

Globální barotropní oceánský model

David Einšpigel

Katedra geofyziky, MFF UK

17.4.2013



$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} + \rho \vec{g}$$

- Rovnice mělké vody se odvodí z 3-D Navierových-Stokesových rovnic.
- Předpokládáme, že poměr vertikálního a horizontálního rozměru je malý.
- 3-D problém s pohyblivou hladinou se zredukuje na 2-D problém pro horizontální proudění a elevaci vodní hladiny.

Efekt turbulentní viskozity

- Typické Reynoldsovo číslo pro proudění v oceánech: $R_e \approx 10^{11}$, proudění je turbulentní, efekt molekulárního viskozity je zanedbatelný
- Turbulence se popisují pomocí tzv. Reynoldsova tenzoru:

$$\frac{\sigma}{\rho} = \begin{pmatrix} 2A_H \frac{\partial u}{\partial x} & A_H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & A_V \frac{\partial u}{\partial z} + A_H \frac{\partial w}{\partial x} \\ A_H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2A_H \frac{\partial v}{\partial y} & A_V \frac{\partial v}{\partial z} + A_H \frac{\partial w}{\partial x} \\ A_V \frac{\partial u}{\partial z} + A_H \frac{\partial w}{\partial x} & A_V \frac{\partial v}{\partial z} + A_H \frac{\partial w}{\partial x} & 2A_V \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- A_H, A_V – turbulentní viskozita

Okrajové podmínky

- Na hladině:

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \zeta$$

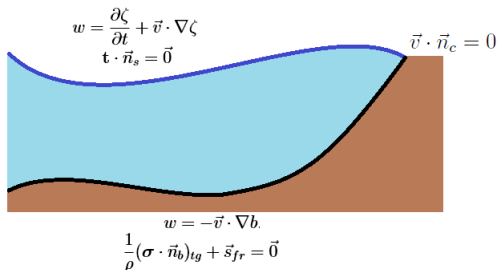
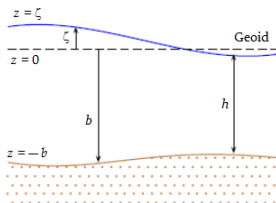
$$\mathbf{t} \cdot \vec{n}_s = \vec{0}$$

- Na dně:

$$w = -\vec{v} \cdot \nabla b$$

$$\frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}_b)_{tg} + k\vec{v}|\vec{v}| = \vec{0}$$

- Na pobřeží: $\vec{v} \cdot \vec{n}_c = 0$



Aproximace mělké vody v geografických souřadnicích

- Při odvozování rovnic mělké vody v geografických souřadnicích využijí faktu, že poměr hloubky oceánu ku poloměru Země je zanedbatelný

$$r = a + z = a \left(1 + \frac{z}{a} \right)$$

- Dále se pak používá

$$r = a \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}$$

- V dalším kroku přejdeme do bezrozměrných veličin a zanedbáme členy, které jsou $O(\epsilon)$, $\epsilon = \frac{H}{L}$.
- Vertikální složka pohybové rovnice se zredukuje na rovnici hydrostatické rovnováhy:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

- V druhém kroku přeintegrujeme rovnice přes vertikální osu, aplikujeme okrajové podmínky a získáme vertikálně zprůměrované rovnice.
- Dále zanedbáme derivace horizontálních rychlostí podle vertikální souřadnice.

Rovnice mělké vody v geografických souřadnicích

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial \lambda} + \frac{\partial(\cos \phi h\bar{v})}{\partial \phi} \right) = 0$$

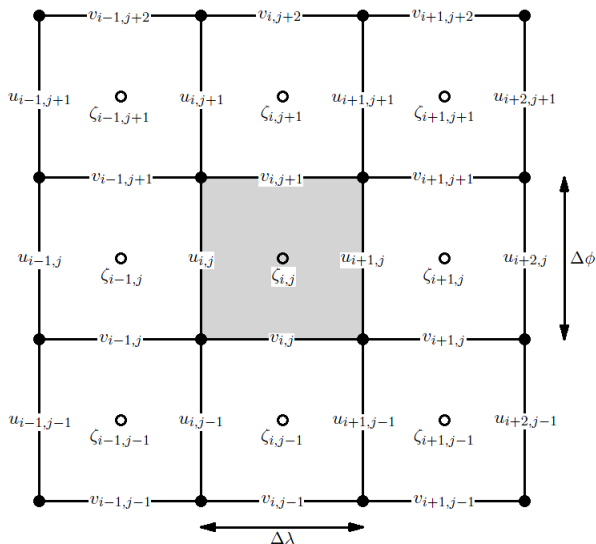
$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial \phi} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial \lambda} - 2 \frac{\tan \phi}{a} h\bar{u}\bar{v} = - \frac{gh}{a \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + fh\bar{v} -$$

