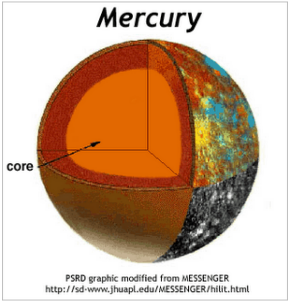
Jouleovské zahřívání Merkuru

Ondřej Peisar

4. 5. 2011

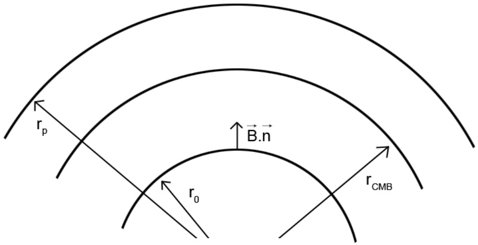
Motivace

- Merkur generuje vlastní magnetické pole (dynamo)
- slabé magnetické pole na povrchu (1% zemského), dominantní příspěvek dipólového členu
- velké jádro (75 % poloměru planety)
- zajímá nás příspěvek Jouleovského tepla k plášťové konvekci



Formulace

- řeším sférickou rovnici $\vec{B} + k_s^2 \vec{B} = 0$,
  kde $k_s^2 = \imath\omega\mu_0\sigma_s$
- vrstevnatý model, vodivost v jednotlivých vrstvách považuji za



  konstantní
- magnetické pole generováno hluboko ve vnitřním jádru (Christensen, 2006)

Formulace

- dvouslupkový model
  poloměr spodku stabilní vrstvy: $r_0 = 1250km$
  poloměr na hranici jádro-plášť: $r_{CMB} = 1900km$
  poloměr planety: $r_p = 2440km$
- uvažujeme nulový vnější ponteciál: $U^{(ext)} = 0$
- předepisujeme radiální složku pole na spodní hranici (hranice vnitřního jádra a stabilní vrstvy)
- normálová a tečná složka musí být spojitá na hranicích vrstev

Vztahy

- magnetické pole uvnitř
$\vec{B} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} \sum_{l=j-1}^{j+1} \alpha_{jm}^{l} w_l(kr) \vec{Y}_{jm}^{l}(\vartheta, \varphi)$
- potenciál
$U = r_p \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} [(\frac{r}{r_p})^j G_{jm}^{(e)} + (\frac{r_p}{r})^{j+1} G_{jm}^{(i)}] Y_{jm}(\vartheta, \varphi)$
- vede na vztah pro mag. pole vně
$\vec{B} = -\nabla U =$
$-\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} [\sqrt{j(2j+1)}(\frac{r}{r_p})^{j-1} G_{jm}^{(e)} \vec{Y}_{jm}^{j-1}(\vartheta, \varphi) +$
$\sqrt{(j+1)(2j+1)}(\frac{r_p}{r})^{j+2} G_{jm}^{(i)} \vec{Y}_{jm}^{j+1}(\vartheta, \varphi)]$

Vztahy

- žádné plošné proudy, podmínka spojitosti $\vec{B}$ na rozhraní
  $\vec{e}_r.\vec{B}_s = \sum_{jm} \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\alpha_{jm}^{j-1}[w_{j-1}(k_s r) + w_{j+1}(k_s r)]Y_{jm}(\vartheta,\varphi)$
  $= \sum_{jm} \sqrt{j(2j+1)}\alpha_{jm}^{j-1}\frac{w_j(k_s r)}{k_s r}Y_{jm}(\vartheta,\varphi)$
  $\vec{e}_r \times \vec{B}_s =$
  $i\sum_{jm} \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\alpha_{jm}^{j-1}[w_{j-1}(k_s r) - \frac{j}{j+1}w_{j+1}(k_s r)]\vec{Y}_{jm}^{j}(\vartheta,\varphi)$
  $= i\sum_{jm} \sqrt{\frac{2j+1}{j+1}}\alpha_{jm}^{j-1}\frac{1}{k_s r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rw_j(k_s r))\vec{Y}_{jm}^{j}$
- parametry α jsou v daných vrstvách konstantní

