

Obr. 3. Změny magnetické indukce (B), rychlosti (u), a teploty (T) při přechodu umělé družice rázovou vlnou ve 13:02 hodin UT (světového času).

ohřevu může přispět k naší snaze o zapálení řízené termojaderné reakce, a tím k získání levného a ekologického zdroje energie.

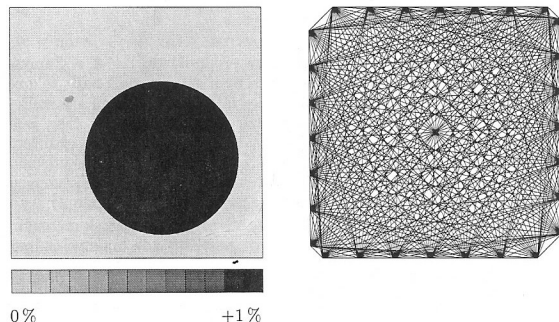
Seismická tomografie

ONDŘEJ ČÁDEK a HANA KÝVALOVÁ, katedra geofyziky MFF UK

Počítačová tomografie je široké veřejnosti známa z medicíny jako účinný prostředek prevence nádorových onemocnění. Význam tomografie v lékařství je obrovský a nikdo dnes nepochybuje, že Nobelova cena, kterou v roce 1979 za její objev obdrželi americký fyzik Cormack a britský elektrotechnik Hounsfield, byla udělena zaslouženě. Méně se už ví, že současně s počítačovou tomografií v medicíně se rozvíjela tomografie seis-

mická. Význam tomografie pro fyzikální výzkum Země je přitom stejně převratný jako u lékařských vědách. Díky ní známe dnes již poměrně dobře vnitřní uspořádání naší planety a víme i mnohem víc o procesech, které v Zemi probíhají. Princip seismické a lékařské tomografie je v podstatě shodný: paprsky procházející studovaným tělesem jsou analyzovány s cílem stanovit jeho vnitřní strukturu. Zatímco však lékařské tomografie generují vlastní paprsky (rtg. záření nebo ultrazvuk), jimiž lidské tělo cíleně prozařují, nezbyvá geofyzikům, studujícím těleso podstatně větších rozměrů, než využít paprsků (elastických vln) vznikajících náhodně při zemětřeseních.

Již dlouho je známo, že rychlost šíření seismických vln v zemském nitru výrazně roste s hloubkou. Mění se i v horizontálním směru, odchylky od střední rychlosti v určité hloubce však zpravidla nepřekročí několik málo procent. A právě jejich určení je úkolem seismické tomografie. Na jednoduchém, dvourozměrném příkladě si ukažme, jak seismická tomografie pracuje. Budeme studovat tenkou čtvercovou desku, jejíž struktura je zachycena na obr. 1 vlevo. Struktura desky je charakterizována odchylkami seismické rychlosti Δv od nějaké střední rychlosti v , přičemž velikost odchylek Δv činí jen zlomek rychlosti v (1%). Skutečnost, že $\Delta v \ll v$, je pro nás v jistém smyslu výhodná, neboť dráhy paprsků lze pak v prvním přiblížení považovat za přímkové a odchylky Δv budou mít citelný vliv jedině na časy šíření paprsků.



Obr. 1.

Deska necht' je prozářena systémem paprsků (obr.1 vpravo), přičemž časy šíření paprsků jsou známy z měření. Celkový počet paprsků označme M . Další veličinou, kterou známe nebo alespoň umíme odhadnout, je střední rychlost v . Pokud by deska byla dokonale homogenní, tj. $\Delta v = 0$, byl by čas šíření vln podél i -tého paprsku ($i = 1, 2, \dots, M$) dán jednoduchým vztahem $t_i = s_i/v$, kde s_i je délka paprsku. Ve skutečnosti se však rychlost podél paprsku mění a čas t_i^{obs} , který pro i -tý paprsek naměříme, bude buď větší než t_i , pokud na cestě paprsku převládí oblasti snížené rychlosti (Δv záporné), nebo menší než t_i , pokud paprsek prochází převážně oblastmi zvýšené rychlosti (Δv kladné).

Zapomeňme nyní, že strukturu desky známe, a předpokládáme, že jediné, co máme k dispozici, jsou časy t_i^{obs} a střední rychlost v . Stejným způsobem, jakým to činí seismická tomografie, se nyní z těchto veličin pokusme odhadnout „neznámou“ strukturu studované desky. Na závěr našeho experimentu pak porovnáme náš výsledek se skutečností na obr. 1 a zkontrolujeme, zda byl náš postup správný.

