

Modelování anelastické odezvy vlastních kmitů zemětřesení v Chile 2010

Eliška Zábranová

Katedra geofyziky MFF UK, VCDZ

Úvod

Vlastní kmity jsou elementy stojatého vlnění s nekonečným počtem stupňů volnosti. Velikost deformace závisí na velikosti zdroje budícím vlastní kmity, avšak periody jsou dány materiálovými parametry jednotlivých těles.

Zabýváme se přímou numerickou metodu pro vyčíslení period vlastních kmitů. Používáme přímou diskretizaci okrajové úlohy pro tři obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu použitím konečně diferenčního schématu s pseudospektrální přesností. Tento přístup ústí v maticový vlastní problém.

Metodu aplikuje na výpočet spektra vlastních kmitů a odezvy pro chilské zemetřesení z února 2010. Pro výpočet používáme nerotující anelastický model Země PREM.

Výsledky porovnáme se záznamy z gravimetru a seismometru.

Pokusíme se na základě velikosti amplitud rozlišit blízké módy ${}_1S_3$ a ${}_3S_1$.

Obecná soustava parciálních diferenciálních rovnic

Hydrostatická rovnováha

- pohybová rovnice: $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{f}_0 = 0$
- Poissonova rovnice: $\Delta\varphi_0 - 4\pi G\rho_0 = 0$

$\boldsymbol{\tau}_0$ - předpětí dané Cauchyovým tenzorem napětí

\boldsymbol{f}_0 - referenční síla předepsaná: $\boldsymbol{f}_0 = -\rho_0\nabla\varphi_0$

ρ_0 - referenční hustota tělesa

φ_0 - počáteční gravitační potenciál

G - Newtonova gravitační konstanta

PDR pro posunutí a přírůstkové veličiny – Lagrange-Eulerův přístup

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho_0\nabla\varphi + \nabla \cdot (\rho_0\boldsymbol{u})\nabla\varphi_0 - \nabla(\rho_0\nabla\varphi_0 \cdot \boldsymbol{u}) &= \rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} && \text{—■ pohybová rovnice} \\ \nabla \cdot (\nabla\varphi + 4\pi G\rho_0\boldsymbol{u}) &= 0 && \text{—■ Poissonova rovnice} \\ \lambda\nabla \cdot \boldsymbol{u}\boldsymbol{I} + \mu[\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T] &= \boldsymbol{\tau} && \text{—■ reologický vztah}\end{aligned}$$

\boldsymbol{u} - posunutí

φ - přírůstkový gravitační potenciál

$\boldsymbol{\tau}$ - přírůstkový tenzor napětí

λ and μ - Laméovy parametry tělesa

Soustava obyčejných diferenciálních rovnic

Sféroidální posunutí je popsáno dvěma radiálními funkcemi:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_n \left[U_n(r) \mathbf{S}_n^{(-1)}(\vartheta, \varphi) + V_n(r) \mathbf{S}_n^{(1)}(\vartheta, \varphi) \right]$$

Přírůstkový potenciál je dán jednou funkcí: $\bar{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_n F_n(r) Y_n(\vartheta, \varphi)$

Tři obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu:

fourierovská frekvence:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

n : úhlové číslo

$$N = n(n+1)$$

$$\beta = \lambda + 2\mu$$

derivace podle radiální souřadnice je označena čárkou

$$\begin{aligned} \beta U_n'' + \frac{2\beta}{r} U_n' + \left(\frac{4\rho_0 g_0}{r} - 4\pi G \rho^2 - \frac{2\beta + \mu N}{r^2} \right) U_n - \frac{N}{r} (\lambda + \mu) V_n' + \\ + \left(\frac{3\mu + \lambda}{r^2} - \frac{\rho_0 g_0}{r} \right) N V_n - \rho_0 F_n' + \beta' U_n' + \frac{2\lambda'}{r} U_n - \frac{N\lambda'}{r} V_n &= -\rho_0 \omega_n^2 U_n \\ \mu V_n'' + \frac{2\mu}{r} V_n' - \frac{\beta N}{r^2} V_n + \frac{\mu + \lambda}{r} U_n' + \left(\frac{2\beta}{r^2} - \frac{\rho_0 g_0}{r} \right) U_n - \\ - \frac{\rho_0}{r} F_n + \mu' \left(V_n' + \frac{1}{r} U_n - \frac{1}{r} V_n \right) &= -\rho_0 \omega_n^2 V_n \\ F_n'' + \frac{2}{r} F_n' - \frac{N}{r^2} F_n + 4\pi G \rho_0 \left(U_n' + \frac{2}{r} U_n - \frac{N}{r} V_n \right) + 4\pi G \rho_0' U_n &= 0 \end{aligned}$$

Maticová reprezentace

Obecná maticová rovnice reprezentující tři obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu:

$$\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{y}'' + \mathbf{B}(r) \cdot \mathbf{y}' + \mathbf{C}(r) \cdot \mathbf{y} = -\omega^2 \mathbf{D}(r) \cdot \mathbf{y} \quad \mathbf{y} = (U_n, V_n, F_n)$$

Pro diskretizaci je použito schéma s pseudospektrální přesností. Obecnou maticovou rovnici zapíšeme ve tvaru:

$$\sum_{j=1}^M [\mathbf{A}\gamma_{ij} + \mathbf{B}\beta_{ij} + \mathbf{C}\alpha_{ij}] \cdot \mathbf{y}_j = -\omega^2 \sum_{j=1}^M \mathbf{D}\alpha_{ij} \cdot \mathbf{y}_j$$

Seřazením rovnic ve všech vrstvách do matice \mathbf{P} na správné místo dostaneme:

$$\left(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{R}\right) \cdot \mathbf{Y} = -\frac{1}{\omega^2} \mathbf{Y}$$

\mathbf{P} a \mathbf{R} jsou tzv. *téměř blokově diagonální matice*.

Obdrželi jsme pro sféroidální kmity vlastní problém, kde matice \mathbf{P} a \mathbf{R} mají velikost $3MK$.

Reálná odezva pro model PREM (Dahlen a Tromp, 1998)

pohyb půdy pro nerotující
anelastický model:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \sum_k \nu_k^{-2} \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x}_s) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) [1 - \exp(i\nu_k t)]$$

$$\nu_k = \omega_k + i\gamma_k, \quad \gamma_k = \omega_k / 2Q_k$$

zrychlení půdy v aproximaci pro
vysoký faktor kvality:

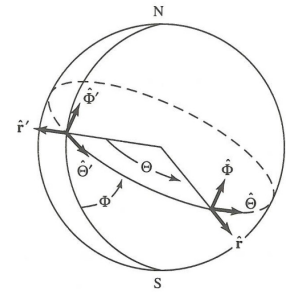
$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} n \mathbf{A}_l(\mathbf{x}) \cos(n\omega_l t) \exp(-n\gamma_l t)$$

$${}_n \mathbf{A}_l(\mathbf{x}) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) \mathbf{D}(r, \Theta, \Phi) {}_n A_l(\Theta, \Phi)$$

$${}_n A_l(\Theta, \Phi) = \sum_{m=0}^2 P_{lm} \cos(\Theta) (A_m \cos m\Phi + B_m \sin m\Phi)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{r}} U + \hat{\boldsymbol{\Theta}} k^{-1} [V \partial_{\Theta} + W (\sin \Theta)^{-1} \partial_{\Phi}] + \hat{\boldsymbol{\Phi}} k^{-1} [V (\sin \Theta)^{-1} \partial_{\Phi} - W \partial_{\Theta}]$$

$$k = \sqrt{N}$$



normování vlastních funkcí: $\int_0^a \rho (U^2 + NV^2) r^2 dr = 1$

Reálná odezva pro model PREM (Dahlen a Tromp, 1998)

$$A_0 = M_{rr}\dot{U}_s + (M_{\theta\theta} + M_{\phi\phi})r_s^{-1}(U_s - \frac{1}{2}kV_s)$$

$$B_0 = 0$$

$$A_1 = k^{-1} \left[M_{r\theta} \left(\dot{V}_s - r_s^{-1}V_s + kr_s^{-1}U_s \right) - M_{r\phi} \left(\dot{W}_s - r_s^{-1}W_s \right) \right]$$

$$B_1 = k^{-1} \left[M_{r\phi} \left(\dot{V}_s - r_s^{-1}V_s + kr_s^{-1}U_s \right) + M_{r\theta} \left(\dot{W}_s - r_s^{-1}W_s \right) \right]$$

$$A_2 = k^{-1}r_s^{-1} \left[\frac{1}{2} (M_{\theta\theta} - M_{\phi\phi}) V_s - M_{\theta\phi} W_s \right]$$

$$B_2 = k^{-1}r_s^{-1} \left[M_{\theta\phi} V_s + \frac{1}{2} (M_{\theta\theta} - M_{\phi\phi}) W_s \right]$$

