# 2 *Tíhové pole Země a jeho zdroje*

## 2.1 Úvod

Vlastnosti tíhového pole těsně souvisejí s tvarem Země. Úloha určení tvaru a rozměrů Země má význam vědecký i praktický. Nejdříve, na základě zkušeností z nejbližšího okolí, byla Země pokládána za rovinnou desku. První představa sférické Země pochází od Pythagora (6. stol. p. n. l.), který k ní dospěl z přesvědčení dokonalého uspořádání světa; za dokonalý geometrický tvar považoval kouli a odtud odvozoval kulový tvar Země. První vědecký pokus změřit obvod Země provedl Eratosthenes (3. stol. p. n. l.). Původcem dynamické koncepce tvaru Země a představy elipsoidální Země je I. Newton, který formuloval zákon obecné přitažlivosti a usoudil, že rotující Země by měla být více zploštělá na pólech než na rovníku.

Geometrická úloha určení tvaru Země je tedy řešena déle než dvě tisíciletí a dynamická úloha je starší než tři století. Další rozvoj poznání tíhového pole Země byl ovlivněn pracemi Clairauta, Legendra, Laplace, Stokese, Brunse, Helmerta, Jeffreyse, Moloděnského a pracemi mnoha dalších badatelů. V době družicových pozorování vznikají některé nové aspekty související s otevřením nových možností studia tíhového pole Země. Předně, zemské gravitační pole je nejvýznamnější silou, která působí na pohyb družice, a tedy jeho detailní znalost je důležitá pro pohyb družice kolem planety. Obráceně také pozorování drah družic poskytují podrobná data o struktuře pole, která by nebylo možno získat pozemskými klasickými metodami v tak velkém rozsahu i detailu. Existence těchto dat otvírá nové možnosti v teorii tíhového pole Země. Jde především o studium souvislostí mezi podrobnou strukturou tíhového pole Země a rozložením hustoty v zemském tělese, zejména o studium laterálních variací hustoty. Detailní znalost rozložení hustoty, tedy i znalost odchylek od hydrostatického uspořádání, má zase zásadní význam pro studium dynamických procesů probíhajících v Zemi a s nimi spojených nehydrostatických napětí.

V této kapitole se budeme zabývat vlastnostmi tíhového pole Země, které souvisejí přímo s jeho popisem pomocí Stokesových parametrů, o jejichž určování družicovými metodami pojednává předcházející kapitola. Úmyslně pomíjíme některé klasické části teorie tíhového pole Země, které nemají vztah k družicovým metodám, jako např. Stokesův teorém, hypotéza izostáze, které jsou popsány v řadě monografií a učebnic [20]. Na rozdíl od obvyklého zpracování věnujeme zvýšený zájem popisu vlastností hladinových ploch, zejména geoidu, které se dají odvodit z rozvoje průvodiče hladinové plochy do řady sférických funkcí. Značná pozornost je věnována vyšetřování omezení pro trojrozměrnou distribuci hustoty v Zemi, plynoucí ze znalosti Stokesových parametrů do dosti vysokého stupně [46], [47].

I když jsme si vědomi časové proměnnosti tíhového pole Země a toho, že Stokesovy parametry nejsou konstantami, ale parametry závislými na čase, pomíjíme v této kapitole tuto skutečnost. Časově proměnné krátkoperiodické složce pole související s rotací a se slapy Země budou věnovány další kapitoly. Pokud jde o dlouhoperiodické části pole související s vnitřní dynamikou planety, vymykají se koncepci této knihy a spadají do geodynamiky, což je problematika vyžadující samostatné dílo.

