Elektromagnetická indukce: 3-D modelování nespojitou Galerkinovou metodou

Martin Čochner

Program prezentácie

- (m)CSEM ako experimentálna metóda
- Ciele diplomovej práce
- Maxwellove rovnice
- Hraničné a počiatočné podmienky
- Nespojitá Galerkinova metóda
- Technická realizácia

(m)CSEM

- (marine)Control-sourced electromagnetic induction
- Nedeštruktívna metóda geofyzikálneho prieskumu, citlivé voči vodivosti
- Časovo premenný primárny prúd

  → primárne elmag pole

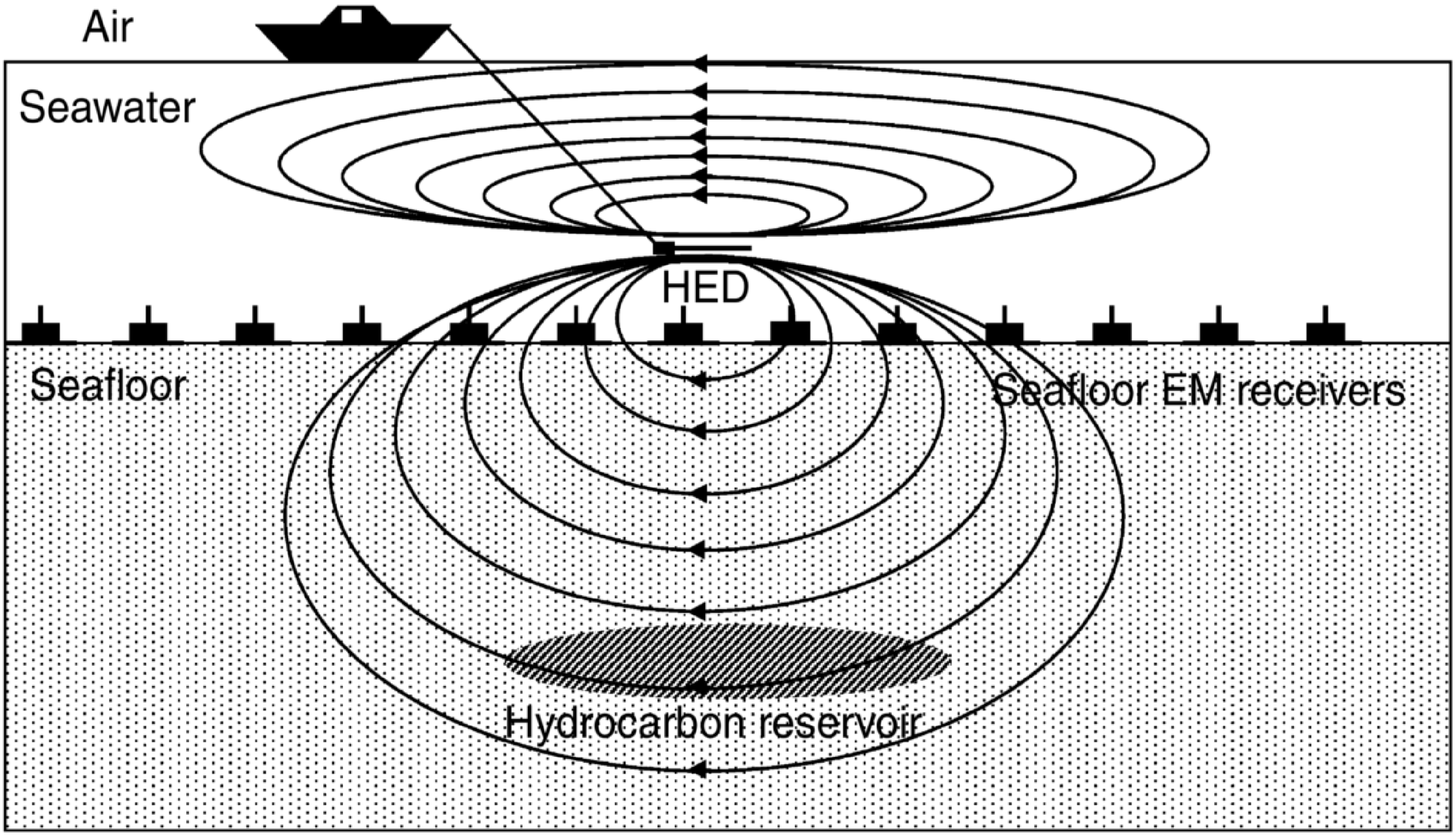
  → sekundárne prúdy v morskom dne

  → sekundárne elmag polia → meranie
- Informácia o rozložení vodivosti

(m)CSEM

- CSEM aj bez ”(m)” → na pevnine je metóda citlivá na oblasti s vyšším σ(r) → napr. kovy
- v mCSEM odhaluje oblasti s vyššou rezistivitou
- Cca 70 roky akademický výzkum
- Až začiatok 21. storočia prvé komerčné použitia - prospekcia uhľovodíkov na morskom dne
- Najlepšie v spojení ďaľších geofyzikálnych metód (Seismická reflexia)

mCSEM



Air
Seawater
HED
Seafloor
Seafloor EM receivers
Hydrocarbon reservoir

Ciele diplomovej práce

- Simulácia pre známe rozloženie vodivosti.
- Rôzne metódy (FDM, FEM-nedelecove elementy)
- V časopiseckej literatúre väčšinou frekvenčná oblasť
- Ale z praktických dôvodov je dobré vedieť modelovať aj v časovej oblasti...switch-off
- DG: zatiaľ nepoužitá pre (m)CSEM

→ Aplikovať DG pre switch-off podmienky pre mCSEM pomocou volne dostupných kódov (vývoj MATLAB)

Maxwellove rovnice

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathsf{E} &= -\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathsf{H} &= \mathsf{J} + \frac{\partial \mathsf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathsf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathsf{B} &= 0 \end{aligned}$$

- Materiálové vzťahy:

  Ohmov zákon: $\mathsf{J} = \sigma \mathsf{E}$

  $\mathsf{B} = \mu \mathsf{H}\ , \mathsf{D} = \varepsilon \mathsf{E}$

- Materiálové konštanty, hladké na elementoch:

$$\mu(r) > 0, \varepsilon(r) > 0, \sigma(r) > 0$$

- Zavedenie zdrojového prúdu, zvlášť:

$\rightarrow \mathsf{J} = \sigma \mathsf{E} + J_{\mathsf{s}}$

Vlnová rovnica

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathsf{E}(\mathsf{r}, t)) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathsf{E}(\mathsf{r}, t)}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathsf{E}(\mathsf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathsf{j_s}(\mathsf{r}, t)}{\partial t}$$

- Oblasť riešenie PDE : Ω = kváder
- Hraničné podmienky
- Okrajové podmienky

- zaujímame sa o polia pri dne →

  EL-MAG vlna je 2x tlmená morskou vodou – (môžeme?) vynechať vlnový člen

$$\nabla \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathsf{E}(\mathsf{r}, t)) + \sigma \frac{\partial \mathsf{E}(\mathsf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathsf{j_s}(\mathsf{r}, t)}{\partial t}$$

Hraničné podmienky [BC]

- Homogénne Dirichletove BC, najjednoduchšie
- Môžeme si dovoliť, pretože počítame v disipatívnom médiu (morská voda), dochádza k útlmu

  → Veľkosť oblasti Ω

- Konkrétne čísla závisia od technických parametrov
- 10-tky kilometrov.

Počiatočné podmienky [IC]

- Zdroj spravidla: Horizontálny elektrický dipól [HED] (ťahaný za loďou)

  Možnosti:

- [IC1] $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t=0) = \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t=0) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega$

Počiatočné podmienky [IC]

- [IC2] Úloha sa štartuje z DC-riešenia

$J_\mathrm{s}(r, t < 0) = J_\mathrm{s}(r)$

- Popísané skalárnym elektrický potenciálom:

$$\mathrm{E} = -\nabla\Psi$$

- Spĺňajúcim:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Psi) = \nabla \cdot J_\mathrm{s}$$

- V t=0 dôjde k vypnutiu prúdu.
- Preto ”Switch-off” podmienka

Silná formulácia

(R) $$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \mathsf{E}\left(\mathsf{r},t\right)\right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathsf{E}\left(\mathsf{r},t\right)}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathsf{E}\left(\mathsf{r},t\right)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathsf{j_s}(\mathsf{r},t)}{\partial t}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (kváder), $t \in [0..T], T > 0$ (čas)

dostatočne hladké materiálové konštanty

(BC) $E(t)|_{\Omega} = 0$ pre $t=(0, T)$

Hľadáme

$$\mathsf{E} \in \{u : u \in C^2(\Omega \mathrm{x}[0,T]), u \,\mathrm{splna}\, (\mathrm{R}),\ (\mathrm{BC})\ \mathrm{a}\ (\mathrm{IC1}) \vee (\mathrm{IC2})\}$$

Slabá formulácia

- Upustíme od hladkosti materiálových konštant
  $\longrightarrow$ Skoky v riešení E

$$[n \,\mathrm{x}\, E]_{-}^{+} = 0$$

$$[n.(\sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + j_{\mathrm{s}})]_{-}^{+} = 0$$

Diskretizácia

- Metóda priamok [method-of-lines]
- Priestorovú časť:
  - nespojitá Galerkinova metóda
- Časová oblasť:
  - explicitná alebo implicitná metóda konečných diferencií
  - Runge-Kutta, spätná Eulerova metóda

”Idea” Nespojitej Gelarkinovej Metódy [DG]

- Hladanú funkciu aproximujem polynómami p-teho rádu
- násobí sa testovacou funkciou
- Integruje sa *len cez element*
- *”per partes”* → *hraničné členy (pre každý element)*
- Sčítame cez elementy
- Zabezpečíme jednoznačnosť hraničných členov na hranici → ”numerický tok”
- pre limitný prípad p=0 → MKO

DG

- Priamočiara implementácia Maxwellových rovníc pre nespojité materiálové konštanty
- Priamočiaro implementovateľné skoky v E na hraniciach
- Elementy su velmi slabo viazané → riedka matica a efektívna paralelizácia

Technická realizácia

- Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications, Jan Hesthaven & Tim Warburton, Springer 2007
- Kniha + MATLAB kód
- (*) *nudg++* framework/knižnica umožňujúci prepis MATLAB kódu do C++

*) www.nudg.org

nudg++

- Objektovo orientovaná knižnica v C++
- free (LGP), používa BLAS, LAPACK, CSparse*

