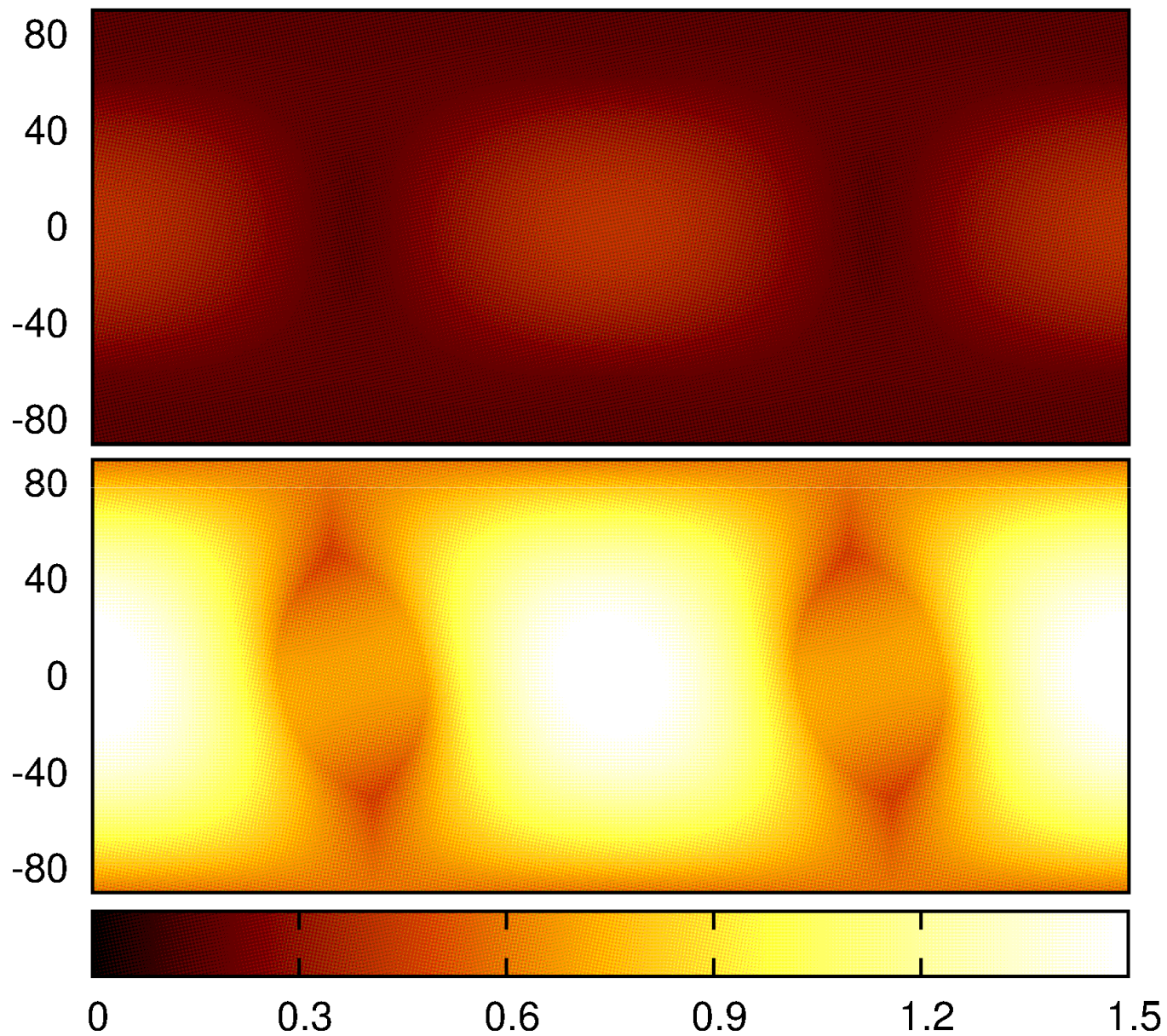
$\beta=0, e=0.2$

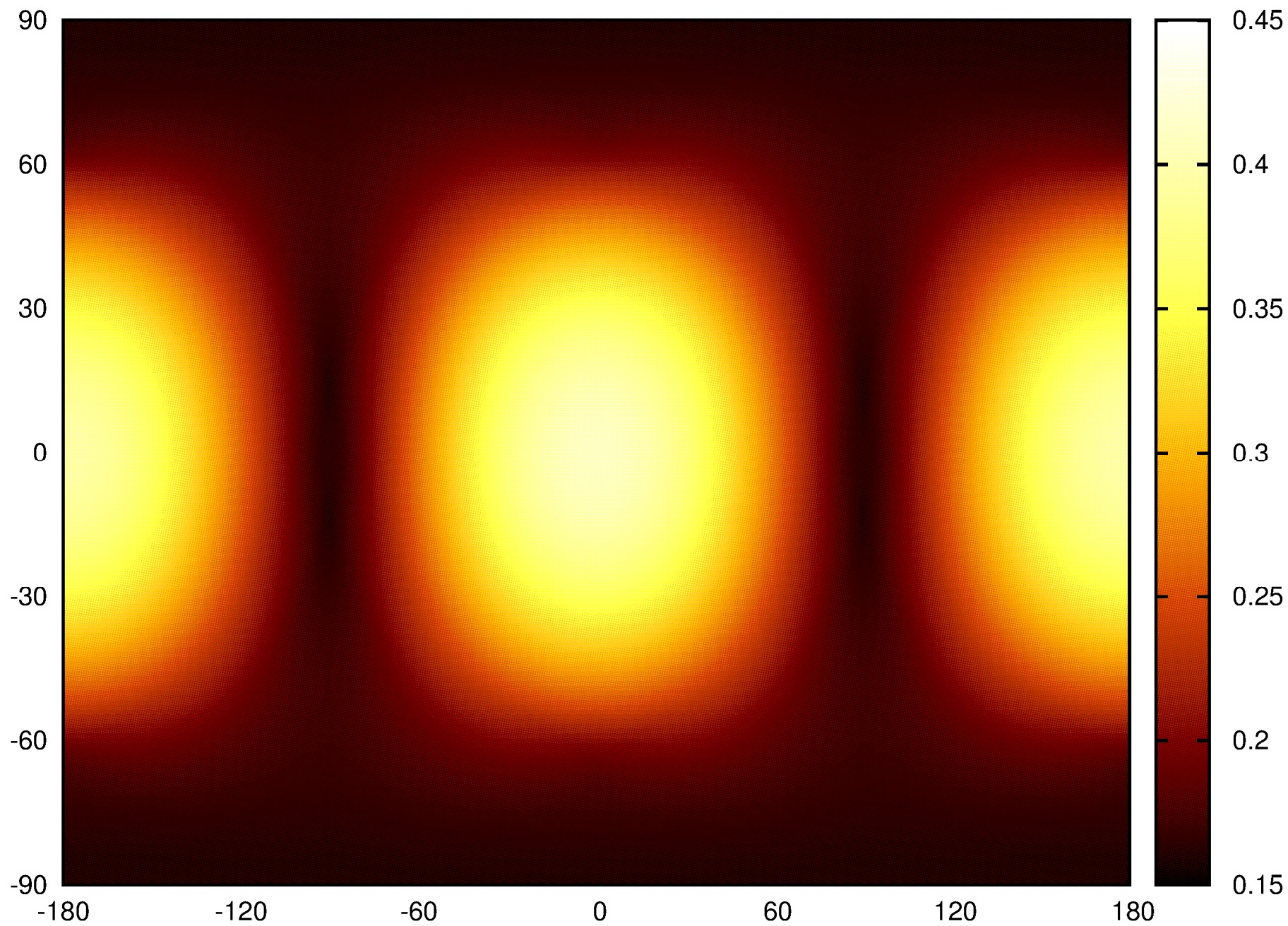


$\beta=30, e=0.2$



$\beta=30$, $e=0.2$, resonance 3:2





Povrchová teplota

- rovnice vedení tepla

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(K \nabla T)$$

- nelineární horní okrajová podmínka

$$S_*(1 - A) = \varepsilon \sigma T^4 - K \frac{\partial T}{\partial r}$$

- na spodním okraji řešené vrstvy zadán tepelný tok

ρ - hustota

C - tepelná kapacita

K - vodivost

A - albedo

ε - emisivita

Škálování

- charakteristický čas

$$\tau = \Omega^{-1}$$

- charakteristická délka

$$L = \left(\frac{2K}{\Omega \rho C} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- referenční teplota

$$T_R = \left(\frac{L_*}{16\pi a^2 \varepsilon \sigma} \right)^{1/4}$$

- termální setrvačnost

$$I = \sqrt{KC\rho}$$

- termální parametr

$$\gamma = \frac{\varepsilon \sigma T_R^3}{I(\Omega/2)^{1/2}}$$

veličina charakterizující řešení pro konstantní parametry

Rovnice vedení tepla v 1D

- metoda konečných diferencí, obecně nerovnoměrná mřížka

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_i = a_i T_{i-1} + b_i T_i + c_i T_{i+1}$$

$$a_i = -\frac{h_i}{h_{i-1}(h_i + h_{i-1})} \quad b_i = \frac{h_i - h_{i-1}}{h_{i-1}h_i} \quad c_i = \frac{h_{i-1}}{h_i(h_i + h_{i-1})}$$

- representace pomocí pásové matice
- řešeno užitím LU dekompozice (subroutiny *bandec*, *banbks* z NR)
- posunutá síť

Rovnice vedení tepla v 1D

Stacionární řešení

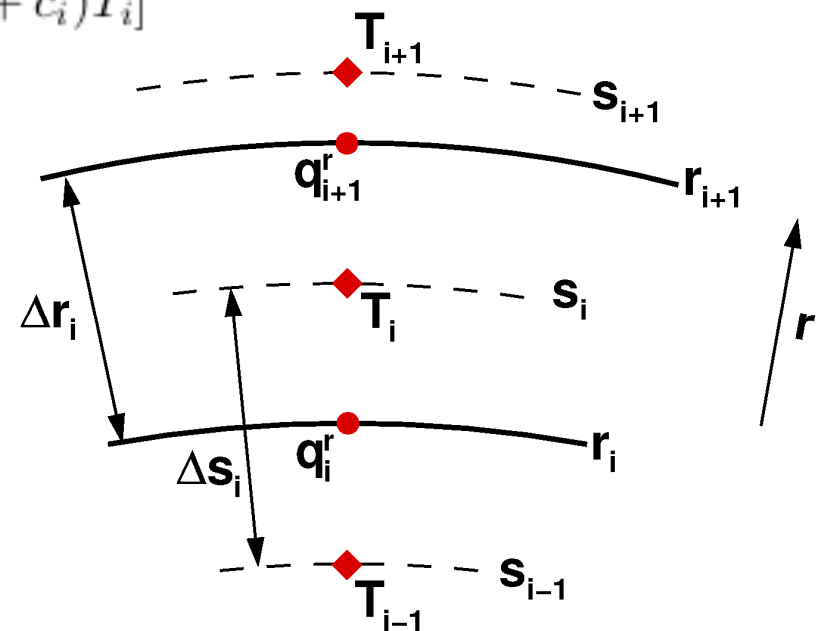
$$\nabla(K\nabla T) = \nabla q = 0$$

$$(\nabla q)_i = \left(\frac{2}{r} q + \frac{dq}{dr} \right)_i = \frac{1}{s_i} (q_i + q_{i+1}) + \frac{1}{\Delta r_i} (q_{i+1} - q_i)$$

$$q_i = K_i [(a_i + w_i b_i) T_{i-1} + (b_i (1 - w_i) + c_i) T_i]$$

$$w_i = 0.5 \frac{\Delta r_i}{\Delta s_i}$$

$$(\nabla q)_i = \alpha_i T_{i-1} + \beta_i T_i + \gamma_i T_{i+1}$$



Rovnice vedení tepla v 1D

Koeficienty

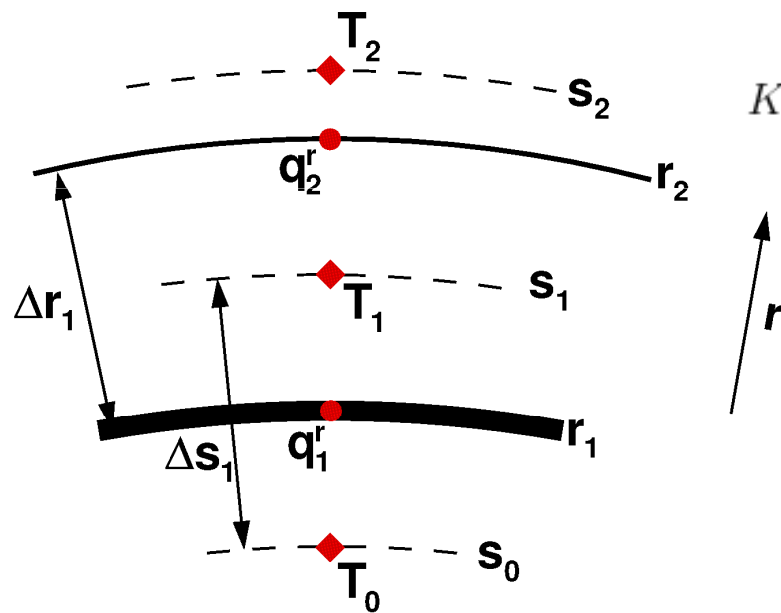
$$(\nabla q)_i = \alpha_i T_{i-1} + \beta_i T_i + \gamma_i T_{i+1}$$

$$\alpha_i = K_i(a_i + w_i b_i) \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) \quad \gamma_i = K_{i+1}(b_{i+1}(1 - w_{i+1}) + c_{i+1}) \left(\frac{1}{s_i} + \frac{1}{\Delta r_i} \right)$$

$$\beta_i = K_i(b_i(1 - w_i) + c_i) \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) + K_{i+1}(a_{i+1} + w_{i+1} b_{i+1}) \left(\frac{1}{s_i} + \frac{1}{\Delta r_i} \right)$$