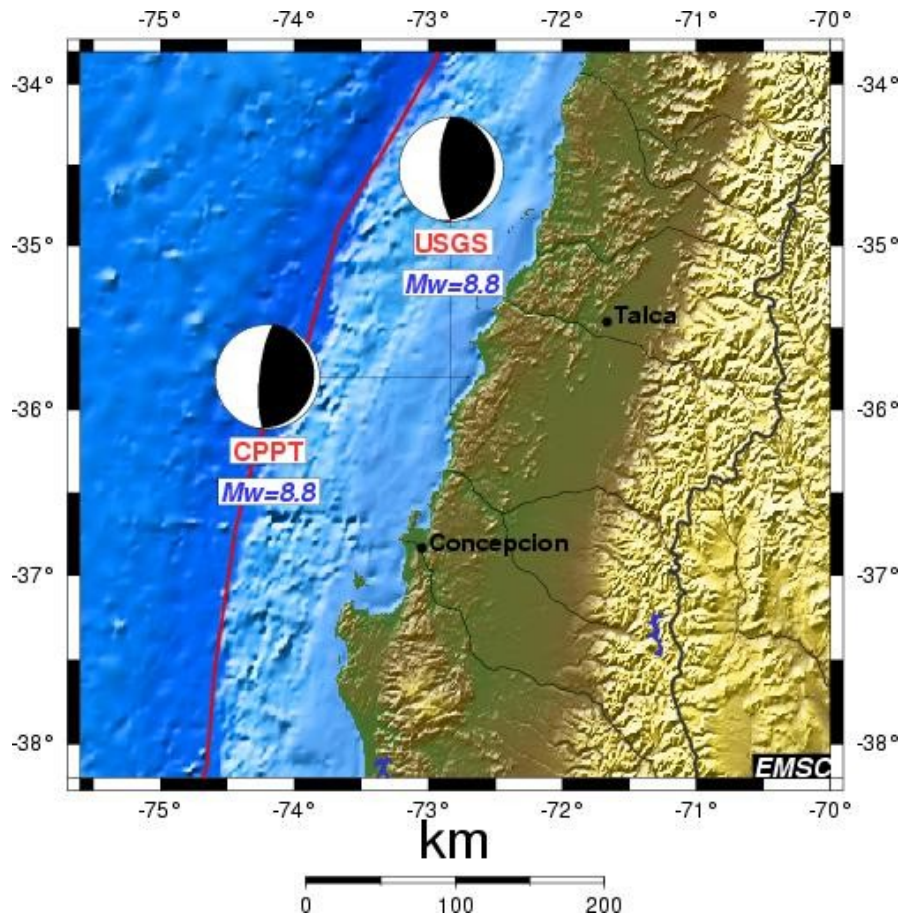
Zahrnutí pohybu aparatury: volný vzduch, náklon a změna gravitačního potenciálu:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{r}}\tilde{U} + \hat{\Theta}k^{-1} \left[\tilde{V}\partial_{\Theta} + W(\sin \Theta)^{-1}\partial_{\Phi} \right] + \hat{\Phi}k^{-1} \left[\tilde{V}(\sin \Theta)^{-1}\partial_{\Phi} - W\partial_{\Theta} \right]$$

$$\tilde{U} = U + U_{\text{free}} + U_{\text{pot}}, \quad \tilde{V} = V + V_{\text{tilt}} + V_{\text{pot}}$$

$$U_{\text{free}} = \frac{2gU}{\omega^2 a}, \quad U_{\text{pot}} = \frac{n+1}{\omega^2 a} F, \quad V_{\text{free}} = \frac{-kgU}{\omega^2 a}, \quad V_{\text{pot}} = \frac{-kF}{\omega^2 a}$$

Chilské zemětřesení 27.2.2010



CPPT:

čas: 6:34

35.8° j.š. 72.7° z.d.

hloubka: 35km

magnitudo: 8.8

$$M_{rr} = 0.87 \cdot 10^{22} Nm$$

$$M_{\theta\theta} = -0.06 \cdot 10^{22} Nm$$

$$M_{\phi\phi} = -0.82 \cdot 10^{22} Nm$$

$$M_{r\theta} = -0.15 \cdot 10^{22} Nm$$

$$M_{r\phi} = -1.73 \cdot 10^{22} Nm$$

$$M_{\theta\phi} = -0.14 \cdot 10^{22} Nm$$

USGS:

čas: 6:35:28

35.8° j.š. 72.5° z.d.

hloubka: 30km

magnitudo: 8.8

$$M_{rr} = 1.13 \cdot 10^{22} Nm$$

$$M_{\theta\theta} = -0.06 \cdot 10^{22} Nm$$

$$M_{\phi\phi} = -1.07 \cdot 10^{22} Nm$$

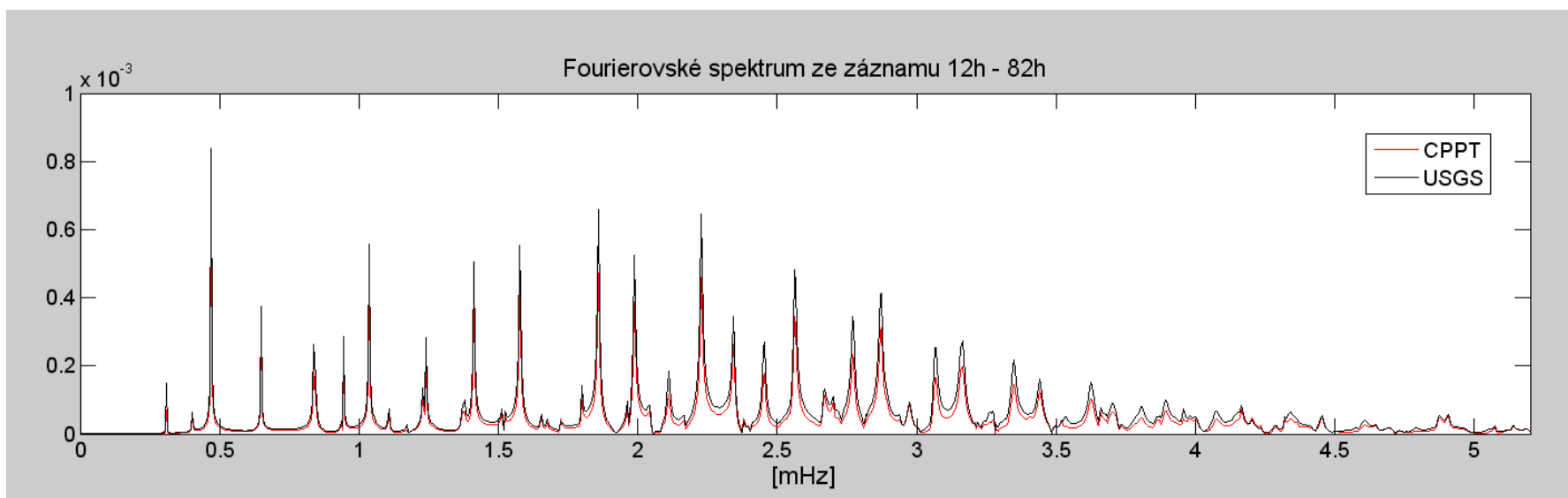
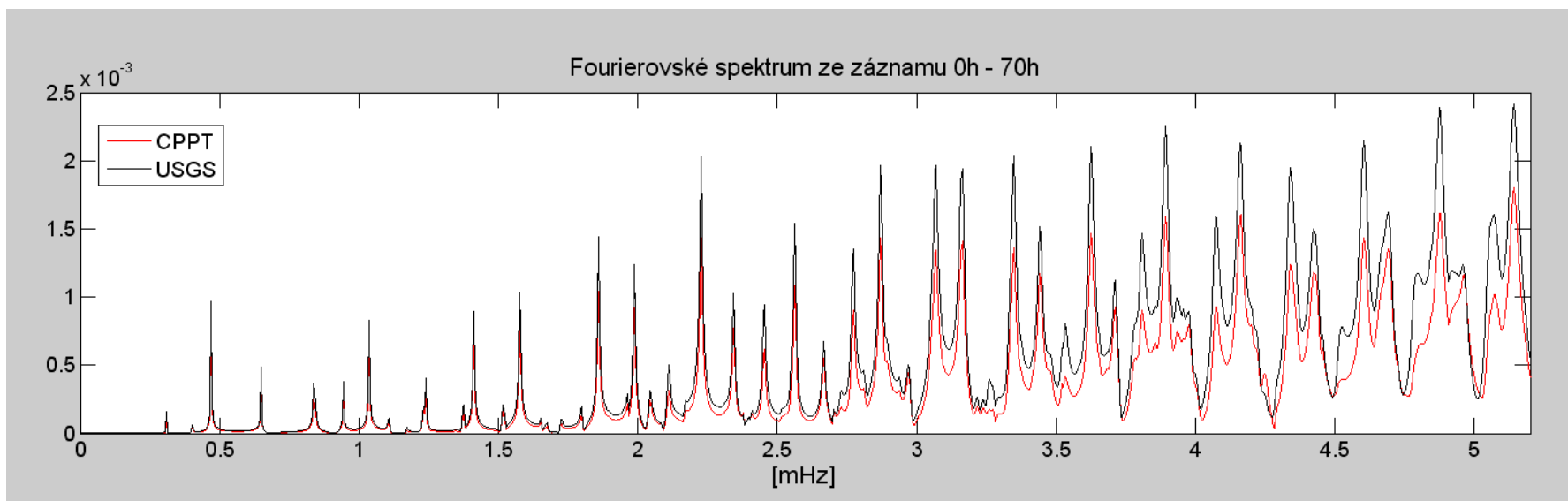
$$M_{r\theta} = 0.09 \cdot 10^{22} Nm$$