(*) http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/CSparse/

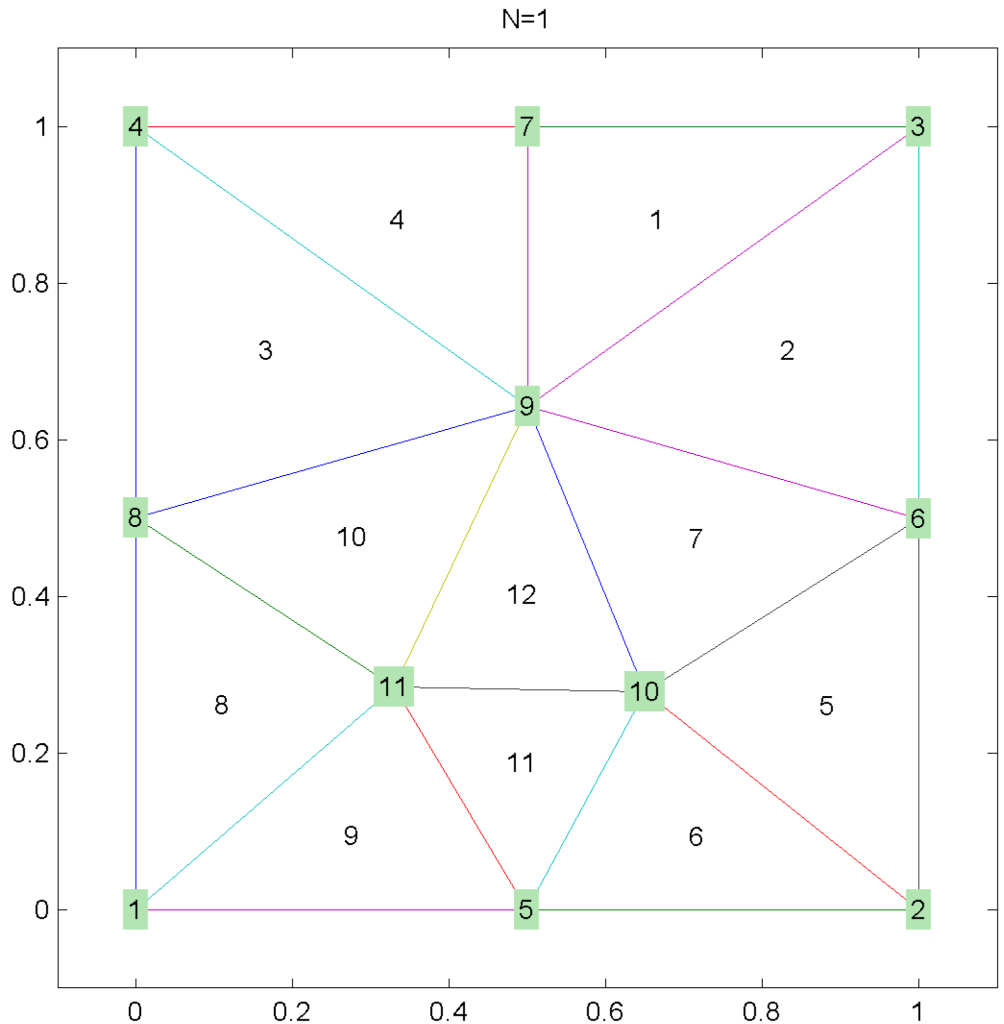
nudg++

- DG je technicky pomerne náročnejšia metóda
- Nudg poskytuje (relatívny) komfort pri písaní programu
- Nezakrýva technické detaily

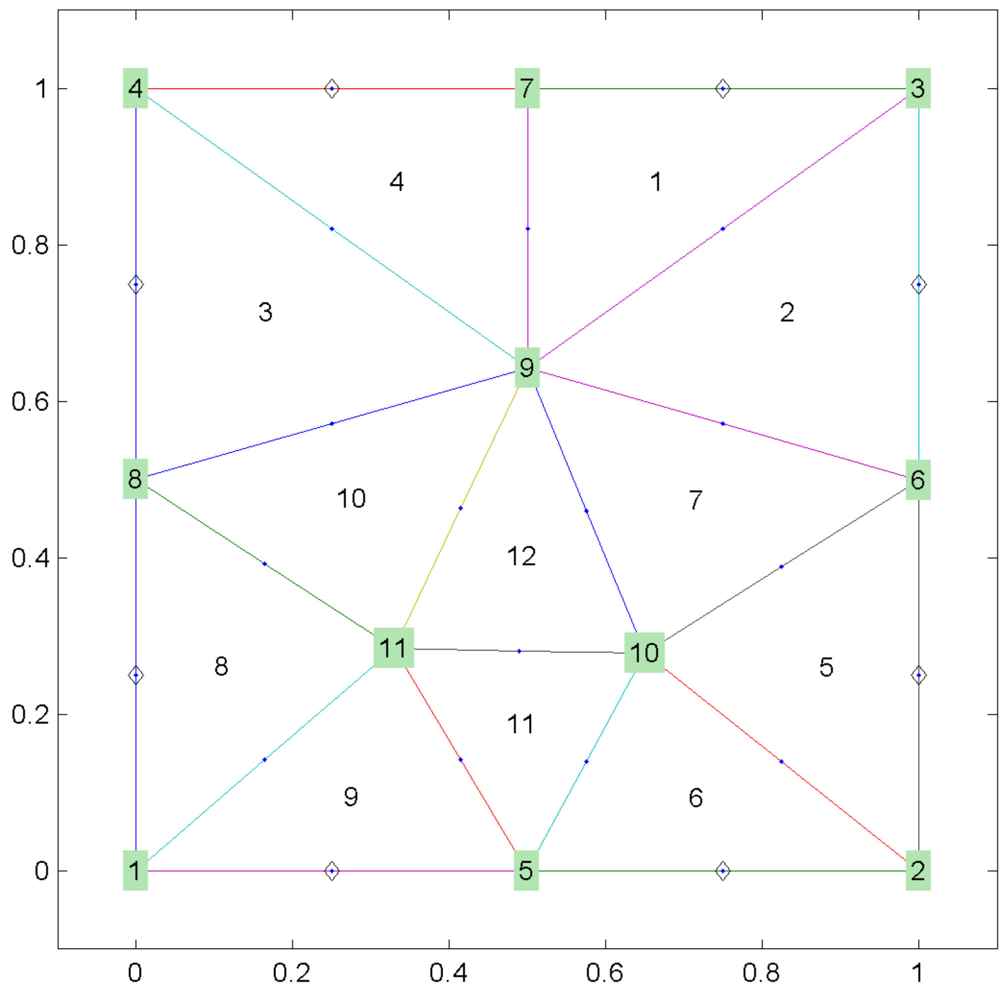
- Pomocné rutiny: prevody súradníc, bází, integrácie, zostavenie matíc, riešič,
  - ”Optimálne” určovanie polohy nódov v elemente

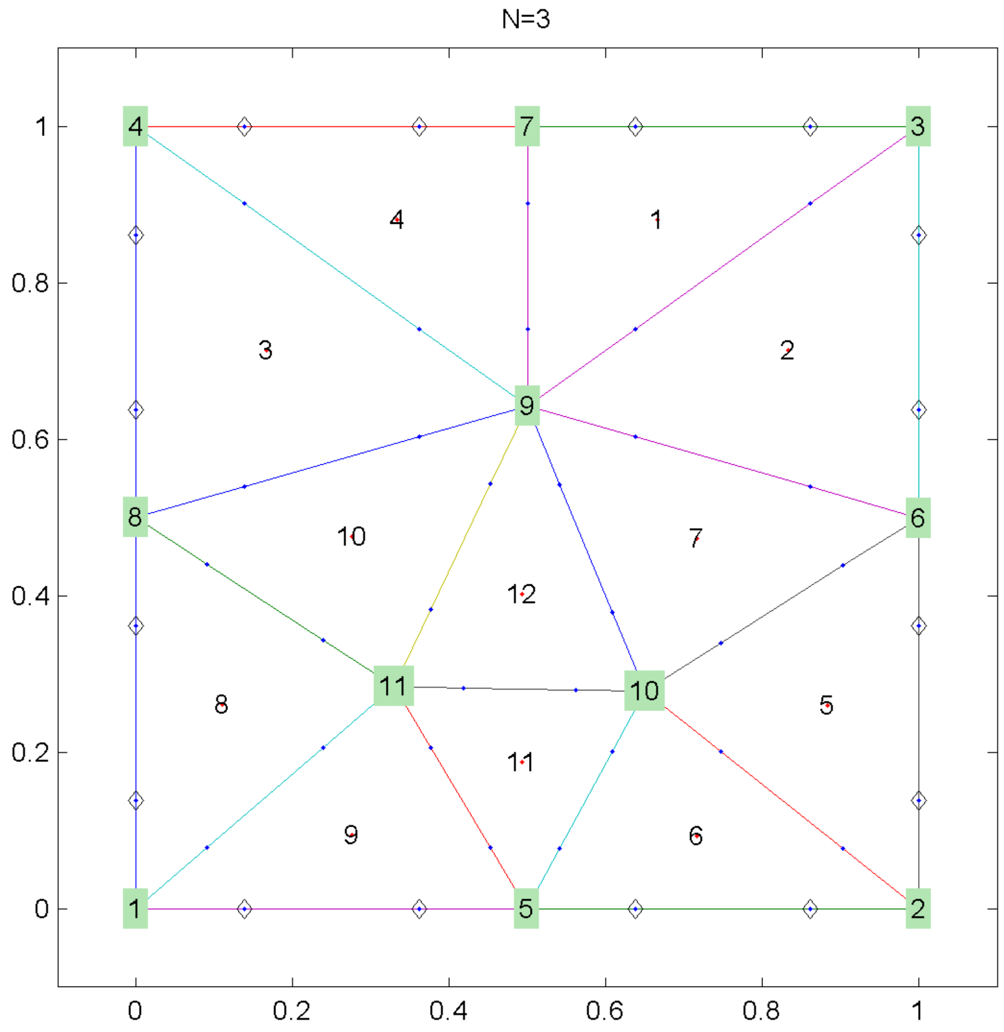
Nodálne (Lagrangeove) elementy vyšších rádov

- DG umožňuje jednoduchú implementáciu pre Lagrangeove polynómy vyšších rádov
- Podpora v nudg: explicitná konštrukcia *“Warp & Blend”* nódov:
  - Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) body ”natiahnuté” do 2D (3D)
- Príklad v 2D:
  - štvorec s 12 elementmi, polyn. stupňa 1-13

