

Dynamika oceánského proudění

Libor Šachl

23. května 2012

Struktura semináře

- 1 Motivace a známá fakta

Struktura semináře

- 1 Motivace a známá fakta
- 2 Řídící rovnice - model FEOM

Struktura semináře

- 1 Motivace a známá fakta
- 2 Řídící rovnice - model FEOM
- 3 Numerická implementace - model FEOM

Struktura semináře

- 1 Motivace a známá fakta
- 2 Řídící rovnice - model FEOM
- 3 Numerická implementace - model FEOM
- 4 Několik dalších oceánských modelů

Current section

- 1 Motivace a známá fakta
- 2 Řídící rovnice - model FEOM
- 3 Numerická implementace - model FEOM
- 4 Několik dalších oceánských modelů

Proč modelovat oceány?

- Ovlivnění klimatu!
 - přenos tepla - absorpce, transport teplé vody, výpar
teplo uvolněné z oceánů v tropech = zdroj energie pro cirkulaci
v atmosféře
 - velká setrvačnost např. tepelný setrvačnick - tlumení teplotních
výkyvů
oceán akumuluje během roku 100× více energie než pevnina
 - neustálá interakce oceánu a atmosféry, zejména výměna a
přenos plynů (vodní pára, CO₂)

Průměrný stav? Proměnnost? Stabilita vůči perturbacím?

- Hospodářství (těžba, rybářství, transport, rekreace, ...).
Proudy? Teplota? Vlny?

Základní fakta o oceánech:

- Tichý, Atlantský, Indický, Severní oceán
- pokrývají 71% povrchu Země
- obsahují 97.4% vody na Zemi
- průměrná hloubka cca 4 km, šířka 5000-13000 km
 - poměr 1:1000, tzn. jako papír A4
 - význam pro cirkulaci, vertikální rychlosti výrazně menší než horizontální, zjednodušení rovnic

Vlastnosti mořské vody

- vysoké latentní teplo tání a vypařování - význam při transportu tepla
- vysoká měrná tepelná kapacita - funkce tepelného setrvačnicku
- rozpouští jiné látky, např. soli cca 3.5% (1 psu=1.0051 × salinita v ‰)
 - změna vlastností vody, např. bodu tání
 - salinita se stává stavovou veličinou

Distribuce teploty a salinity

- průměrná teplota a salinita mořské vody je 3.6°C , resp. 34.9 psu
- 50% z celkového objemu vody v oceánech se pohybuje v rozpětí $1.3^{\circ}\text{C} < t < 3.8^{\circ}\text{C}$, výraznější odchylky zejména poblíž hladiny moře
- povrchová teplota souvisí se zeměpisnou šířkou + západní vs. východní okraj oceánu
- salinita se mění o cca několik psu, s výjimkou ústí velkých řek a zálivů/vnitřních moří subtropických šířek

Stavová rovnice

- stavové proměnné:
 ρ , T , ρ , S
- stavová rovnice vyplývá z experimentu, nikoliv z teorie
- hustota
 - roste s tlakem
 - roste se salinitou
 - proměnná s teplotou

Mezinárodní stavové rovnice mořské vody z roku 1990 (EOS-90)

$$\rho(S, t, p) = \frac{\rho(S, t, 0)}{\left(1 - \frac{p}{K(S, t, p)}\right)} \quad (2.2)$$

Čitatel lze dále rozepsat

$$\begin{aligned} \rho(S, t, 0) = & \rho_w + (8.24493 \times 10^{-1} - 4.0899 \times 10^{-3} t + 7.6438 \times 10^{-5} t^2 \\ & - 8.2467 \times 10^{-7} t^3 + 5.3875 \times 10^{-9} t^4) S \\ & + (-5.72466 \times 10^{-3} + 1.0277 \times 10^{-4} t - 1.6546 \times 10^{-6} t^2) S^{3/2} \\ & + 4.88314 \times 10^{-4} S^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde t je teplota ve stupních Celsia a ρ_w má tvar

$$\begin{aligned} \rho_w = & 999.842594 + 6.793952 \times 10^{-2} t - 9.095290 \times 10^{-3} t^2 + 1.001685 \times 10^{-4} t^3 \\ & - 1.120083 \times 10^{-6} t^4 + 6.536332 \times 10^{-9} t^5, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Jmenovatel rovnice (2.2) lze rozvést na