Rovnice vedení tepla v 1D

Okrajové podmínky

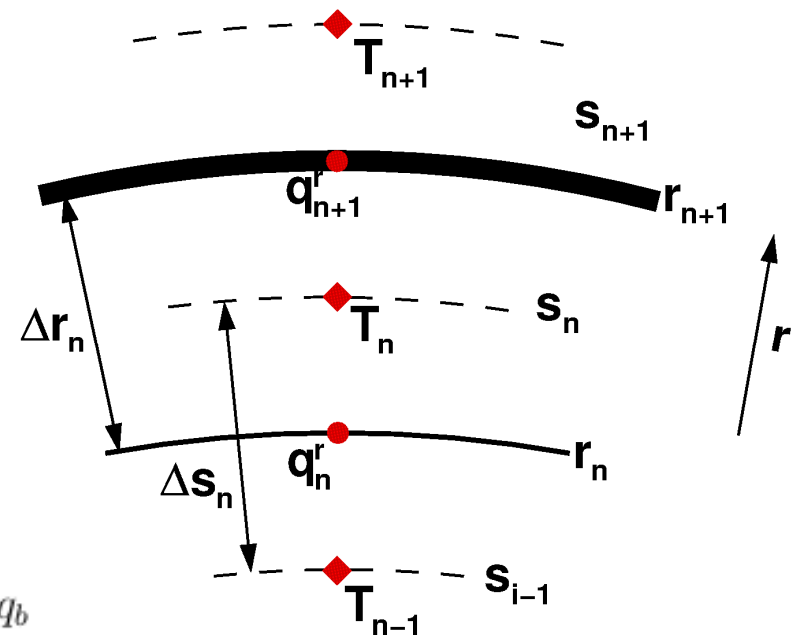


$$w_1 T_0 + (1 - w_1) T_1 = T_b$$

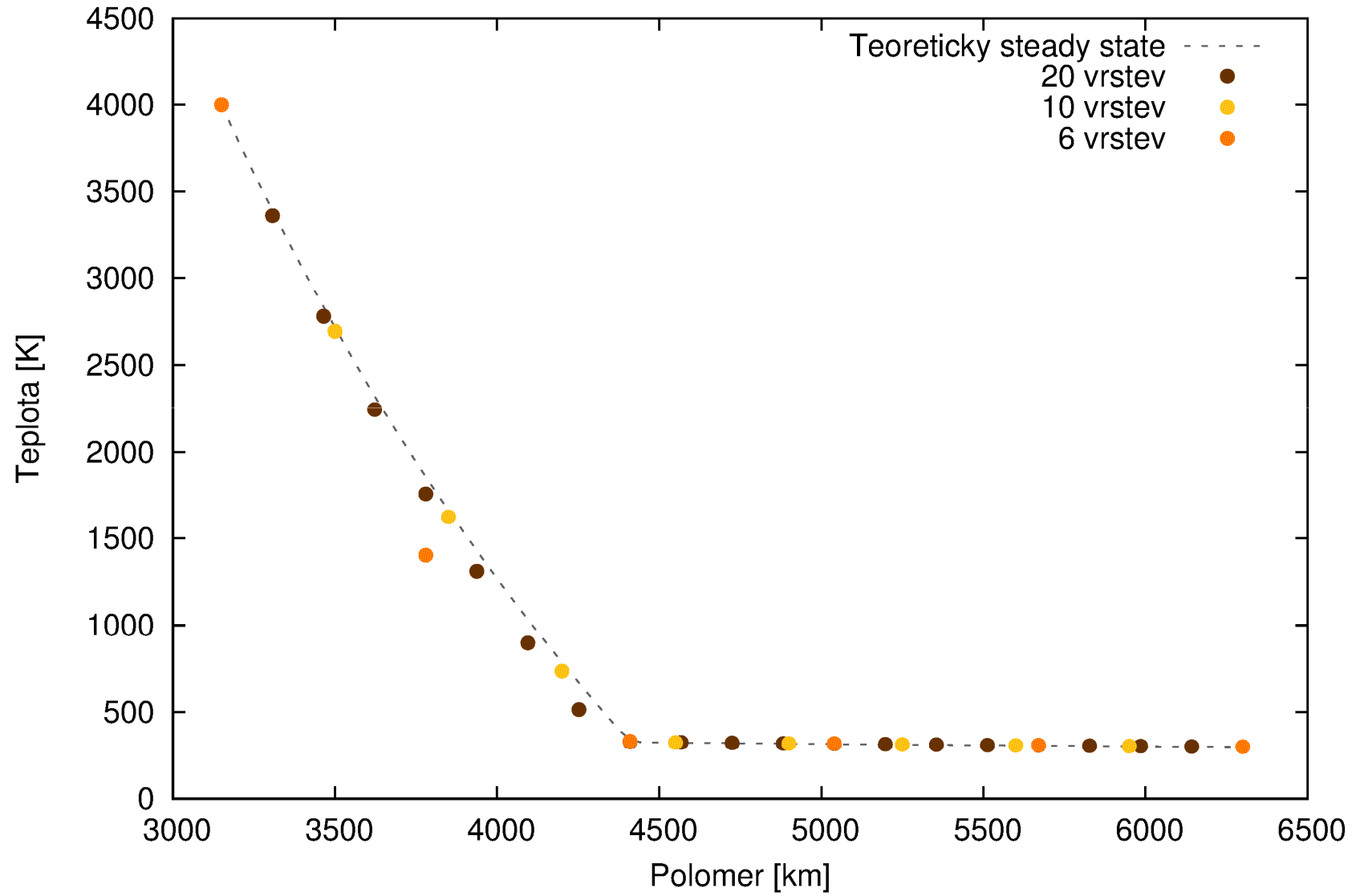
$$K_1 (a_1 + w_1 b_1) T_0 + K_1 (b_1 (1 - w_1) + c_1) T_1 = -q_b$$

$$w_n T_n + (1 - w_n) T_{n+1} = T_t$$

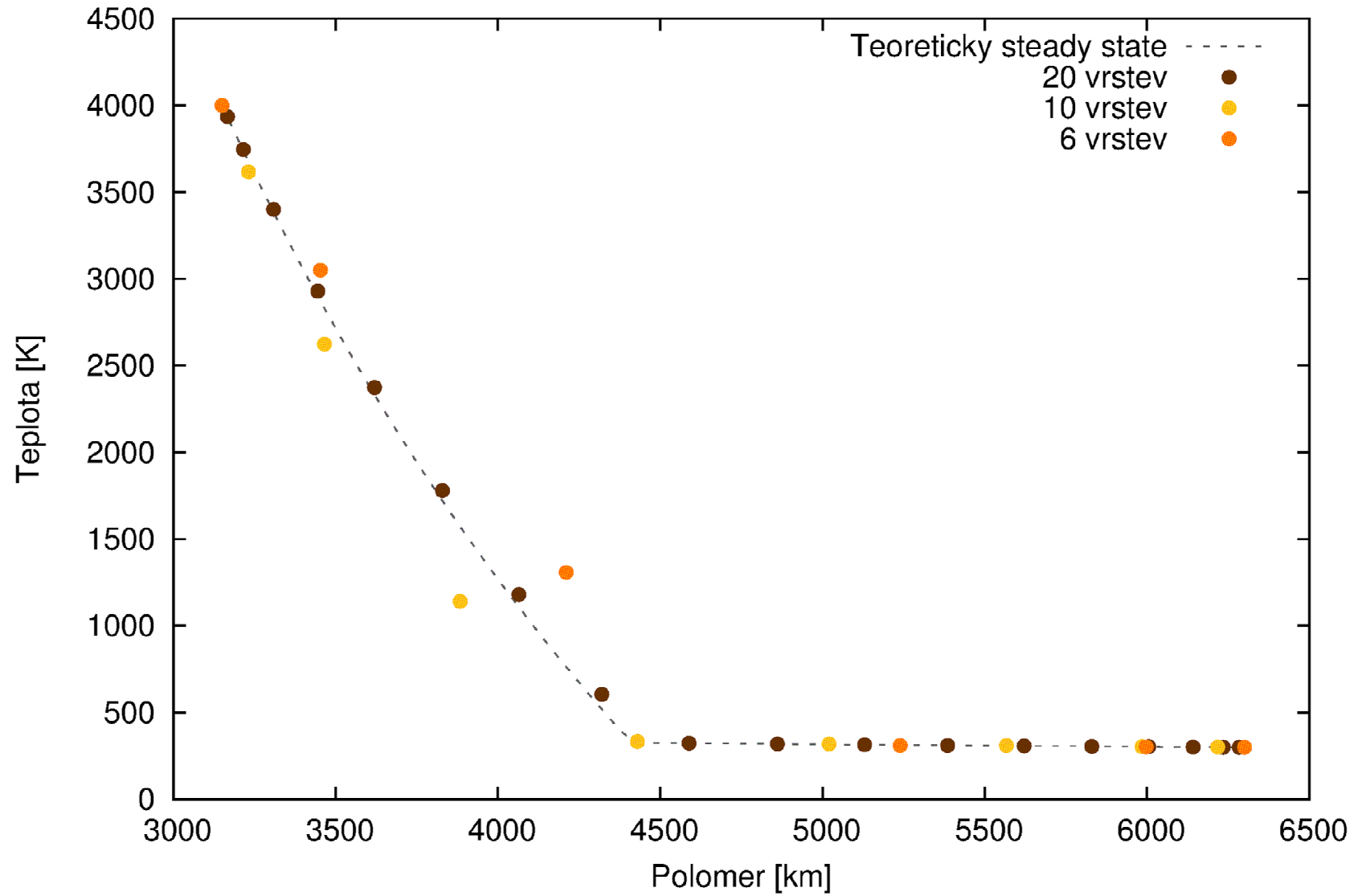
$$K_n (a_n + w_n b_n) T_n + K_n (b_n (1 - w_n) + c_n) T_{n+1} = q_t$$