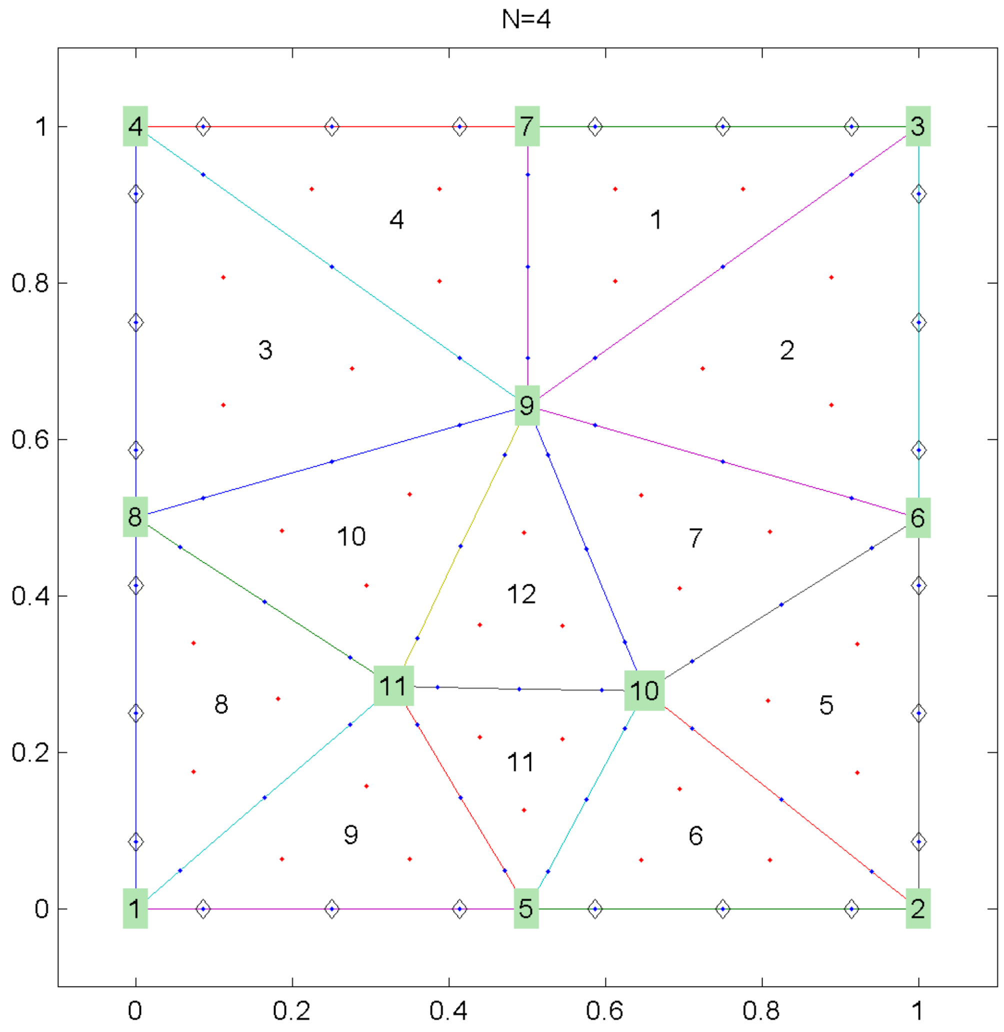

N=1
4
7
3
1
2
3
4
9
8
6
10
12
7
11
10
8
5
11
9
6
1
5
2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

