Slapově buzené teplotní nestability: vliv na obyvatelnost exo-Zemí

Marie Běhounková, Gabiel Tobie, Gaël Choblet, Ondřej Čadek

2.3.2011

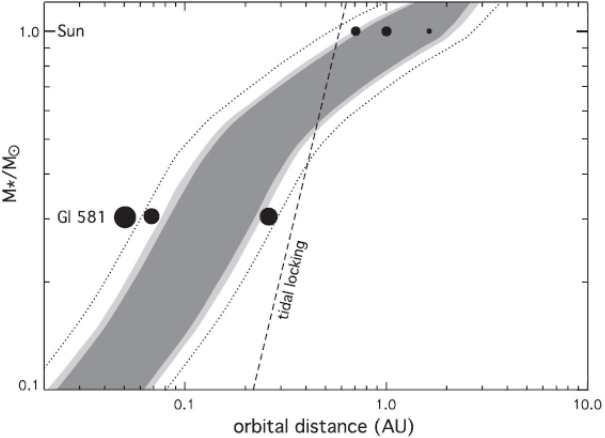
Motivace

- detekce super-Zemí s nízkou hmotností (http://exoplanets.org/, http://exoplanet.eu/)
  - Gl 581 e - $M = 1.94 M_\oplus$, $r = -$
  - Kepler-10 b - $M = 4.3 M_\oplus$, $r = 1.42 r_\oplus$
  - Kepler-11 f - $M = 2.3 M_\oplus$, $r = 2.61 r_\oplus$
- blízká budoucnost - detekce Zemi-podobného tělesa mimo Sluneční soustavu ($M = M_\oplus$, $r = r_\oplus$)
- preference detekce krátkoperiodických planet pro nejproduktivnější detekční techniky (radial velocity, transit search)
- krátkoperiodické planety - vysoká pravděpodobnost rychlého slapového uzamčení, typicky 1:1 nebo 3:2 rezonance (spin-orbit resonance)

Motivace

- pro hvězdy $< 0.6M_\odot$ uzamčení Zemi-podobného tělesa v obyvatelné zóně (habitable zone) do miliardy let po formaci planety (Selsis et al. 2008, Lammer et al. 2010)
- omezení obyvatelnosti
  - nerovnoměrné rozložení teplot (příslunı́ a odslunı́)
  - multiplanetární systémy
  - dlouhodobé udržování excentrické orbity v důsledku rezonance (mean motion resonance), Dvořák et al. (2010)
  - může způsobit vysokou produkci tepla vlivem slapového zahřívání (např. Mardling & Lin 2004)
  - v některých případech dochází ke globálnímu tavení pláště a k vulkanismu (Barnes et al. 2008, Henning et al. 2009, Barnes et al. 2010) - využití globálních vlastností a škálovacích zákonů

Motivace



Selsis et al (2008)

Motivace

- pro hvězdy $< 0.6 M_{\odot}$ uzamčení Zemi-podobného tělesa v obyvatelné zóně (habitable zone) do miliardy let po formaci planety (Selsis et al. 2008, Lammer et al. 2010)
- omezení obyvatelnosti
  - nerovnoměrné rozložení teplot (přísluní a odsluní)

  - multiplanetární systémy
  - dlouhodobé udržování excentrické orbity v důsledku rezonance (mean motion resonance), Dvořák et al. (2010)
  - může způsobit vysokou produkci tepla vlivem slapového zahřívání (např. Mardling & Lin 2004)
  - v některých případech dochází ke globálnímu tavení pláště a k vulkanismu (Barnes et al. 2008, Henning et al. 2009, Barnes et al. 2010) - využití globálních vlastností a škálovacích zákonů

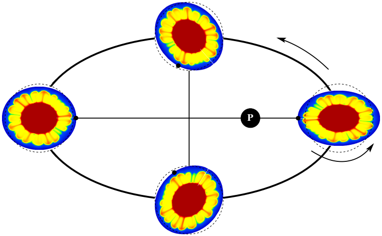
Model

- zkoumání citlivosti Zemi-podobné planety na slapové zahřívání změnou planetárních i orbitálních vlastností
  - spin-orbitální rezonance (1:1 a 3:2)
  - perioda oběžné dráhy
  - excentricita