## 2.2 Gravitační a tíhový potenciál

Tíhové pole je konzervativní silové pole a jeho potenciál $W$ (geopotenciál, tíhový potenciál) ve vnějším bodu $P$ je roven součtu

$$W(P) = V(P) + Q(P) + \delta W(P), \tag{2.1}$$

kde $V$ je gravitační potenciál, $Q$ potenciál odstředivých sil a $\delta W$ jeho proměnná část působená volnou nutací (pohybem zemských pólů) a slapovým působením Měsíce a Slunce.*) Proměnné složce se budeme věnovat v kap. 3, 4 a 5. Gravitační potenciál je harmonickou funkcí souřadnic, t. j. splňuje Laplaceovu rovnici

$$\Delta V(P) = 0. \tag{2.2}$$

Ve sférickém systému souřadnic ($\varrho$, $\vartheta = 90° - \Phi$, $\Lambda$) s počátkem v těžišti Země existují dvě nezávislá parciální řešení rovnice (2.2) $\varrho^j \mathrm{Y}_{jm}(\vartheta, \Lambda)$ a $\varrho^{-j-1}\mathrm{Y}_{jm}(\vartheta, \Lambda)$, kde $\mathrm{Y}_{jm}(\vartheta, \Lambda)$ jsou sférické funkce. První řešení má singularitu v nekonečnu, takže ve vnějším bodu nevyhovuje. Obecné řešení (2.2) zapíšeme ve tvaru

$$V(\varrho, \vartheta, \Lambda) = \frac{GM}{\varrho} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j \sum_{m=-j}^{j} A_{jm} \mathrm{Y}_{jm}(\vartheta, \Lambda), \tag{2.3}$$

kde $A_{jm}$ jsou komplexní Stokesovy parametry, ostatní symboly mají obvyklý

*) Slapová složka obsahuje i konstantní část, kterou zde rovněž zahrneme do $\delta W$.

význam. Sférické funkce $Y_{jm}(\vartheta, \Lambda)$ souvisejí s přidruženými Legendrovými funkcemi $P_j^{(m)}(\cos\vartheta)$, zavedenými vztahem (1.70), takto $(-j \leqq m \leqq j)$

$$(2.4) \qquad Y_{jm}(\vartheta, \Lambda) = \exp(\mathrm{i}m\Lambda)\left\{(-1)^m \sqrt{\left(\frac{2j+1}{4\pi}\frac{(j-m)!}{(j+m)!}\right)}\, P_j^{(m)}(\cos\vartheta)\right\}.$$

Sférické funkce $Y_{jm}(\vartheta, \Lambda)$ jsou plně normovány, tj.

$$(2.5) \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\Lambda \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, Y_{jm}(\vartheta, \Lambda)\, Y^*_{j'm'}(\vartheta, \Lambda)\, \mathrm{d}\vartheta = \delta_{jj'}\delta_{mm'}.$$

Dále pro ně platí

$$(2.6) \qquad Y^*_{jm}(\vartheta, \Lambda) = Y_{jm}(\vartheta, -\Lambda) = (-1)^m Y_{j-m}(\vartheta, \Lambda).$$

Využijeme-li hořejších vztahů, můžeme řadu (2.3) pro reálný potenciál $V(P)$ upravit na tvar

$$(2.7) \qquad V(\varrho, \vartheta, \Lambda) = \frac{GM}{\varrho}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{j}\left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j (J_j^{(m)} \cos m\Lambda + \right.$$
$$\left. + S_j^{(m)} \sin m\Lambda)\, P_j^{(m)}(\cos\vartheta)\right].$$

Veličiny $J_j^{(m)}$, $S_j^{(m)}$ jsou Stokesovy parametry zavedené v kap. 1; s komplexními konstantami $A_{jm}$ souvisejí prostřednictvím následujících převodních vztahů

$$(2.8) \qquad A_{j0} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{(2j+1)}} J_j^{(0)} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{(2j+1)}} J_j,$$
$$A_{jm} = (-1)^m \sqrt{(2\pi)}\,[J_j^{(m)} - \mathrm{i}S_j^{(m)}]/N_j^{(m)}, \qquad m > 0$$
$$A_{j-m} = \sqrt{(2\pi)}\,[J_j^{(m)} + \mathrm{i}S_j^{(m)}]/N_j^{(m)}, \qquad m > 0.$$

Veličina $N_j^{(m)}$ byla zavedena vztahem (1.138).