Označení

- $h_{jm}(r) := \alpha_{jm}^{j-1} \frac{1}{k_s r} w_j(k_s r)$
- $t_{jm}(r) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r w_j(k_s r)) \frac{\alpha_{jm}^{j-1}}{k_s}$
- což vede na jednodušší zápis:
- $\vec{e}_r . \vec{B}_s = \frac{1}{r} \sum_{jm} \sqrt{\frac{j}{2j+1}} h_{jm}(r) Y_{jm}$
- $\vec{e}_r \times \vec{B}_s = \frac{i}{r} \sum_{jm} \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} t_{jm}(r) \vec{Y}_{jm}^{j}$

Maticový tvar

- $\frac{\alpha_{jm}^{j-1}}{k_s} w_j(k_s r) = a_{jm}^s J_j(k_s r) + b_{jm}^s Y_j(k_s r) = h_{jm}(r)$
- $t_{jm}(r) = a_{jm}^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r J_j(k_s r)) + b_{jm}^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r Y_j(k_s r))$
- maticově:
$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix}(r) = A_j^s(r) \begin{pmatrix} a_{jm}^s \\ b_{jm}^s \end{pmatrix}$$
- kde
$$A_j^s(r) = \begin{pmatrix} J_j(k_s r) & Y_j(k_s r) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r J_j(k_s r)) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r Y_j(k_s r)) \end{pmatrix}$$

Maticový tvar

- ze vztahu na dolní, resp. horní, hranici:

$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_{s-1}) = A_j^s(r_{s-1}) \begin{pmatrix} a_{jm}^s \\ b_{jm}^s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_s) = A_j^s(r_s) \begin{pmatrix} a_{jm}^s \\ b_{jm}^s \end{pmatrix}$$

- získáme maticový vztah na hranicích dané vrstvy

$$\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_s) = A_j^s(r_s)[A_j^s(r_{s-1})]^{-1} \begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix} (r_{s-1})$$

(Pěč et al., 1985)

Maticový tvar

- přenosová matice s-té vrstvy má tvar

$$\Rightarrow B_j^s = \begin{pmatrix} P_j + z_2 Q_j & -P_j \\ P_j + z_1 R_j + z_2 Q_j + z_1 z_2 S_j & -P_j - z_1 R_j \end{pmatrix} z_2$$

- kde $z_1 = k_s r_s$ a $z_2 = k_s r_{s-1}$

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= S_j + \tfrac{j^2}{z_1 z_2} P_j - \tfrac{j}{z_1} Q_j - \tfrac{j}{z_2} R_j \\ Q_{j+1} &= \tfrac{j}{z_1} P_j - \tfrac{j+2}{z_2} P_{j+1} - R_j \\ R_{j+1} &= \tfrac{j}{z_2} P_j - \tfrac{j+2}{z_1} P_{j+1} - Q_j \\ S_{j+1} &= R_j - \tfrac{(j+2)^2}{z_1 z_2} P_{j+1} - \tfrac{j+2}{z_1} Q_{j+1} - \tfrac{j+2}{z_2} R_{j+1} \end{aligned}$$

Maticový tvar

- kontrolní součin a počáteční podmínky mají tvar:

$$P_jS_j - Q_jR_j = \frac{1}{z_1^2 z_2^2}$$
$$P_0 = \frac{sin(z_2 - z_1)}{z_1 z_2}$$
$$Q_0 = \frac{cos(z_2 - z_1)}{z_1 z_2} - \frac{sin(z_2 - z_1)}{z_1 z_2^2}$$
$$R_0 = -\frac{cos(z_2 - z_1)}{z_1 z_2} - \frac{sin(z_2 - z_1)}{z_1^2 z_2}$$
$$S_0 = \frac{sin(z_2 - z_1)}{z_1 z_2} - \frac{cos(z_2 - z_1)}{z_1^2 z_2} + \frac{cos(z_2 - z_1)}{z_1 z_2^2} + \frac{sin(z_2 - z_1)}{z_1^2 z_2^2}$$