$$M_{r\phi} = -1.43 \cdot 10^{22} Nm$$

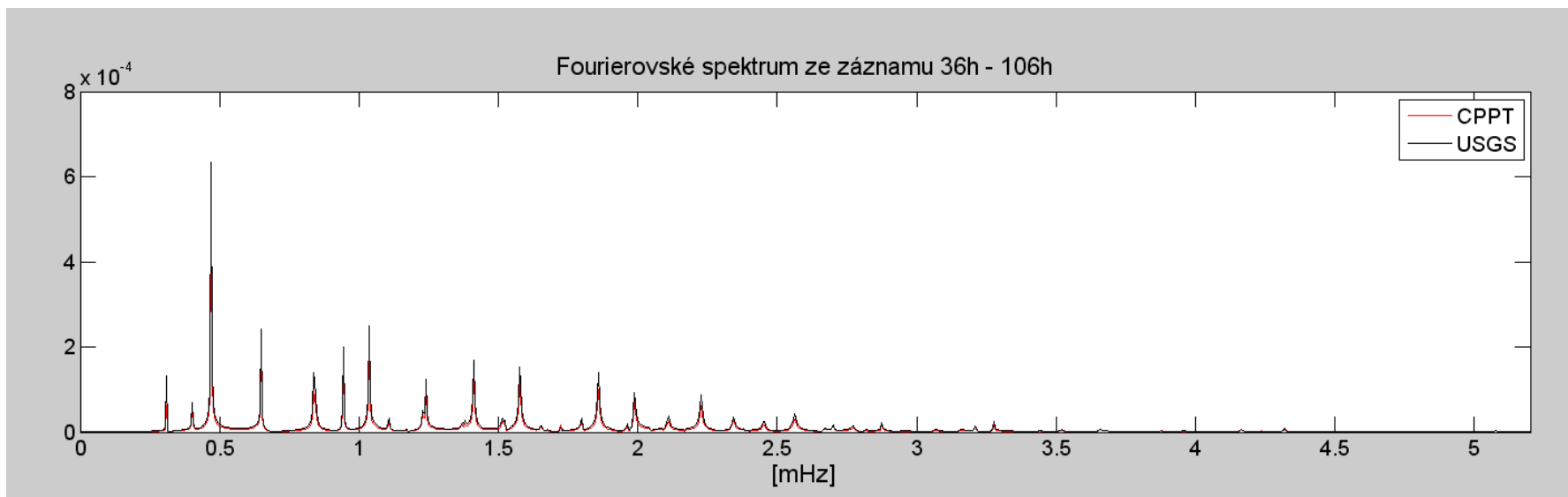
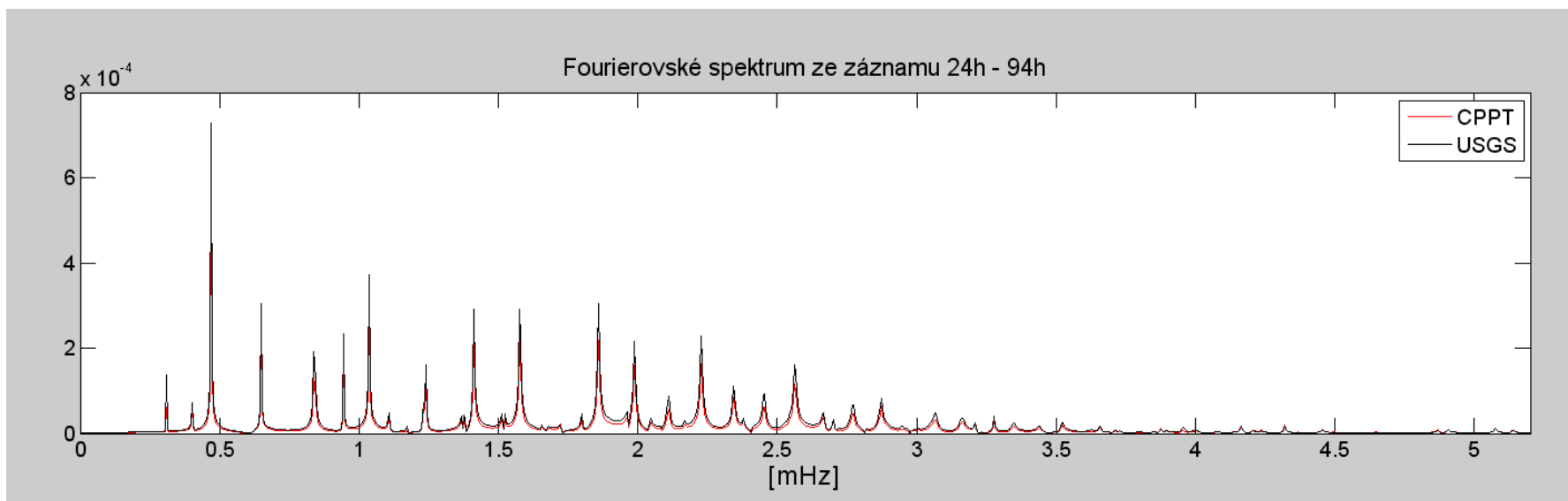
$$M_{\theta\phi} = -0.12 \cdot 10^{22} Nm$$

Přijímače: supravodivý gravimetr a širokopásmový seismograf na geodetické observatoři Pecný (49,9° s.š. 14,8° v.d.)