Kromě reprezentací (2.3) a (2.7) se používá následující vyjádření pro vnější gravitační potenciál

$$(2.9) \qquad V(\varrho, \vartheta, \Lambda) = \frac{GM}{\varrho}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j \sum_{m=0}^{j}[\bar{C}_{jm}\cos m\Lambda + \bar{S}_{jm}\sin m\Lambda]\,\bar{P}_j^m(\cos\vartheta),$$

kde přidružené Legendrovy funkce $\bar{P}_j^m(\cos\vartheta)$ mají následující vztah k dříve zavedeným funkcím $P_j^{(m)}(\cos\vartheta)$ (1.70)

$$(2.10) \qquad \bar{P}_j^m(\cos\vartheta) = N_j^{(m)} P_j^{(m)}(\cos\vartheta),$$

takže parametry $\bar{C}_{jm}$, $\bar{S}_{jm}$ souvisejí s parametry $J_j^{(m)}$, $S_j^{(m)}$, resp. $\bar{J}_j^{(m)}$, $\bar{S}_j^{(m)}$ takto:

$$(2.11) \qquad \bar{C}_{jm} = J_j^{(m)}/N_j^{(m)} = \bar{J}_j^{(m)}; \qquad \bar{S}_{jm} = S_j^{(m)}/N_j^{(m)} = \bar{S}_j^{(m)}.$$

Veličiny $\bar{J}_j^{(m)}$, $\bar{S}_j^{(m)}$ jsou tzv. plně normované Stokesovy parametry a vyjadřují se pomocí komplexních Stokesových parametrů takto:

$$A_{j0} = 2\sqrt{(\pi)}\,\bar{J}_j^{(0)}, \tag{2.12}$$

$$A_{jm} = \sqrt{(2\pi)}\,(-1)^m\,(\bar{J}_j^{(m)} - \mathrm{i}\bar{S}_j^{(m)}), \qquad m > 0$$

$$A_{j-m} = \sqrt{(2\pi)}\,(\bar{J}_j^{(m)} + \mathrm{i}\bar{S}_j^{(m)}), \qquad m > 0.$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme symbol $\Omega$ pro úhlové sférické souřadnice $(\vartheta, \Lambda)$, tj. $\Omega = (\vartheta, \Lambda)$, a symbolem $\mathrm{d}\Omega$ budeme rozumět element prostorového úhlu

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\Lambda. \tag{2.13}$$

Pro pozdější potřebu explicitně vypíšeme sférické funkce $\mathrm{Y}_{jm}(\Omega)$ do stupně $j = 2$

$$\mathrm{Y}_{00}(\Omega) = 1/(2\sqrt{\pi}); \qquad \mathrm{Y}_{10}(\Omega) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{\pi}\right)}\cos\vartheta; \tag{2.14}$$

$$\mathrm{Y}_{20}(\Omega) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{5}{\pi}\right)}\,(3\cos^2\vartheta - 1),$$

$$\mathrm{Y}_{1\pm1}(\Omega) = \mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2\pi}\right)}\sin\vartheta\exp(\pm\mathrm{i}\Lambda),$$

$$\mathrm{Y}_{2\pm1}(\Omega) = \mp\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3\,.\,5}{2\pi}\right)}\cos\vartheta\sin\vartheta\exp(\pm\mathrm{i}\Lambda),$$

$$\mathrm{Y}_{2\pm2}(\Omega) = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{3\,.\,5}{2\pi}\right)}\sin^2\vartheta\exp(\pm2\mathrm{i}\Lambda).$$

Potenciál odstředivých sil můžeme vyjádřit pomocí sférických funkcí $\mathrm{Y}_{00}(\Omega)$, $\mathrm{Y}_{20}(\Omega)$ a Helmertova parametru $q$