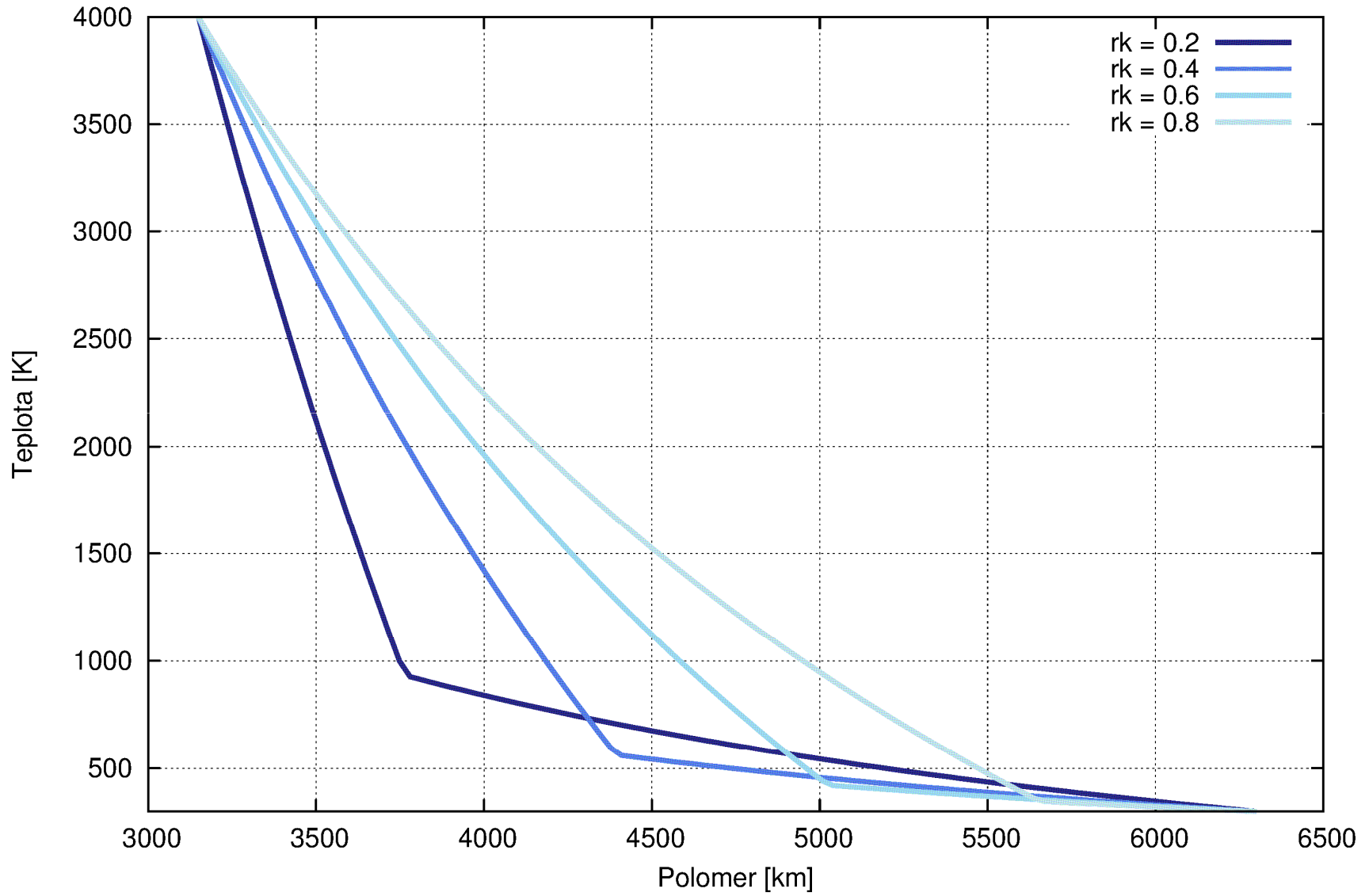
Steady state reseni pro $f=0.5$



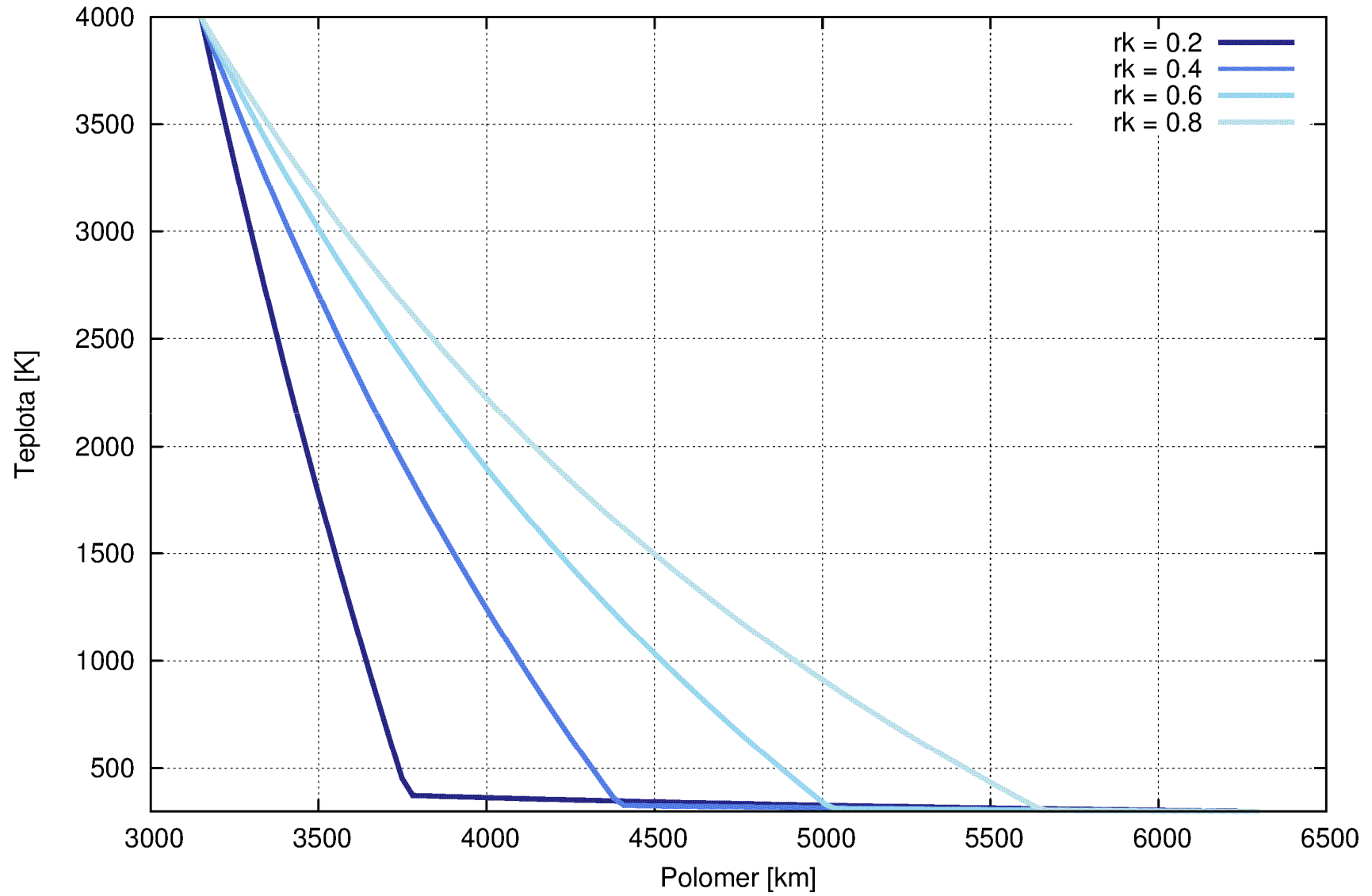
Steady state reseni pro $f=0.5$



Steady state reseni pro skok ve vodivosti $K_2=10K_1$



Steady state reseni pro skok ve vodivosti $K_2=100K_1$



Rovnice vedení tepla v 1D

Nelineární horní okrajová podmínka

- T^4 ve Stefan-Boltzmannově zákoně

$$S(1 - A) = \varepsilon\sigma T^4 - K \frac{\partial T}{\partial r}$$

- řešeno iterativně
- první odhad – rovnovážná teplota

$$T = \left(\frac{S(1 - A)}{\varepsilon\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{nebo} \quad T = \left(\frac{S(1 - A) + q_b \frac{K_1}{K_n}}{\varepsilon\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}$$

- semi-implicitní schéma a průměrování z několika předešlých iterací

$$\begin{aligned} & [\varepsilon\sigma w_n (T_t^3)^{i-1} + K_n (a_n + w_n b_n)] (T_n)^i \\ & + [\varepsilon\sigma (1 - w_n) (T_t^3)^{i-1} + K_n (b_n (1 - w_n) + c_n)] (T_{n+1})^i \\ & = S(1 - A) \end{aligned}$$

Rovnice vedení tepla v 1D

Časově proměnné řešení

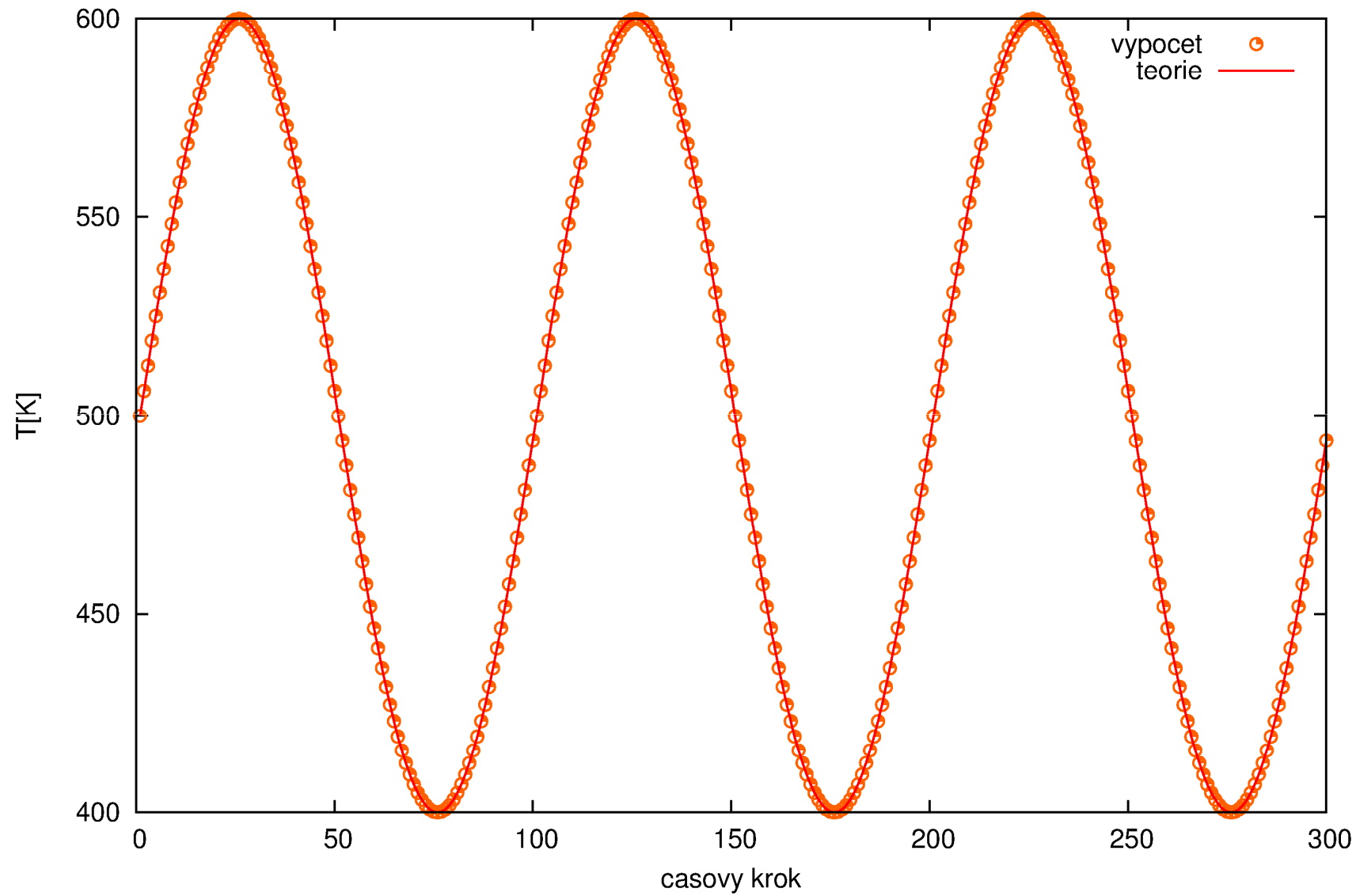
- schéma Cranka a Nicolsonové (v časovém kroku)

$$\rho C \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2} [(\nabla q)_i^{j+1} + (\nabla q)_i^j]$$

$$\rho C \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2} \alpha_i (T_{i-1}^j + T_{i-1}^{j+1}) + \frac{1}{2} \beta_i (T_i^j + T_i^{j+1}) + \frac{1}{2} \gamma_i (T_{i+1}^j + T_{i+1}^{j+1})$$