$$K(S, t, p) = K(S, t, 0) + Ap + Bp^2, \quad (2.5)$$

kde

$$\begin{aligned} K(S, t, 0) = & K_w + (54.6746 - 0.603459t + 1.09987 \times 10^{-2} t^2 - 6.1670 \times 10^{-4} t^3) S \\ & + (7.944 \times 10^{-2} + 1.6483 \times 10^{-3} t - 5.3009 \times 10^{-4} t^2) S^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$A = A_w + (2.2838 \times 10^{-3} - 1.0981 \times 10^{-5} t - 1.6078 \times 10^{-6} t^2) S + 1.91075 \times 10^{-4} S^{3/2}, \quad (2.7)$$

$$B = B_w + (-9.9348 \times 10^{-7} + 2.0816 \times 10^{-8} t + 9.1697 \times 10^{-10} t^2) S. \quad (2.8)$$

Pro koeficienty K_w , A_w a B_w platí

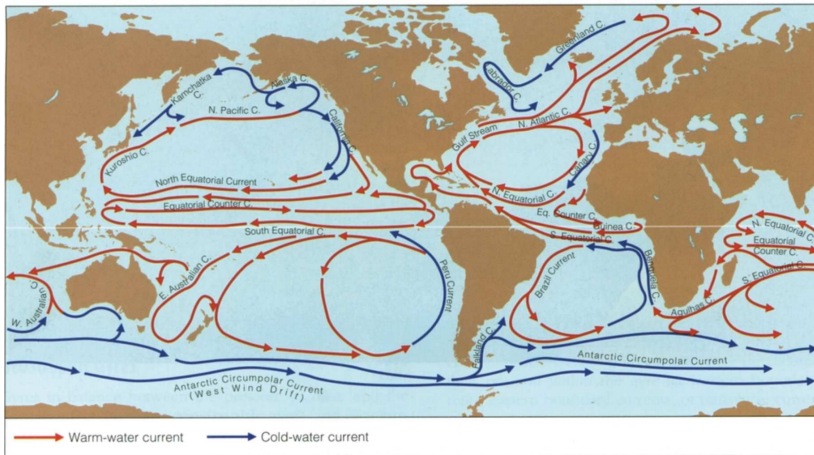
$$\begin{aligned} K_w = & 19652.21 + 148.4206t - 2.327105t^2 + 1.360477 \times 10^{-2} t^3 - 5.155288 \times 10^{-4} t^4 \\ A_w = & 3.239908 + 1.43713 \times 10^{-3} t + 1.16092 \times 10^{-4} t^2 - 5.77905 \times 10^{-7} t^3 \\ B_w = & 8.50935 \times 10^{-3} - 6.12293 \times 10^{-6} t + 5.2787 \times 10^{-8} t^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Uvedená rovnice je platná pro rozpětí salinity 0–42 psu, tlaku 0–10⁸ Pa a teploty od -2 do 40°C.

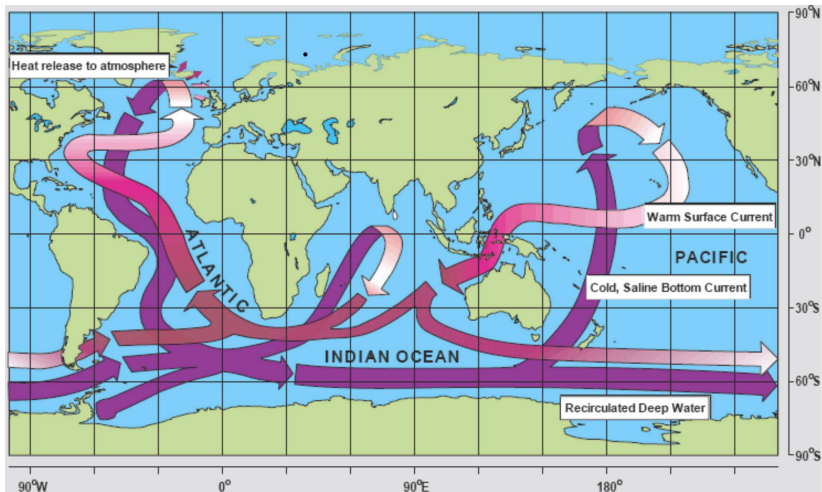
Cirkulace v oceánech

- povrchová cirkulace
 - řízena větrem
 - systém teplých a studených mořských proudů
- hlubinná cirkulace
 - = abyssal circulation = termohaline circulation = meridional overturning circulation = ocean conveyor belt = great ocean conveyor = global conveyor belt
 - vznik hlubinných vod a jejich opětovný výstup na hladinu
 - dána odchylkami v hustotě, tj. odchylkami v teplotě a salinitě