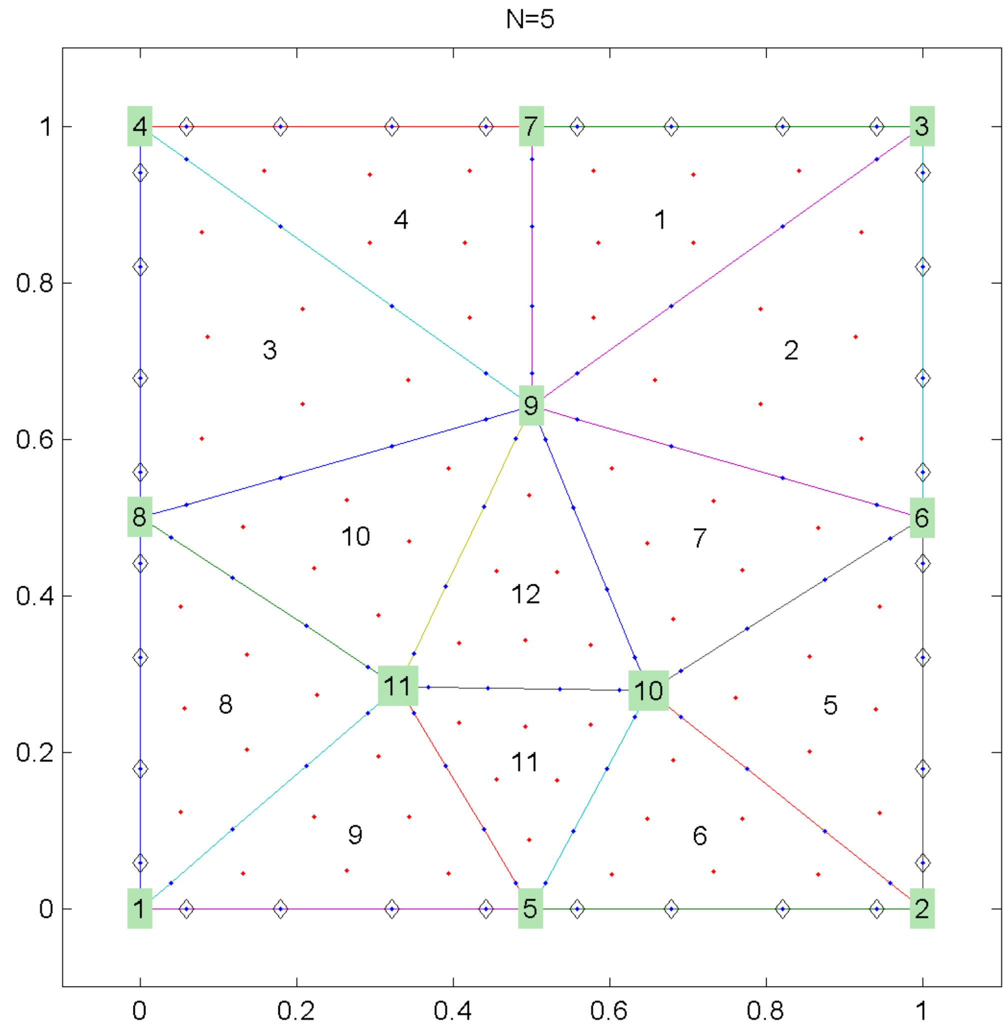
N=2

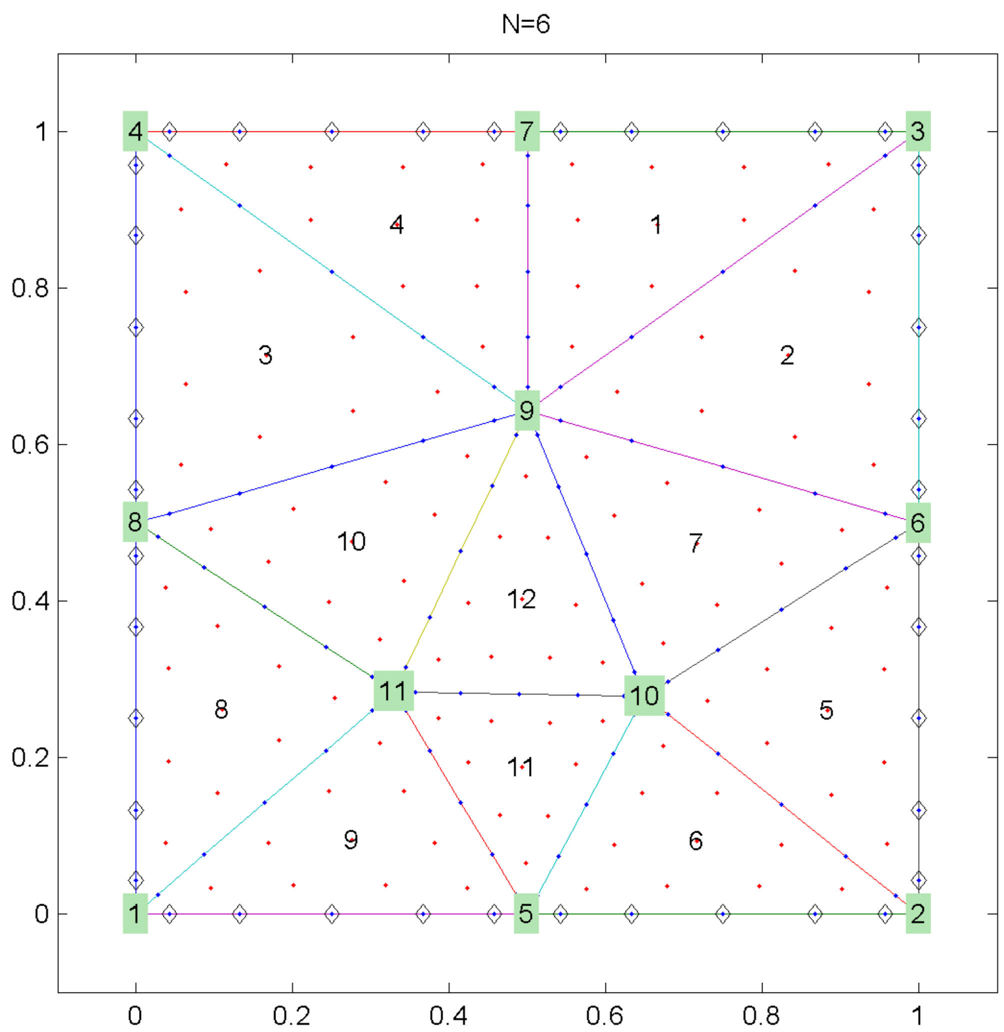


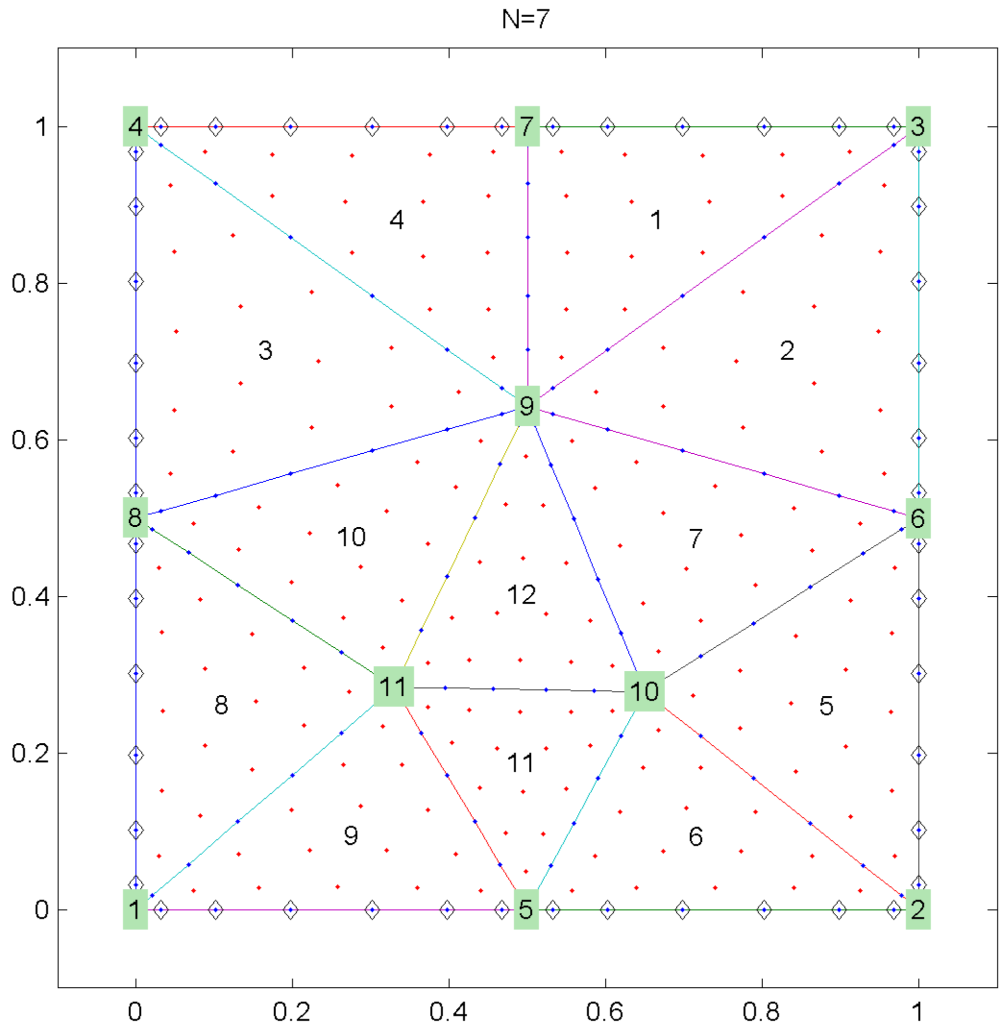


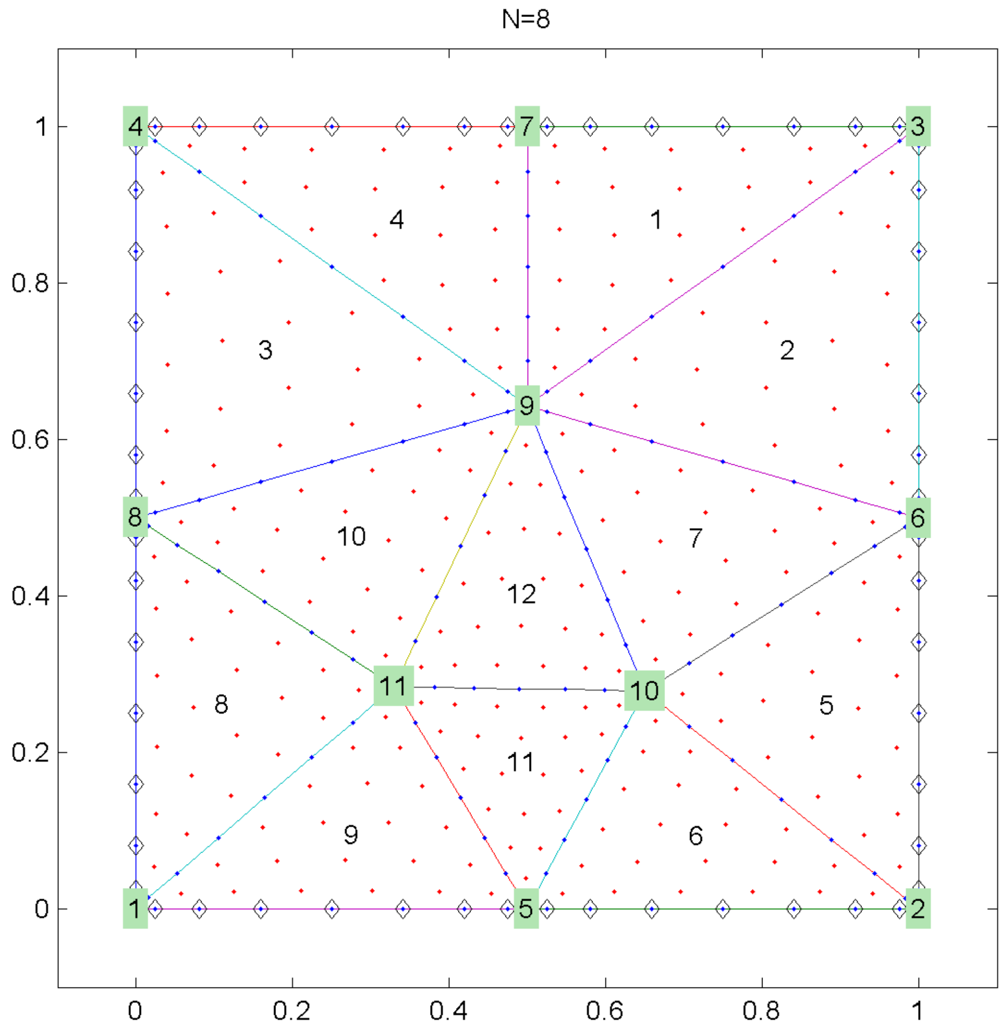
N=3
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

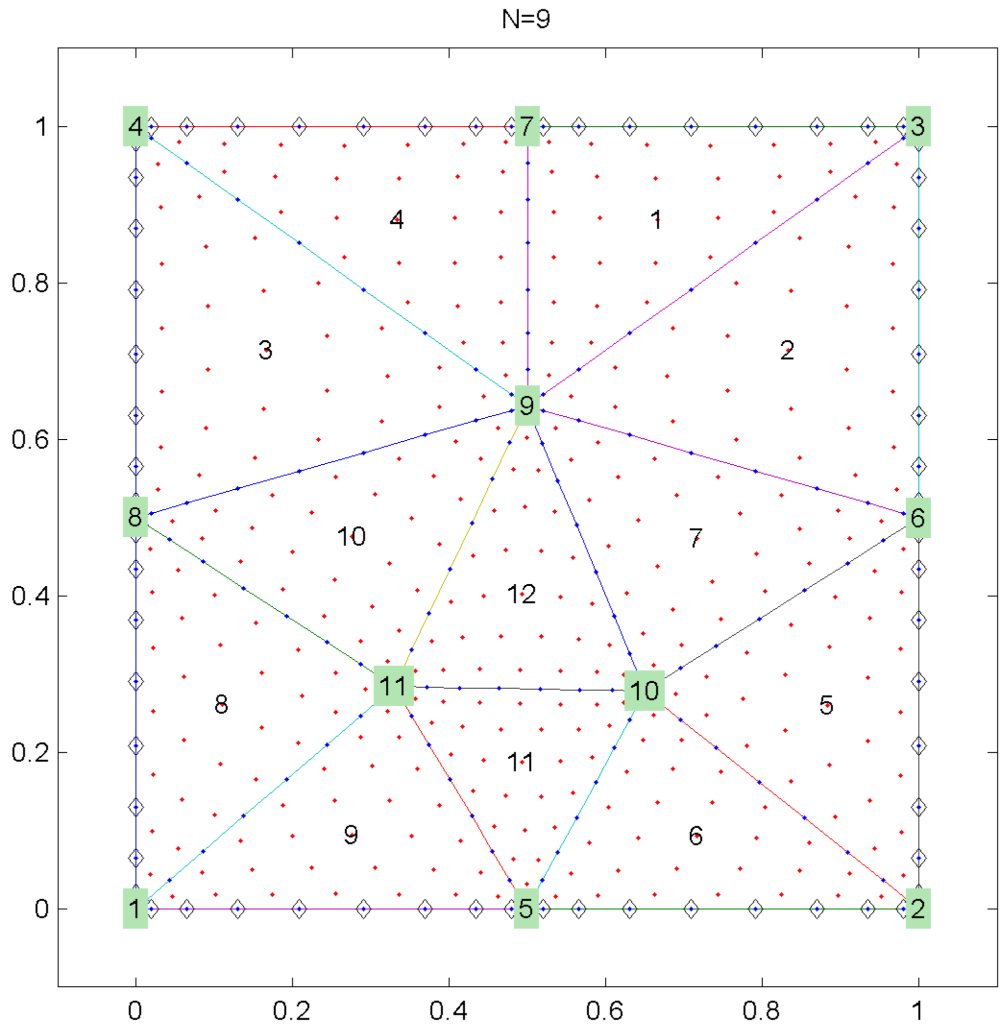

N=4
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
9
8
6
11
10
1
5
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

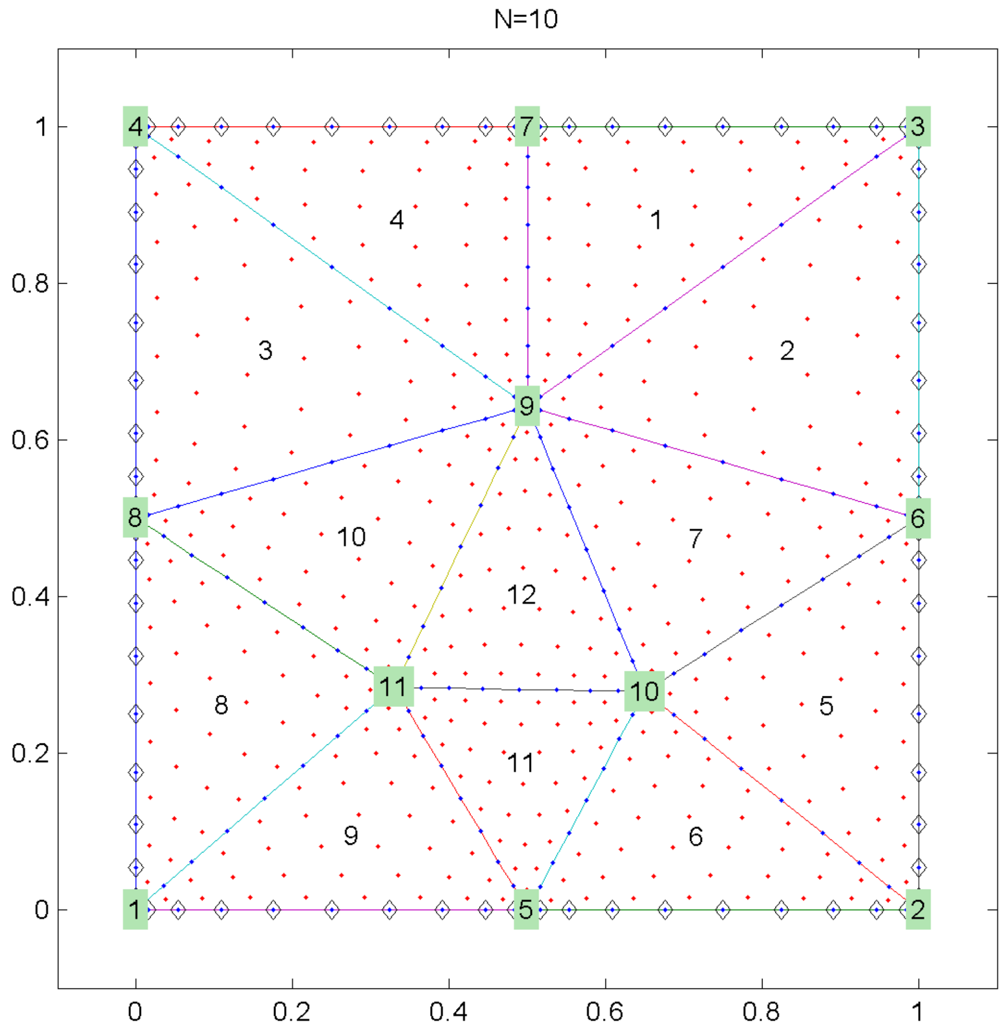

N=5
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
9
8
6
11
10
1
5
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