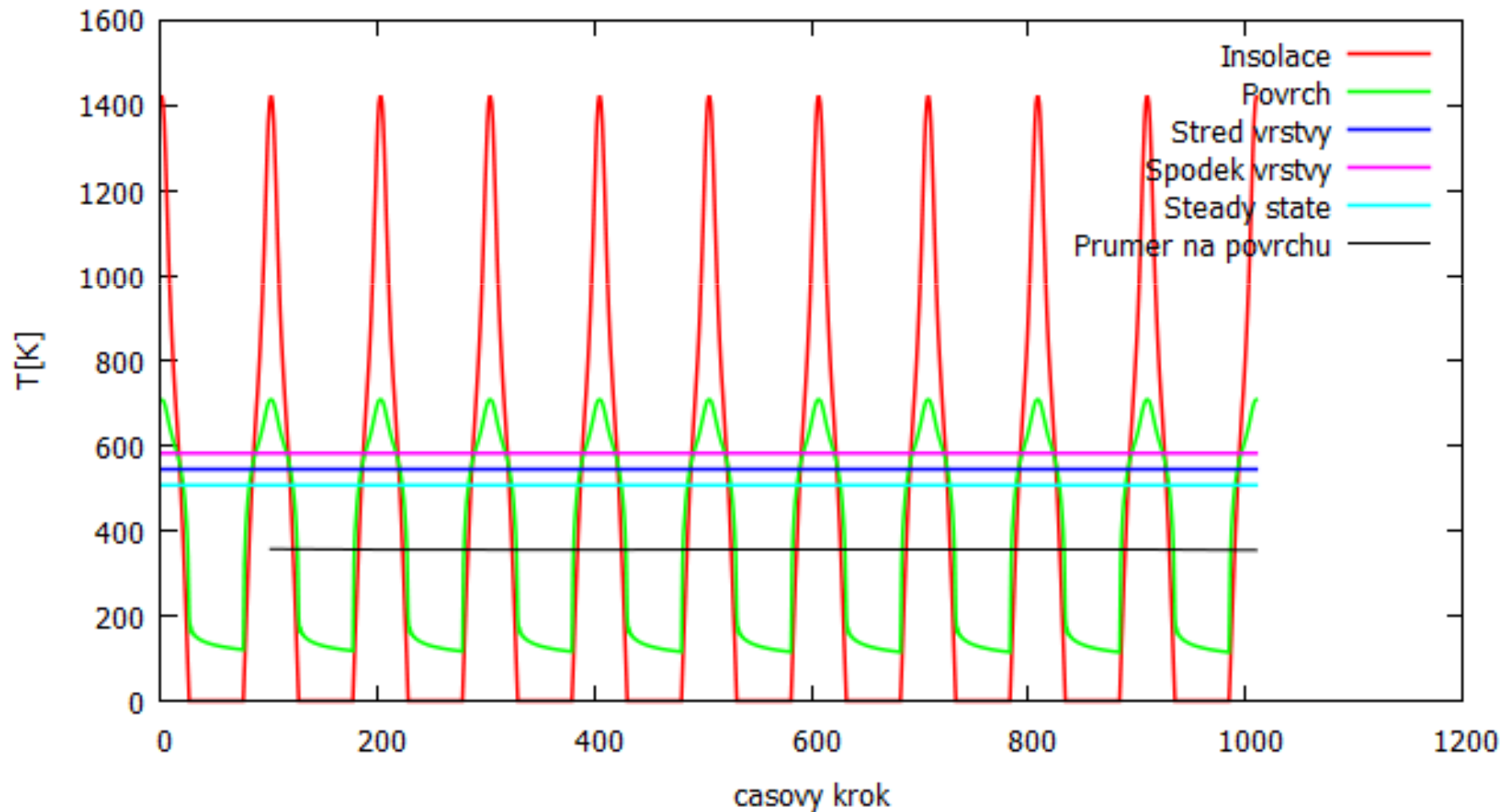
- počáteční podmínka: stacionární řešení za průměrné insolace