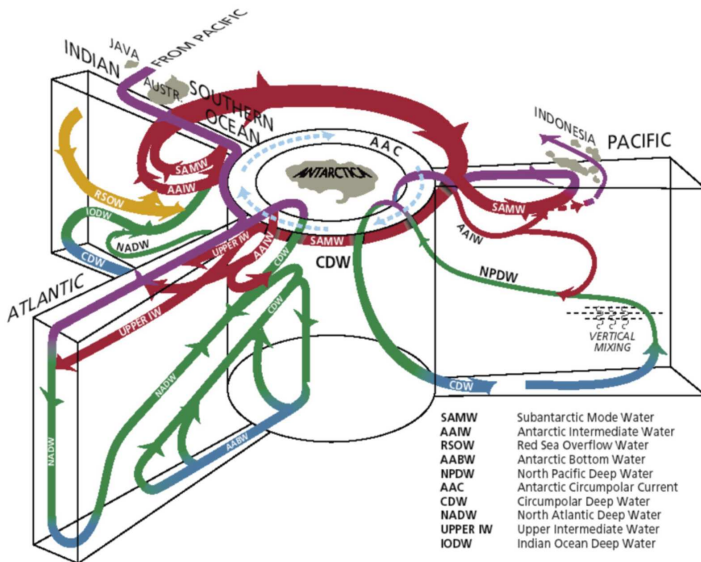
Povrchová cirkulace



Hlubinná cirkulace



Hlubinná cirkulace



Typické velikosti rychlostí

Horizontální pohyby

- průměrně 0.01-0.1 m/s
- víry/meandrování 0.1 m/s
- teplé proudy 1-2 m/s

Vertikální pohyby

- průměrně 10^{-7} m/s
- downwelling v oblasti subtropických setrvačníků 10^{-6} m/s
- upwelling na rovníku 10^{-4} m/s
- místa vzniku DW 10^{-3} m/s
- intenzivní konvekce 0.01 m/s

Current section

- 1 Motivace a známá fakta
- 2 Řídící rovnice - model FEOM**
- 3 Numerická implementace - model FEOM
- 4 Několik dalších oceánských modelů

Rovnice & aproximace

Použité aproximace:

- hydrostatická aproximace
- Boussinesqova aproximace (odfiltruje gravitační vlny; nelze predikovat vzrůst hladiny v důsledku globálního oteplování)
- aproximace Coriolisova členu

Rovnice se skládají z

- dynamické části = řeší se pohybové rovnice s vazbou vertikálně zintegrované rovnice kontinuity
- termodynamické části = řeší se rovnice kontinuity pro vertikální rychlosti, evoluční rovnice pro teplotu a salinitu, výpočet hustoty pomocí stavové rovnice

Dynamická část

$$\partial_t \mathbf{u} + f(\mathbf{k} \times \mathbf{u}) + g \nabla \eta - \nabla \cdot A_l \nabla \mathbf{u} - \partial_z A_v \partial_z \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \mathbf{F}_u,$$

$$\partial_t \eta + \nabla \cdot \int_{z=-H}^{z=\eta} \mathbf{u} dz = 0,$$

$$\partial_z p = -\rho g.$$

$(\mathbf{u}, w) = (u, v, w)$

ρ_0, ρ

η

p

$f = f(\theta)$

A_l, A_v

\mathbf{k}

$\mathbf{F}_u = -(\mathbf{u} \nabla + w \partial_z) \mathbf{u}$

g

rychlost ve sférických souřadnicích (λ, θ, z)

střední hustota mořské vody, perturbace

elevace hladiny

baroklinická tlaková anomálie

Coriolisův parametr

laterální a vertikální difuzivity

jednotkový vertikální vektor

advekční členy

gravitační zrychlení

Dynamická část, poznámka

$$\partial_t \eta + \nabla \cdot \int_{z=-H}^{z=\eta} \mathbf{u} dz = 0$$

- nonlinear free surface ... kompletní rovnice
- linear free surface approximation ... horní integrační limit=0, zanedbáváme elevaci hladiny
- rigid lid approximation ... horní integrační limit=0 + $\partial_t \eta = 0$ (odfiltruje gravitační vlny; nelze modelovat slapy, přítok čerstvé vody)