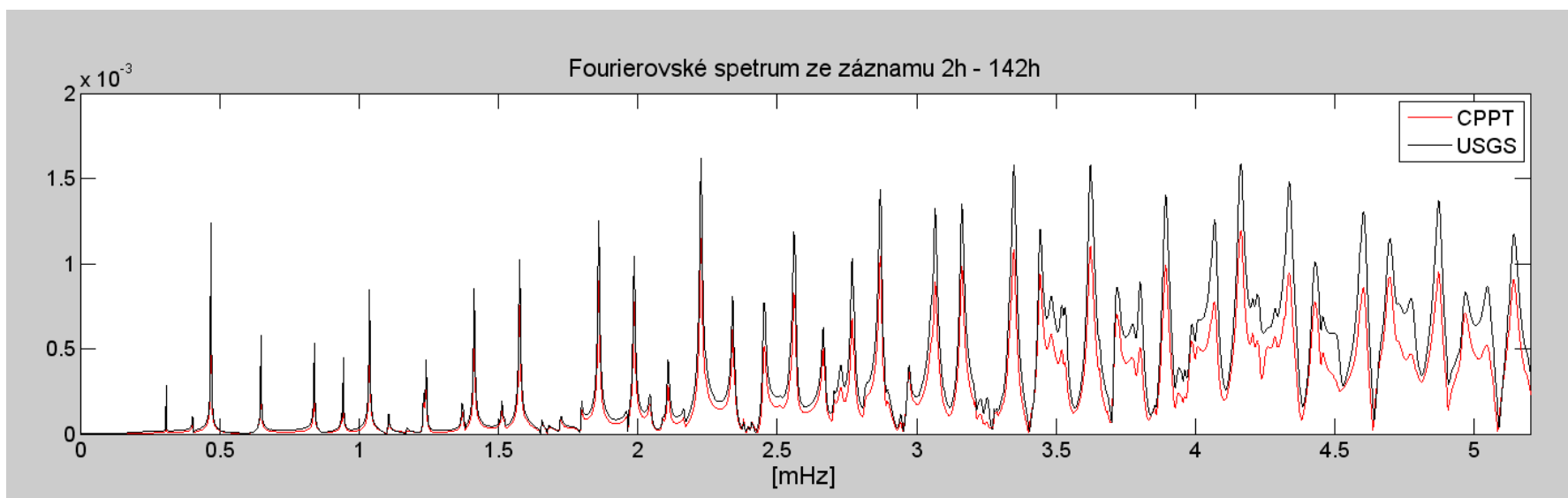
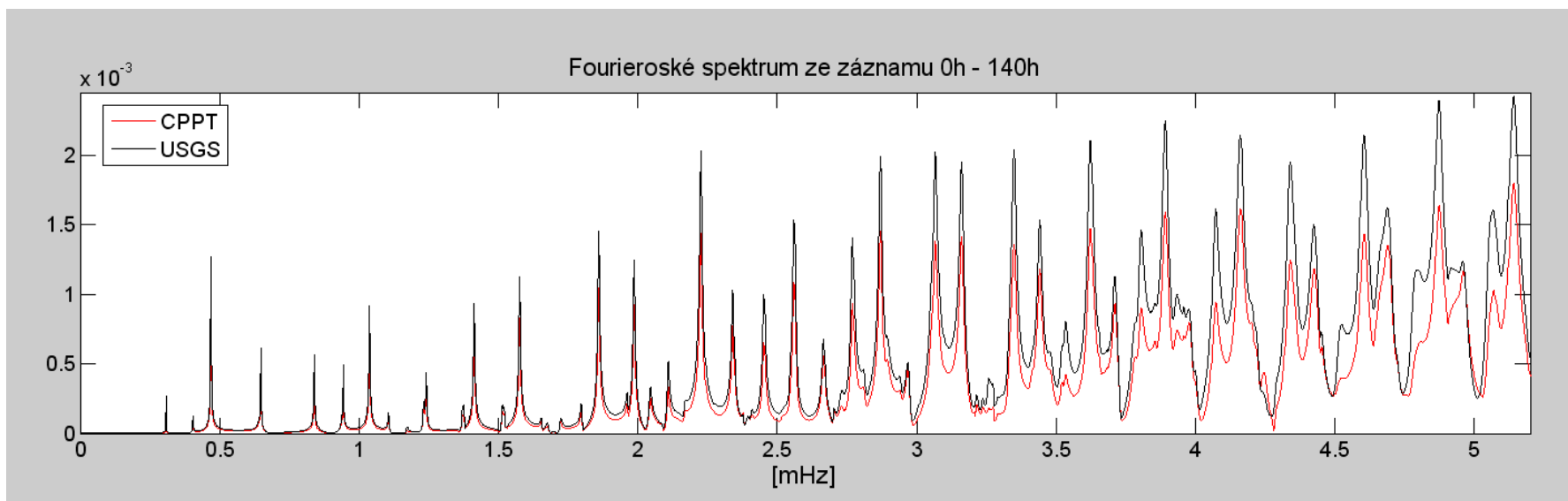
Fourierovské spektrum ze syntetického záznamu normované délkou okna, filtr do 6mHz



Fourierovské spektrum ze syntetického záznamu normované délkou okna, filtr do 6mHz



Fourierovské spektrum ze syntetického záznamu normované délkou okna, filtr do 6mHz



Vliv rotace a elipticity na spektrum vlastních kmitů

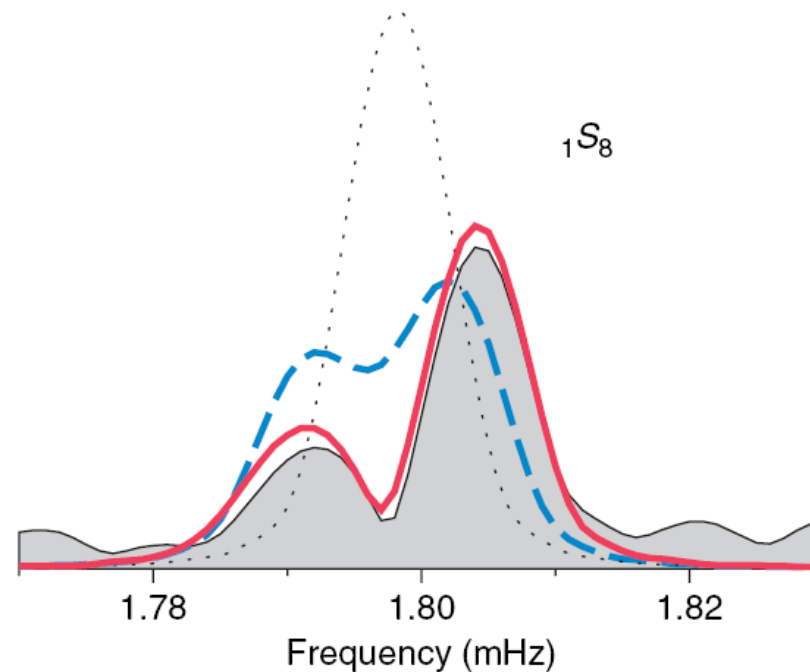


Figure 22 Modeling of the spectrum of multiplet ${}_1S_8$ with the ISF procedure, for a recording of the 9 June 1994 Bolivia earthquake at station MAJO (Matsushiro Observatory, Japan). Black line: observed linear amplitude spectrum; dotted line: prediction for PREM; dashed blue line: splitting caused by Earth's rotation and hydrostatic ellipticity; red line: final solution for the spectrum after ISF. Spectra courtesy of Joe Resovsky, personal comm. 1998. Vertical ground displacement due to this mode at MAJO measured $10\ \mu\text{m}$.

Štěpení nejdelších sféroidálních módů počítaných pro model Země PREM.

mód	perioda [s]	frekvence [mHz]	max. štěpení [μ Hz]
${}_1S_1$	19628	0.0509	10.02
${}_0S_2$	3218	0.3108	18.53
${}_2S_1$	2461	0.4063	-
${}_0S_3$	2122	0.4713	13.07
${}_0S_4$	1536	0.6510	9.55
${}_1S_2$	1461	0.6845	11.43
${}_0S_0$	1230	0.8130	0.27
${}_0S_5$	1190	0.8400	7.11
${}_2S_2$	1066	0.9385	-
${}_1S_3$	1064	0.9395	14.95
${}_3S_1$	1060	0.9436	3.14
${}_0S_6$	958	1.0438	5.10
${}_3S_2$	899	1.1123	6.61
${}_1S_4$	847	1.1806	18.40
${}_0S_7$	807	1.2392	3.49
${}_2S_3$	802	1.2469	5.12

- Vliv rotace a elipticity na frekvenci: aproximační vztah podle (Dahlen a Tromp, 1998)