Test: sinusoidální změny povrchové teploty



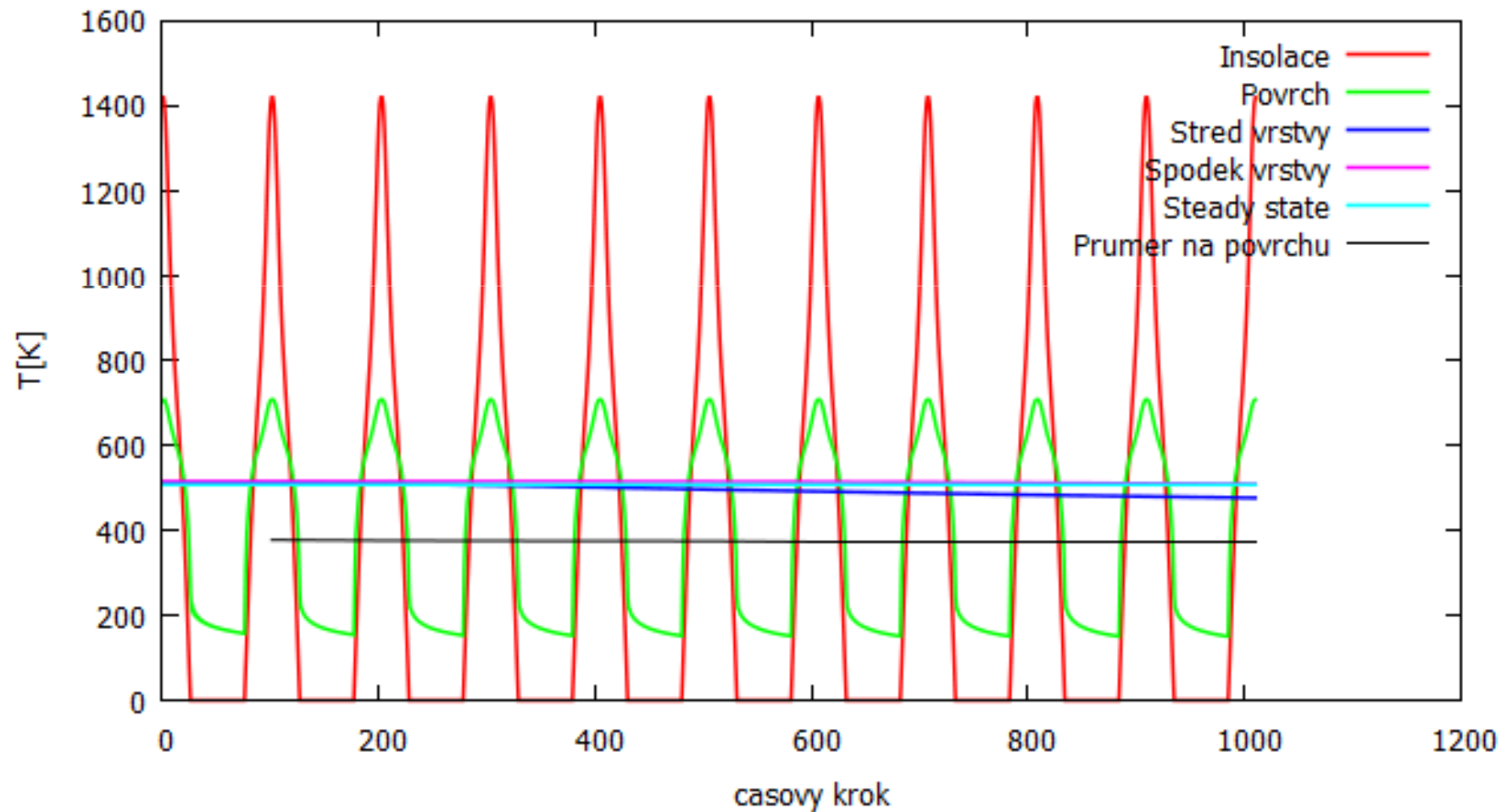
Průběh teploty v 10 insolačních cyklech

Teplota v povrchové vrstvě, $K=0.01$



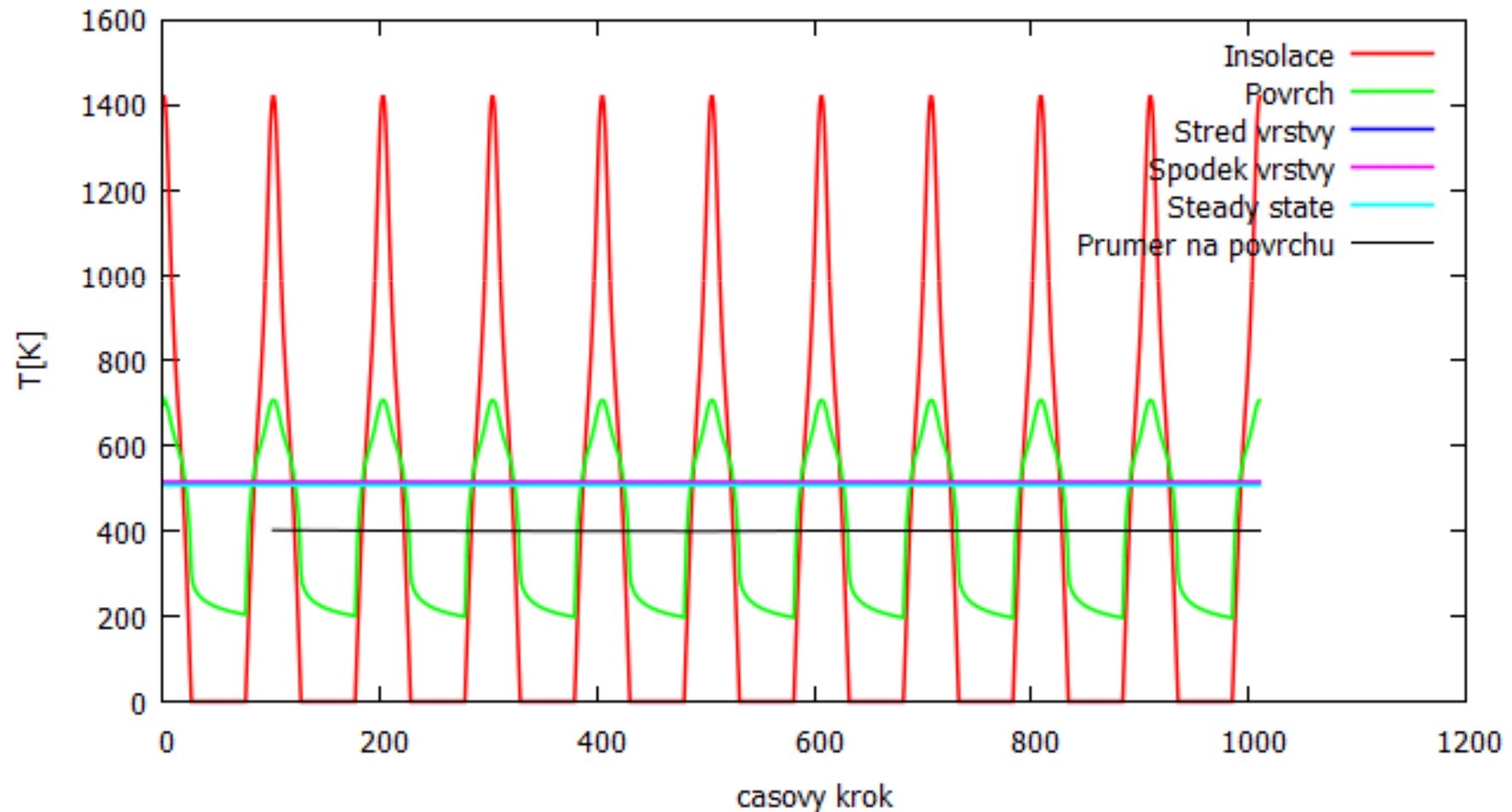
Průběh teploty v 10 insolačních cyklech

Teplota v povrchové vrstvě, $K=0.1$



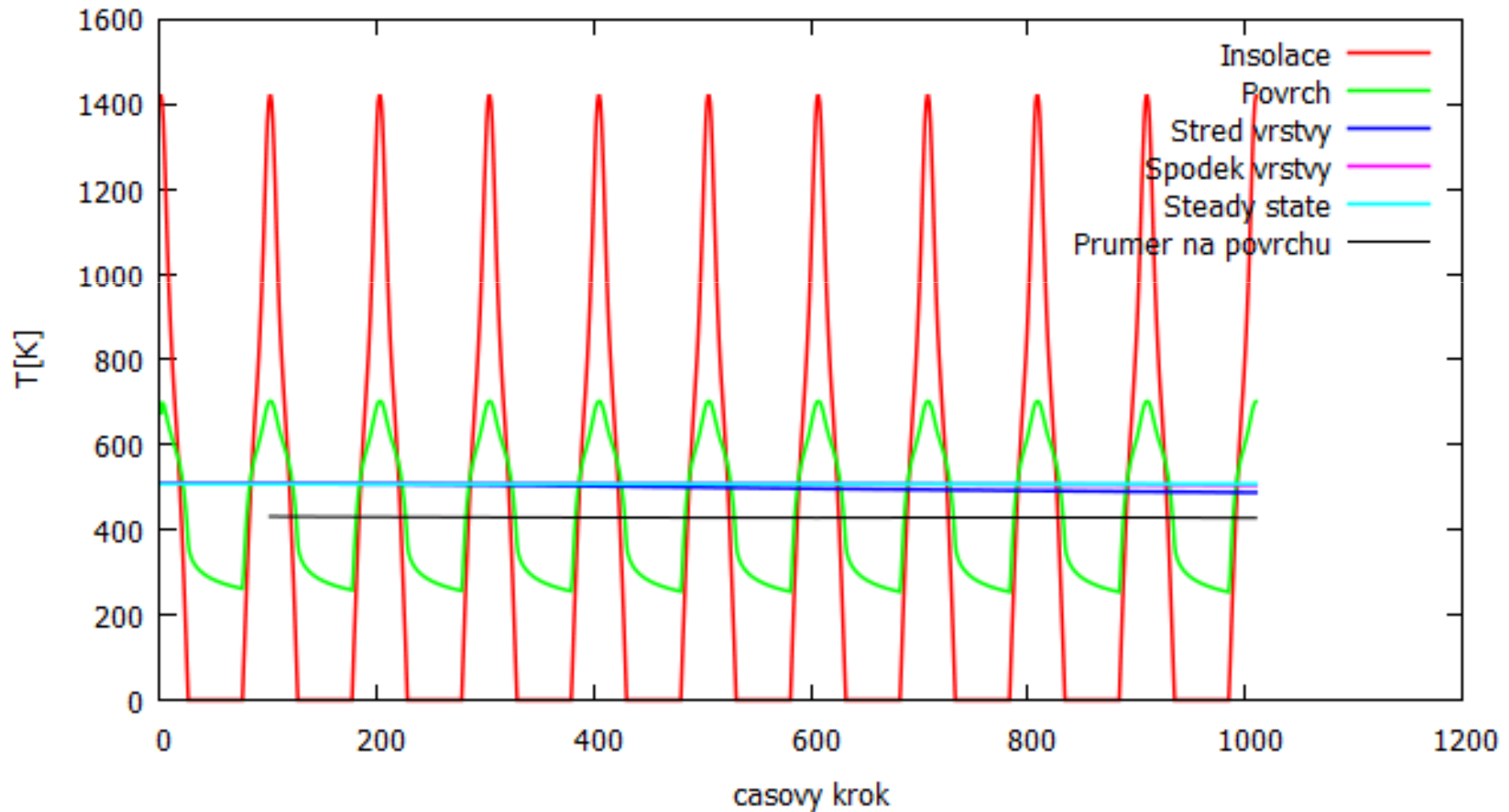
Průběh teploty v 10 insolačních cyklech

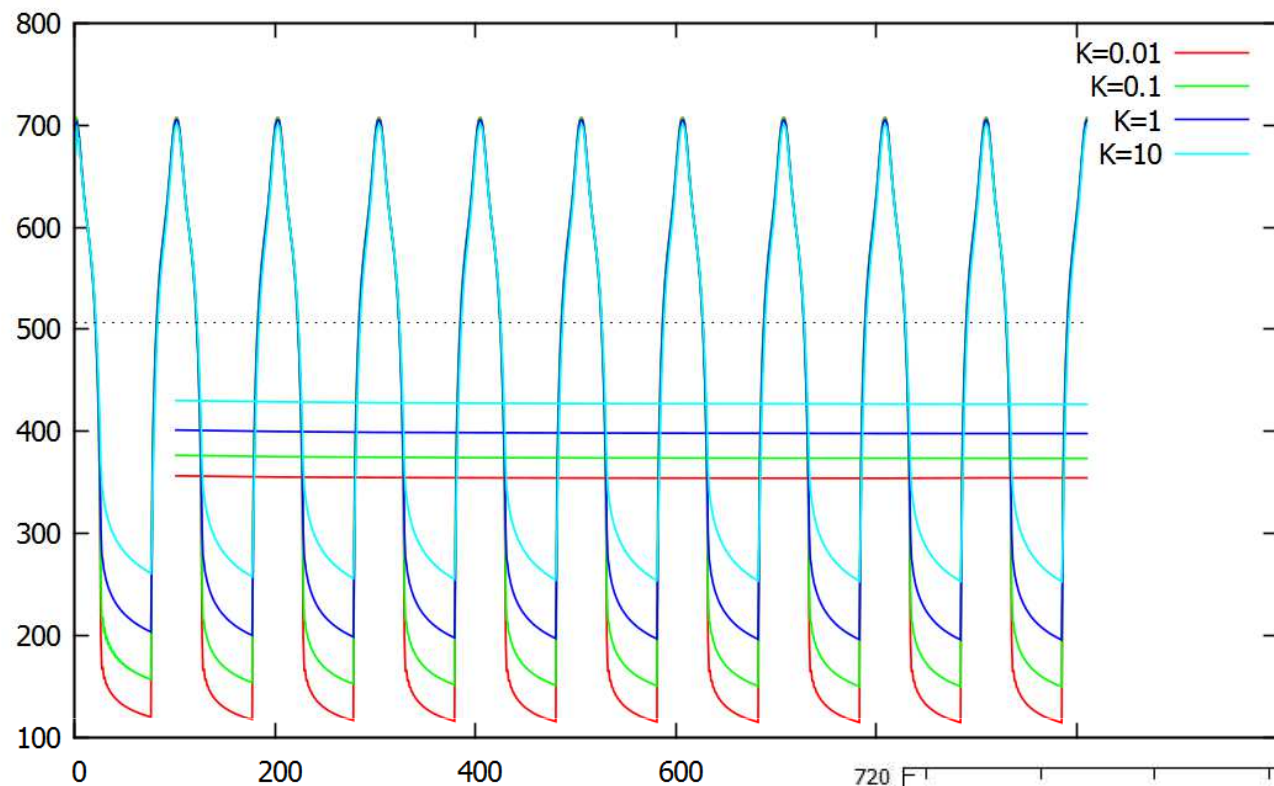
Teplota v povrchové vrstvě, K=1



Průběh teploty v 10 insolačních cyklech

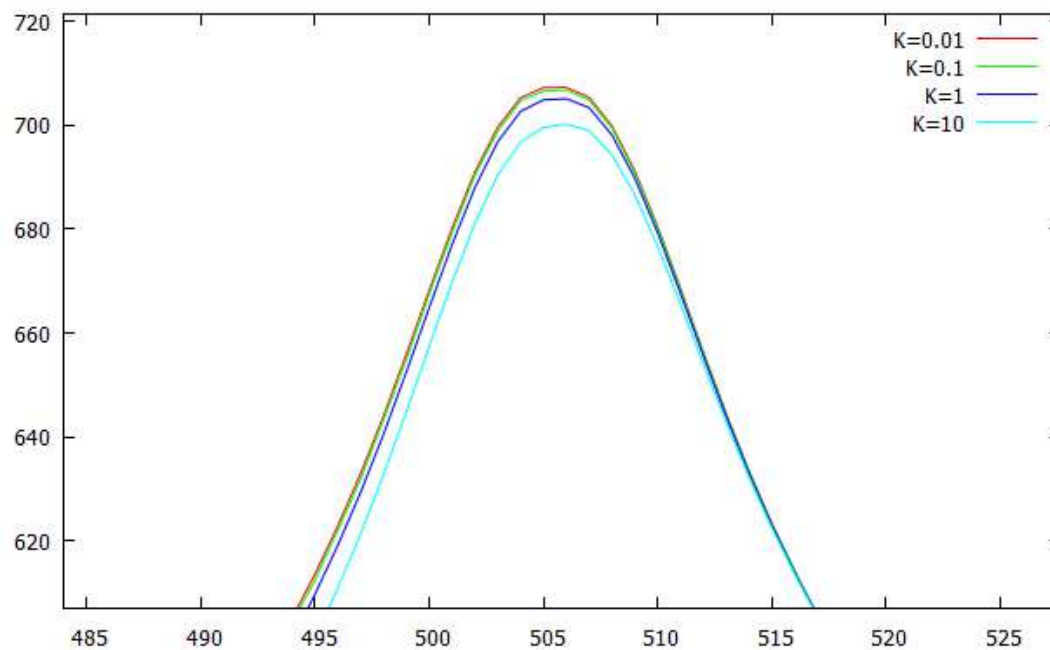
Teplota v povrchové vrstvě, K=10





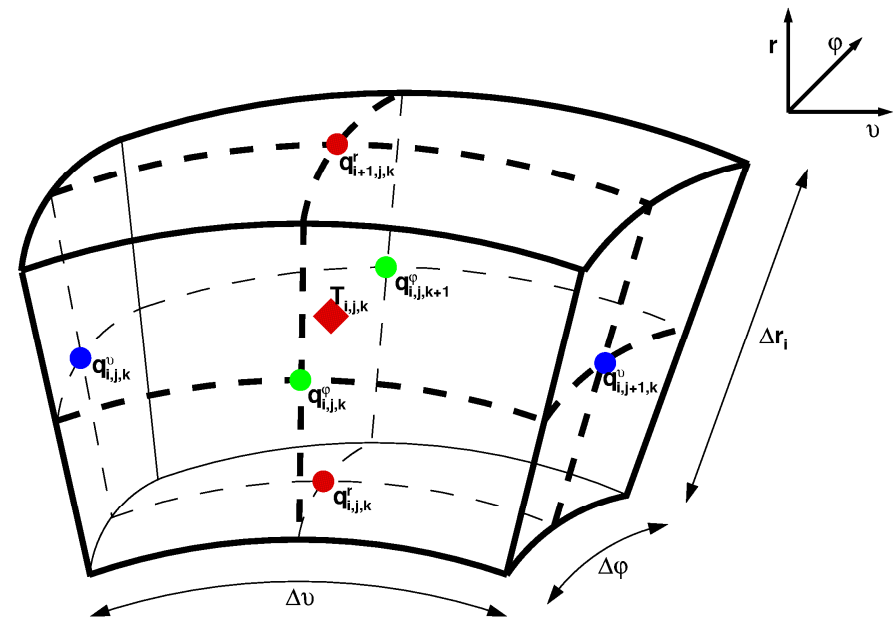
Stacionární řešení
 vs.
 průměrné teploty

Vliv tepelné setrvačnosti na
 povrchovou teplotu



Rovnice vedení tepla ve 3D

- konečné diference a posunuté sítě
- rovnoměrný krok ve směru φ a ϑ , obecně nerovnoměrný ve směru r
- vodivosti zadány ve vrcholech
- representace řidkou maticí
- řešení pomocí balíčku PARDISO