Dynamická část, hraniční podmínky

$$\begin{aligned}A_V \partial_z \mathbf{u} &= \boldsymbol{\tau}, p = 0 && \text{na } \Gamma_1, \\A_V \partial_z \mathbf{u} + A_I \nabla H \cdot \nabla \mathbf{u} &= C_g \mathbf{u} |\mathbf{u}| && \text{na } \Gamma_2, \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{na } \Gamma_3, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{v}_{OB} && \text{na } \Gamma_4.\end{aligned}$$

Γ_1	je hladina oceánu
Γ_2	dno oceánu
Γ_3	laterální vertikální stěny oceánu, pevné neprostupné
Γ_4	laterální vertikální volná hranice
$\boldsymbol{\tau}$	tečná napětí vyvolaná větrem
C_g	koeficient tření

Termodynamická část

$$\partial_z w = -\nabla \cdot \mathbf{u},$$

$$\partial_t C^m + \nabla \cdot (\mathbf{u} C^m) + \partial_z (w C^m) - \nabla \cdot K_l^m \nabla C^m - \partial_z K_v^m \partial_z C^m = 0,$$

$$\rho = \rho(T, S, p) = 0$$

$$C^1 \equiv T$$

teplota

$$C^2 \equiv S$$

salinita

$$K_l^m, K_v^m$$

laterální a vertikální difuzivity

Termodynamická část, hraniční podmínky

$$\begin{aligned}K_V^m \partial_z C^m &= -q^m \text{ nebo } C^m = C_0^m && \text{na } \Gamma_1, \\(\nabla C^m, \partial_z C^m) \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{na } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\(\nabla C^m, \partial_z C^m) \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{na } \Gamma_4.\end{aligned}$$

q^m tok m -tého traceru na hranici
 C_0^m hodnota m -tého traceru na hranici
 \mathbf{n} jednotková normála hranice

$$\begin{aligned}w &= \partial_t \eta + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta && \text{na } \Gamma_1, \\w &= -\mathbf{u} \cdot \nabla H && \text{na } \Gamma_2.\end{aligned}$$

Current section

- 1 Motivace a známá fakta
- 2 Řídící rovnice - model FEOM
- 3 Numerická implementace - model FEOM**
- 4 Několik dalších oceánských modelů

Numerická metoda?

Metoda konečných diferencí

- tradiční metoda
- předefinujeme diferenciální operátor

Metoda konečných prvků (elementů) (MKP)

- průkopníci: Fix (1975), Le Provost (1986)
- modelování barotropních slapů, větrem řízená oceánská cirkulace v shallow-water modelech; existují regionální modely, globálních méně
- operátor se nemění, mění se prostor, ve kterém hledáme řešení
- je schopna zachytit komplexní geometrii
- síť lze lokálně zahustit v oblasti úžin, u pobřeží a ostrovů
- zachovává energii
- přirozené zacházení s hraničními podmínkami (Dirichlet - volba prostorů, Neumann - slabá formulace)

Numerická metoda?

Metoda spektrálních elementů

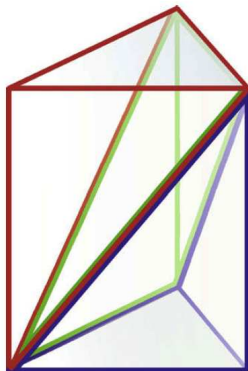
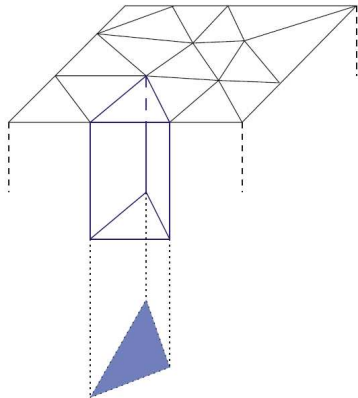
- =metoda konečných elementů + spektrální metoda (SM)
- oblast je rozdělena na menší počet elementů než v MKP, ale polynomy jsou mnohem vyšších stupňů
- kombinace flexibility MKP a přesnosti SM