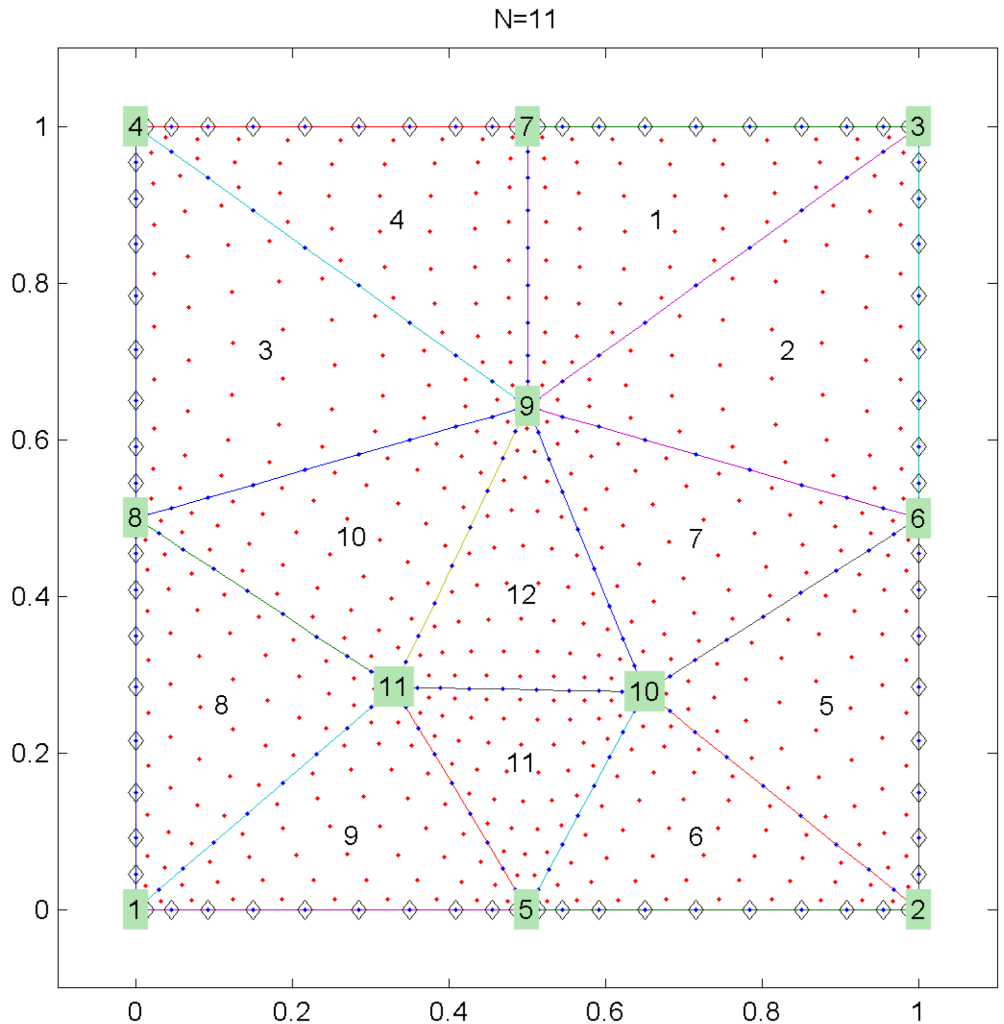

N=6
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

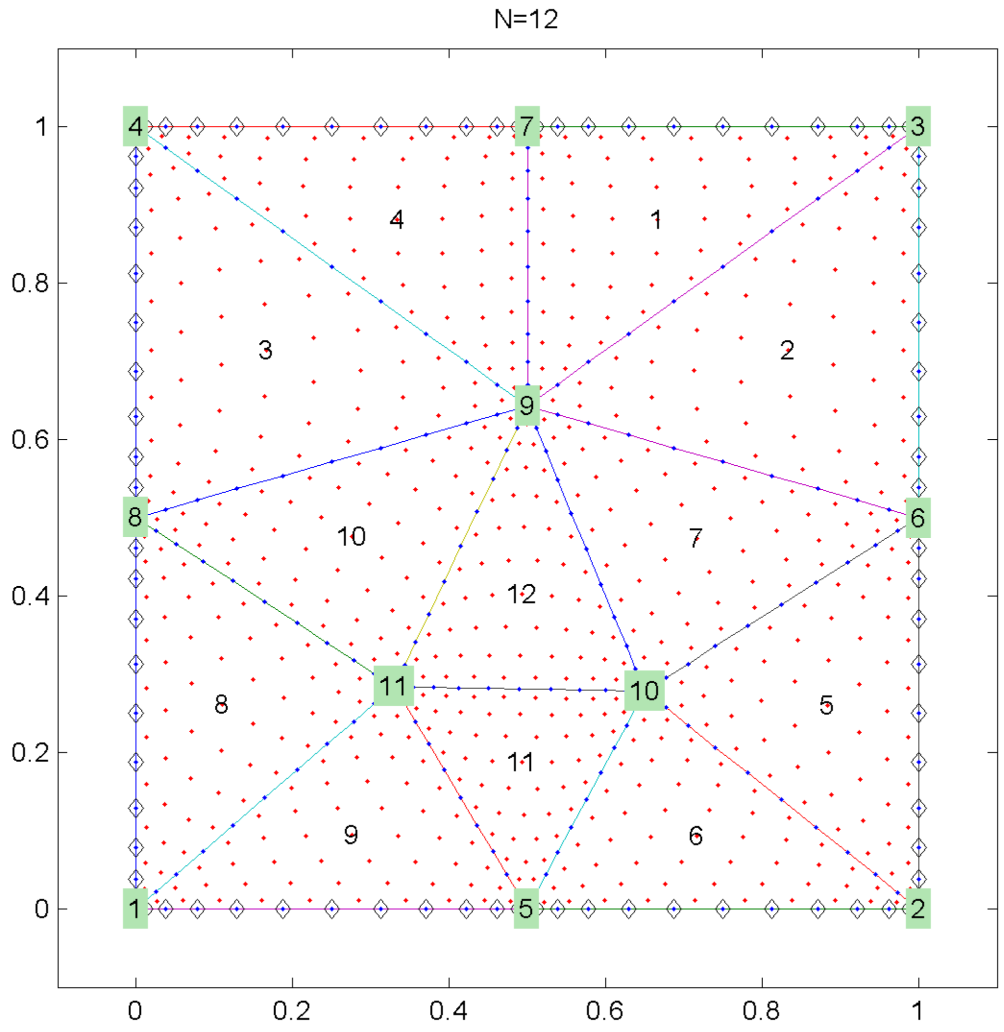

N=7
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

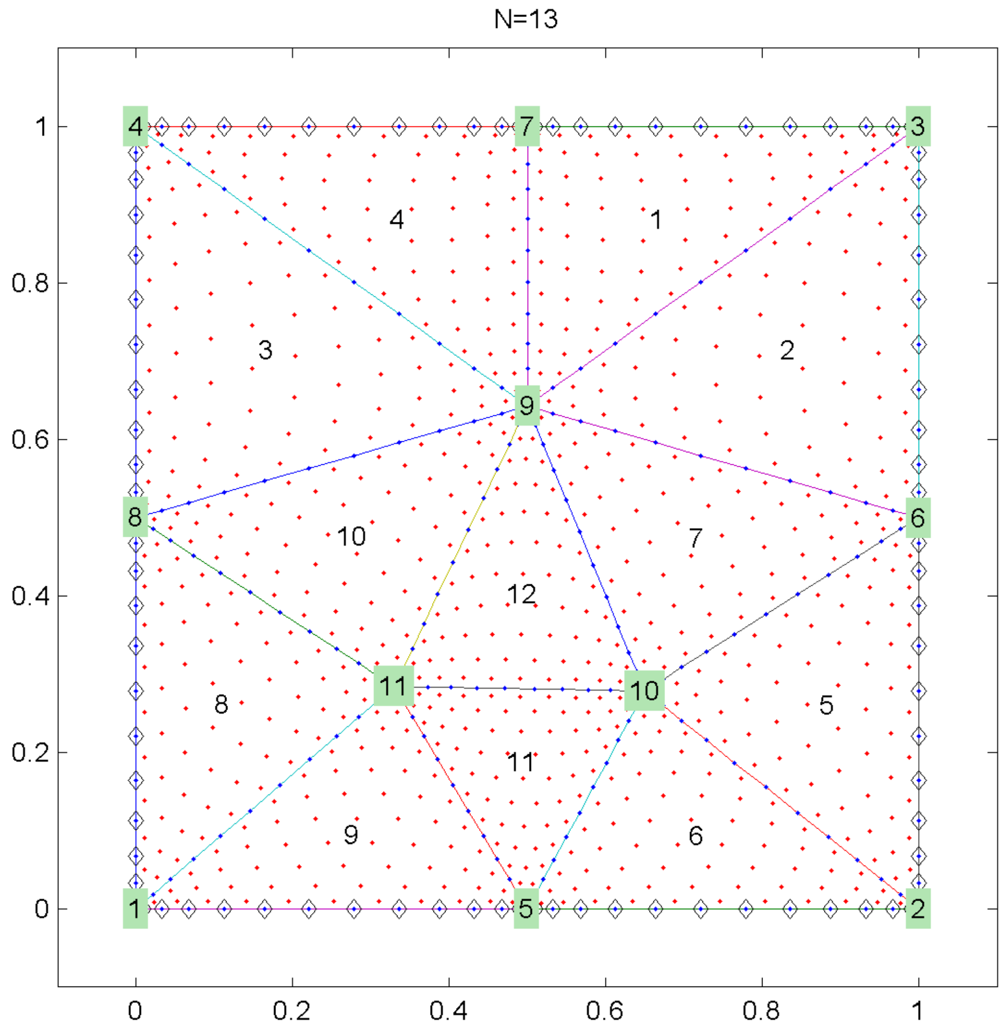

N=8
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
9
8
6
11
10
1
5
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