  - Rayleighovo číslo a teplotní závislost reologických parametrů (desková tektonika x jednodesková konvekce "stagnant lid")
  - radioaktivní zdroje
- nevysvětlujeme celkovou termální evoluci Zemi-podobné planety
  - nutnost souběžného řešení vývoje orbity a termálního vývoje planety
  - dává smysl pouze pro dobře určené planetární systémy
  - velká variabilita reologických parametrů a radioaktivních zdrojů (akreční historie planety, čas po formaci soustavy, složení mateřské hvězdy)
  - počáteční podmínky

Metoda

- různé časové skály pro dlouhoperiodické pláštové tečení a slapovou odezvu
- slapová odezva - viskoelastický materiál
- pláštové tečení - viskózní materiál, průměrná slapová disipace jako zdroj objemové energie
- teplotní závislost reologických parametrů obou procesů → vazba



Viskózní tečení

- $$\eta = A(d, \sigma_{\mathrm{II}}) \exp\left(\frac{E^* + pV^*}{RT}\right)$$
- závislost pouze na teplotě:
$$\eta = A \exp\left(\frac{E^*}{RT}\right)$$
- linearizace: Frank-Kamenetského aproximace
$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left(-a_{\mathrm{vis}} \frac{T - T_0}{\Delta T}\right)$$
$$a_{\mathrm{vis}} = \frac{E^* \Delta T}{R T_i^2}$$

Viskoelasticita - Botzmannova teorie a dynamická kompliance

- Boltzmannova lineární teorie

$$\epsilon = \int_{-\infty}^{t} \dot{\sigma}(\tau) D(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

- periodický děj $\sigma(t) = \sigma_0 \exp(\mathrm{i}\omega t)$, substituce $\xi = t - \tau$:

$$\epsilon(t) = \mathrm{i}\omega \underbrace{\sigma_0 \exp(\mathrm{i}\omega t)}_{\sigma(t)} \int_0^{\infty} \exp(-\mathrm{i}\omega\xi) D(\xi) \mathrm{d}\xi$$

- dynamická kompliance:

$$D^*(\omega) = {}^{\epsilon(t)}/_{\sigma(t)} = \mathrm{i}\omega \int_0^{\infty} D(\xi) \exp(-\mathrm{i}\omega\xi) \mathrm{d}\xi = D_1(\omega) + \mathrm{i}D_2(\omega)$$

- fáze (posunutí) mezi přiloženým napětím ($\sigma_0 \exp(\mathrm{i}\omega t)$) a výslednou deformací ($\epsilon_0 \exp(\mathrm{i}(\omega t + \delta))$)

$$\tan\delta = \frac{D_2(\omega)}{D_1(\omega)}$$

Viskoelasticita - Botzmannova teorie a dynamická kompliance

- sinusové zatížení: ztráta energie přes jeden cyklus:

$$\Delta E_{\mathrm{diss}} = \oint_{2\pi/\omega} \sigma(t)\dot{\epsilon}(t)\mathrm{d}t = \pi\sigma_0\epsilon_0 \sin\delta$$

- disipační faktor charakterizující ztrátu energie přes jeden cyklus:

$$Q^{-1} = \frac{\Delta E_{\mathrm{diss}}}{2\pi E_{\mathrm{max}}} = \sin\delta = \frac{D_2(\omega)}{\left(D_1^2(\omega) + D_2^2(\omega)\right)^{1/2}} \approx \tan\delta = \frac{D_2(\omega)}{\mathrm{D}_1(\omega)}$$

- obecné vyjádření dynamické kompliance

$$D^*(\omega) = D_U + \sum_{j=0}^{n} \frac{\delta D(\tau_j)}{1 + \mathrm{i}\omega\tau_j} - \frac{\mathrm{i}}{\eta\omega}$$

Viskoelasticita - laboratorní měření

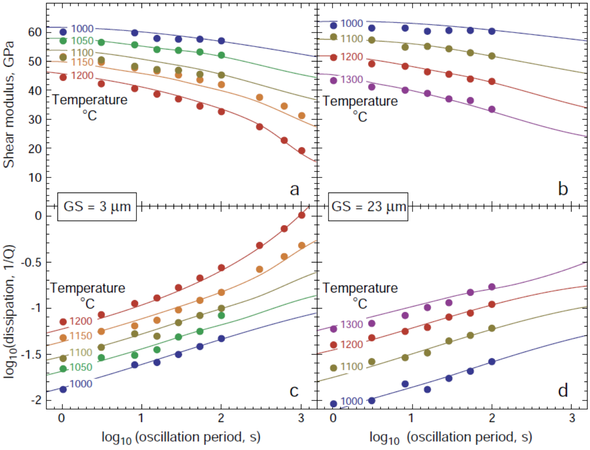
$$J_1(\omega, d, T, P) = J_U(P)\left(1 + \delta \ln J_U + \frac{\alpha_Q \Delta}{\tau_H^{\alpha_Q} - \tau_L^{\alpha_Q}} \times \int_{\tau_L}^{\tau_H} \frac{\tau^{\alpha_Q - 1}}{1 + \omega^2 \tau^2} \mathrm{d}\tau\right) \tag{13}$$