Metoda konečných objemů

- diskretizované rovnice jsou odvozeny zavedením kontrolních objemů
- kontrolní objemy nemusejí nutně odpovídat elementům numerické sítě
- rychlejší než MKP, ale zatím méně prozkoumaná metoda než MKP

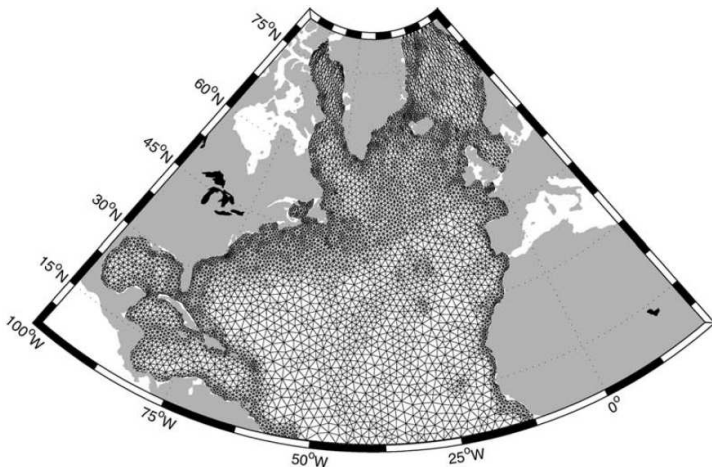
Numerická metoda v modelu FEOM & výpočetní síť

- FEOM = finite-element ocean model \Rightarrow MKP
- elementy: čtyřřtěny
- konstrukce elementů: na povrchu trojúhelníhy \rightarrow vertikální plochy \rightarrow hranoly \rightarrow 1 hranol = 3 čtyřřtěny

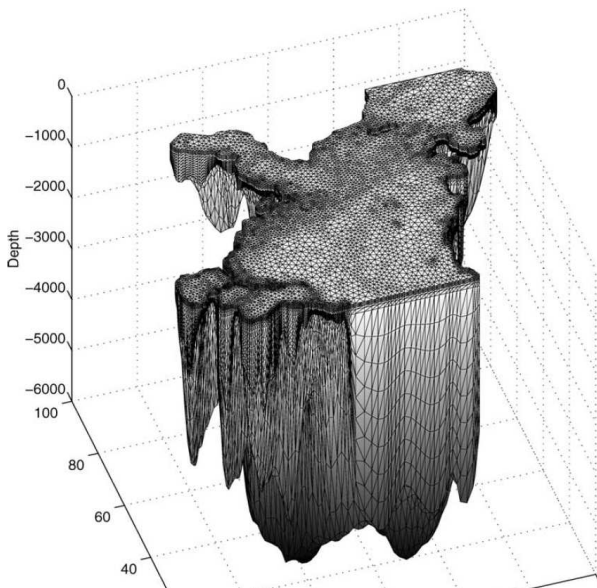


Síť v modelu FENA

- předchůdce FEOMu
- FENA = finite-element model of North Atlantic



Síť v modelu FENA



Volba konečně dimenzionálních prostorů v modelu FEOM

- volba prostoru ovlivňuje stabilitu, přesnost, reprezentaci procesů ...
- hydrostatická aproximace \Rightarrow stejné prostory pro elevaci hladiny, vertikální rychlosti, teplotu, salinitu a tlak
- Le Roux (1998): $P_1 - P_1$ diskretizace (horizontální rychlost, skaláry)
 - + OK: dominance geostrofické rovnováhy
 - + stačí hodnoty v uzlech
 - vyžaduje stabilizaci

Výpočet horizontálních rychlostí a elevace (dynamická část)

Slabá formulace: Silnou formulaci vynásob $\tilde{\mathbf{u}}$, resp. $\tilde{\eta}$ (nezávisí na z)
 + \int_{Ω} + Greenova věta + hraniční podmínky

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [(\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + A_l \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + A_v \partial_z \mathbf{u} \cdot \partial_z \tilde{\mathbf{u}}] d\Omega \\
 &= \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS - \int_{\Gamma_2} C_g |\mathbf{u}| \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_z) \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla p d\Omega, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in X \\
 & \int_{\Gamma_1} \partial_t \eta \tilde{\eta} dS - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\eta} d\Omega = - \int_{\Gamma_4} \mathbf{v}_{OB} \cdot \mathbf{n} \tilde{\eta} dS, \quad \forall \tilde{\eta} \in X.
 \end{aligned}$$

Galerkinova metoda

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N_{3D}} \mathbf{u}_k X_k, \quad \eta = \sum_{k=1}^{N_{2D}} \eta_k S_k.$$

Místo $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\eta}$ volit X_i , S_j .

