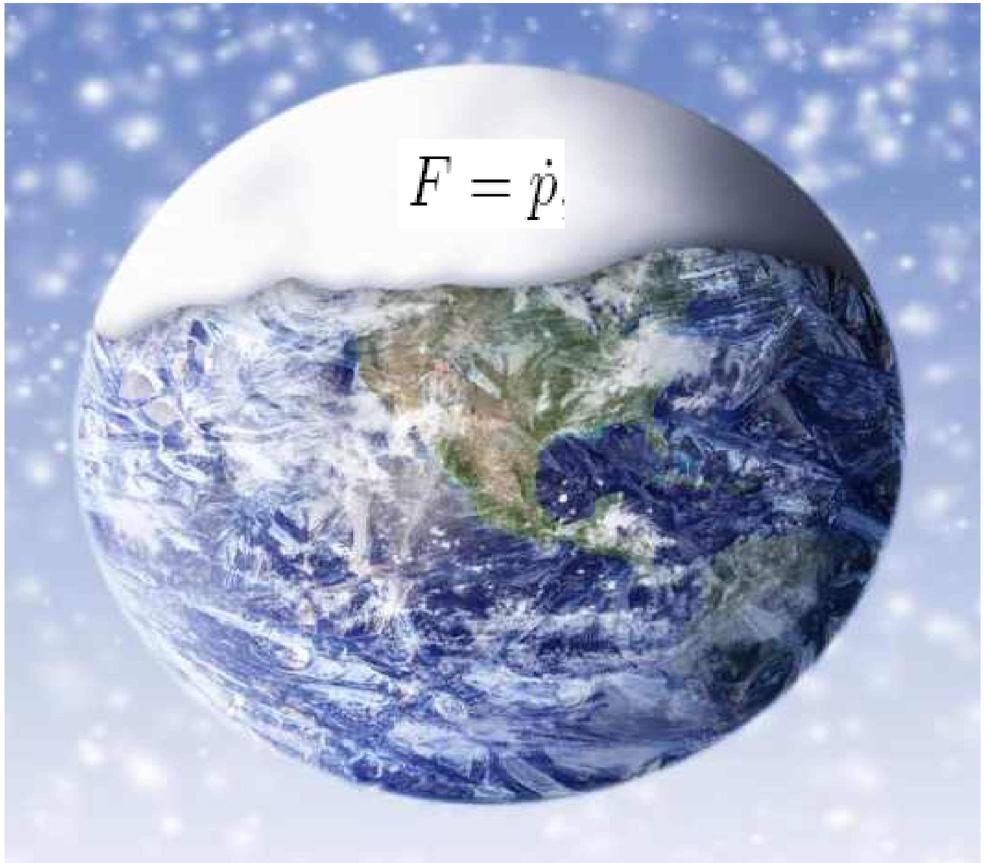
Dynamika systémů s proměnnou hmotností



Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

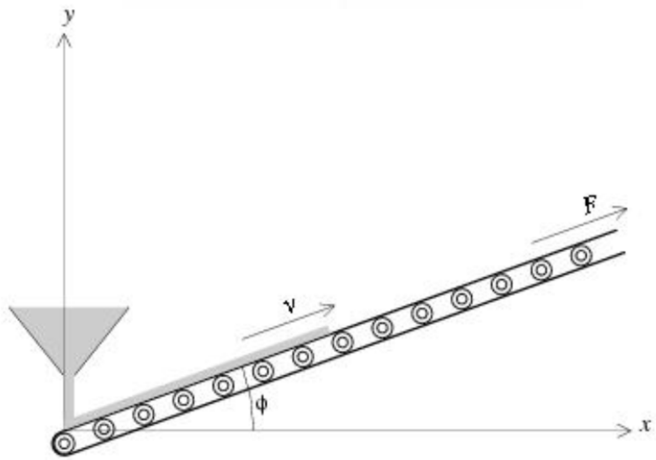
- Buquoyovy úlohy
- Práce a energie v řešení Buquoyových úloh
- Mnohočásticové modely
- Problém rakety
- Pružné a nepružné srážky
- Fundemtální zákon vs. kinematická podmínka