$$\delta \omega_m = \omega (a + bm + cm^2), \quad -n \leq m \leq n$$

- např. $a=0.376$, $b=14.905$, $c=-0.267$ pro ${}_0S_2$

Rozlišení štěpených módů a módů s blízkou periodou

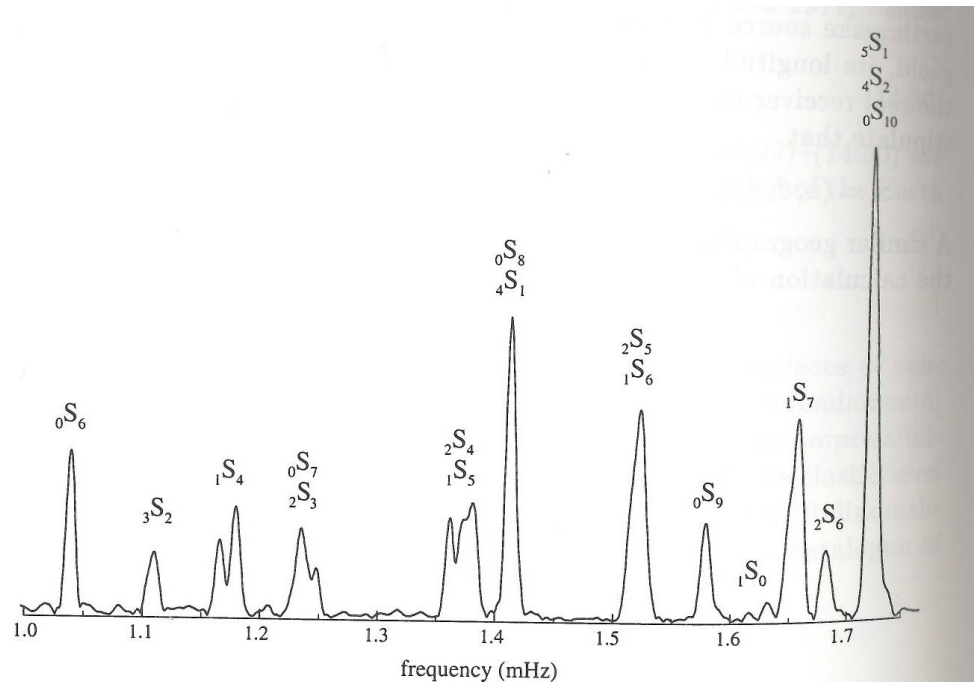


Figure 14.3. Radial-component, long-period amplitude spectrum $|\hat{r} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}, \omega)|$ of the ground acceleration recorded at station TUC in Tucson, Arizona following the June 9, 1994 deep-focus Bolivia earthquake. All of the peaks identified by a single (rather than double or triple) multiplet label are well isolated; mode 1S_4 is visibly split. A Hann taper has been applied to the 80-hour time series prior to Fourier transformation.

Dahlen, F. A. and Tromp, J., 1998. *Theoretical Global Seismology*, Princeton University Press, Princeton

separace kmitů s blízkými frekvencemi je značně obtížná:

- nesférické perturbace
- šířka píku ovlivněna útlumem
- konečná délka záznamu, ze kterého se počítá amplitudové spektrum

štěpení módu 1S_4 :

- teoretická hodnota 18.4 μHz

blízké módy:

- 0S_7 vs. 2S_3 o 7.7 μHz
- 2S_4 vs. 1S_5 o 5.7 μHz
- 3S_1 a 1S_3 splývají

navíc:

- zdroj vyvolává jen některé harmoniky
- amplitudy dané silou „úderu“

Data z geodetické observatoře Pecný



supravodivý gravimetr OSG-050

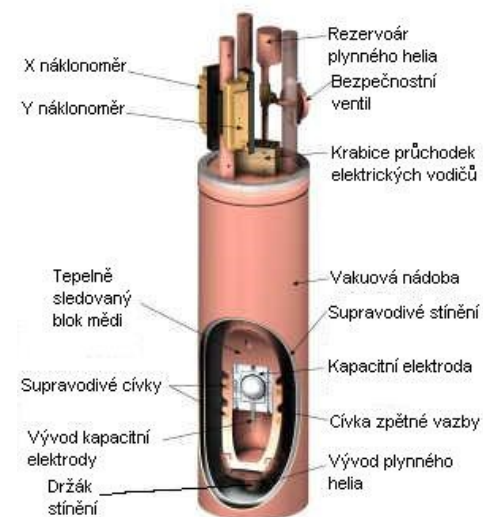
- vzorkovací frekvence 1 Hz
- použito 70h záznamu
- data obsahují opravu na vliv slapů a variací atmosferického tlaku



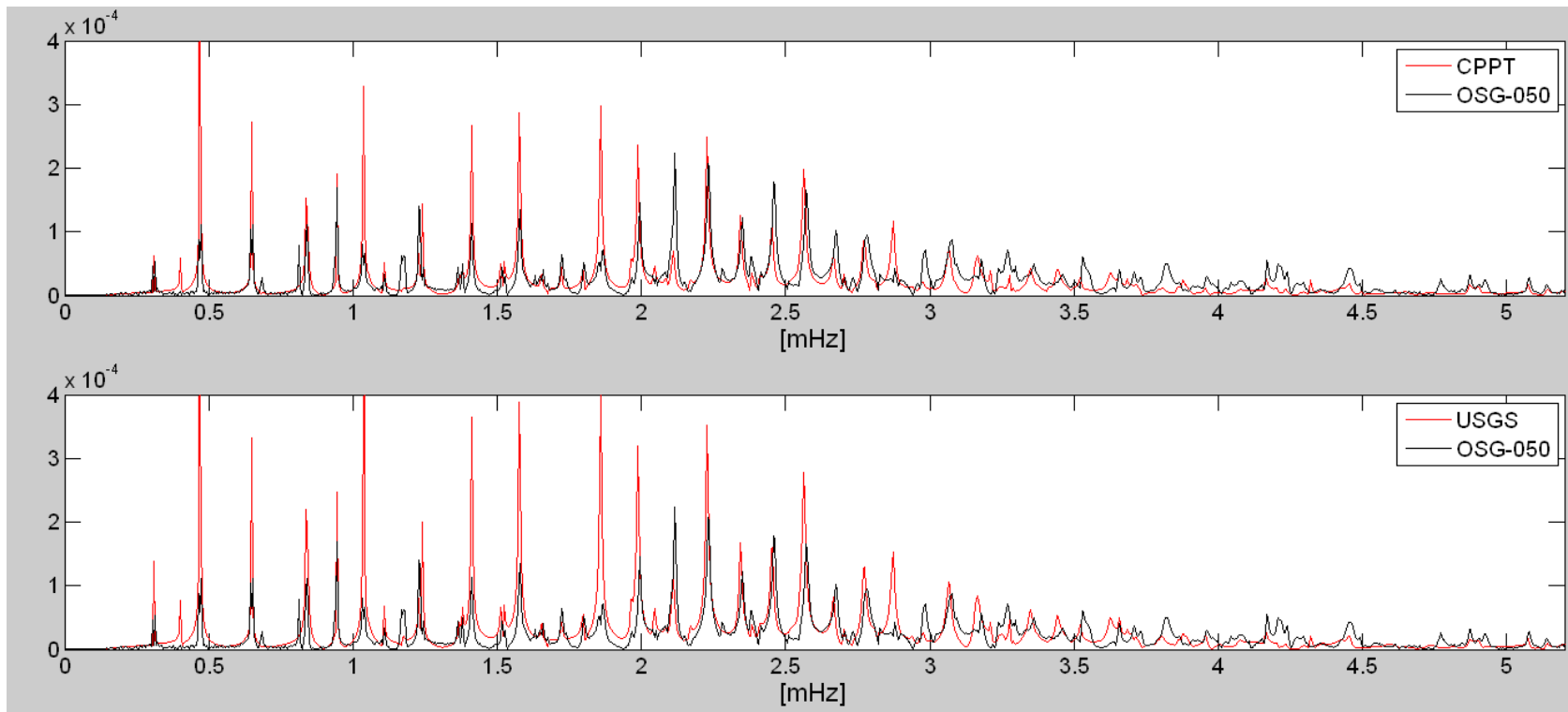
schéma dewarové nádoby



schéma měřicího systému



Fourierovská spektra z gravimetru a ze syntetického záznamu



Začátek záznamu po 19h.