and

$$J_2(\omega, d, T, P) = J_U(P)\left(\frac{\omega \alpha_Q \Delta}{\tau_H^{\alpha_Q} - \tau_L^{\alpha_Q}} \int_{\tau_L}^{\tau_H} \frac{\tau^{\alpha_Q}}{1 + \omega^2 \tau^2} \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\omega \tau_M}\right) \tag{14}$$

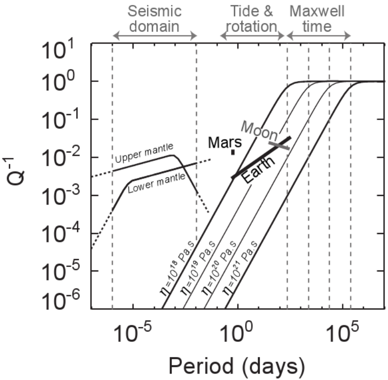
Faul & Jackson 2005

Viskoelasticita - laboratorní měření



Faul & Jackson 2005

Viskoelasticita - pozorování



Sotin et al. 2009

Viskoelasticita - zjednodušení

- komplexní reologický popis pro laboratorní experimenty - řešení ve spektrální oblasti
- zjednodušení Maxwellovská reologie $D_1 = \frac{1}{\mu}$, $D_2 = \frac{1}{\omega\eta}$
  - popis pouze pomocí dvou parametrů, možnost zahrnout 3D variace teploty pro řešení v časové doméně
  - popisuje děje s charakteristickými časy vetšími než Maxwellovský čas
  - pro charakteristické časy menší než Maxwellovský čas podceňuje disipaci

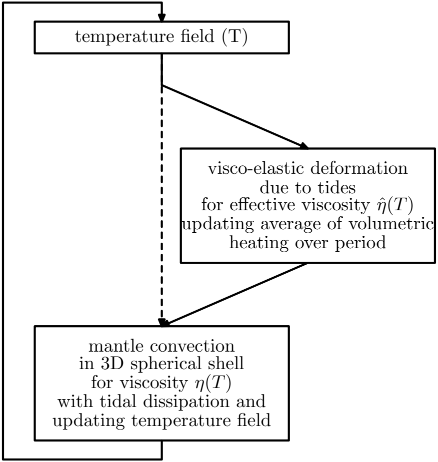
  $\rightarrow$ definice efektivní viskozity (tak aby byla disipace rovna definovanému Q)

$$\hat{\eta} = \sqrt{Q^2 - 1} \times \frac{\mu}{\omega}$$

  - tato aproximace v platná pouze za předpokladu budící síly na jedné frekvenci
  - teplotní závislost (analogicky s teplotní závislostí viskozity)

$$\hat{\eta}(T) = \hat{\eta}_b \exp\left(\hat{a}_{\mathrm{vis}} \frac{T_b - T}{\Delta T}\right)$$

Schéma


temperature field (T)
visco-elastic deformation
due to tides
for effective viscosity $\hat{\eta}(T)$
updating average of volumetric
heating over period
mantle convection
in 3D spherical shell
for viscosity $\eta(T)$
with tidal dissipation and
updating temperature field

Rovnice - plášťové tečení

- klasická Boussinesqova aproximace

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla \cdot \mathbf{v}, && (1)\\
0 &= -\nabla p + \nabla \cdot \left(\eta(T)\left(\nabla \mathbf{v} + \nabla^{\mathrm{T}} \mathbf{v}\right)\right) - \rho_0 \alpha \left(T - T_0\right) g_0 \boldsymbol{e}_r, && (2)\\
\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= -\rho_0 c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T + k \nabla^2 T + h_i + h_{\mathrm{tide}}, && (3)
\end{aligned}
$$

- okrajové podmínky
  - free-slip
  - podmínka na teplotu

Rovnice - slapová odezva

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla \cdot \mathbf{u}, &(4)\\
0 &= -\nabla p + \nabla \boldsymbol{D} + \mathbf{f} &(5)
\end{aligned}
$$