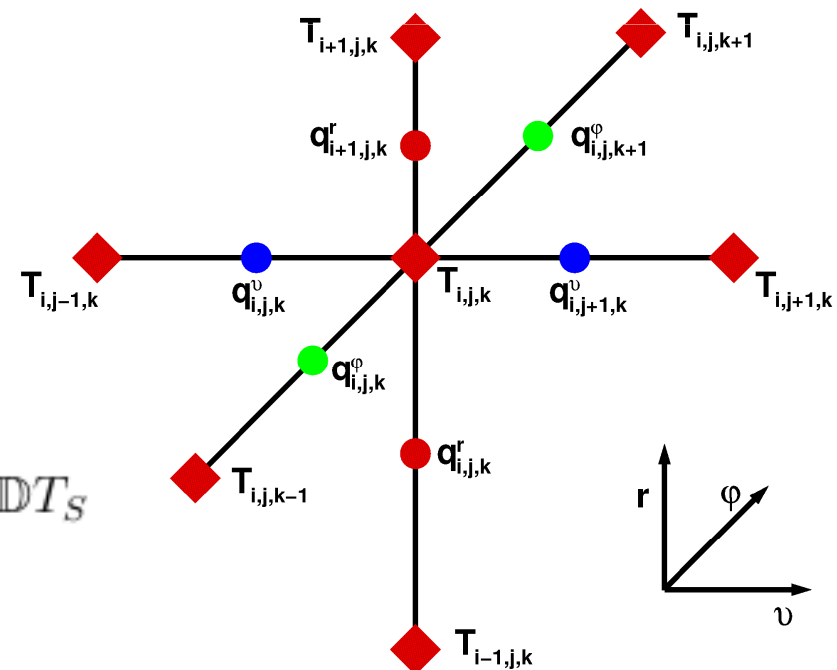
Rovnice vedení tepla ve 3D

Stacionární řešení

$$\nabla(K\nabla T) = \frac{\partial}{\partial r}\left(K\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{2}{r}K\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}K\frac{\partial T}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(K\frac{\partial T}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(K\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)$$

- rovnici přenásobujeme $\sin^2\vartheta$
- gradient q ve středu obecné buňky:

$$(\nabla q)_S \sin^2\vartheta = \mathbb{A}T_{-r} + \mathbb{B}T_{-\vartheta} + \mathbb{C}T_{-\varphi} + \mathbb{D}T_S \\ + \mathbb{E}T_{+\varphi} + \mathbb{F}T_{+\vartheta} + \mathbb{G}T_{+r}$$



Rovnice vedení tepla ve 3D

Koeficienty

$$\mathbb{A}_i = K_i^r (a_i + w_i b_i) \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) \sin^2 \vartheta_j \quad \mathbb{B}_i = -\frac{\cos \vartheta_j \sin \vartheta_j}{2s_i^2 \Delta \vartheta} K_j^\vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta_j}{s_i^2 \Delta \vartheta^2} K_j^\vartheta$$

$$\mathbb{D}_i = K_i^r (b_i(1-w_i) + c_i) \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) \sin^2 \vartheta_j + K_{i+1}^r (a_{i+1} + w_{i+1} b_{i+1}) \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{\Delta r_i} \right) \sin^2 \vartheta_j \\ + \frac{\cos \vartheta_j \sin \vartheta_j}{2s_i^2 \Delta \vartheta} (K_j^\vartheta - K_{j+1}^\vartheta) - \frac{\sin^2 \vartheta_j}{s_i^2 \Delta \vartheta^2} (K_j^\vartheta + K_{j+1}^\vartheta) - \frac{1}{s_i^2 \Delta \varphi^2} (K_l^\varphi + K_{l+1}^\varphi)$$

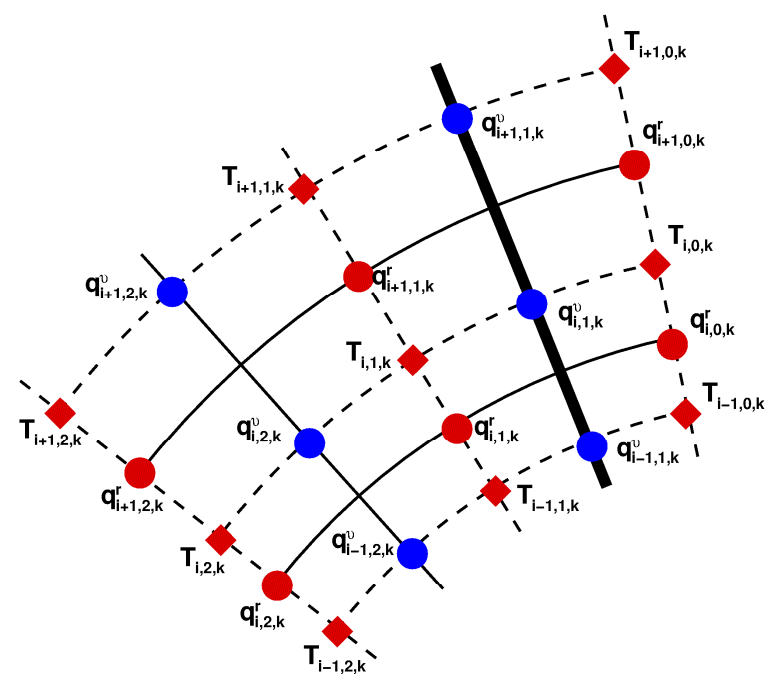
$$\mathbb{C}_i = \frac{1}{s_i^2 \Delta \varphi^2} K_l^\varphi \quad \mathbb{E}_i = \frac{1}{s_i^2 \Delta \varphi^2} K_{l+1}^\varphi \quad \mathbb{F}_i = \frac{\cos \vartheta_j \sin \vartheta_j}{2s_i^2 \Delta \vartheta} K_{j+1}^\vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta_j}{s_i^2 \Delta \vartheta^2} K_{j+1}^\vartheta$$

$$\mathbb{G}_i = K_{i+1}^r (b_{i+1}(1-w_{i+1}) + c_{i+1}) \left(\frac{1}{s_i} + \frac{1}{\Delta r_i} \right) \sin^2 \vartheta_j$$

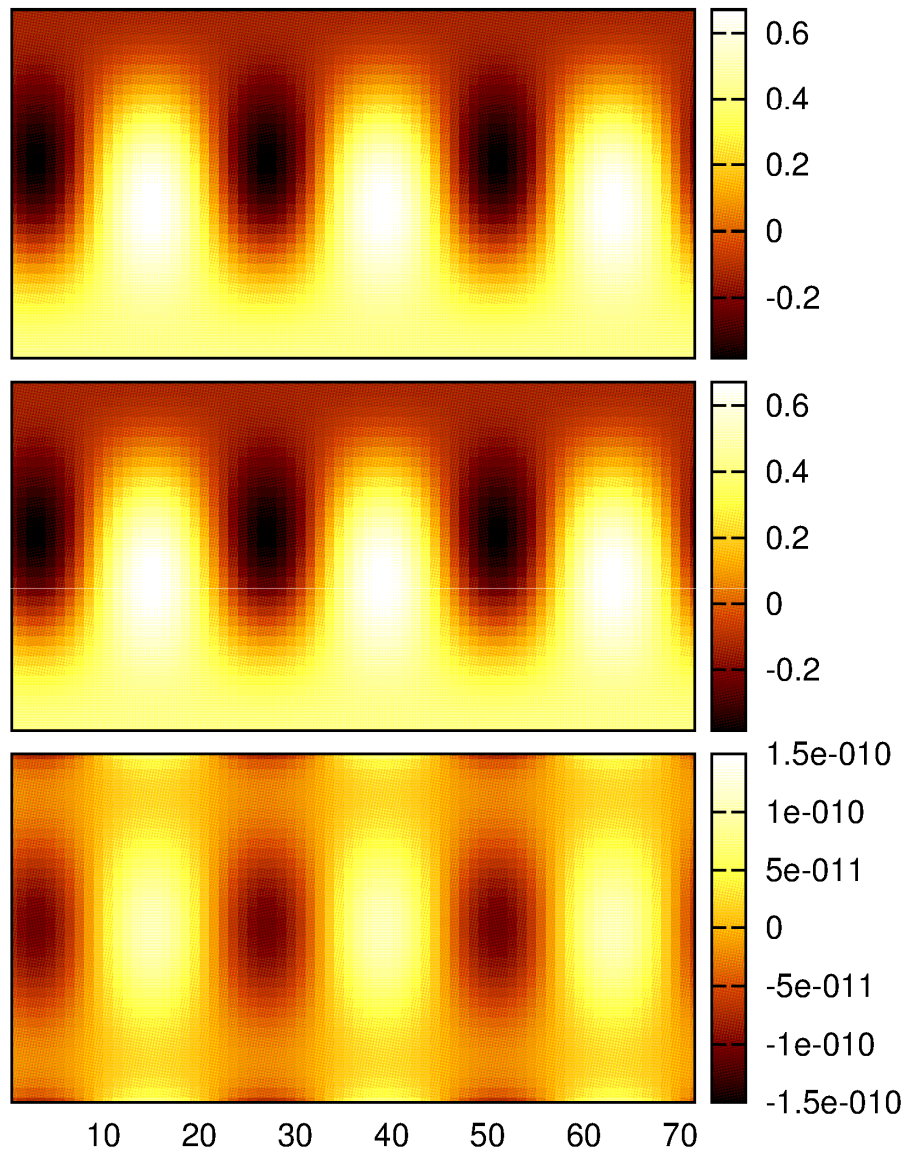
Rovnice vedení tepla ve 3D

Okrajové podmínky

- na spodní a horní hranici situace shodná s 1D případem
- v souřadnici φ (délka) dodána podmínka cykličnosti
- okolí pólů odkrojeno – extrapolace teploty