(2.15)
$$Q(P) = \tfrac{1}{2}\omega^2\varrho^2\sin^2\vartheta = \frac{GM}{\varrho}\,q\left(\frac{\varrho}{a_0}\right)^3\frac{2\sqrt{\pi}}{3}\left[\mathrm{Y}_{00}(\Omega) - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Y}_{20}(\Omega)\right] =$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\frac{GM}{\varrho}\,q\left(\frac{\varrho}{a_0}\right)^3[1 - \mathrm{P}_2^{(0)}(\cos\vartheta)].$$

Připomeňme, že potenciál odstředivých sil není na rozdíl od gravitačního potenciálu harmonickou funkcí; splňuje rovnici

$$\Delta Q = 2\omega^2 \neq 0. \tag{2.16}$$

Parametr $q$ vystupující v (2.15) je definován

$$q = \omega^2 a_0^3/(GM). \tag{2.17}$$

Geometrické místo bodů splňujících podmínku

$$W = W_0, \tag{2.18}$$

kde $W_0$ je konstanta, představuje uzavřenou plochu konstantního geopotenciálu čili plochu hladinovou (ekvipotenciální). Konstanta $W_0$ tuto plochu definuje rozměrově, soubor Stokesových parametrů tvarově. Místo konstanty $W_0$ zaveďme poměr

$$GM/W_0 = R_0, \tag{2.19}$$

který budeme nazývat délkovým (rozměrovým) faktorem geopotenciálu. Považujeme-li $R_0$, resp. $W_0$ za parametr, dostaneme systém ekvipotenciálních, uzavřených, nikde se neprotínajících ploch. Jedna z nich má výjimečné postavení: v oblastech oceánů a moří se ztotožňuje s jejich klidnými středními hladinami*), a tudíž představuje povrch celého zemského tělesa. Zavedl ji Listing (1873) [21] a nazval ji geoidem. Její geopotenciál budeme označovat $W_0$ a její rozměrový faktor $R_0$. Veličina $W_0$ nebo lépe

$$R_0 = GM/W_0 \tag{2.20}$$

je základní veličinou přímo a jedoznačně definující **rozměr zemského tělesa**. Další veličiny určující rozměr tělesa, např. velká poloosa zemského elipsoidu, jsou již zprostředkované a závisejí na dodatečných podmínkách, které je třeba formulovat.

## 2.3 Transformace gravitačního potenciálu a potenciálu odstředivých sil při otočení souřadnicového systému. Transformace Stokesových parametrů

Gravitační potenciál $V(P)$ ve vnějším bodu $P(\varrho, \Omega)$ uvažujeme ve tvaru (2.3); sférický souřadnicový systém, ve kterém se vyjadřuje, označme $S(\varrho, \vartheta, \Lambda)$. Přejdeme k jinému sférickému souřadnicovému systému $S'(\varrho', \vartheta', \Lambda')$, který vznikne otočením původního systému S kolem počátku souřadnic. Otočení popíšeme úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Potenciál $V(P)$ v témže bodě se vyjadřuje v systému S′ takto:

$$V(P) = \frac{GM}{\varrho'} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a_0}{\varrho'}\right)^j \sum_{M=-j}^{j} A'_{jM} Y_{jM}(\vartheta', \Lambda').$$

*) Zde pomíjíme případné rozdíly hladin oceánů a vliv stálé části slapového potenciálu od Měsíce a Slunce.

Symbolem $\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)$ označíme operátor rotace systému. Poněvadž sférické funkce $Y_{jm}(\vartheta, \Lambda)$ jsou kovariantní irreducibilní tenzory, můžeme vyjádřit působení operátoru rotace takto:

$$Y_{jM}(\vartheta', \Lambda') = \hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{jm}(\vartheta, \Lambda) = \sum_{m=-j}^{j} Y_{jm}(\vartheta, \Lambda)\, D^{j}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma), \tag{2.21}$$

kde $D^{j}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma)$ jsou Wignerovy matice. Dosazením do (2.20) dostaneme

$$V(P) = \frac{GM}{\varrho'} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a_0}{\varrho'}\right)^{j} \sum_{m=-j}^{j} Y_{jm}(\vartheta, \Lambda) \sum_{M=-j}^{j} A'_{jM} D^{j}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{2.22}$$