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

Buquoyovy úlohy

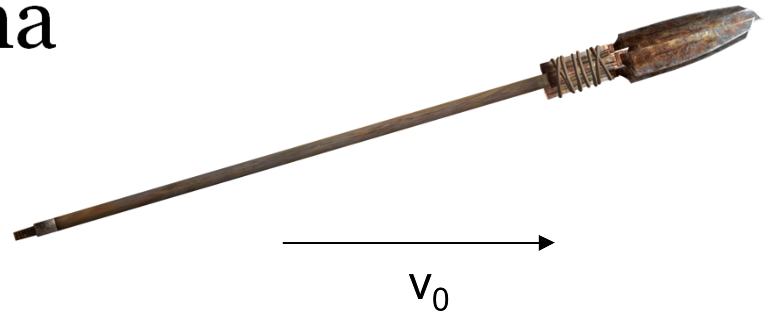
(Obrázky a řešení převzaty od Kamila Daňka)

- Harpuna
- Stoupající balónek
- Nakloněný pás



Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

Harpuna



$$\boxed{\dot{p} = m\dot{v} + \dot{m}v.}$$

$$\dot{m}\dot{x} + m\ddot{x} = 0.$$

$$m = M + \eta x$$

$$\eta\,\dot{x}^2 + (M + \eta x)\ddot{x} = 0,$$

řešení:

$$x = \frac{1}{\eta}\left(\sqrt{(M + \eta x_0)^2 + 2\eta\, v_0(\eta x_0 + M)t} - M\right).$$

$$\dot{x} = \frac{(M + \eta x_0)v_0}{\sqrt{(M + \eta x_0)^2 + 2\eta v_0(\eta x_0 + M)t}}$$

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

Stoupající balónek

(Obrázky a řešení převzaty od J. Podolského)

$$m = \eta x$$

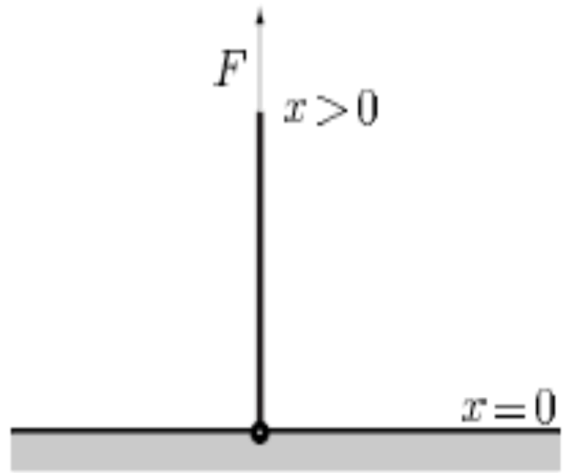
$$\dot{p} = F - mg$$

nahoru: $$\ddot{x} = \frac{F}{\eta\, x} - g - \frac{\dot{x}^2}{x}$$

dolů: $$\ddot{x} = \frac{F}{\eta\, x} - g$$

pohybová rovnice celistvě:

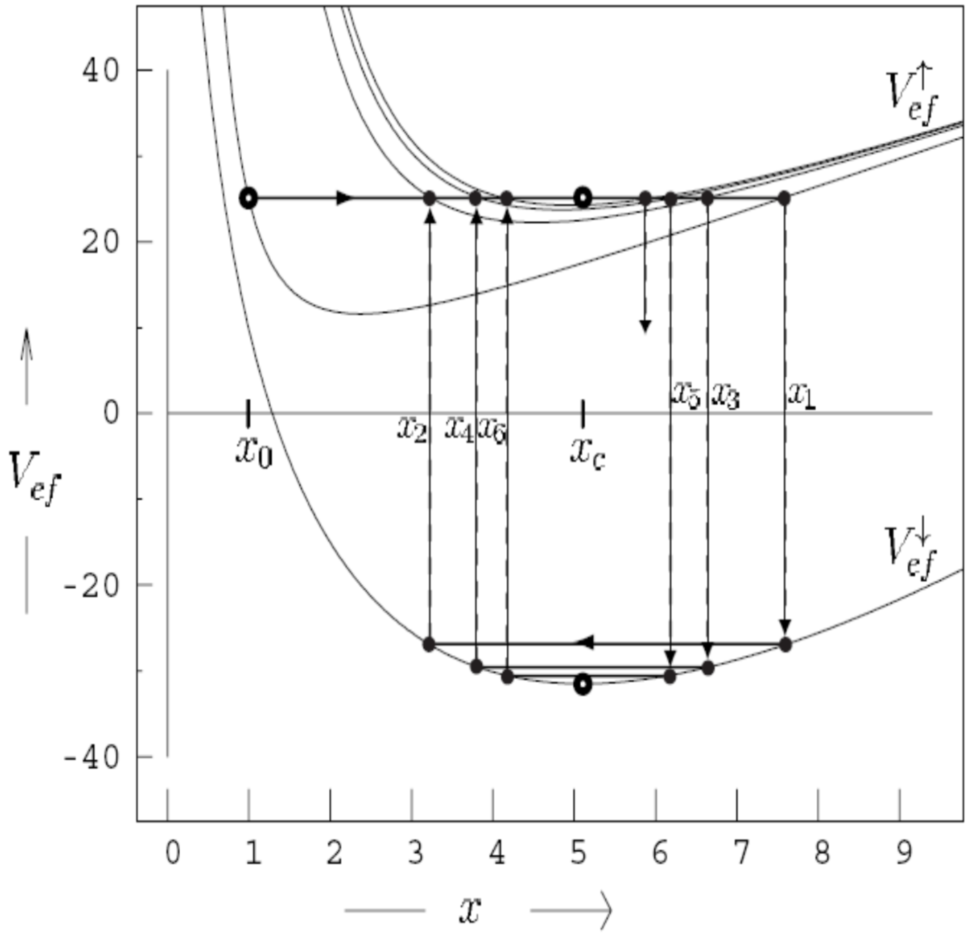
$$\ddot{x} = g\left(\frac{x_c}{x} - 1\right) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}\dot{x})\frac{\dot{x}^2}{x}$$



Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

nahoru: $$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V_{\text{ef}}^{\uparrow}(x) = \frac{F}{2\eta}, \qquad V_{\text{ef}}^{\uparrow}(x) \equiv \frac{g}{3}x - \frac{C}{x^2}$$

dolů: $$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V_{\text{ef}}^{\downarrow}(x) = V_{\text{ef}}^{\downarrow}(x_1), \qquad V_{\text{ef}}^{\downarrow}(x) = gx - \frac{F}{\eta}\ln x$$



řešení:

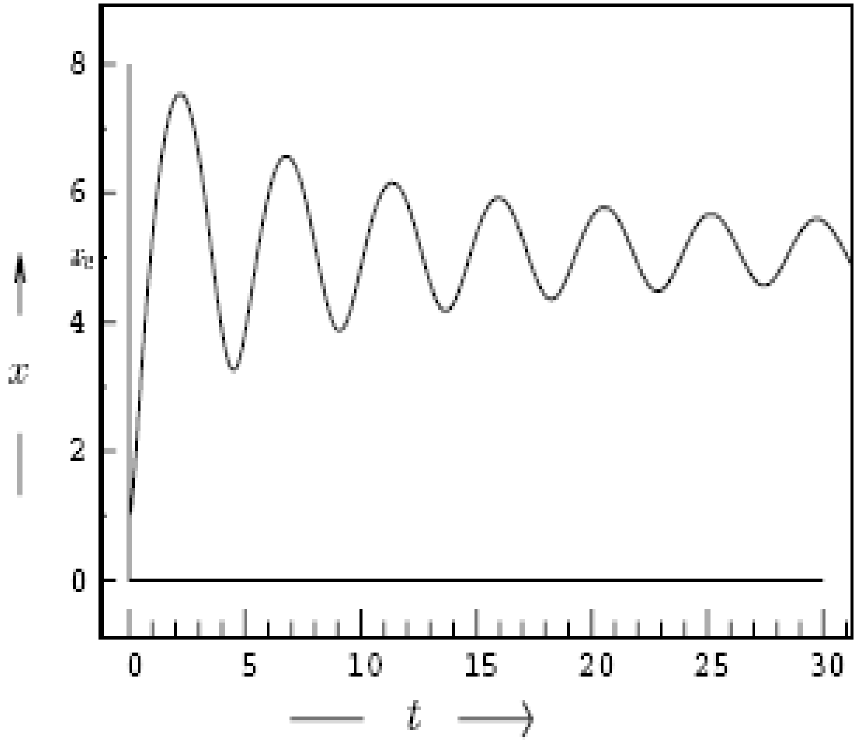


Figure 5. The complete motion of the Buquoy's fibre clearly exhibits damped oscillations around the stationary point x_c.