N=9
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
1
2
3
9
8
6
10
7
12
11
10
8
5
11
9
6
1
5
2
4

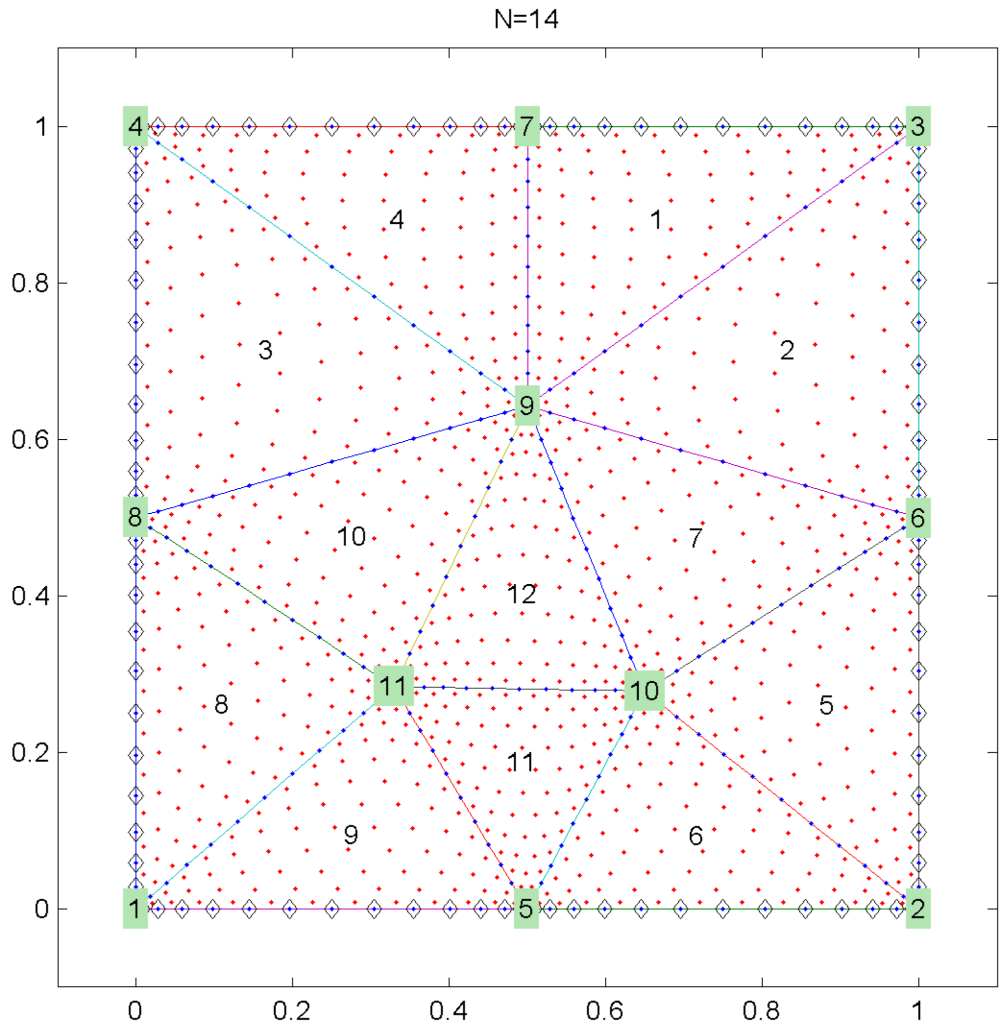

N=10
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

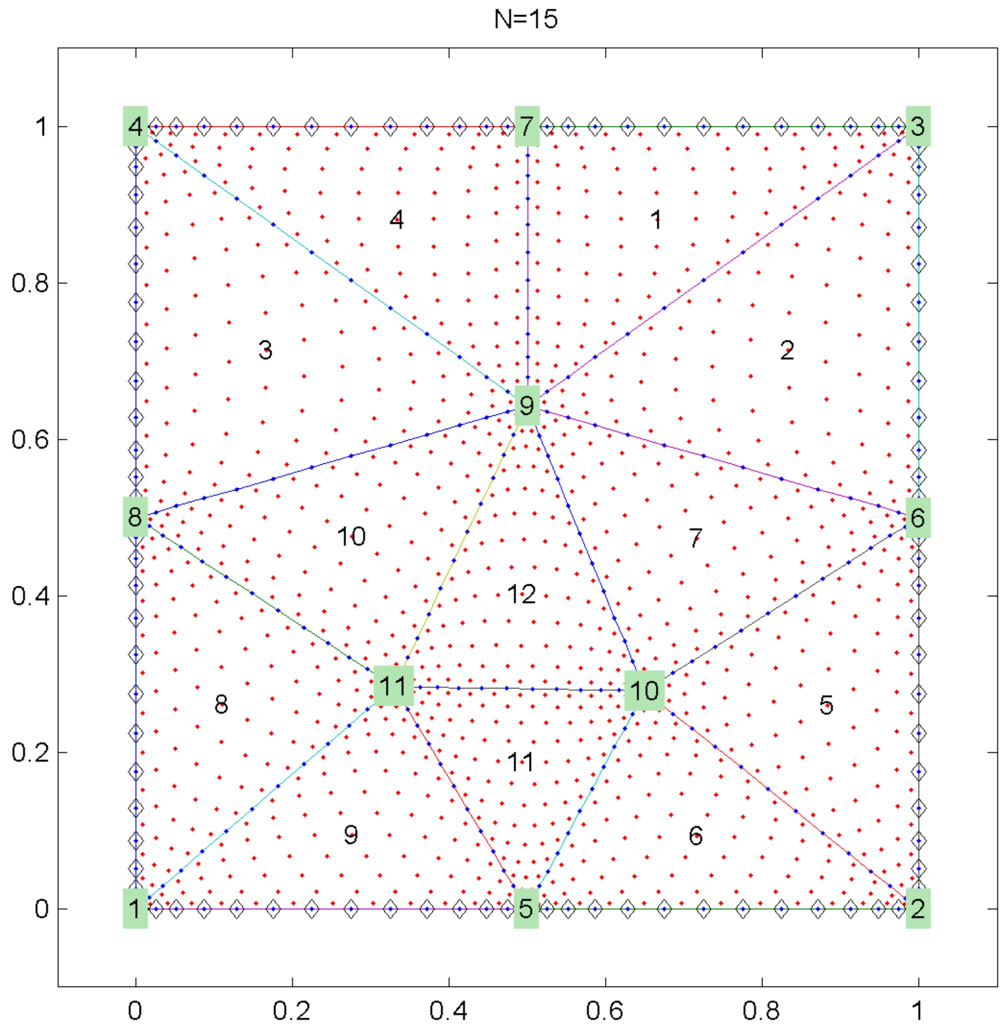

N=11
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

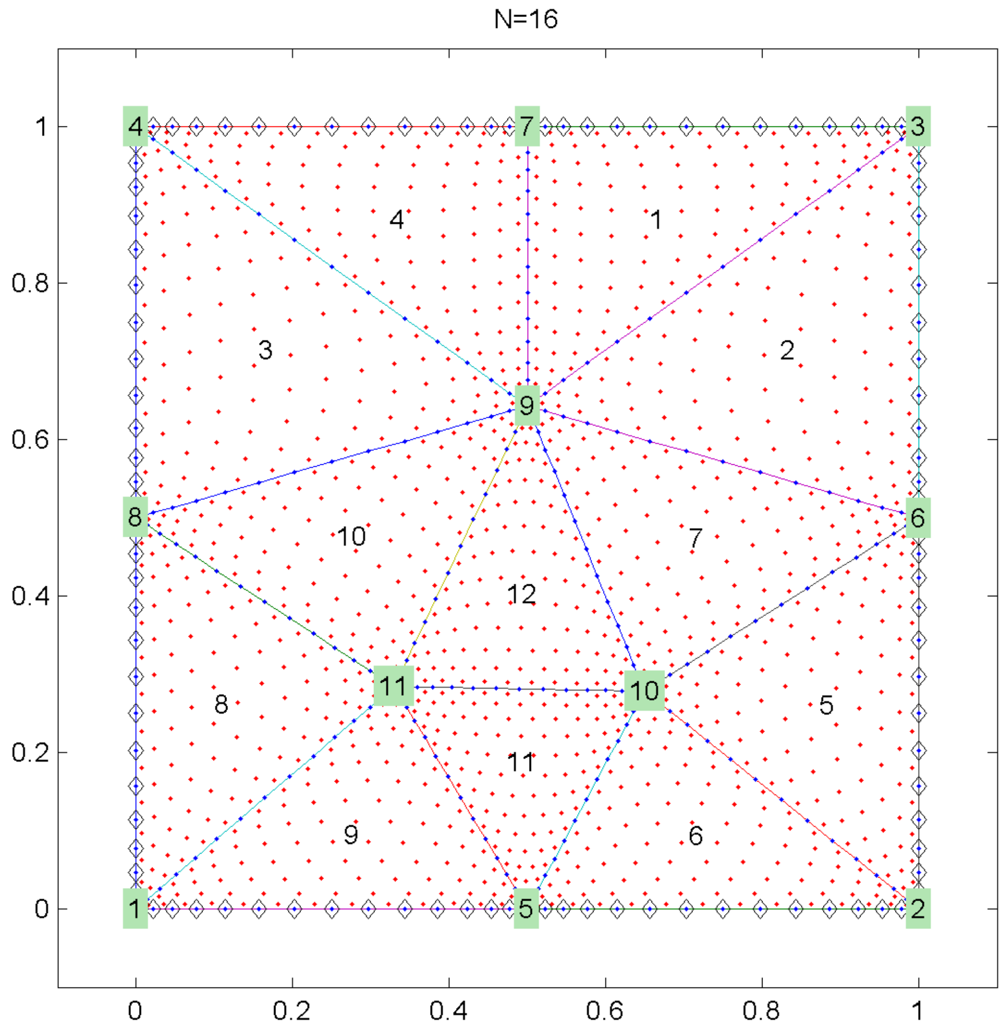

N=12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

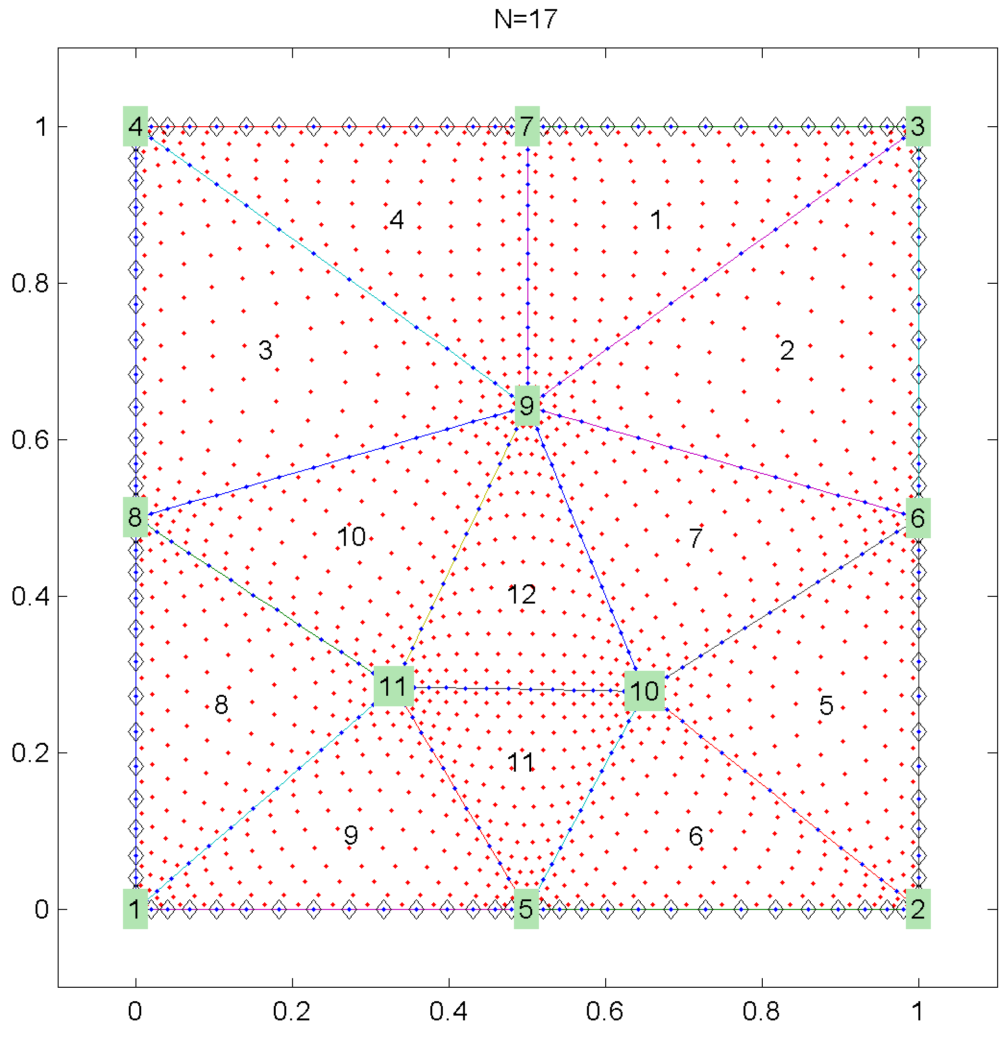


N=13
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

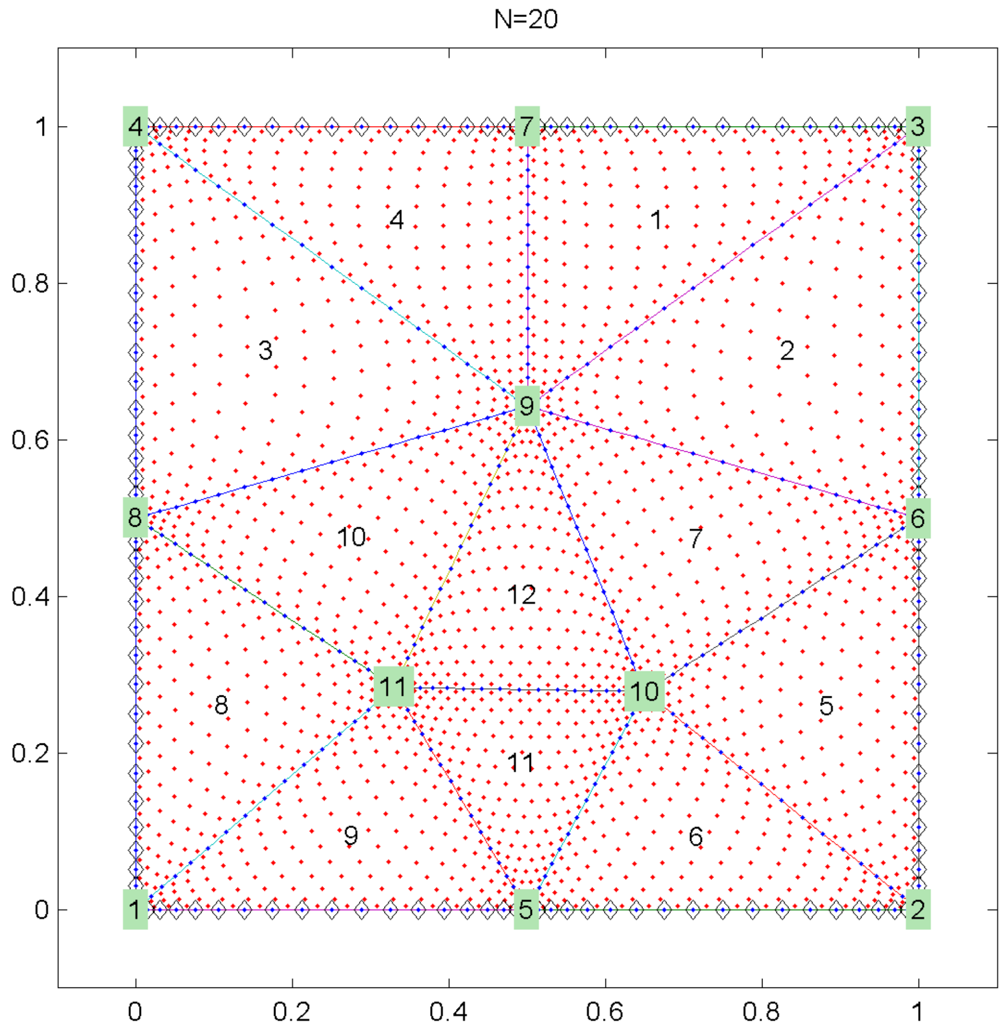

N=14
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
8
6
1
5
2
9
10
11
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