X_k , S_k

\mathbf{u}_k , η_k

N_{3D} , N_{2D}

kté po částech lineární báze funkce

kté koeficienty rozvoje

celkový počet 3D a 2D uzlů sítě

Výpočet tlaku

T, S



ρ ze stavové rovnice



p z hydrostatické rovnice, KONEČNÉ DIFERENCE.



$p = \sum_{k=1}^{N_{3D}} p_k X_k$ do slabé formulace pohybové rovnice

Výpočet vertikálních rychlostí

$$\partial_z w = -\nabla \cdot \mathbf{u}$$

- Nelze užít postup pro tlak! $\nabla \cdot \mathbf{u}$ není definováno v uzlech.
- Zavedeme ϕ : $w = \partial_z \phi$.
- Slabá formulace:

$$\int_{\Omega} \partial_z \phi \partial_z \tilde{\phi} d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\phi} d\Omega + \int_{\Gamma_4} \mathbf{v}_{OB} \cdot \mathbf{n} \tilde{\phi} dS, \quad \forall \tilde{\phi} \in X.$$

- w po částech konstantní.

Výpočet teploty a salinity

Slabá formulace rce pro teplotu:

$$\int_{\Omega} \left(\partial_t T \tilde{T} + (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_z) T \tilde{T} + K_l \nabla T \cdot \nabla \tilde{T} + K_v \partial_z T \partial_z \tilde{T} \right) d\Omega$$
$$= - \int_{\Omega} q \tilde{T} d\Gamma_1.$$

Obdobně pro salinitu.

Integrace v čase

Implicitně:

- minimum: členy s viskozitami a difuzivitami v horizontální pohybové rci a rci pro teplotu, salinitu.
- volba: všechny členy na levé straně dynamické části,
 - + dlouhé časové kroky
 - coupling v dynamické částiadvekce ve rci pro teplotu a salinitu

Explicitně:

- gradient tlaku v horizontální pohybové rci (jinak příliš velký coupling)
- advekce v horizontální pohybové rci (advekce $\leq |\nabla p|$)

Nejvyšší nároky: Inverze matice tuhosti v dynamické části.

Stabilizace

- MKP s po částech lineárními bázovými fcemi:
 - pro eliptické problémy s dominantní difúzí \Rightarrow OK
 - oceán: advekce dominuje nad difúzí \Rightarrow problémy
- řešení nabízí GLS stabilizace
 - původní systém PDR \rightarrow modifikovaný systém PDR
 - řešení stejné
 - jednodušší inverze matice problémů (diskretizace \rightarrow matice problému)

GLS stabilizace: Příklad

Silná formulace:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla T - k \Delta T &= F, & (x, y) \in \Omega \\ k \frac{\partial T}{\partial n} &= q, & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Slabá formulace:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\tilde{T}(\mathbf{u} \cdot \nabla T) + k \nabla \tilde{T} \cdot \nabla T \right] d\Omega &= \int_{\Omega} \tilde{T} F d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega} q \tilde{T} dS, & \forall \tilde{T} \in W^{1,2}(\Omega) \end{aligned}$$

GLS stabilizace: Příklad

GLS stabilizace:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[\tilde{T}(\mathbf{u} \cdot \nabla T) + k \nabla \tilde{T} \cdot \nabla T \right] d\Omega \\
 & + \int_{\Omega_1} \epsilon_t (\mathbf{u} \cdot \nabla - k \Delta) \tilde{T} \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla T - k \Delta T - F)}_{\text{mělo by se } = 0} d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} \tilde{T} F d\Omega + \int_{\partial\Omega} q \tilde{T} dS, \quad \forall \tilde{T} \in W^{1,2}(\Omega)
 \end{aligned}$$

$$\Omega_1 \subset \Omega$$

 ϵ_t libovolná funkce

GLS stabilizace: Příklad

GLS stabilizace:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\tilde{T}(\mathbf{u} \cdot \nabla T) + k \nabla \tilde{T} \cdot \nabla T \right] d\Omega \\ & + \int_{\cup E_1} \epsilon_t (\mathbf{u} \cdot \nabla - \underbrace{k\Delta}_{=0}) \tilde{T} (\mathbf{u} \cdot \nabla T - \underbrace{k\Delta T}_{=0} - F) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \tilde{T} F d\Omega + \int_{\partial\Omega} q \tilde{T} dS, \quad \forall \tilde{T} \in X \end{aligned}$$