Nakloněný pás

$$\dot{p} = F - \mu t g \sin\phi$$

$$(M + \mu t)\dot{s} - M v_0 = Ft - \frac{1}{2}\mu t^2 g \sin\phi.$$

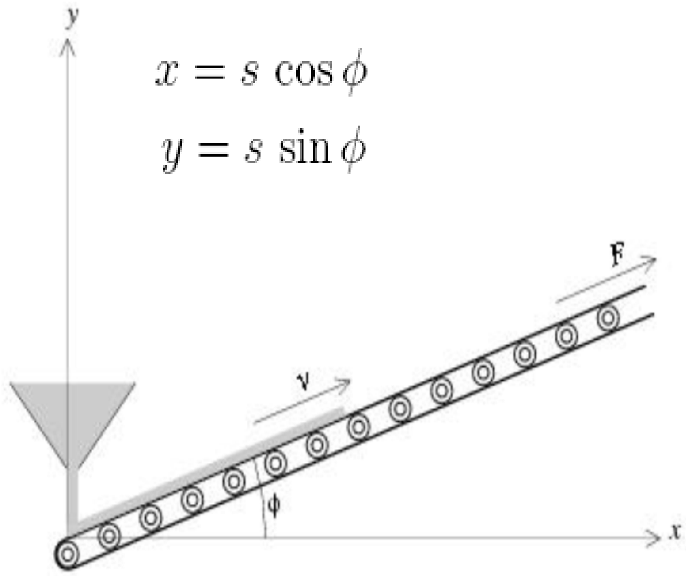
řešení:

$$\dot{s} = C_1 - C_2 t + \frac{C_3}{M + \mu t}$$

$$t_f = \frac{F + \sqrt{F^2 + 2M\dot{s}_0 \mu g \sin\phi}}{\mu g \sin\phi}.$$

$$x = s\cos\phi$$

$$y = s\sin\phi$$



Obrázek 2.4: Nakloněný dopravní pás

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

Práce a energie

$$\int_{s_i}^{s_f} F ds = m \int_{s_i}^{s_f} \dot{v} ds = m \int_{t_i}^{t_f} \dot{v} v dt = m \int_{v_i}^{v_f} v dv = \left[\frac{1}{2} m v^2\right]_{v_i}^{v_f} \Longrightarrow W = \Delta T$$

$$W \equiv \int_{s_i}^{s_f} F ds \qquad \Delta T \equiv \left[\frac{1}{2} m v^2\right]_{v_i}^{v_f}$$

Harpuna:

$$T = \frac{(M + \eta x_0)^2 v_0^2}{2(M + \eta x)}$$ není konstantní

- Stoupající balónek

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (F - mg)dx = \left[Fx - \frac{g\eta}{2}x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

pohyb nahoru: $$\Delta T = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_i}^{v_f} = \left[\frac{1}{2}\eta x v^2\right]_{x_i}^{x_f} = \left[\frac{F}{2}x + \frac{\eta C}{x} - \frac{g\eta}{3}x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

pohyb dolů: $$\Delta T = \left[g\eta\, x_1 x - g\eta\, x^2 + F\, x \ln\frac{x}{x_1}\right]_{x_i}^{x_f}$$

- Nakloněný pás

$$W = \int_{s_i}^{s_f} (F - \mu t g \sin\phi) ds = \int_{t_i}^{t_f} (F - \mu t g \sin\phi) \left(C_1 - C_2 t + \frac{C_3}{M + \mu t} \right) dt$$

$$W = \left[t^3 \frac{1}{3} C_2 g \mu \sin\phi - t^2 \left(\frac{1}{2} F C_2 + \frac{1}{2} C_1 \mu g \sin\phi \right) + t(F C_1 - C_3 g \sin\phi) + \right.$$

$$\left. + \ln\left(\frac{M + \mu t}{M} \right) C_3 \left(\frac{F}{\mu} + \frac{M g \sin\phi}{\mu} \right) \right]_{t_i}^{t_f}$$

$$\Delta T = \left[\frac{1}{2} m \dot{s}^2 \right]_{t_i}^{t_f} = \left[\frac{1}{2} (M + \mu t) \left(C_1 - t C_2 + \frac{C_3}{M + \mu t} \right)^2 \right]_{t_i}^{t_f}$$