Uvážíme-li, že při otočení souřadné soustavy kolem počátku se délka průvodiče nemění, tj. $\varrho = \varrho'$, vyplyne srovnáním (2.22) s (2.3) vztah mezi komplexními Stokesovými parametry v obou soustavách

$$A_{jm} = \sum_{M=-j}^{j} A'_{jM} D^{j}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{2.23}$$

Poněvadž operátor rotace je unitární maticový operátor, tj. inverzní operátor $\hat{D}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{D}^{*}(\alpha, \beta, \gamma)$, plyne odtud

$$\sum_{m=-j}^{j} D^{j}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma)\, D^{j*}_{mM'}(\alpha, \beta, \gamma) = \delta_{MM'}. \tag{2.24}$$

Vynásobíme-li (2.23) $D^{j*}_{mM'}(\alpha, \beta, \gamma)$ a sečteme přes index $m$, dostaneme

(2.25)

$$\sum_{m=-j}^{j} A_{jm} D^{j*}_{mM'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{M=-j}^{j} A_{jM} \sum_{m=-j}^{j} D^{j}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma)\, D^{j*}_{mM'}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Vzhledem k platnosti (2.24) dostáváme inverzní vztah k (2.23)

$$A'_{jM} = \sum_{m=-j}^{j} A_{jm} D^{j*}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{2.26}$$

Wignerovy matice $D^{j}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma)$ jsou definovány

$$D^{j}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-\mathrm{i}m\alpha)\, d^{j}_{mM}(\beta) \exp(-\mathrm{i}M\gamma), \tag{2.27}$$

kde

$$d^{j}_{mM}(\beta) = (-1)^{j-M}[(j+m)!\,(j-m)!\,(j+M)!\,(j-M)!]^{1/2} \tag{2.28}$$

$$\sum_{k} (-1)^{k} \frac{\left(\cos \dfrac{\beta}{2}\right)^{m+M+2k} \left(\sin \dfrac{\beta}{2}\right)^{2j-m-M-2k}}{k!\,(j-m-k)!\,(j-M-k)!\,(m+M+k)!}.$$

Ve vzorci (2.28) se sčítá přes přirozená čísla $k$, pro která jsou všechny faktoriály v (2.28) nezáporné.

Pro význam transformace uvedeme tabulky matic $d^j_{mM}(\beta)$ pro $j = 1$ a $j = 2$ (tab. 2.1, tab. 2.2).

**Tabulka 2.1**

Matice $d^1_{mM}(\beta)$

| $m$ \ $M$ | 1 | 0 | $-1$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $(1 + \cos\beta)/2$ | $-\sin\beta/\sqrt{2}$ | $(1 - \cos\beta)/2$ |
| 0 | $\sin\beta/\sqrt{2}$ | $\cos\beta$ | $-\sin\beta/\sqrt{2}$ |
| $-1$ | $(1 - \cos\beta)/2$ | $\sin\beta/\sqrt{2}$ | $(1 + \cos\beta)/2$ |

## 2.4 Tíže ve vnějším prostoru

Tíže $\boldsymbol{g}(\varrho, \Omega)$ ve vnějším bodu $P(\varrho, \Omega)$ míří kolmo na ekvipotenciální plochu $W$ procházející bodem $P$ a je definována

$$\boldsymbol{g}(\varrho, \Omega) = -\nabla W(\varrho, \Omega) = -\nabla V(\varrho, \Omega) - \nabla Q(\varrho, \Omega). \tag{2.29}$$

Abychom mohli tíhové zrychlení explicitně vyjádřit, musíme provést operaci gradient na $\varrho^{-J-1}\mathrm{Y}_{jm}(\Omega)$ a na $\varrho^2\mathrm{Y}_{00}(\Omega) - 5^{-1/2}\mathrm{Y}_{20}(\Omega)$. Gradient převede skalární sférické funkce $\mathrm{Y}_{jm}(\Omega)$ na sférické vektory $\boldsymbol{Y}^{(\mu)}_{jm}(\Omega)$, $(\mu = 0, \pm 1)$.