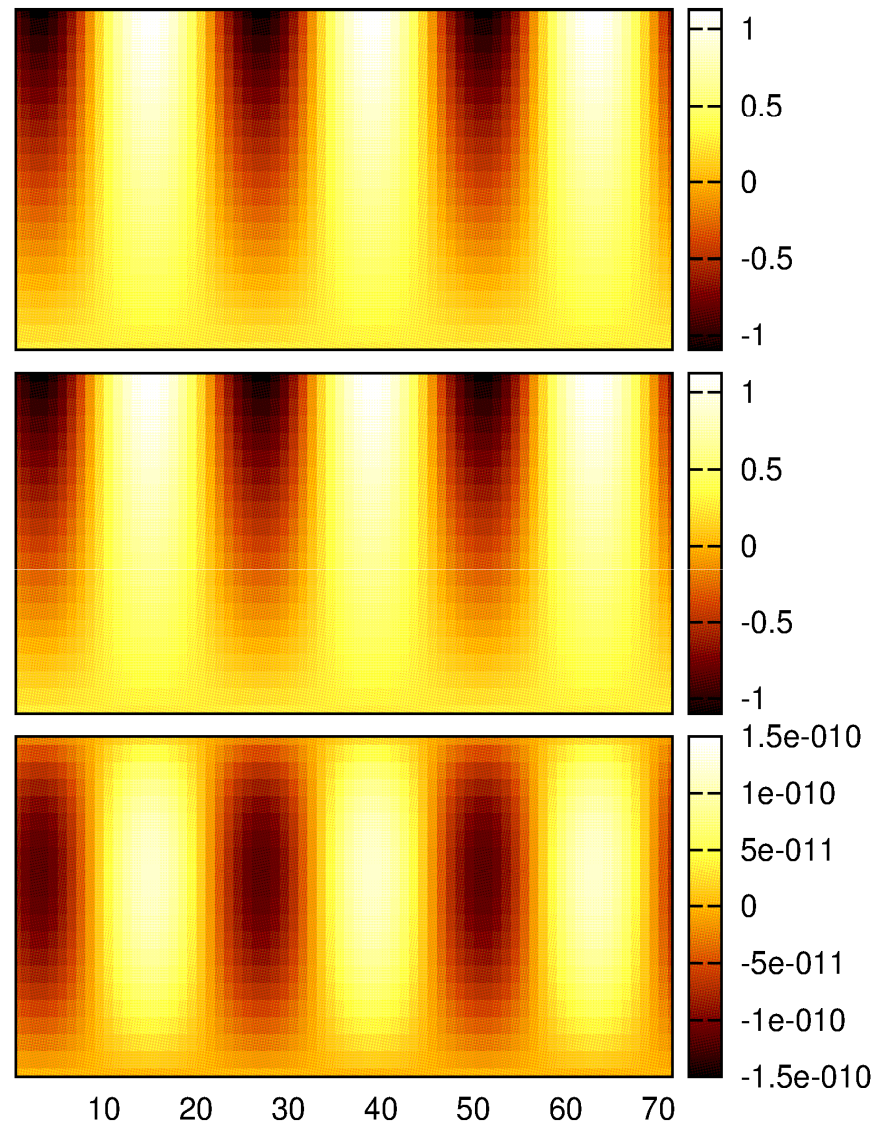


Test 3D - na hranicich sfericke harmoniky



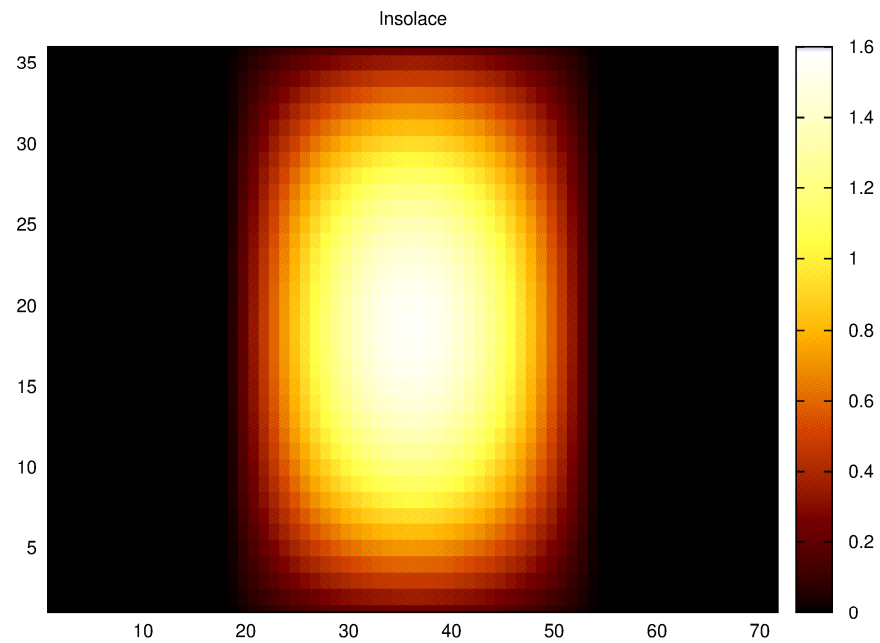
průběh ve středu vrstvy

Test 3D - na hranicich sfericke harmoniky



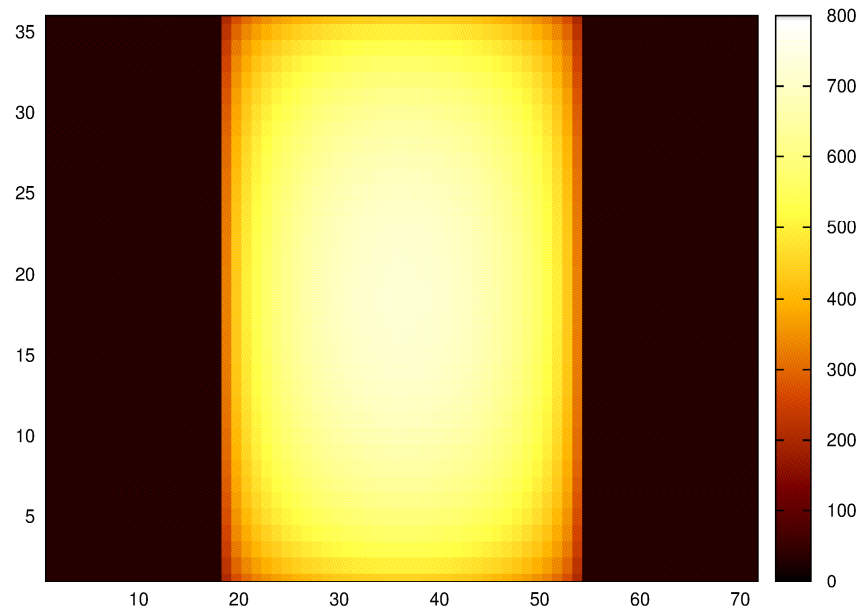
radiální průběh

povrch

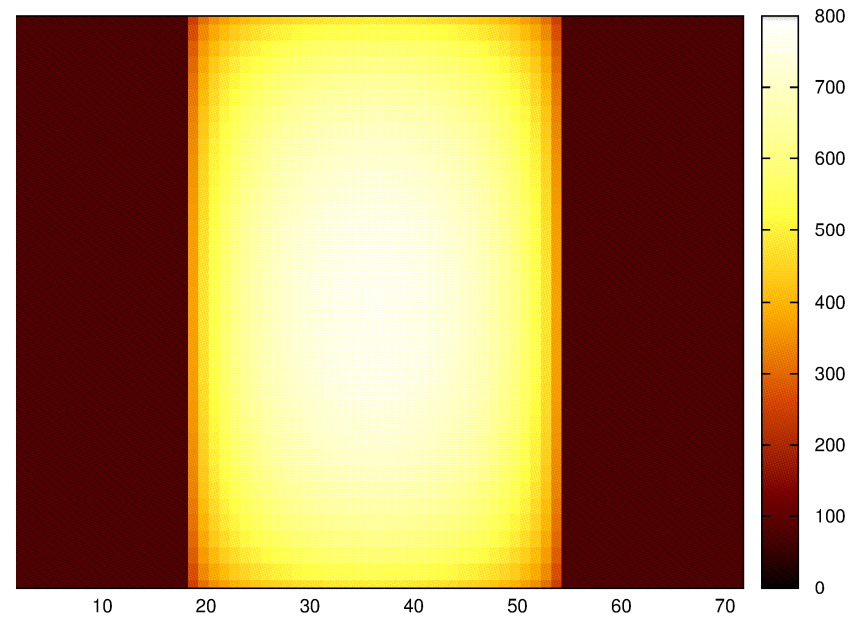


střed vrstvy

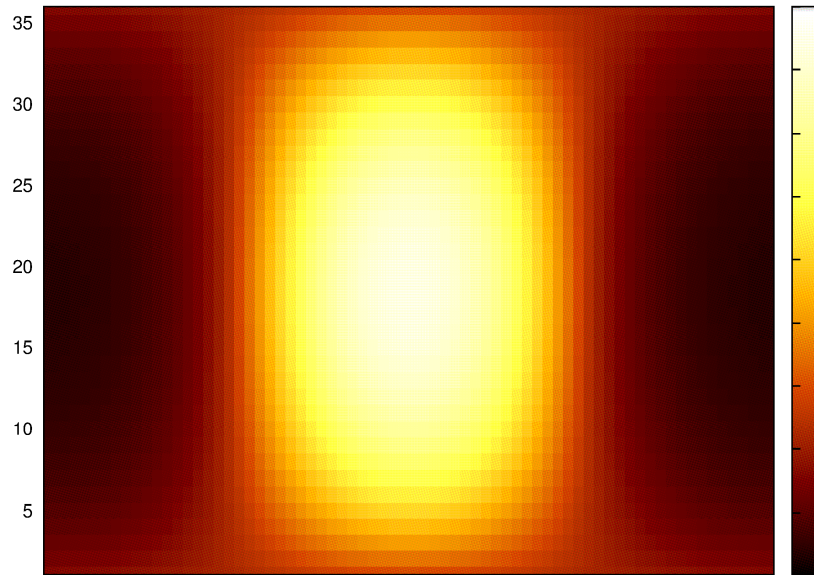
Rozloženi teploty - steady state, $K=1$, na dolní hranici $q=0.075$