- síla

$$\mathbf{f} = \rho \left(\nabla \phi + \nabla V \right)$$

- Maxwellovská reologie

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\hat{\mu} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}} \right) \right) &= -\frac{\hat{\mu}}{\hat{\eta}} \boldsymbol{D} \\
\hat{\eta} = \hat{\eta} \exp \left(-\hat{a}_{\mathrm{vis}} \frac{T - T_0}{\Delta T} \right), &\quad \hat{\mu} = \hat{\mu}(r)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

- okrajové podmínky

$$
\begin{aligned}
\text{povrch:} &\quad (-p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{e}_r + u_r \rho_{\mathrm{mantle}} \mathbf{g} = 0 \\
\text{rozhraní jádro-plášť:} &\quad (-p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{e}_r - u_r \left(\rho_{\mathrm{core}} - \rho_{\mathrm{mantle}} \right) \mathbf{g} = -\rho_{\mathrm{core}} (\phi + V) \boldsymbol{e}_r
\end{aligned}
$$

- slapové zahřívání

$$H = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\boldsymbol{D} : \boldsymbol{D}}{2\hat{\eta}} \mathrm{d}\tau$$

Slapové potenciály (Kaula, 1964)

SOR
1 : 1

$$-\frac{1}{2}\left(n^*\right)^2 r^2 \Bigg\{ \quad P_{20}(\cos\vartheta)\left[3e\cos(n^*\tau)+\frac{9}{2}e^2\cos(2n^*\tau)+\frac{27}{8}e^3\cos(n^*t)+\frac{7}{2}e^4\cos(2n^*t)\right]$$
$$-\frac{1}{2}P_{22}(\cos\vartheta)\Bigg[\; e\left(3\cos(2\varphi)\cos(n^*\tau)+4\sin(2\varphi)\sin(n^*\tau)\right)$$
$$+\frac{17}{2}e^2\left(\cos(2\varphi)\cos(2n^*\tau)+\sin(2\varphi)\sin(2n^*\tau)\right)$$
$$-\frac{1}{8}e^3\left(61\cos(2\varphi)\cos(n^*\tau)+62\sin(2\varphi)\sin(n^*\tau)\right)$$
$$-\frac{115}{6}e^4\left(\cos(2\varphi)\cos(2n^*\tau)+\sin(2\varphi)\sin(2n^*\tau)\right)\;\Bigg]\Bigg\}$$

3 : 2

$$-\frac{1}{2}\left(n^*\right)^2 r^2 \Bigg\{ \quad P_{20}(\cos\vartheta)\left[3e\cos(n^*\tau)+\frac{9}{2}e^2\cos(2n^*\tau)+\frac{27}{8}e^3\cos(n^*t)+\frac{7}{2}e^4\cos(2n^*t)\right]$$
$$-\frac{1}{2}P_{22}(\cos\vartheta)\Bigg[\;\left(\cos(2\varphi)\cos(n^*\tau)-\sin(2\varphi)\sin(n^*\tau)\right)$$
$$-\frac{1}{2}e\left(\cos(2\varphi)\cos(2n^*\tau)-\sin(2\varphi)\sin(2n^*\tau)\right)$$
$$+e^2\left(6\cos(2\varphi)\cos(n^*\tau)+11\sin(2\varphi)\sin(n^*\tau)\right)$$
$$+\frac{1}{16}e^3\left(\cos(2\varphi)\cos(2n^*\tau)-\sin(2\varphi)\sin(2n^*\tau)\right)$$
$$-\frac{1}{48}e^4\left(881\cos(2\varphi)\cos(2n^*\tau)+959\sin(\varphi)\sin(2n^*\tau)\right)\;\Bigg]\Bigg\}$$

Model

- zkoumání citlivosti Zemi-podobné planety na slapové zahřívání změnou planetárních i orbitálních vlastností
- reologické vlastnosti simulující přenos tepla v Zemi ($a_{\mathrm{vis}} = 5$) a méně efektivní přenos (Venuše, Merkur, Mars: $a_{\mathrm{vis}} = 10 - 15$)
- homogenní vnitřní zahřívání konstatní v čase ($P_{\mathrm{glob}} = 10$ a $20\,\mathrm{TW}$)
- počáteční podmínky odpovídající statisticky rovnovážnému stavu pro dané parametry

	Ra	$\Delta\eta$	h'_{rad}
A	10^8	exp(5)	16.6
B	10^8	exp(10)	16.6
C	10^8	exp(10)	8.3
D	10^8	exp(15)	8.3
E	10^7	exp(10)	8.3