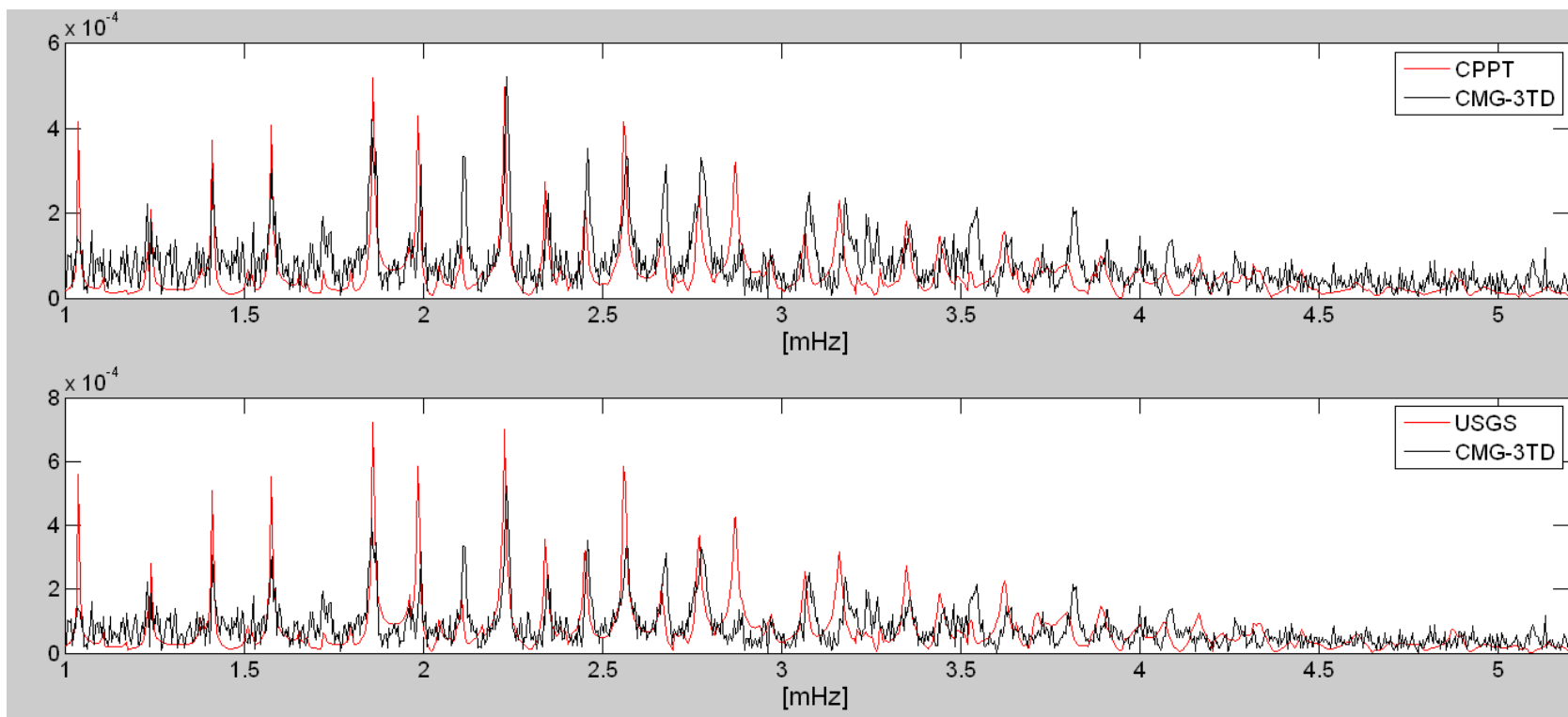
Data z geodetické observatoře Pecný



širokopásmový seismometr CMG-3TD

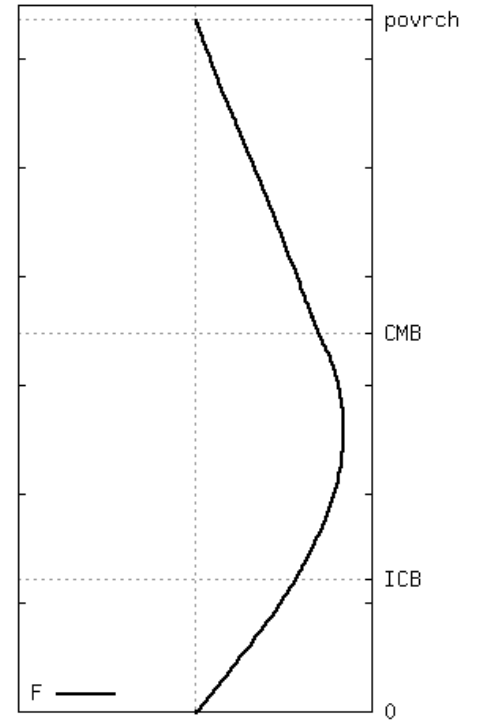
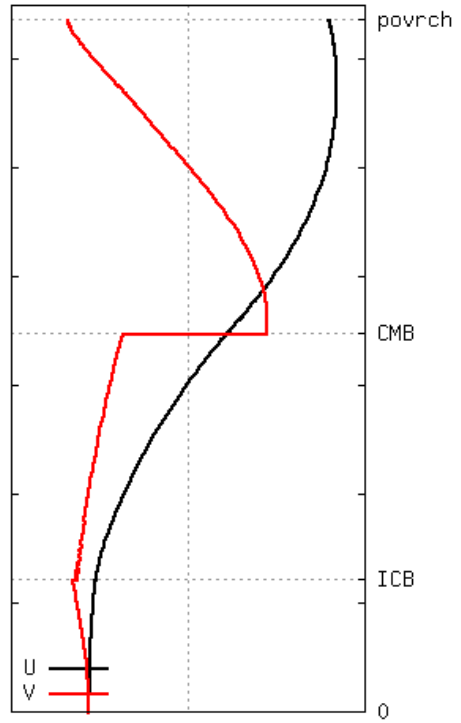
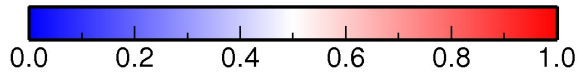
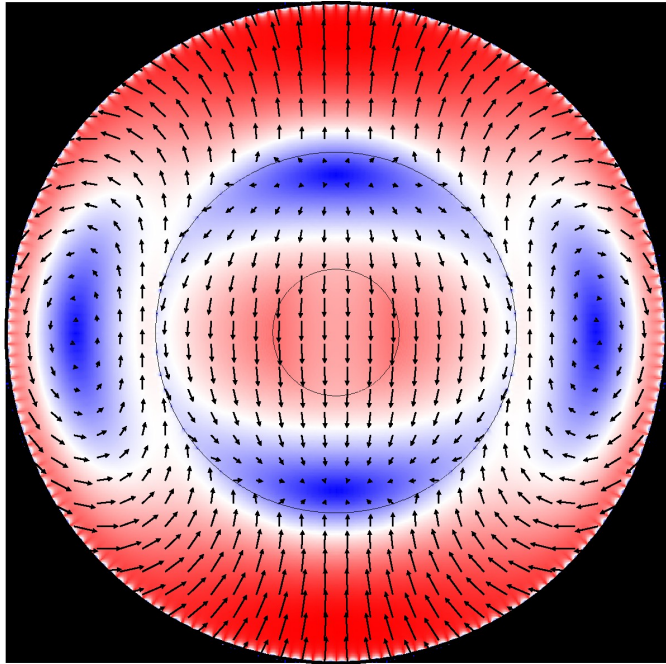
- 60m pod povrchem
- rozsah 50 Hz ~ 3mHz (6 min)
- vzorkovací frekvence 4 Hz
- použito 70h záznamu
- data neobsahují opravu na vliv slapů a variací atmosferického tlaku

Fourierovská spektra ze seismometru a ze syntetického záznamu

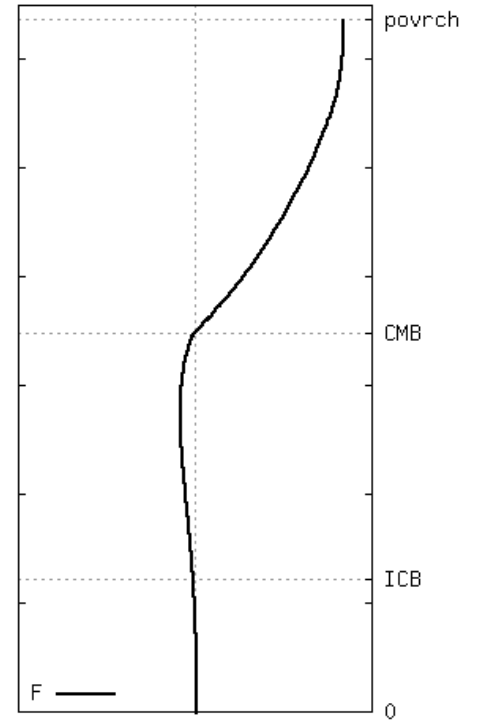
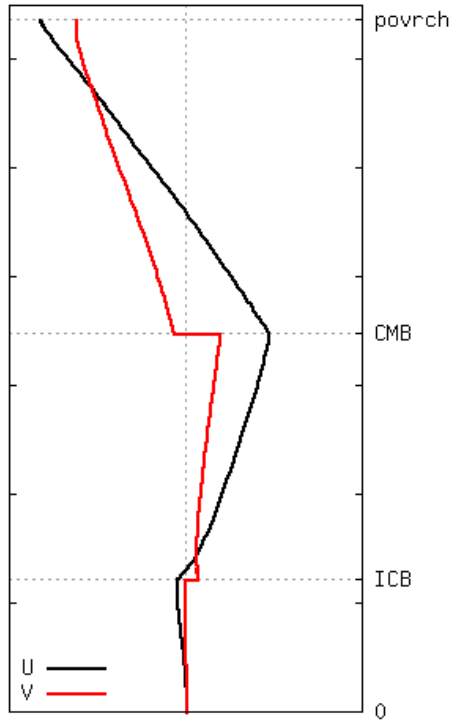
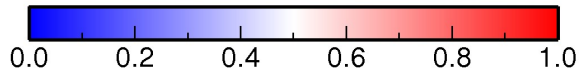
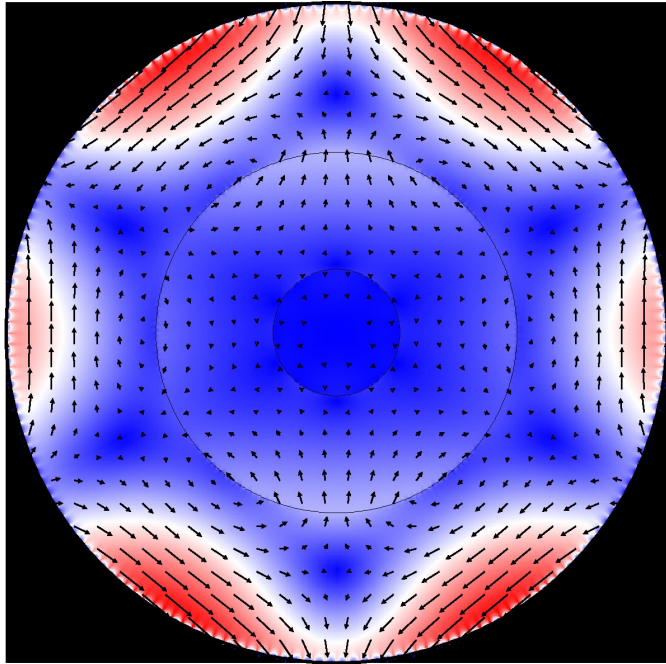