E_1 vnitřek elementu

Volba ϵ_t :

- $\epsilon_t = O(h/|\mathbf{u}|)$, $Pe \gg 1$, $Pe = \frac{|\mathbf{u}|h}{k}$
- $\epsilon_t = O(h^2/k)$, $Pe \ll 1$

GLS stabilizace rce pro teplotu a salinitu

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [\tilde{T}(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla + w\partial_z)T + K_l \nabla \tilde{T} \cdot \nabla T + K_v \partial_z \tilde{T} \partial_z T] d\Omega \\
 & + \int_{\cup E_1} \epsilon_t (\mathbf{u} \cdot \nabla + w\partial_z) \times \tilde{T} (\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T + w\partial_z T - F) d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} \tilde{T} F d\Omega + \int_{\partial\Omega} q \tilde{T} dS, \quad \forall \tilde{T} \in X
 \end{aligned}$$

$$\text{Volba } \epsilon_t = \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{4A_l}{h^2} + \frac{2A_v}{\delta z^2} + \frac{|\mathbf{u}|}{h} + \frac{|w|}{\Delta z} \right]^{-1}$$

$h, \Delta z$ horizontální a vertikální rozměr elementu (pro každý zvlášť)

Δt časový krok

GLS stabilizace dynamické části

- špatné horizontální rozlišení, tj. $E_k = \frac{\sqrt{2A_I/f}}{h}$ malé \Rightarrow stejné problémy
- navíc $P_1 - P_1$ reprezentace nesplňuje BBL podmínku
- obojí řeší GLS

GLS stabilizace dynamické části

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + A_l \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + A_v \partial_z \mathbf{u} \partial_z \tilde{\mathbf{u}}] d\Omega \\
& + \int_{\Omega_1} \epsilon_d f \left(\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta - (\nabla A_l \nabla \mathbf{u} + \partial_z A_v \partial_z \mathbf{u}) \right. \\
& \quad \left. + [-\rho_0^{-1} \nabla p - (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_z) \mathbf{u}] \right) \cdot (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{u}}) d\Omega_1 \\
& = \int_{\Omega} [-\rho_0^{-1} \nabla p - (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_z) \mathbf{u}] \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS - \int_{\Gamma_2} C_g |\mathbf{u}| \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dS.
\end{aligned}$$

GLS stabilizace dynamické části

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta) \cdot (\tilde{\mathbf{u}} + \epsilon_d f \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{u}}) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (A_l \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla + A_v \partial_z \mathbf{u} \cdot \partial_z) (\tilde{\mathbf{u}} + \epsilon_d f \mathbf{k} \times \mathbf{u}) d\Omega \\
& = -\rho_0^{-1} \int_{\Omega} \nabla p \cdot (\mathbf{1} + \epsilon_d f \mathbf{k} \times) \tilde{\mathbf{u}} d\Omega_1 \\
& - \int_{\Omega} (\mathbf{1} + \epsilon_d f \mathbf{k} \times) \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_z) \mathbf{u} d\Omega_1 \\
& + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{1} + \epsilon_d f \mathbf{k} \times) \tilde{\mathbf{u}} dS - \int_{\Gamma_2} C_g |\mathbf{u}| \mathbf{u} \cdot (\mathbf{1} + \epsilon_d f \mathbf{k} \times) \tilde{\mathbf{u}} dS.
\end{aligned}$$

GLS stabilizace dynamické části

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_1} \partial_t \eta \tilde{\eta} dS - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\eta} d\Omega \\
& + \int_{\Omega_1} \epsilon_d \nabla \tilde{\eta} \cdot (\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta - \nabla \cdot A_l \nabla \mathbf{u} - \partial_z A_v \partial_z \mathbf{u} \\
& \quad + \rho_0^{-1} \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_z) \mathbf{u}) d\Omega_1 \\
& + \int_{\Gamma_4} \tilde{\eta} \mathbf{v}_{OB} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_4 = 0.
\end{aligned}$$