Parametry

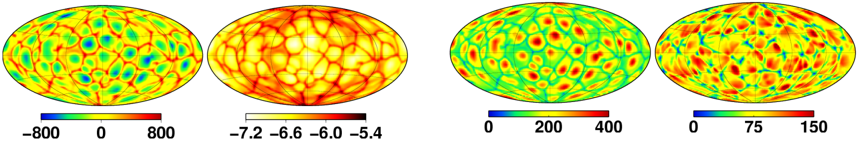
	notation	value
physical characteristics and geometry		
mantle thickness	d	3200 km
planet radius	r_t	6400 km
mantle density	ρ_m	$4500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
core density	ρ_{core}	$12000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
super-adiabatic temperature contrast	ΔT	2500 K
thermal conductivity	k	$5\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$
heat capacity	c_p	$1200\,\mathrm{J\,K^{-1}\,kg^{-1}}$
scaling for volumetric heating	$\frac{k\Delta T}{d^2}$	$1.2 \times 10^{-9}\,\mathrm{W\,m^{-3}}$
viscous flow		
bottom Rayleigh number	Ra	variable, typically 10^8
viscosity parameter	a_{vis}	$5 - 15$
uniform internal heating	h_{rad}	$1 - 2 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-3}}$
dimensionless internal heating	$h'_{\mathrm{rad}} = h_{\mathrm{rad}}\,\frac{d^2}{k\Delta T}$	$8.3 - 16.6$
visco-elastic response		
orbital period	τ_{O}	$\in (1, 60)$ days
eccentricity	e	$\in (0, 0.2)$
spin-orbit resonance		1:1, 3:2
shear modulus	μ	200 GPa
quality factor on CMB	Q_b	$\in (50, 345)$ linear interpolation, $Q_b = 350 - 5\tau_{\mathrm{O}}$
effective viscosity	$\hat{\eta}$	
effective viscosity parameter	$\hat{a}_{\mathrm{vis}}$	$5 - 15$

3D rozložení teplot a slapového zahřívání

model A, 1:1 SOR, $e = 0.01$, $\tau_O = 3\,\mathrm{days}$

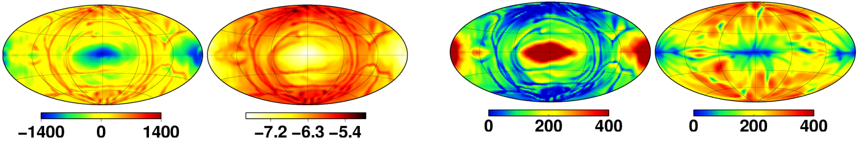
$t = 0\,\mathrm{Gy}$, $P_{\mathrm{rad}} = 20\,\mathrm{TW}$, $P_{\mathrm{tide}} = 105\,\mathrm{TW}$, $P_{\mathrm{surf}} = 42\,\mathrm{TW}$, $P_{\mathrm{CMB}} = 22\,\mathrm{TW}$

δT [K] $r = 3275\,\mathrm{km}$ | $\log_{10}(h_{\mathrm{tide}}\ [\mathrm{W/m^3}])$ $r = 3275\,\mathrm{km}$ | $q_{\mathrm{CMB}}\ [\mathrm{mW/m^2}]$ | $q_{\mathrm{surf}}\ [\mathrm{mW/m^2}]$



$t = \Delta t_r$, $P_{\mathrm{rad}} = 20\,\mathrm{TW}$, $P_{\mathrm{tide}} = 575\,\mathrm{TW}$, $P_{\mathrm{surf}} = 110\,\mathrm{TW}$, $P_{\mathrm{CMB}} = 18\,\mathrm{TW}$

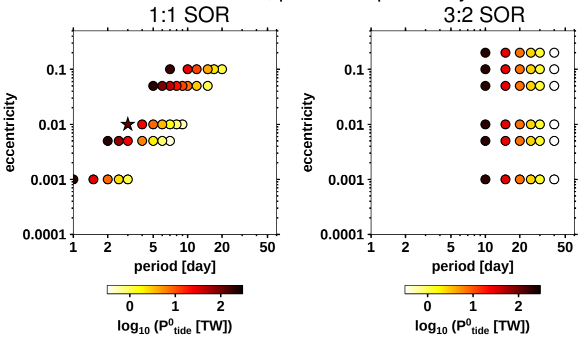
δT [K] $r = 3275\,\mathrm{km}$ | $\log_{10}(h_{\mathrm{tide}}\ [\mathrm{W/m^3}])$ $r = 3275\,\mathrm{km}$ | $q_{\mathrm{CMB}}\ [\mathrm{mW/m^2}]$ | $q_{\mathrm{surf}}\ [\mathrm{mW/m^2}]$