Začátek záznamu po 11h,
"signál" se ztrácí v šumu.

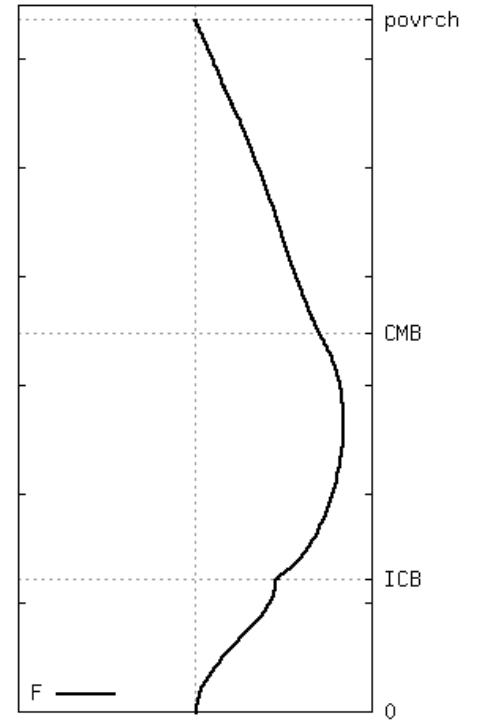
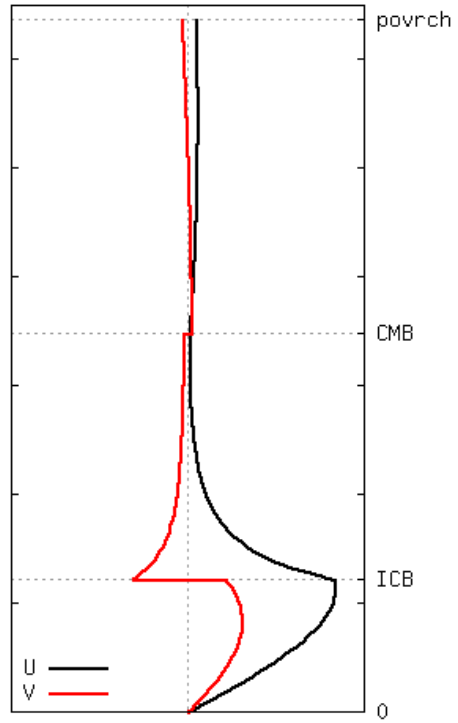
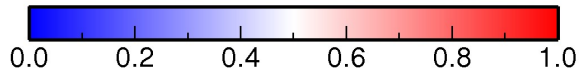
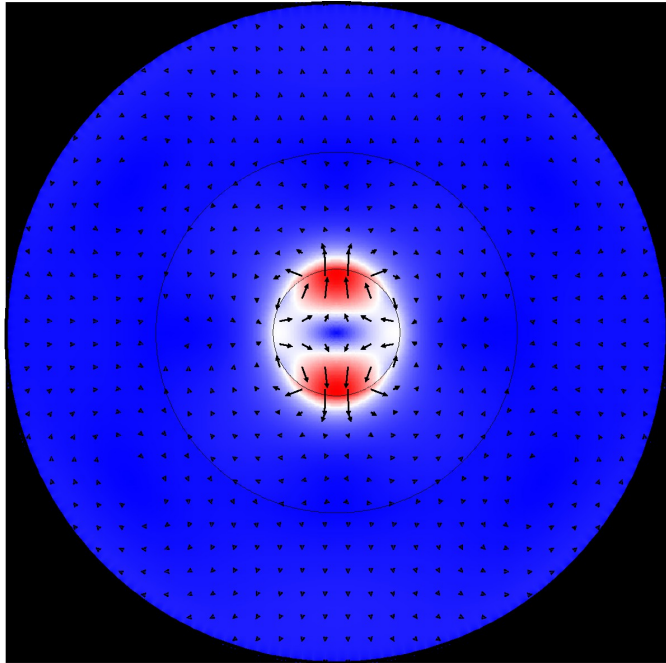
$3S_1: T=1060s$