Práce vnějších sil a kinetická energie proměnného systému obecně

$$m(t), \vec{v}(t), \quad resp. \quad m(x), \vec{v}(x)$$

$$p(\vec{t_2}) - p(\vec{t_2}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

člen navíc

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot \vec{dx} = \frac{p^2(x_2)}{2m(x_2)} - \frac{p^2(x_1)}{2m(x_1)}$$

$$\Rightarrow F = \frac{d}{dx}\left(\frac{p^2(x)}{2m(x)}\right) = \frac{2p\frac{dp}{dx}2m - 2\frac{dm}{dx}p^2}{(2m)^2} = \frac{dp}{dt} - \frac{1}{2}v\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx}v, \quad x = x(t)$$

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

Mnohočásticové modely

(1) Uvažujme soustavu hmotných bodů ve svetě klasické fyziky (nikoli relativistické, ani kvantové). Máme dány jejich polohy, hmotnosti a rychlosti v určitém okamžiku (počáteční podmínky). Nebudeme uvažovat žádné vnější pole na body působící. Hmotné body na sebe budou vzájemně působit centrálními silami. Závislost velikosti těchto sil na vzájemné vzdálenosti nám bude známa.

(2) Takto zadanou úlohu můžeme s použitím rovnice: „Výslednice vnějších sil působících na hmotný bod se rovná hmotnosti bodu krát zrychlení bodu (ve vektorovém smyslu)“ vyřešit. Vyřešením mám na mysli určit polohy a rychlosti všech bodů v libovolném okamžiku.

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

(3) Nyní se podíváme na toto řešení a provedeme následující: v okamžiku t=0 vybereme určitou část z daných bodů a budeme jim říkat "těleso". Postupně budeme do našeho "tělesa" přibírat další a další body (například ty, které jsou v daném okamžiku za určitou hranici, například počátkem souřadnicové soustavy). Zakreslíme křivku závislosti hmotnosti tělesa (součet hmotností bodů, kterým říkáme "těleso") na čase. Tuto závislost vyhladíme. Zakreslíme závislost hybnosti tělesa (součet hybností bodů, kterým říkáme "těleso") na čase. Tuto závislost vyhladíme. Zakreslíme závislost vnějších sil na těleso (součet sil působících na body tvořící "těleso", jejichž původ není ve vzájemném působení dvou bodů, které jsou oba v "tělese") na čase. Tuto závislost vyhladíme.

(4) A teď to klíčové: podíváme se, zda-li platí vztah: Výslednice vnějších sil na těleso působících se rovná derivaci hybnosti tělesa. Ja tvrdím, že tomu tak nemusí vždy být (resp. obecně tomu tak nebude, ale náhodou tomu tak být může).

http://en.wikipedia.org/wiki/Elastic_collision

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

Problém rakety

Pohybová rovnice: $$F = \dot{p} = \dot{p}_R + \dot{p}_S = m\dot{v} + \dot{m}v + \dot{m}_S(v-u)$$

$$\dot{m}_S = -\dot{m} = \mu.$$

$$\boxed{F = m\dot{v} + \dot{m}u = m\dot{v} - \mu u.}$$

Zde je první věta impulzová evidentně aplikována na systém o konstantní hmotnosti, nikoli na systém o hmotnosti proměnné, přestože z ní odvodíme rovnici pro rychlost rakety, jejíž hmotnost se mění !