Globální disipace

- třírozměrné rozložení slapového zahřívání $h_{\mathrm{tide}}(r, \vartheta, \varphi)$ silné závislé na teplotě, excentricitě, rezonanci
- globální disipace $P_{\mathrm{tide}} = \int_V h_{\mathrm{tide}}(r, \vartheta, \varphi)\mathrm{d}V$ - spojuje 3D výsledky s používanými parametrizacemi, umožňuje prozkoumat větší parametrový prostor

model A, počáteční podmínky



-

Globální disipace

- (Zschau 1978, Segatz et al. 1988)

$$P_{\mathrm{tide}} = -\frac{5k_2}{8\pi^2 GR} Q^{-1} \int_0^\tau \int_{\mathrm{S}} \left(\frac{\partial \Theta(R)}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

- 1:1 SOR

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{tide}} = \quad & -\frac{1}{8}\frac{k_2}{G}(\omega R)^5 \times \\ & \left[Q_\omega^{-1}\left(84e^2 - 303e^4 + 366e^6\right) + \right. \\ & \left. Q_{2\omega}^{-1}\left(\frac{1815}{2}e^4 - 3847e^6 + \frac{26597}{6}e^8\right)\right] \end{aligned}$$

3:2 SOR

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{tide}} \quad = \quad & -\frac{1}{8}\frac{k_2}{G}(\omega R)^5 \times \\ \left[Q_\omega^{-1}\left(6 - 21e^2 + 501e^4 - \frac{125951}{64}e^6 + \frac{847921}{384}e^8\right) + \right. & \\ \left. Q_{2\omega}^{-1}\left(3e^2 + \frac{159}{4}e^4 + \frac{4035}{64}e^6 + \frac{49}{2}e^8\right)\right] & \end{aligned}$$

Globální disipace

- $$P_{\mathrm{tide}} = A(R, k_2) Q_\omega^{-1} \omega^5 \zeta(e), \quad \zeta(e) = \zeta_\omega(e) + \frac{Q_{2\omega}^{-1}}{Q_\omega^{-1}} \zeta_{2\omega}(e)$$

- 1:1 SOR
$$\zeta(e)_{\mathrm{Maxwell}} = 84e^2 \left(1 + \frac{201}{112}e^2 - \frac{445}{24}e^4 + \frac{26597}{1008}e^6\right)$$
  3:2 SOR
$$\zeta(e)_{\mathrm{Maxwell}} = 6 \left(1 - \frac{13}{4}e^2 + \frac{1389}{16}e^4 - \frac{247867}{768}e^6 + \frac{852625}{2304}e^8\right)$$

Globální disipace vs. 3D výsledky

- $$P_{\mathrm{tide}} = A(R, k_2) Q_\omega^{-1} \omega^5 \zeta(e), \quad \zeta(e) = \zeta_\omega(e) + \frac{Q_{2\omega}^{-1}}{Q_\omega^{-1}} \zeta_{2\omega}(e)$$

  reologie $\rightarrow$

  $$P_{\mathrm{tide}} = A Q_b^{-1} \exp\left(a_{\mathrm{vis}} \frac{T_e - T_b}{\Delta T} \right) (\omega)^5 \zeta(e)$$

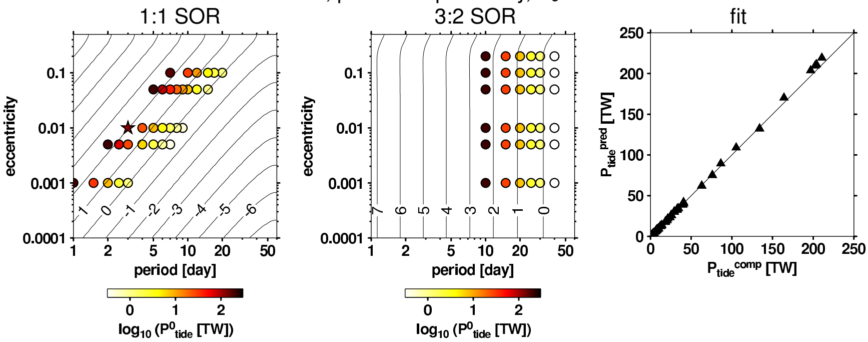
- charakteristická teplota

  $$T_e = T_b - \frac{\Delta T}{a_{\mathrm{vis}}} \ln\left(\frac{1}{V} \int_V \exp\left(a_{\mathrm{vis}} \frac{T_b - T(r, \vartheta, \varphi)}{\Delta T} \right) \mathrm{d}V \right)$$