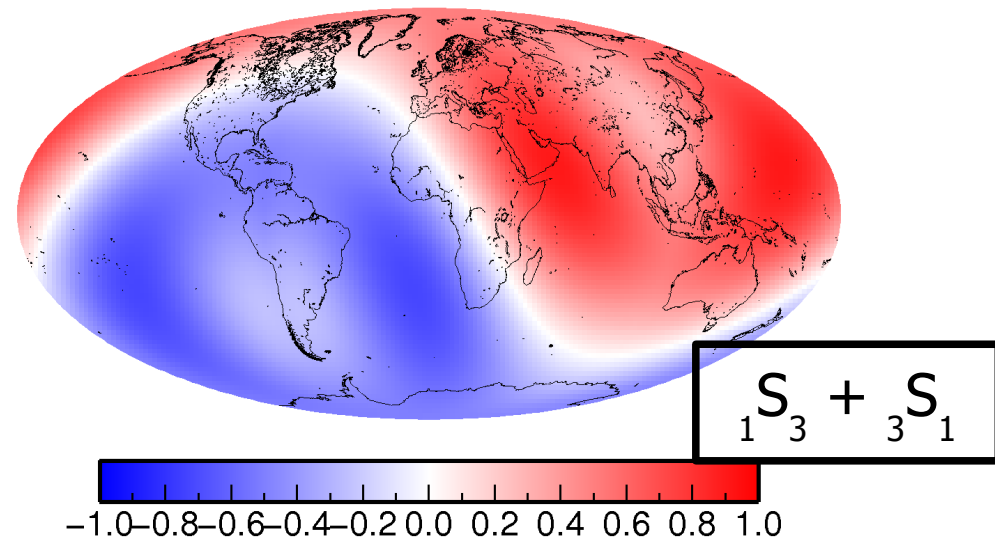
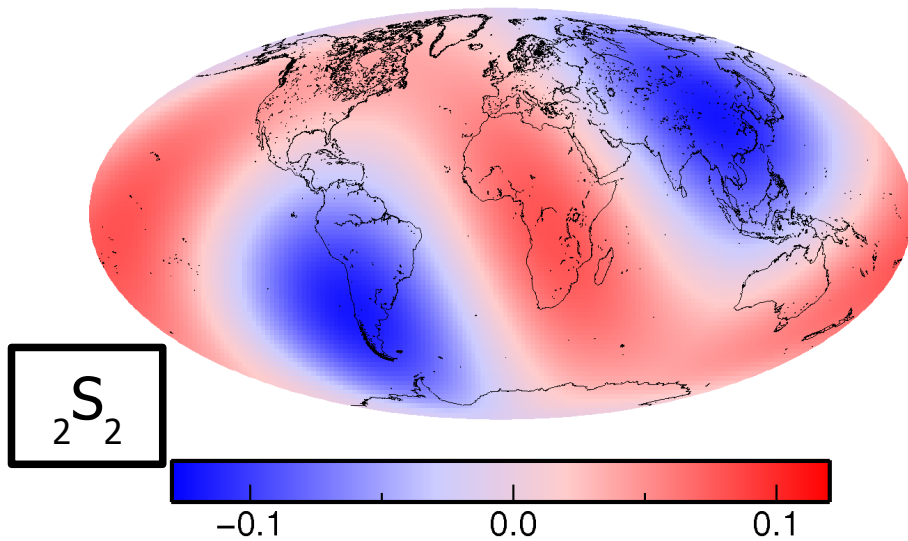
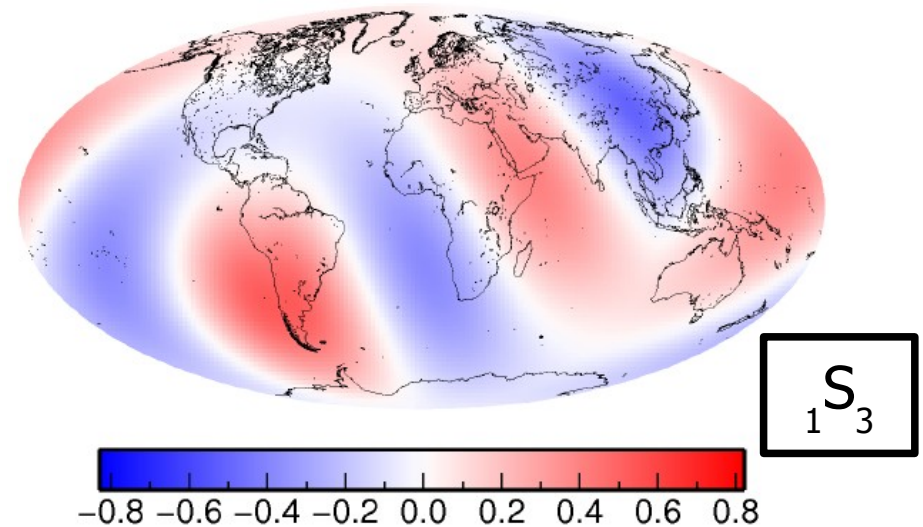
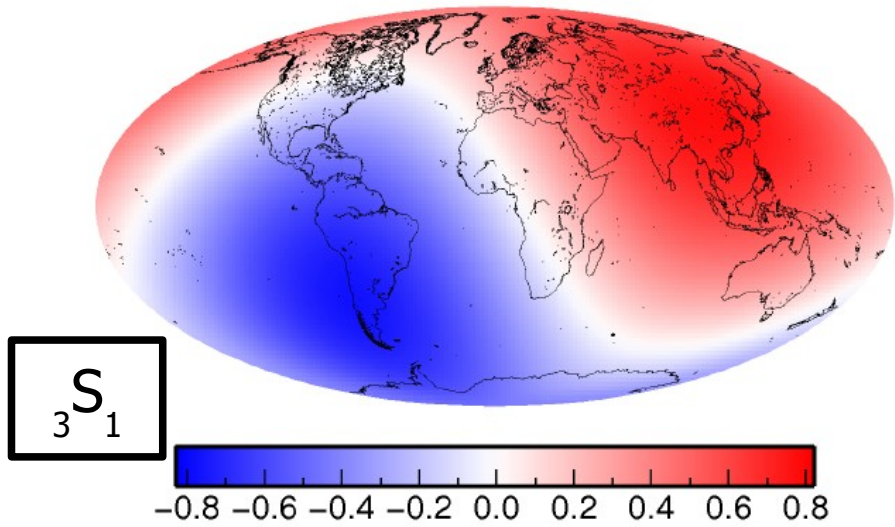
$1S_3: T=1064s$



${}_2S_2: T=1066s$

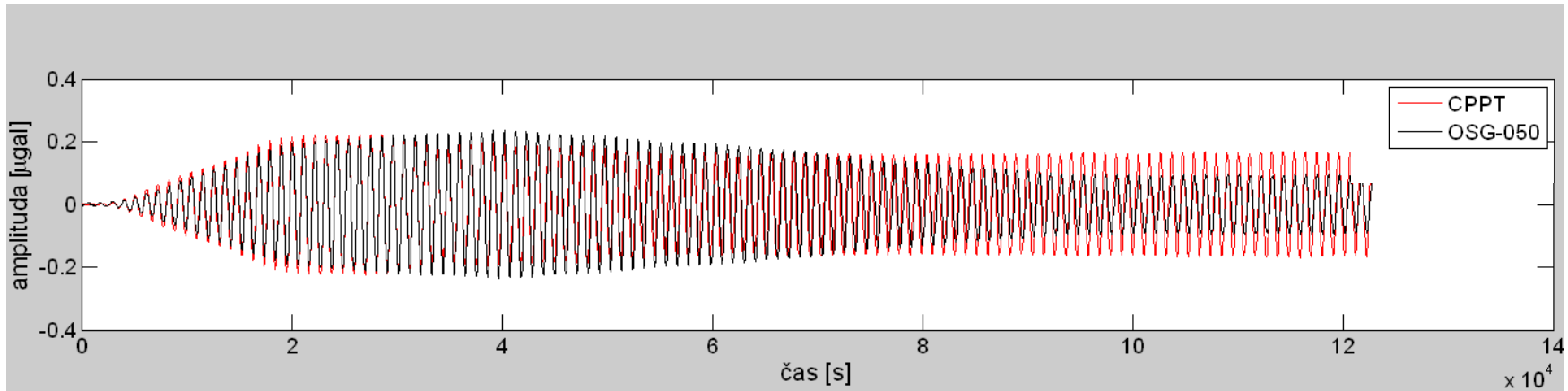


Velikost veličiny ${}_n A_l(x)$

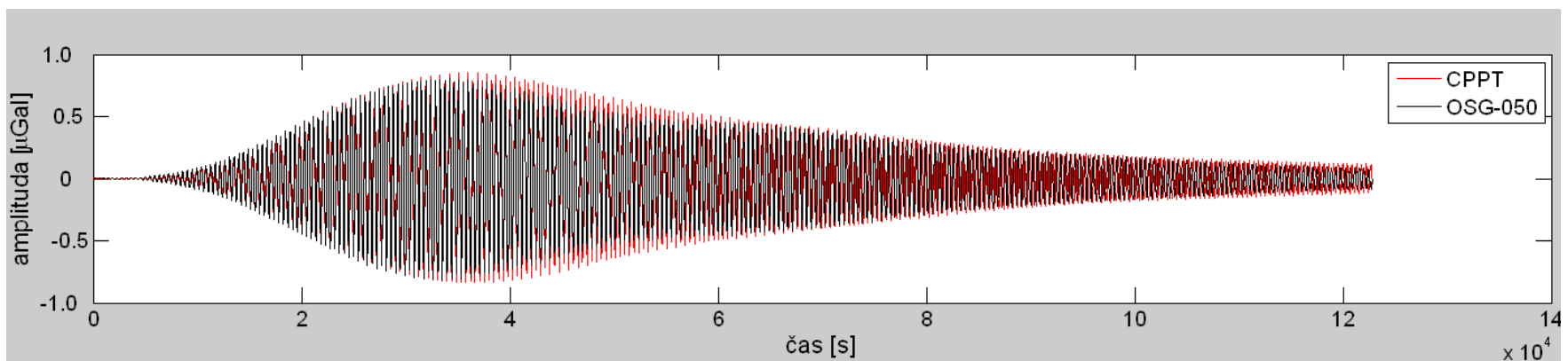


Aplikace frekvenčního filtru v časové oblasti

0.90mHz ~ 0.96 mHz: S_{3_1} , S_{1_3} a S_{2_2}



2.20mHz ~ 2.24 mHz: S_{0_14} a S_{2_9}



Závěr

Spočítali jsme teoretickou odezvu chilského zemětřesení na geodetické observatoři Pecný a porovnali ji se záznamem z gravimetru a s vertikálním zrychlením ze seismometru.

Určení momentového tenzoru má značný vliv na výsledné amplitudy.

Ukázali jsme, že pro daný zdroj a přijímač je potřeba oba módy ${}_3S_1$ a ${}_1S_3$ k dosažení dostatečně velké amplitudy.

Je možné, že lze získat rozumné hodnoty pro širokopásmový seismometr CMG-3TD i pod uváděnou mezní frekvencí 3mHz.