Rozloženi teploty - steady state, $K=1$, na dolní hranici $q=0.075$

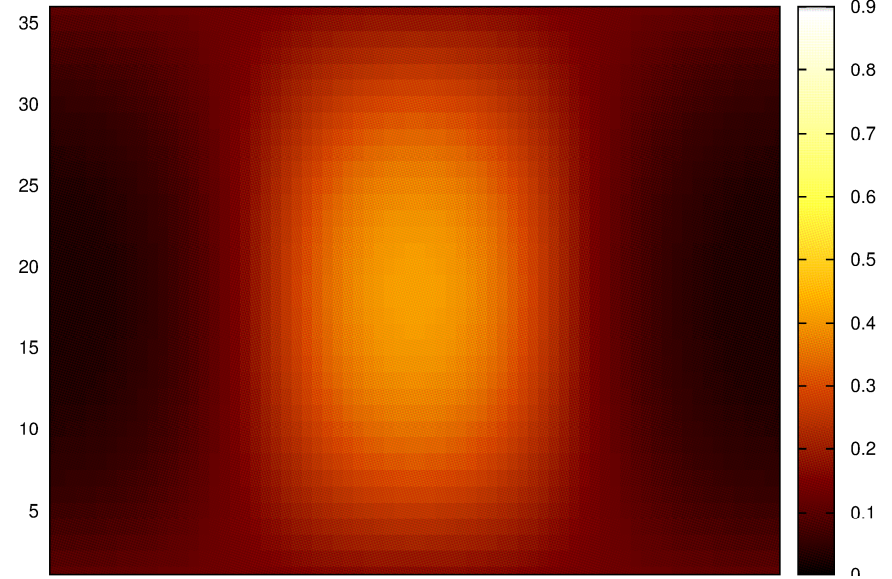


Rozlozeni teploty - steady state

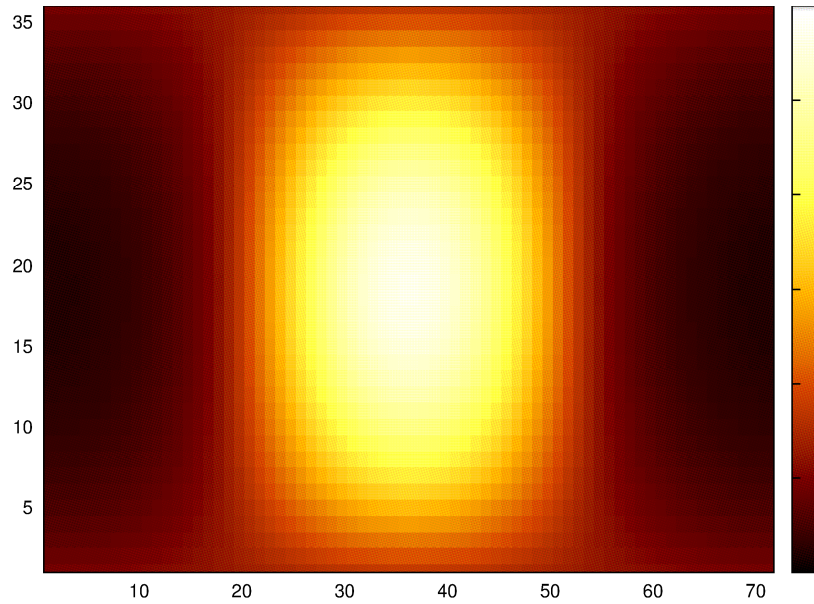


$K=1$

Rozlozeni teploty - steady state

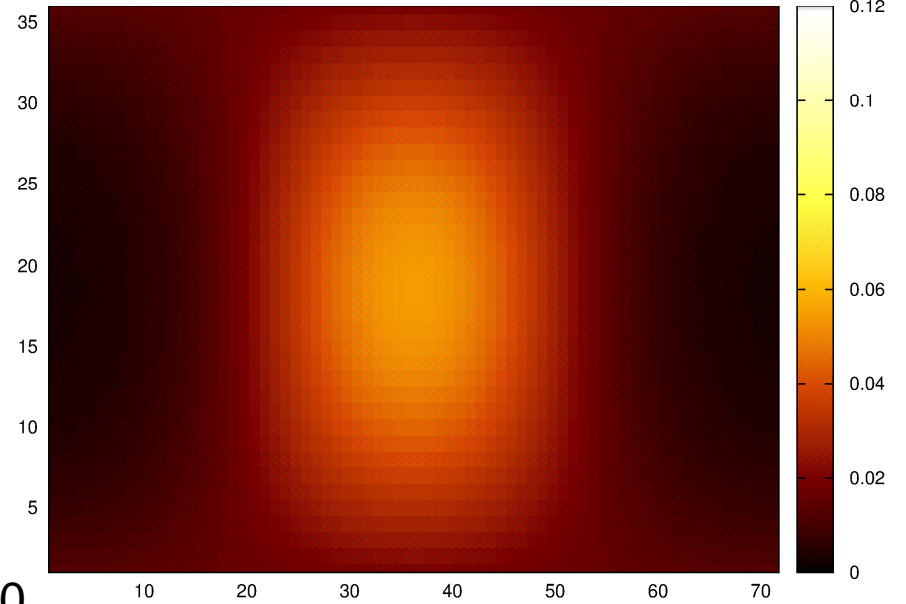


Rozlozeni teploty - steady state

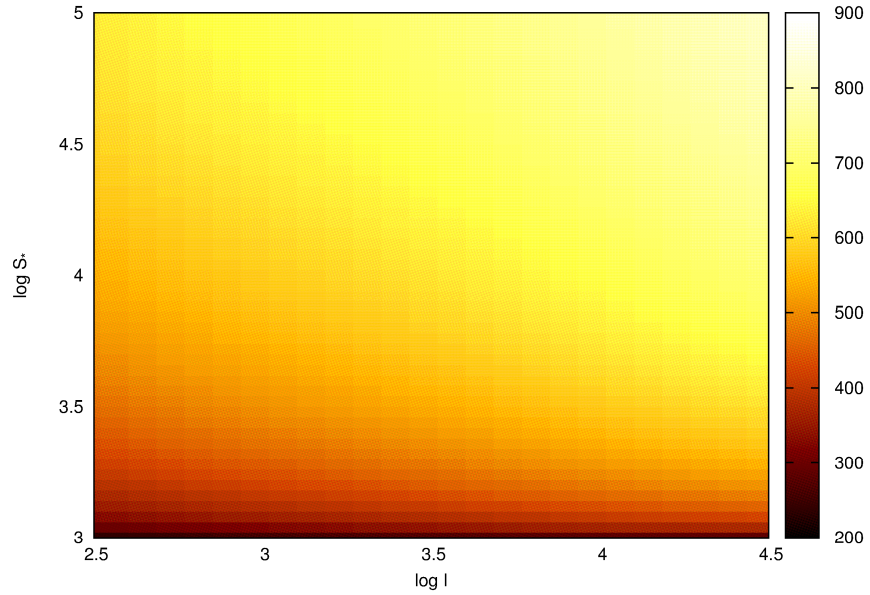


$K=10$

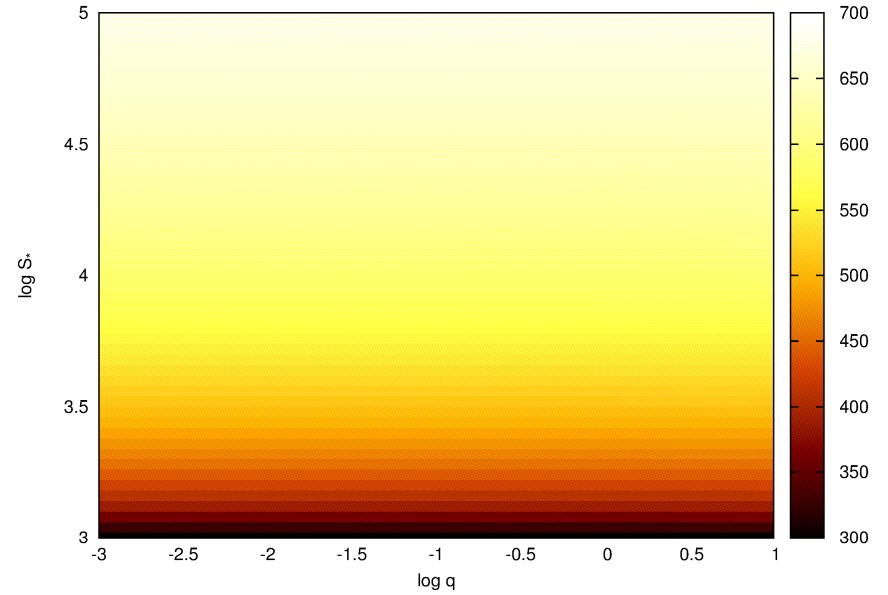
Rozlozeni teploty - steady state



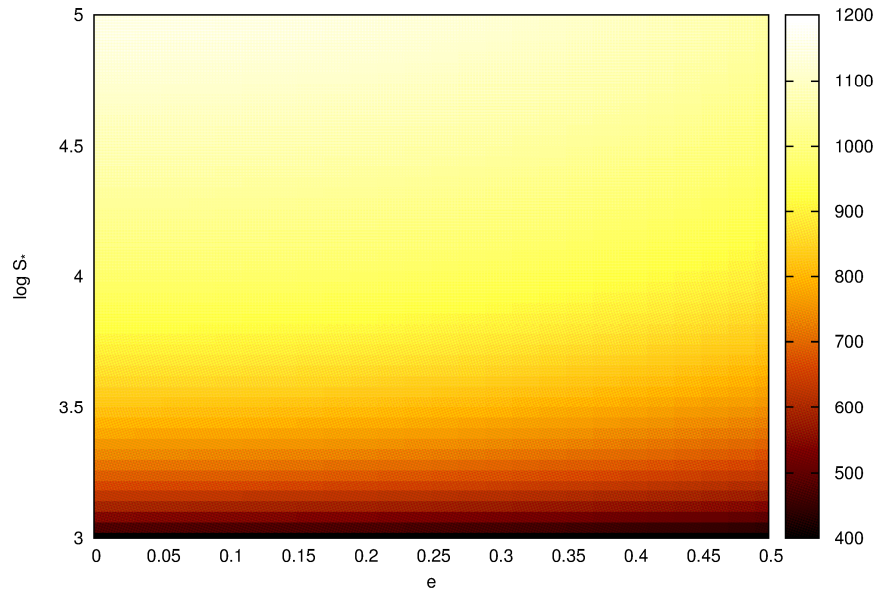
Nejvyšší průměrná teplota v závislosti na l a S .



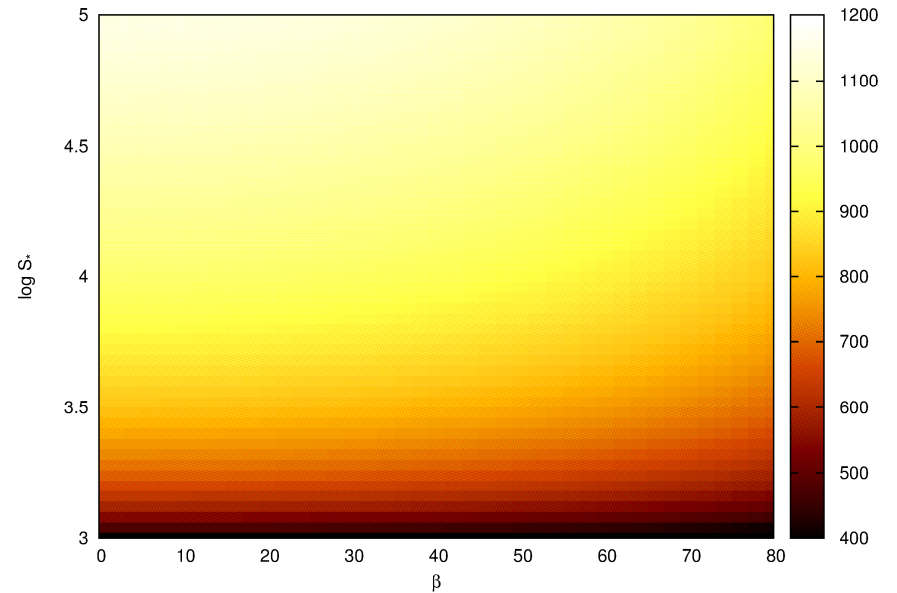
Nejvyšší průměrná teplota v závislosti na q a S .



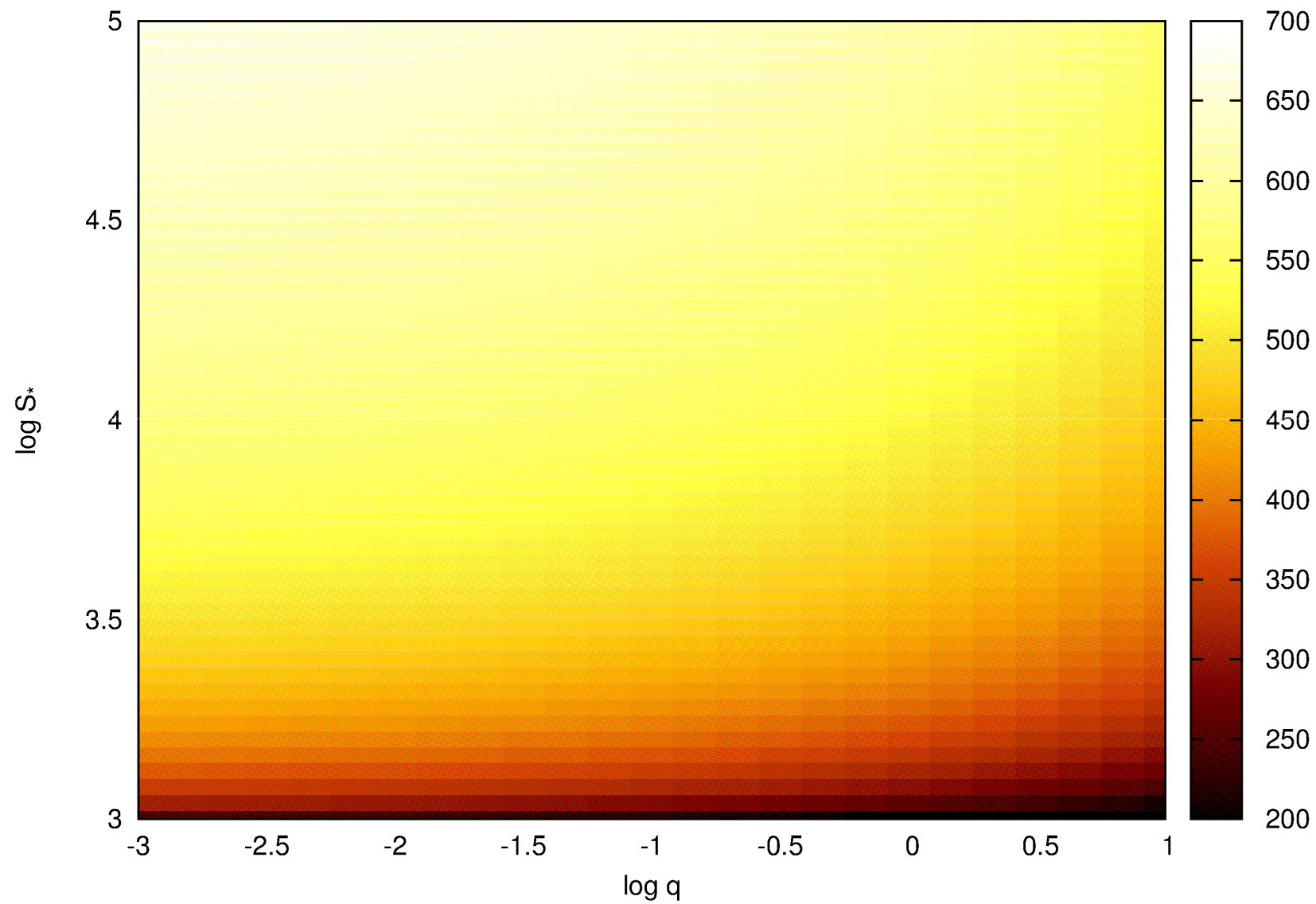
Nejvyšší průměrná teplota v závislosti na e a S .



Nejvyšší průměrná teplota v závislosti na β a S .



Nejvyšší rozdily teploty v závislosti na q a S_*



Bude doplněno

- časové řešení ve 3D
- závislost maximální teploty a teplotního kontrastu na vzájemném časovém odstupu průchodu periastrum a jarní rovnodennosti
- tytéž závislosti pro resonanci 3:2, nalezení škálování
- skin efekt

Do budoucna snad:

- nekonstantní q na spodní hranici
- různé insolační vzory pro 3D model konvekce

Závěr

- průměrná teplota menší než teplota steady state při průměrné insolaci
- teplotní rozdíl na povrchu v časově proměnném řešení klesá s rostoucí tepelnou setrvačností
- pro zadanou sluneční konstantu a resonanci 1:1 maximální teplota roste s tepelnou setrvačností, klesá se vzrůstajícím sklonem rotační osy, slabě klesá s rostoucí excentricitou
- maximální teplota příliš neovlivněna tepelným tokem na spodní hranici
- teplotní kontrast na planetě pozvolna klesá s rostoucím řádem q