Desku rozdělíme na N shodných čtvercových podoblastí (boxů), z nichž každá bude charakterizována konstantní hodnotou Δv_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Naším cílem bude určit Δv_j ze znalosti t_i^{obs} a v . Označme s_{ij} úsek vyřazený i -tým paprskem v j -tém boxu. Pokud by hodnoty Δv_j byly známy, mohli bychom čas šíření i -tého paprsku spočítat (predikovat) pomocí následujícího vztahu:

$$t_i^{\text{pred}} = \sum_{j=1}^N \frac{s_{ij}}{v + \Delta v_j} \doteq \sum_{j=1}^N \frac{s_{ij}}{v} \left(1 - \frac{\Delta v_j}{v}\right). \quad (1)$$

Poslední rovnost platí pouze přibližně za předpokladu $\Delta v \ll v$. Zamysleli-li se trochu, jistě vás napadne, že se nám asi nepodaří najít takové hodnoty Δv_j , které by predikovaly časy t_i^{pred} zcela totožně s naměřenými časy t_i^{obs} . Je to způsobeno jednak tím, že naměřené časy jsou vždy zatíženy větší či menší nepřesností měření, ale i tím, že rozdělení desky na čtvercové boxy nebude nikdy zcela přesně odrazet skutečnou geometrii rozložení obchylek Δv uvnitř tělesa (v našem případě kruhovou strukturu). Za řešení úlohy však můžeme považovat takové hodnoty Δv_j , které po dosazení do rovnice (1) dají časy šíření t_i^{pred} , jež jsou k měřeným hodnotám t_i^{obs} co možná nejlíže. Slovo „nejlíže“ zde budeme chápat

ve smyslu nejmenších čtverců, tj. $\sum_{i=1}^M (t_i^{\text{obs}} - t_i^{\text{pred}})^2 = \min$. S pomocí matematické teorie lze ukázat, že takové chápání vzdálenosti je správné tehdy, jsou-li chyby měření veličin t_i^{obs} náhodné, a to je obvykle splněno. Naši úlohu lze tedy převést na hledání takových Δv_j , která minimalizují

funkci

$$\Phi(\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_N) = \sum_{i=1}^M (t_i^{\text{obs}} - t_i^{\text{pred}})^2 = \sum_{i=1}^M \left[t_i^{\text{obs}} - \sum_{j=1}^N \frac{s_{ij}}{v} \left(1 - \frac{\Delta v_j}{v}\right) \right]^2. \quad (2)$$

Funkce Φ je kvadratická v proměnných Δv_j , $j = 1, 2, \dots, N$. Některí už možná víte, že minimum takové funkce lze nalézt řešením následující soustavy rovnic:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta v_1} = \frac{2}{v^2} \sum_{i=1}^M s_{i1} \left[t_i^{\text{obs}} - \sum_{j=1}^N \frac{s_{ij}}{v} \left(1 - \frac{\Delta v_j}{v}\right) \right] = 0, \quad (3_1)$$

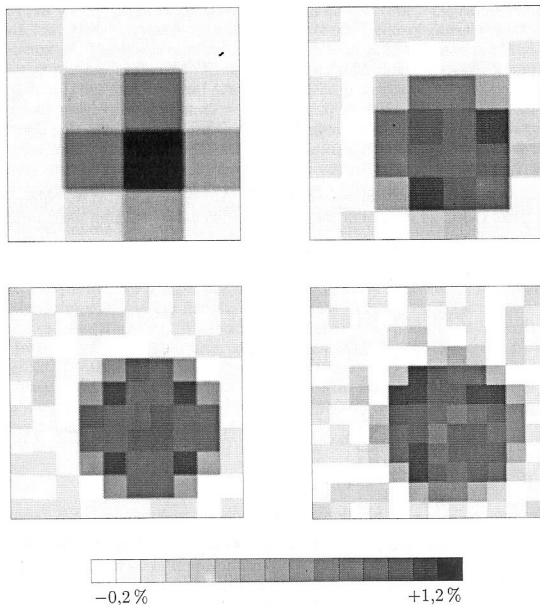
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta v_2} = \frac{2}{v^2} \sum_{i=1}^M s_{i2} \left[t_i^{\text{obs}} - \sum_{j=1}^N \frac{s_{ij}}{v} \left(1 - \frac{\Delta v_j}{v}\right) \right] = 0, \quad (3_2)$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta v_N} = \frac{2}{v^2} \sum_{i=1}^M s_{iN} \left[t_i^{\text{obs}} - \sum_{j=1}^N \frac{s_{ij}}{v} \left(1 - \frac{\Delta v_j}{v}\right) \right] = 0, \quad (3_N)$$