$$k\bar{u} \sqrt{h\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \frac{A_H}{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} + \tan \phi h\bar{u} \right) + \right. \\ \left. \frac{2}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} - \tan \phi h\bar{v} \right) - h\bar{u} + \tan \phi \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} - 2 \tan \phi h\bar{u} \right) \right]$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial \phi} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(h\bar{v}\bar{u})}{\partial \lambda} + \frac{\tan \phi}{a} (h\bar{u}^2 - h\bar{v}^2) = - \frac{gh}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} - fh\bar{u} -$$

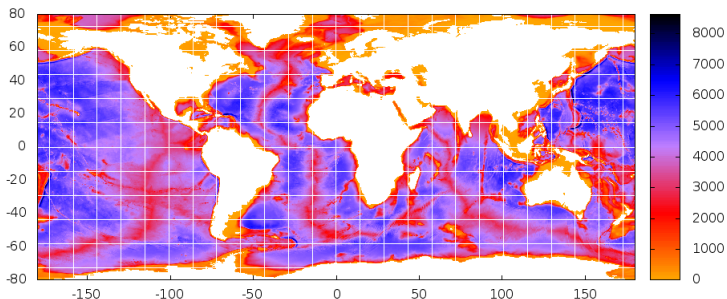
$$k\bar{v} \sqrt{h\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \frac{A_H}{a^2} \left[2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} + \tan \phi h\bar{u} \right) - \right. \\ \left. h\bar{v} + 2 \tan \phi \left(\frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} - h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \tan \phi h\bar{v} \right) \right]$$

Konečné diference: Arakawa C-grid



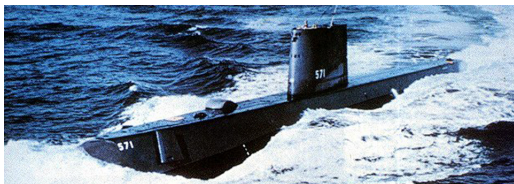
Batymetrie

- Batymetrie oceánu je určena modelem ETOPO1 Global Relief Model, <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/global.html>
- Rozlišení lze volit libovolné, teoreticky až do 1'



Co se Severním pólem?

- V srpnu 1958 americká jaderná ponorka USS Nautilus podeplula pod Severním pólem, čímž definitivně potvrdila, že Arktida není kontinent



- Rovnice mi ale v geografických souřadnicích divergují na pólech \Rightarrow počítám s umělým kontinentem pro $\phi > 80^\circ$
- Výhled do budoucna: užití stereografických souřadnic na oblast Severního pólu

Semi-implicitní schéma

- Semi-implicitní aproximace rovnic (Backhaus, 1983, 1985)

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n - \frac{\Delta t}{a \cos \phi_j} \left(\frac{\partial U^{n+1/2}}{\partial \lambda} + \frac{\partial(\cos \phi V^{n+1/2})}{\partial \phi} \right) \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \end{pmatrix} = F \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U^n \\ V^n \end{pmatrix} - \frac{gh\Delta t}{a} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \zeta^{n+1/2}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \zeta^{n+1/2}}{\partial \phi} \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} X^n \\ Y^n \end{pmatrix} \right] \quad (2)$$

- $\zeta^{n+1/2} = (\zeta^{n+1} + \zeta^n)/2$,
 $U^{n+1/2} = (U^{n+1} + U^n)/2 \quad (U = h\bar{u})$,
 $V^{n+1/2} = (V^{n+1} + V^n)/2 \quad (V = h\bar{v})$
- $\alpha = \cos(f\Delta t)$,
 $\beta = \sin(f\Delta t)$,
 $f = 2\Omega \sin \phi$
- Dosazením (2) do (1) získáme soustavu lineárních rovnic pro ζ^{n+1} .

Nelineární členy v rovnicích

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial \phi} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial \lambda} - 2 \frac{\tan \phi}{a} h\bar{u}\bar{v} = -\frac{gh}{a \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + fh\bar{v} -$$

$$k\bar{u}\sqrt{h\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \frac{A_H}{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} + \tan \phi h\bar{u} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{2}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} - \tan \phi h\bar{v} \right) - h\bar{u} + \tan \phi \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} - 2 \tan \phi h\bar{u} \right) \right]$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial \phi} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(h\bar{v}\bar{u})}{\partial \lambda} + \frac{\tan \phi}{a} (h\bar{u}^2 - h\bar{v}^2) = -\frac{gh}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} - fh\bar{u} -$$

$$k\bar{v}\sqrt{h\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \frac{A_H}{a^2} \left[2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} + \tan \phi h\bar{u} \right) - \right.$$

$$\left. h\bar{v} + 2 \tan \phi \left(\frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} - h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \tan \phi h\bar{v} \right) \right]$$