N=15
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


N=16
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
1
2
3
9
8
6
10
7
12
11
10
8
5
11
9
6
1
5
2



N=17
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
9
8
6
11
10
1
5
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


N=20
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
4
7
3
9
8
6
11
10
1
5
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

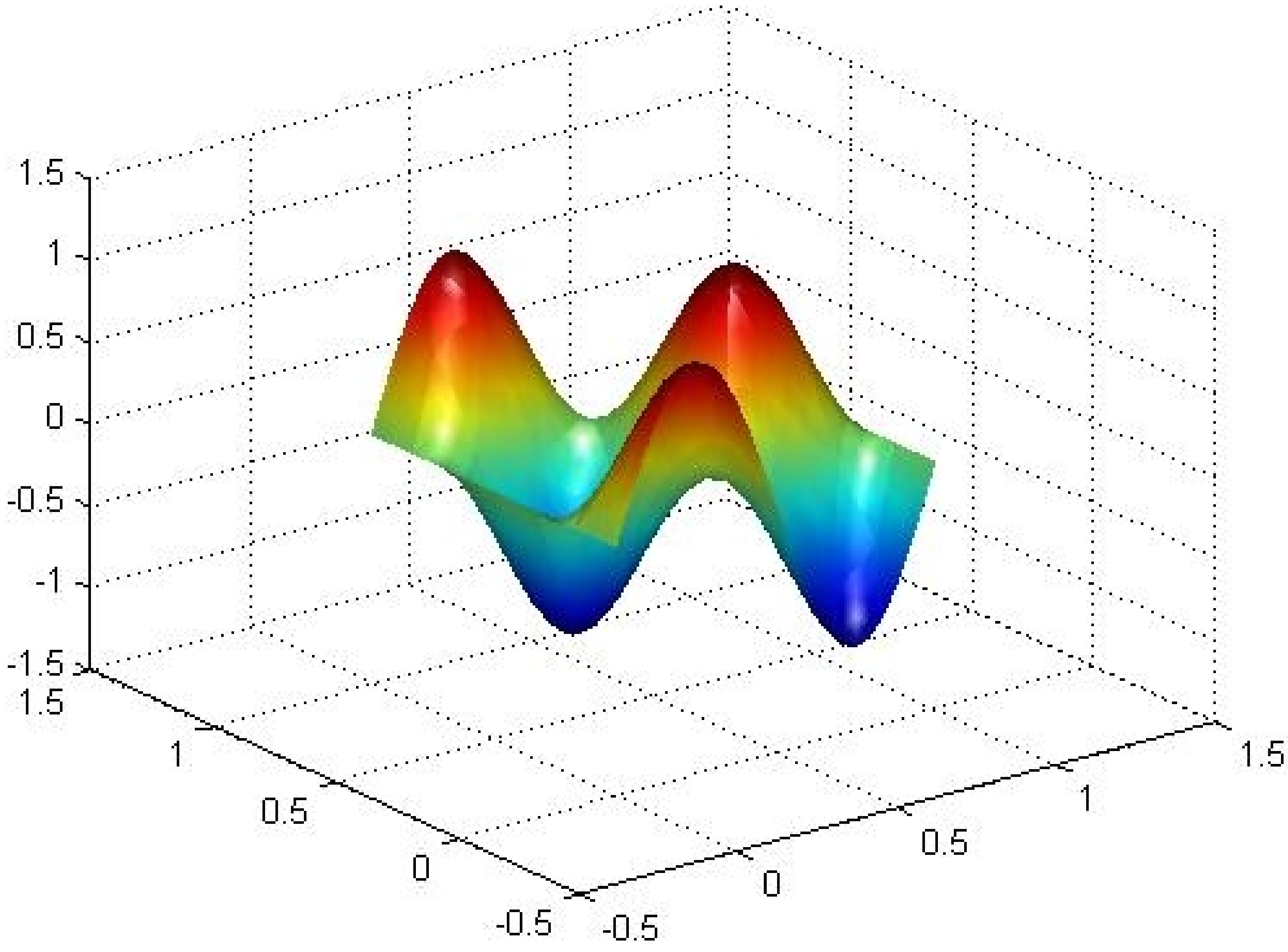
Momentálny progress

- Zoznámenie sa s nespojitou galerkinovou metódou a kódom nudg++
- Vytvoriť geometriu a mesh v programe Gmsh
- Doprogramovať podporu gmsh do nudg
- Spočítať jednoduchú úlohu v nudg:

$$-\nabla^2 u = f \quad \text{na} \quad \Omega = [(0,1)^2]$$

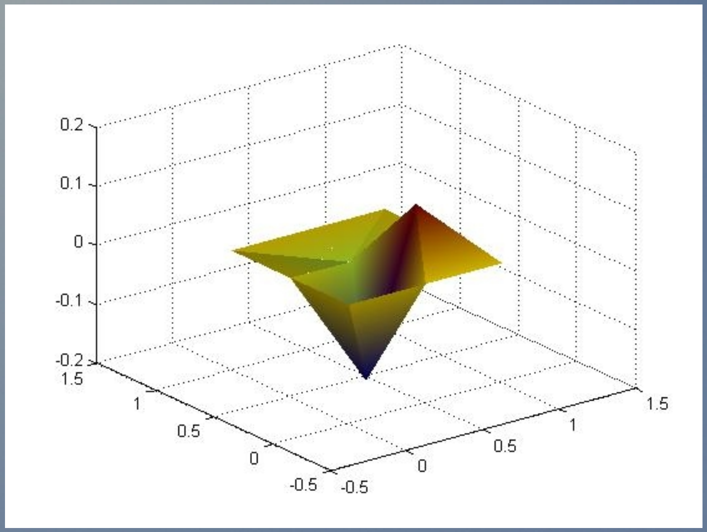
$$f = -8(\pi^2)\sin(2\pi x)\cos(2\pi y)$$

$$u = 0 \quad \text{na hranici}$$

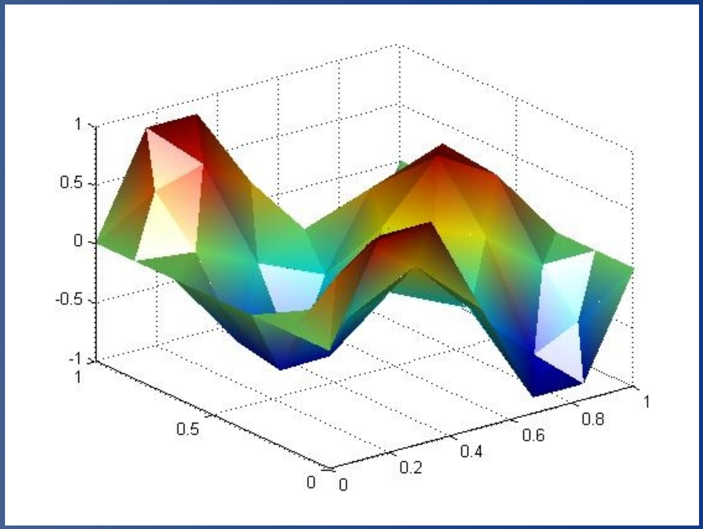


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5

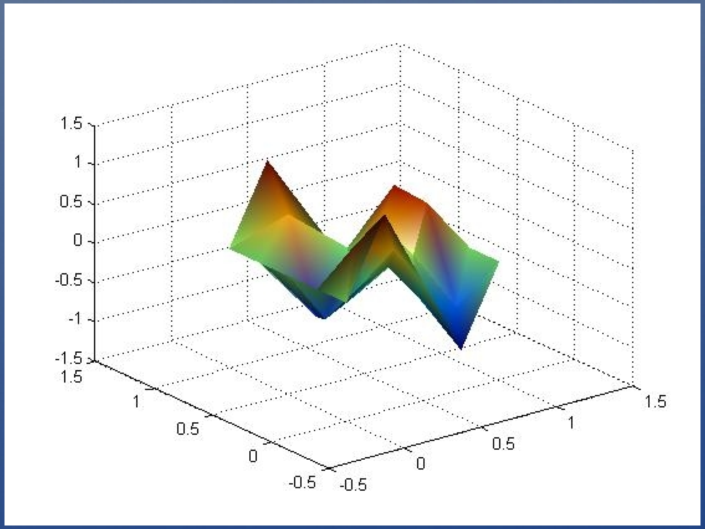
P=1, K=12



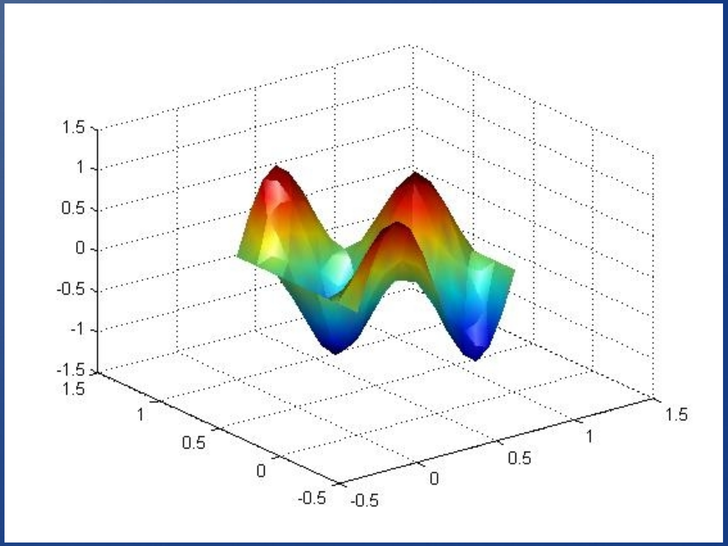
P=1, K=90



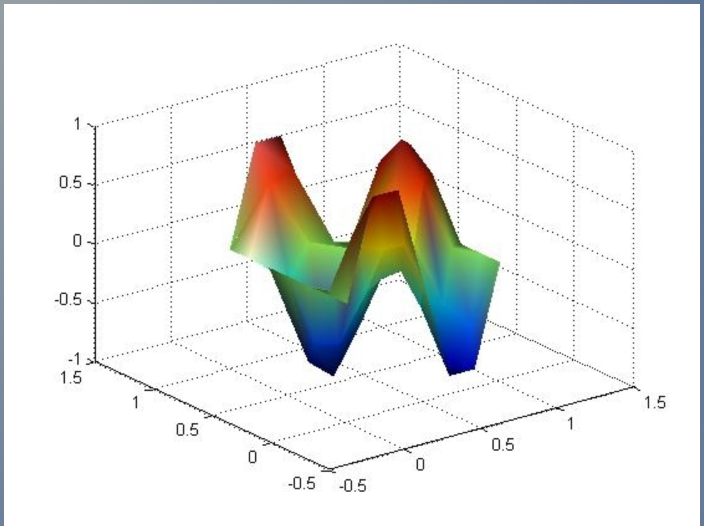
P=2, K=12



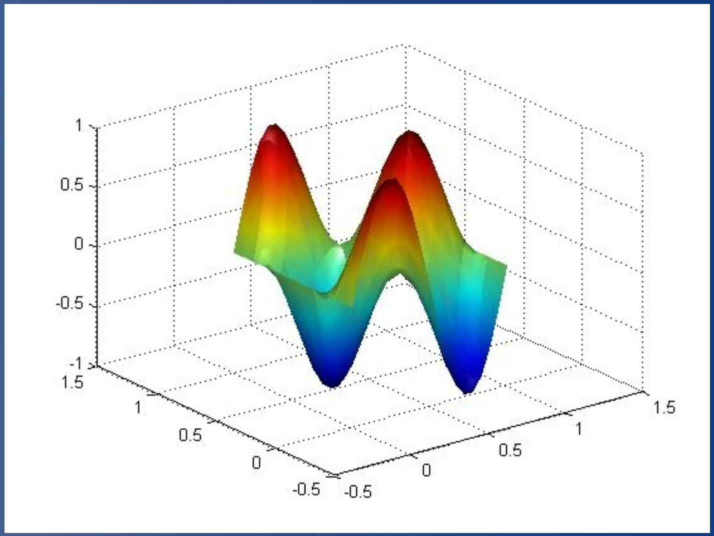
P=2, K=90



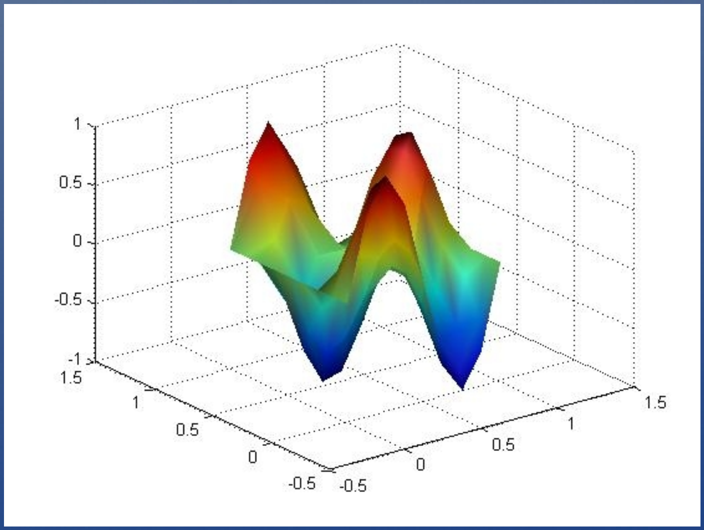
P=3, K=12



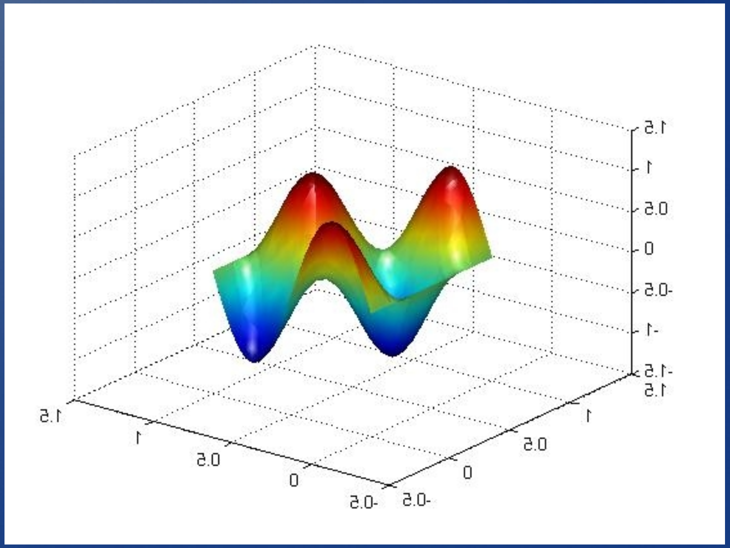
P=3, K=90



P=4, K=12



P=4, K=90



Cielom diplomovej práce

”Student

- Odvodí
- Naprogramuje
- Otestuje

numerické riešenie rovnice EM indukcie v 3-D heterogénnom prostredí pomocou nespojitej Galerkinovy metody.” z SIS MFF

KONIEC

Ďakujem za pozornosť