- pro dané teplotní pole, A jediný neznámý parametr (lze získat fitem z 3D výsleků, $A = 3.9 \times 10^{42}\,\mathrm{W\,s^5}$)

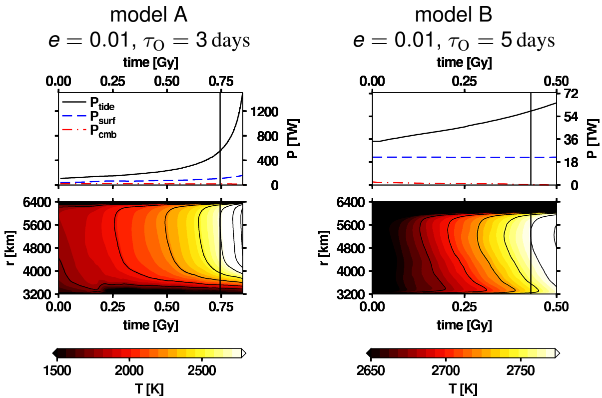
Globální disipace vs. 3D výsledky

model A, počáteční podmínky, $T_e = 0.6$



Zpětná vazba a termální nestability

- silná zpětná vazba mezi teplotou a slapovým zahříváním díky teplotně závislé reologii
- časová škála pro vznik nestabilit (runaway timescale) Δt_r - čas potřebný k tomu, aby průměrné teplota v jakékoliv vrstvě byla vyšší než teplota na rozhraní jádro-plášť (jiné definice???)

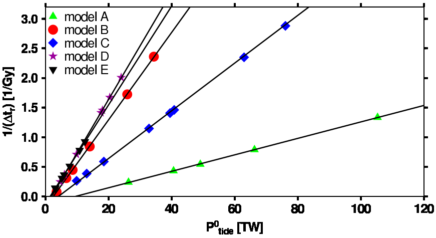


Škálování

- škálování časové škály:

$$\frac{1}{\Delta t_r} = \alpha + \beta P^0_{\mathrm{tide}}$$

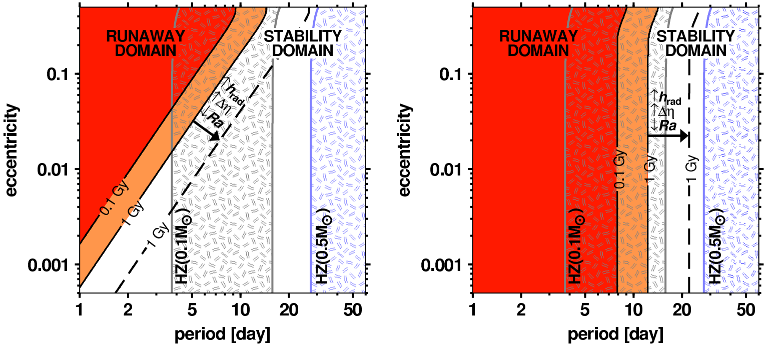
- směrnice β převážně určena počáteční teplotou
- parametr α komplexní chování (závislost na charakteristické teplotě a efektivnosti přenosu tepla)



	Ra	$\Delta\eta$	h'_{rad}	T'^0_e	parametrizace $1/\Delta t_r$
A	10^8	exp(5)	16.6	0.60	$1/\Delta t_r = -0.133 + 0.0139 P^0_{\mathrm{tide}}$
B	10^8	exp(10)	16.6	0.94	$1/\Delta t_r = -0.185 + 0.0739 P^0_{\mathrm{tide}}$
C	10^8	exp(10)	8.3	0.84	$1/\Delta t_r = -0.165 + 0.0403 P^0_{\mathrm{tide}}$
D	10^8	exp(15)	8.3	0.93	$1/\Delta t_r = -0.176 + 0.0907 P^0_{\mathrm{tide}}$
E	10^7	exp(10)	8.3	0.92	$1/\Delta t_r = -0.123 + 0.0834 P^0_{\mathrm{tide}}$

Obyvatelnost

- obyvatelné zóny (Selsis et al. 2007), závislost na excentricitě (Barnes et al. 2009)
- využití škálování počáteční slapové disipace a škálování časové škály