Nelineární členy v rovnicích - tření na dně

Tření na dně je vyjádřeno kvadraticky a aproximuje se semi-implicitně:

$$\tau_x = k \frac{U}{h^2} \sqrt{U^2 + V^2} \quad \rightarrow \quad kU^{n+1} (\sqrt{U^2 + V^2}/h)^n,$$

což vede na bezrozměrnou třecí funkci

$$F^x = \frac{1}{1 + k\Delta t (\sqrt{U^2 + V^2}/h_x^2)^n}.$$

⇓

$$\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \end{pmatrix} = F \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U^n \\ V^n \end{pmatrix} - \frac{gh\Delta t}{a} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \zeta^{n+1/2}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \zeta^{n+1/2}}{\partial \phi} \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} X^n \\ Y^n \end{pmatrix} \right]$$

Nelineární advekční členy jsou vyjádřeny explicitně. Aby se zabránilo vzniku nestability, použije se metoda predictor-corrector (Duwe et al., 1983):

- 1 Vypočteme hodnoty na hladině $n + 1$ obvyklým způsobem.
- 2 Spočítáme průměr všech proměnných z hladin n a $n + 1$.
- 3 Stejně jako v kroku 1, ale počítáme ze zprůměrované hladiny $n + 1/2$ s polovičním časovým krokem.

Viskózní členy

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial \phi} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial \lambda} - 2 \frac{\tan \phi}{a} h\bar{u}\bar{v} = - \frac{gh}{a \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + f h\bar{v} -$$

$$k\bar{u} \sqrt{h\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \frac{A_H}{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} + \tan \phi h\bar{u} \right) + \right. \\ \left. \frac{2}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} - \tan \phi h\bar{v} \right) - h\bar{u} + \tan \phi \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} - 2 \tan \phi h\bar{u} \right) \right]$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial \phi} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial(h\bar{v}\bar{u})}{\partial \lambda} + \frac{\tan \phi}{a} (h\bar{u}^2 - h\bar{v}^2) = - \frac{gh}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} - f h\bar{u} -$$

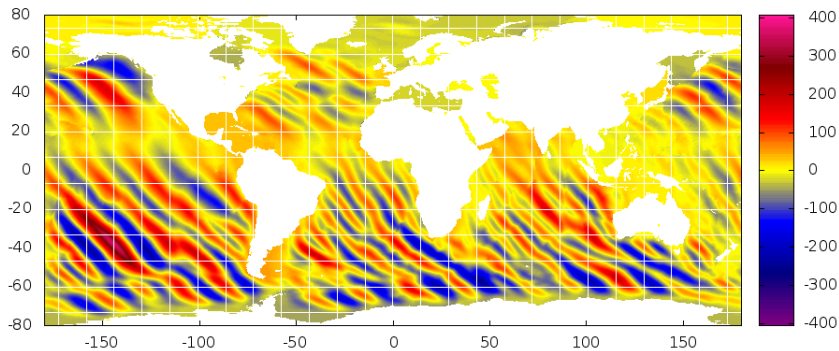
$$k\bar{v} \sqrt{h\bar{u}^2 + \bar{v}^2} + \frac{A_H}{a^2} \left[2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} + \frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} + \tan \phi h\bar{u} \right) - \right. \\ \left. h\bar{v} + 2 \tan \phi \left(\frac{h}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} - h \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \tan \phi h\bar{v} \right) \right]$$

- A_H není obecně konstanta, neboť je to vlastnost proudění, nikoliv vody
- Vzhledem k počítání v konečných diferencích na kouli uvažujeme závislost na zeměpisné šířce:
 - Pro meridionální proudění: $A_m = A_H = konst.$
 - Pro zonální proudění: $A_z = A_H \cos \phi$
- Hrubé odhady A_H : $10 - 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$