GLS stabilizace dynamické části

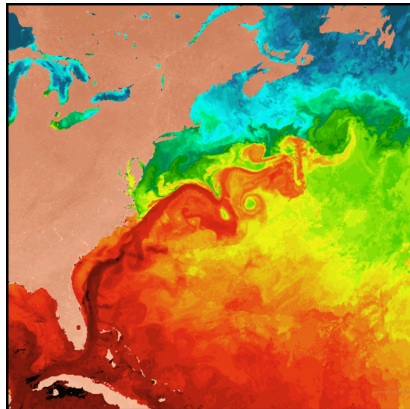
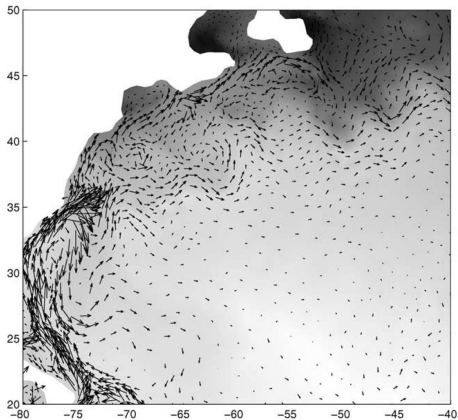
$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_1} \partial_t \eta \tilde{\eta} dS - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\eta} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \epsilon_d \nabla \tilde{\eta} \cdot (\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g \nabla \eta + \rho_0^{-1} \nabla \rho + (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_z) \mathbf{u}) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_1} \epsilon_d \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \tilde{\eta} dS + \int_{\Gamma_2} \epsilon_d C_g |\mathbf{u}| \nabla \tilde{\eta} \cdot \mathbf{u} dS + \int_{\Gamma_4} \tilde{\eta} \mathbf{v}_{OB} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_4 = 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Volba } \epsilon_d = \left[|f| + (\Delta t)^{-1} + 10 \frac{A_l}{h^2} \right]^{-1}$$

Test modelu

- oblast severního Atlantiku
- síť
 - 7° - 80° N
 - horizontální rozlišení 0.3° - 1.5° , průměrně 0.8°
- data
 - měsíční wind stress
 - povrchová teplota a salinita dle Levitus měsíčních dat
- doba běhu modelu: 16 let
- časový krok
 - $\Delta t=12$ h v dynamické části
 - $\Delta t=3$ h v rci pro teplotu a salinitu

Test modelu



Current section

- 1 Motivace a známá fakta
- 2 Řídící rovnice - model FEOM
- 3 Numerická implementace - model FEOM
- 4 Několik dalších oceánských modelů**

Model MITgcm

- studium oceánské i atmosférické cirkulace
- metoda konečných objemů
- nehydrostatická formulace
- FORTRAN 77 s MPI

ADCIRC = ADvanced CIRCulation Multi-dimensional Hydrodynamic Model

- modelování slapů a povrchové cirkulace; účinky hurikánů; pobřežní studie
- metoda konečných elementů (SMS-Grid Generator)
- hydrostatická a Boussinesqova aproximace
- 2D, 3D verze
- kartézské nebo sférické souřadnice
- FORTRAN 77 s MPI

TELEMAC

- studium proudů, termálních plum, znečištění, sedimentární transport
- metoda konečných elementů (MATISSE mesh generator)
- Boussinesqova aproximace + možnost hydrostatické aproximace
- 3D kód
- volný povrch proměnný v čase
- nestlačitelnost
- Fortran 90

SEOM

- modelování slapů, hlubinné a povrchové cirkulace
- metoda spektrálních konečných elementů (Cubit)
- 2D kód
- Fortran 90

Literatura

- Pišoft P., 2010. Přednáška *Oceány v klimatickém systému*.
- Danilov S., Kivman G., Schroter J., 2004. A finite-element ocean model: principles and evaluation. *Ocean modelling*, **6**, 125-150.
- Danilov S., Schrotter J., 2010. *Handbook of Geomathematics*. Springer-Verlag. Kapitola *Unstructured meshes in large-scale ocean modeling*.
- Timmermann R., Danilov S., Schroter J., Boning C., Sidorenko D., Rollenhagen K., 2009. Ocean circulation and sea ice distribution in a finite element global sea ice-ocean model. *Ocean modelling*, **27**, 114-129.
- Internet, oficiální weby modelů MITgcm, ADCIRC, TELEMAC, SEOM