Závěr

- směrnice β podobná pro experimenty s podobnými počátečními podmínkami
- režim podobný deskové tektonice - u Zemi podobných těles v obyvatelné zóně (hvězdy s hmotností $0.1M_{\odot}$) se objevují termální nestability pro rezonanci 1:1 a pro dostatečně velkou excentricitu ($e > 0.02$ a $4\,\mathrm{days}$, $e > 0.2$ a $10\,\mathrm{days}$).
- méně efektivní režimy přenosu tepla - termální nestability vlivem slapů lze pozorovat pro nižší excentricity a vyšší doby oběhu
- rezonance 3:2 - termální nestability jsou téměř nezávislé na excentricitě a objevují se pro oběžné doby nižší než $12\,\mathrm{days}$ pro efektivní přenos tepla a pro $22\,\mathrm{days}$ pro jednodeskové planety.
- slapové zahřívání není významné pro hvězdy hmotnější $0.5M_{\odot}$ nezávisle na režimu přenosu tepla

Budoucí plány

- škálování
  - škálování pro složitější reologie (tlaková závislost, Arrheniův zákon - lze definovat charakteristickou teplotu a charakteristický tlak?)
  - nalezení formule pro parametry α a β v závislosti na Rayleighově čísle, teplotní závislosti a radioaktivních zdrojích pro libovolné počáteční podmínky
  - $$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T - \mathbf{v} \cdot \nabla T + h_{\mathrm{rad}} + h_{\mathrm{tide}}$$
  - pomocí průměrování přes objem, Gaussův teorém a nestlačitelnost lze přepsat:

    $$\frac{V \partial T_a}{\partial t} = -P_{\mathrm{surf}} + P_{\mathrm{CMB}} + P_{\mathrm{rad}} + P_{\mathrm{tide}}$$
  - časová integrace:

    $$\frac{V \Delta T_a}{\Delta t_r} = -P_{\mathrm{flux}}(0)\bar{f} + P_{\mathrm{rad}} + P_{\mathrm{tide}}(0)\bar{g}$$
  - počáteční podmínky: $P_{\mathrm{rad}} = P_{\mathrm{surf}}(0) - P_{\mathrm{CMB}}(0) = P_{\mathrm{flux}}(0)$

    $$\frac{V \Delta T_a}{\Delta t_r} = P_{\mathrm{flux}}(0)(1 - \bar{f}) + P_{\mathrm{tide}}(0, T_e)\bar{g}, \quad T_a \neq T_e$$
  - $$\frac{1}{\Delta t_r} \propto \alpha + \beta P_{\mathrm{tide}}(0), \quad \alpha = \frac{-P_{\mathrm{flux}}(0)(\bar{f} - 1)}{V \Delta T_a}, \quad \beta = \frac{\bar{g}}{V \Delta T_a}$$

Budoucí plány

- $$\frac{1}{\Delta t_r} \propto \alpha + \beta P_{\mathrm{tide}}(0), \quad \alpha = \frac{-P_{\mathrm{flux}}(0)(\bar{f} - 1)}{V \Delta T_a}, \quad \beta = \frac{\bar{g}}{V \Delta T_a}$$
- pokud $P_{\mathrm{surf}} >> P_{\mathrm{CMB}}$ a jedná se o jednodeskovou konvekci (a_{vis} vysoké)

$$\alpha = \frac{P_{\mathrm{surf}}(0)(1 - \bar{f})}{\Delta T_a}$$

$$P_{\mathrm{surf}}(0) \propto S_p \frac{k \Delta T}{d} a_{\mathrm{vis}}^{-4/3} Ra_b^{1/3}$$

- pokud $P_{\mathrm{surf}} >> P_{\mathrm{CMB}}$ a dojde k rychlému přehřátí ($P_{\mathrm{surf}} = \mathrm{konst}$) $\alpha = 0$
- škálování pro parametry $\bar{f}$, $\bar{g}$, ΔT_a

Budoucí plány

- desková tektonika na krátkoperiodických planetách
  - napěťově závislá reologie
  - pro planety se velkou slapovou zátěží - napětí vlivem slapů může být větší než napětí díky plášťové konvekci, možnost nastartovat deskovou tektoniku?, nerovnoměrně rozložená desková tektonika? nelineární reologie pro viskoelasticitu?
- nerovnoměrné zahřívání povrchu
  - rovnováha energie (energetická rovnováha na povrchu, nerovnoměrné rozložení intenzity slunečního záření)