Špatný odhad A_H

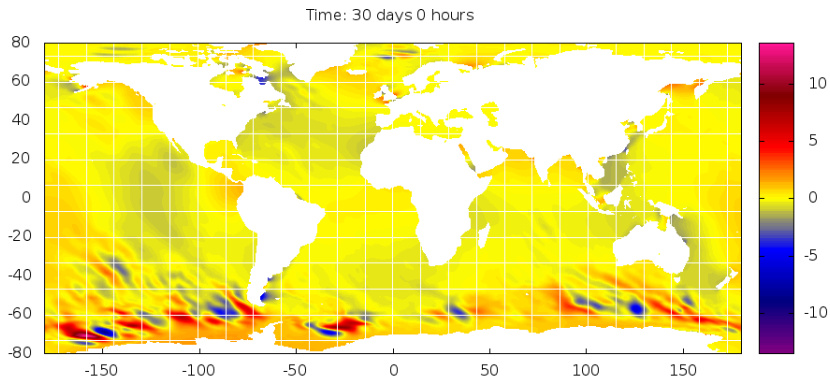
$$A_H = 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$$

Time: 22 days 22 hours



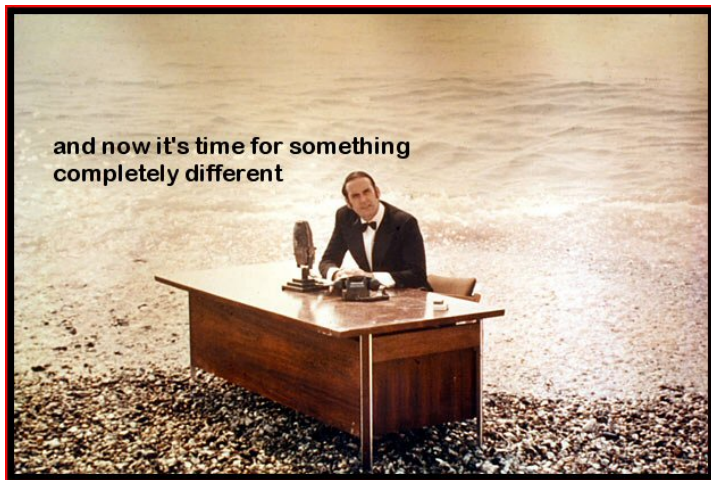
Špatný odhad A_H

Zonální proudění: $A_z = A_H \neq A_H \cos \phi$, $A_H = 10^4 \text{ m}^2/\text{s}$



Megacunami

A teď z jiného soudku...

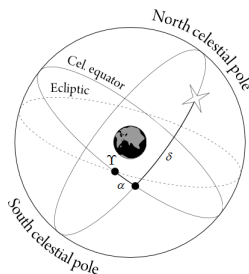
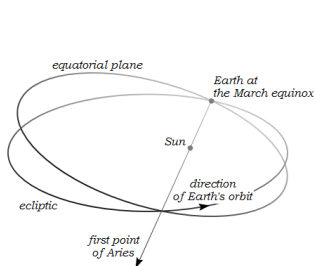


Efemeridní slapový modul

Slapový potenciál:

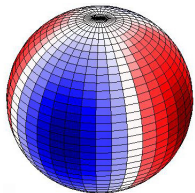
$$V_2 = \frac{3}{4} \frac{GMa^2}{d^3} \left[\cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos(2\tau) + \sin(2\phi) \sin(2\delta) \cos \tau + 3 \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$\tau = \Omega T_{Gr} + \lambda - \alpha$$

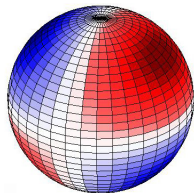


Efemeridní slapový modul

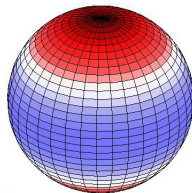
$$V_2 = \frac{3}{4} \frac{GMa^2}{d^3} \left[\cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos(2\tau) + \right. \\ \left. \sin(2\phi) \sin(2\delta) \cos \tau + \right. \\ \left. 3 \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \right]$$



Sectorial term



Tesseral term



Zonal term

Slapové působení v našich rovnicích: $\vec{F}_T = -h\gamma\nabla V_2$

- γ je kombinace Lovevých čísel: $\gamma = 1 + k - h$, $k = 0,302$, $h = 0,612$
- Gradient potenciálu:

$$(\nabla V_2)_\lambda = \frac{3}{2} \frac{GMa}{d^3} (\cos \phi \cos^2 \delta \sin(2\tau) + \sin \phi \sin(2\delta) \sin \tau),$$

$$(\nabla V_2)_\phi = \frac{3}{4} \frac{GMa}{d^3} (\sin(2\phi) \cos^2 \delta \cos(2\tau) - 2 \cos(2\phi) \sin(2\delta) \cos \tau - \sin(2\phi)(3 \sin^2 \delta - 1)).$$

- Pro počítání efemeridů je použit volně dostupný soubor subroutin NOVAS F3.1 od U.S. Naval Observatory http://aa.usno.navy.mil/software/novas/novas_f/novasf_intro.php

Hloubka 3790 m

(Snad) realistické mořské slapy