Diferenciální operátor $\nabla$ se vyjádří ve sférické soustavě

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\varrho \nabla_\varrho + \boldsymbol{e}_\vartheta \nabla_\vartheta + \boldsymbol{e}_\Lambda \nabla_\Lambda, \tag{2.30}$$

kde

$$\nabla_\varrho = \frac{\partial}{\partial\varrho}, \quad \nabla_\vartheta = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \quad \nabla_\Lambda = \frac{1}{\varrho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\Lambda}. \tag{2.31}$$

Označíme-li $\boldsymbol{n}$ jednotkovou normálu $\boldsymbol{\varrho}/\varrho$, lze zapsat (2.30) ve tvaru

$$\nabla = \boldsymbol{n}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\nabla_\Omega, \tag{2.32}$$

kde $\nabla_\Omega$ je úhlová část operátoru $\nabla$, tj.

$$(\nabla_\Omega)_\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta}, \quad (\nabla_\Omega)_\Lambda = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\Lambda}. \tag{2.33}$$

**Tabulka 2.2**

Matice $d^2_{mM}(\beta)$

| $m$ \ $M$ | 2 | 1 | 0 | $-1$ | $-2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $(1+\cos\beta)^2/4$ | $-\sin\beta(1+\cos\beta)/2$ | $\sqrt{(3)}\sin^2\beta/(2\sqrt{2})$ | $-\sin\beta(1-\cos\beta)/2$ | $(1-\cos\beta)^2/4$ |
| 1 | $\sin\beta(1+\cos\beta)/2$ | $(2\cos^2\beta+\cos\beta-1)/2$ | $-\sqrt{(3)}\sin\beta\cos\beta/\sqrt{2}$ | $-(2\cos^2\beta-\cos\beta-1)/2$ | $-\sin\beta(1-\cos\beta)/2$ |
| 0 | $\sqrt{(3)}\sin^2\beta/(2\sqrt{2})$ | $\sqrt{(3)}\sin\beta\cos\beta/\sqrt{2}$ | $(3\cos^2\beta-1)/2$ | $-\sqrt{(3)}\sin\beta\cos\beta/\sqrt{2}$ | $\sqrt{(3)}\sin^2\beta/(2\sqrt{2})$ |
| $-1$ | $\sin\beta(1-\cos\beta)/2$ | $-(2\cos^2\beta-\cos\beta-1)/2$ | $\sqrt{(3)}\sin\beta\cos\beta/\sqrt{2}$ | $(2\cos^2\beta+\cos\beta-1)/2$ | $-\sin\beta(1+\cos\beta)/2$ |
| $-2$ | $(1-\cos\beta)^2/4$ | $\sin\beta(1-\cos\beta)/2$ | $\sqrt{(3)}\sin^2\beta/(2\sqrt{2})$ | $\sin\beta(1+\cos\beta)/2$ | $(1+\cos\beta)^2/4$ |

Vektory $\boldsymbol{e}_\varrho$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$, $\boldsymbol{e}_\Lambda$ jsou bázové vektory tvořící pravotočivý systém, tj.

(2.34)
$$\boldsymbol{e}_\varrho \times \boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_\Lambda; \quad \boldsymbol{e}_\vartheta \times \boldsymbol{e}_\Lambda = \boldsymbol{e}_\varrho; \quad \boldsymbol{e}_\Lambda \times \boldsymbol{e}_\varrho = \boldsymbol{e}_\vartheta.$$

Sférické bázové vektory $\boldsymbol{e}_\varrho$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$, $\boldsymbol{e}_\Lambda$ jsou závislé na úhlových souřadnicích a platí pro ně