Maticový tvar

- vztah pole na spodní hranici výpočetní oblasti (horní hranice magnetokonvekce) a pole na povrchu

$$\begin{pmatrix} h_{jm}(r_p) = -\frac{r_p}{\sqrt{j(2j+1)}}[jG_{jm}^{(e)} - (j+1)G_{jm}^{(i)}] \\ t_{jm}(r_p) = -r_p(j+1)\sqrt{\frac{j}{2j+1}}[G_{jm}^{(e)} + G_{jm}^{(i)}] \end{pmatrix}$$

$$= C.\begin{pmatrix} h_{jm} \\ t_{jm} \end{pmatrix}(r_0)$$

- kde $C = \prod_{s=N}^{2} B^s$
- známe: $G_{jm}^{(e)}, h_{jm}(r_0)$
- počítáme: $G_{jm}^{(i)}, t_{jm}(r_0)$

Momentální stav

- používaný kód byl otestován na správné použití rekurzí Besselových funkcí proti kódu prof. Martince
- uvažujeme periodu T = 10 000 yr
- ve stabilní vrstvě předpokládáme vodivost $\sigma = 10^6 S.m^{-1}$ v plášti pak $\sigma = 1 S.m^{-1}$ a menší (až o dva řády)
- z pak nabývá ve stabilní vrstvě hodnot okolo 1, v plášti pak 10^{-4}
- program funguje dobře pro malá j (do j=4)
- snahy o zlepšení výpočtů:
  čtyřnásobná přesnost
  vytknutí $\frac{1}{z_1 z_2}$
  počítání Besselových funkcí jako nekonečné řady

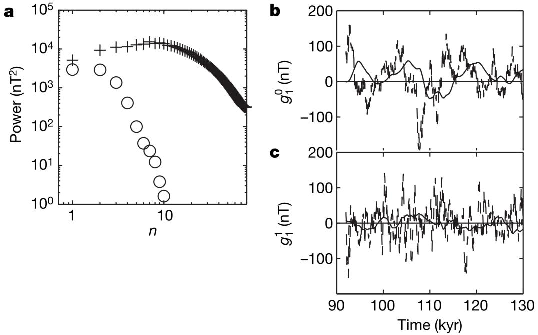


Figure 2 | Magnetic field spectral components of case I. **a**, Time-averaged magnetic power spectrum versus degree n at the planetary surface ($r = 1.32r_o$, circles) and radial average inside the fluid core (crosses). The latter values have been scaled down by a factor of 10^{-4} and represent mainly the field in the dynamo region. **b**, **c**, Time series of Gauss coefficients representing the axial dipole (**b**), and part of the equatorial dipole (**c**) at Mercury's surface (full lines). Broken lines are harmonic coefficients representing the poloidal magnetic field near the bottom of the stable layer at $r = r_i + D/2$, scaled down by a factor of 10^{-2}.

Jouleovské teplo

- počítáme Jouleovské teplo
- $\int_r \frac{1}{\mu_0} |\nabla \times \vec{H}|^2 \mathrm{d}V$
- lze pomocí rekurzí pro Besselovy funkce a vztahy pro sférické harmoniky upravit na tvar $\int_r \frac{1}{\mu_0} r^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=-j}^{j} (\alpha_{jm}^{j-1})^2 \frac{2j+1}{j+1} (k_s w_j(k_s r))^2 \mathrm{d}r$

Co nás čeká

- stabilizace kódu pro větší j
- integrace vztahu obsahujícího Besselovy funkce, pomocí knihovny slatec
- spočítání výsledků pro různé hodnoty vodivosti