kde symbol $\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta v_j}$ značí derivaci Φ podle proměnné Δv_j . Při řešení této soustavy lineárních algebraických rovnic se zřejmě neobejdeme bez počítače. Ti z vás, kteří už mají s programováním zkušenosti, se mohou pokusit úlohu vyřešit i na malém PC. Pokud se vám nepodaří sestavit podprogram na řešení soustavy lineárních rovnic, napište autorům článku. Rádi vám takovýto podprogram zašleme a budeme zvědaví, jak se vám při výpočtech povede. Na malém osobním počítači lze obvykle úlohu zvládnout pro $N \sim 100$. V případě reálné Země však pracujeme s podstatně větším počtem boxů (v nejnovějších modelech je $N \sim 10^6$!) a úlohu je možno řešit pouze s pomocí nejvýkonnějších superpočítačů.

Vyzkoušejme si nyní, zda je výše uvedený postup správný. Zvolíme nějakou střední rychlost v a pro strukturu a paprsky ukázané na obr. 1 spočteme časy šíření pomocí vztahu (1). Tyto časy nyní „zašumíme“ malými náhodnými chybami a získáme tak „měřené“ časy t_i^{obs} . Desku pak rozdělíme na N boxů a spočteme parametry s_{ij} , což je snadné, neboť dráhy paprsků známe. Parametry s_{ij} spolu s časy t_i^{obs} zadáme



Obr. 2.

do soustavy (3) a jejím řešením spočteme odchylky Δv v jednotlivých boxech. Výslednou strukturu pak srovnáme s předlohou na obr. 1.

Řešení spočtená postupně pro počet boxů $N = 16, 49, 100$ a 144 jsou ukázána na obr. 2. Vidíme, že v prvních dvou případech ($N = 16$ a 49) je počet boxů příliš nízký, aby bylo možno rozlišit tvar anomální oblasti. Řešení však umožňuje odhadnout polohu středu i velikost anomálie. Při vyšším počtu boxů ($N = 100$ a 144) je tvar oblasti již rozlišen uspokojivě. V posledním případě, kde je počet boxů již srovnatelný s počtem

použitých paprsků, však pozorujeme rostoucí chybu v určení amplitud, která dosahuje až $\pm 0,2\%$. Srovnání posledního obrázku s předlohou na obr. 1 může ilustrovat přesnost, s níž dnes známe strukturu zemského nitra: základní kontury jsou vystiženy, ale detaily chybí nebo mohou být zkresleny značnou chybou. Pokud bychom požadovali ještě vyšší rozlišení a dál zvyšovali počet boxů, bude tato chyba narůstat. Výše uvedený postup zcela selže, když počet boxů překročí počet paprsků, tedy ve chvíli, kdy požadujeme na výstupu více informací, než máme k dispozici na vstupu. Nízká hustota paprsků v některých oblastech zemského nitra a relativně velké nepřesnosti v určení času jejich šíření (způsobené obtížemi při určování přesné polohy vzniku zemětřesení) jsou i hlavní příčinou, proč struktura zemského nitra zůstává stále v detailech nejistá.

Snad vás napadne, k čemu je vlastně znalost odchylek seismických rychlostí v zemském nitru dobrá. Mohou vůbec tyto hodnoty, zpravidla nepřevyšující 1 % střední rychlosti, vůbec o něčem vypovídat? Na pomoc přichází fyzika pevných látek. Laboratorní experimenty prováděné na minerálech za velmi vysokých tlaků a teplot totiž ukazují, že „nepatrné“ odchylky seismických rychlostí jsou důsledkem anomálního rozložení teplot v zemském nitru. Přepočteme-li seismické odchylky na teplotní, můžeme se již věnovat základním otázkám, jakými jsou globální vývoj planety a její energetická bilance. Ale o tom až zas někdy příště.

Matematicko-fyzikální modelování transportu znečišťujících příměsí v atmosféře

JAN BEDNÁŘ, katedra meteorologie a ochrany prostředí MFF UK Praha

Znečištění ovzduší antropogenními příměsími dnes představuje velmi vážný přírodovědný a společenský problém, který tvoří nedílnou součást problematiky vlivu člověka a jeho civilizace na ekologické podmínky v globálním i lokálním prostorovém měřítku. V této situaci se matematické modelování (s využitím nejmodernější výpočetní techniky) fyzikálních a chemických dějů spojených s difúzí znečišťujících příměsí v atmosféře stalo významným pomocníkem pro nejrůznější expertízy a studie související např. s hodnocením přenosu znečištění mezi jed-