Pružné a nepružné srážky

V obou případech se zachovává celková hybnost částic

$$\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{net}} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1' + m_2\vec{\mathbf{v}}_2' = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2$$

Pouze v případě dokonale pružné srážky se zachovává i kinetická energie

$$K_{\mathrm{net}} = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

- V případě dokonale pružné srážky potřebujeme k určení trajektorie těles po srážce nejen zákon zachování hybnosti, ale také zákon zachování kinetické energie. Kdyby nás ovšem zajímala pouze trajektorie těžiště soustavy, stačil by nám k řešení úlohy zákon zachování hybnosti

- V případě dokonale nepružné srážky vlastně řešíme výše zmíněnou úlohu, tedy hledáme trajektorii těžiště – a k tomu nám stačí zákon zachování hybnosti. To druhé, co nám definuje nepružnou srážku, je kinematická podmínka: obě tělesa se po srážce budou pohybovat jako těleso jedno, tedy stejnou rychlostí. Tato podmínka omezující libovolnost v řešení úlohy, pokud bychom zapojili pouze zákon zachování hybnosti, nám jednoznačně určuje řešení, a tedy i množství kinetické energie ztracené při srážce

Fundamentální zákon vs. kinematická podmínka

Formulace pohybové rovnice u výše řešených příkladů je velice podobná formulaci problému nepružné srážky – jedná se o kombinaci první věty impulzové a kinematické podmínky, spočívající většinou v tom, že systém se hýbe jako těleso, tedy jednotnou rychlostí

Při hlubším studiu daných úloh je však zřejmé, že rovnice $F = \dot{p}$ pro systém popsaný pomocí $m(t), \vec{v}(t), \quad resp. \quad m(x), \vec{v}(x)$ obecně neplatí !

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

Jak tedy obecně postupovat při formulaci pohybové rovnice?

1. Pro účely formulace pohybové rovnice je třeba pracovat se systémem s konstantní hmotností, pouze na takový systém lze vždy aplikovat první větu impulzovou

2. Lze toho dosáhnout typicky tak, že zahrneme i tu hmotu, která nás v dané úloze „nezajímá“ do našeho systému

3. Dále aplikujeme kinematické podmínky daného problému, tedy znalost toho, co se pohybuje jednolitě, tedy jako jedno těleso určitou rychlostí

4. Tento postup je důležitý především pro správné ocenění hybnosti té hmoty, která vstupuje, respektive vystupuje z objektu, který nás v dané úloze „zajímá“

Raketa znovu

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{v(t)} \vec{u}(\vec{x},t)\rho(\vec{x},t)dv = \frac{d}{dt}\int_{V_0} \vec{U}(\vec{X},t)\rho_0(\vec{X})dV = \int_{V_0} \frac{d\vec{U}(\vec{X},t)}{dt}\rho_0(\vec{X})dV =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_{V_R(t)} \vec{U}(\vec{X},t)\rho_0(\vec{X})dV + \frac{d}{dt}\int_{V_S(t)} \vec{U}(\vec{X},t)\rho_0(\vec{X})dV =$$

$$= \int_{V_R(t)} \frac{d\vec{U}_R(t)}{dt}\rho_0 dV + \frac{d\vec{V}_R(t)}{dt}\vec{U}_R(t)\rho_0 + \frac{d\vec{V}_R(t)}{dt}(\vec{U}_S(t) - \vec{u}_{rel})\rho_0 =$$

$$= \frac{d\vec{U}_R(t)}{dt}m_R(t) + \frac{dm_R}{dt}\vec{U}_R(t) - \frac{dm_R}{dt}(\vec{U}_R(t) - \vec{u}_{rel}) = \dot{\vec{u}}m_R + \dot{m}_R\vec{u}_{rel}$$

$$\mu = -\dot{m} \longrightarrow m\dot{v} - \mu u.$$

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

Stoupající balónek znovu

$$F - m(t)g - (M - m(t))g = \frac{d}{dt}\int_M U(\vec{X}, t)\,dM$$

$$= \int_{m(t)} \frac{dU_l(t)}{dt} dm + \frac{dm}{dt} U_l(t) - \int_{M-m(t)} g\,dm - \frac{dm}{dt} U_l(t) = \frac{U_l}{dt} m - g(M - m)$$

$$\Rightarrow F - m(t)g = m\frac{dv}{dt}(t)$$

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF

References

- Podolský J., Šíma V.: Buquoy’s problem – Eur. J. Phys. 26 (2005) 1037 – 45
- Daňek K.: Dynamika systémů s proměnnou hmotností – bakalářská práce, Ústav teoretické fyziky, MFF UK, 2008

Děkuji za pozornost

Vojtěch Patočka
Univerzita Karlova - MFF