(2.35)
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varrho}{\partial \varrho} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\vartheta}{\partial \varrho} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\Lambda}{\partial \varrho} = 0; \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\varrho}{\partial \vartheta} = \boldsymbol{e}_\vartheta; \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\boldsymbol{e}_\varrho; \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\boldsymbol{e}_\Lambda = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda}\boldsymbol{e}_\varrho = \boldsymbol{e}_\Lambda \sin\vartheta; \quad \frac{\partial}{\partial \Lambda}\boldsymbol{e}_\vartheta = \boldsymbol{e}_\Lambda \cos\vartheta; \quad \frac{\partial}{\partial \Lambda}\boldsymbol{e}_\Lambda = -\boldsymbol{e}_\varrho \sin\vartheta - \boldsymbol{e}_\vartheta \cos\vartheta$$

a dále jejich divergence a rotace jsou

(2.36)
$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{e}_\varrho = \frac{2}{\varrho}; \quad \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{e}_\vartheta = \frac{1}{\varrho}\operatorname{cotg}\vartheta; \quad \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{e}_\Lambda = 0;$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{e}_\varrho = 0; \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{e}_\vartheta = \frac{1}{\varrho}\boldsymbol{e}_\Lambda; \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{e}_\Lambda = \frac{1}{\varrho}\operatorname{cotg}\vartheta \boldsymbol{e}_\varrho - \frac{1}{\varrho}\boldsymbol{e}_\vartheta.$$

Sférické vektory $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\vartheta, \Lambda)$ se definují takto

(2.37)
$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{[j(j+1)]}}\boldsymbol{\nabla}_\Omega \mathrm{Y}_{jm}(\Omega),$$

$$\boldsymbol{Y}_{km}^{(0)}(\Omega) = \frac{-1}{\sqrt{[j(j+1)]}}(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla}_\Omega)\mathrm{Y}_{jm}(\Omega),$$

$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega) = \boldsymbol{n}\mathrm{Y}_{jm}(\Omega).$$

Sférické vektory $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$ ($\lambda = 0, \pm 1$) mají tu přednost, že jsou výhodně orientovány vzhledem ke směru průvodiče $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\varrho}/\varrho$, tj. $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega)$ (podélný vektor) je paralelní se směrem $\boldsymbol{n}$ a vektory $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(0)}(\Omega)$ a $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega)$ (příčné vektory) jsou kolmé na směr $\boldsymbol{n}$, tj.

(2.38)
$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega) = 0; \quad \boldsymbol{n}.\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega) = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{Y}_{jm}^{(0)}(\Omega) = 0.$$

Podle uvedených vztahů lze vyjádřit gradient takto

(2.39)
$$\boldsymbol{\nabla}[\varrho^{-j-1}\mathrm{Y}_{jm}(\Omega)] = \frac{\mathrm{d}\varrho^{-j-1}}{\mathrm{d}\varrho}\boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + \sqrt{[j(j+1)]}\,\varrho^{-j-2}\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega).$$

Sférický vektor se zapíše takto

(2.40)
$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega) = \boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)|_\varrho \boldsymbol{e}_\varrho + \boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)|_\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta + \boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)|_\Lambda \boldsymbol{e}_\Lambda,$$

kde složky lze vyjádřit pomocí sférických funkcí

(2.41)
$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega)|_\varrho = \boldsymbol{Y}_{jm}^{(0)}(\varrho)|_\varrho = \boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega)|_\vartheta = \boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega)|_\Lambda = 0,$$
$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega)|_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{[j(j+1)]}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathrm{Y}_{jm}(\Omega),$$
$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega)|_\Lambda = \frac{im}{\sqrt{[j(j+1)]}}\frac{1}{\sin\vartheta}\mathrm{Y}_{jm}(\Omega),$$
$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(0)}(\Omega)|_\vartheta = \frac{-m}{\sqrt{[j(j+1)]}}\frac{1}{\sin\vartheta}\mathrm{Y}_{jm}(\Omega),$$
$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(0)}(\Omega)|_\Lambda = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{[j(j+1)]}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathrm{Y}_{jm}(\Omega),$$
$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega)|_\varrho = \mathrm{Y}_{jm}(\Omega).$$

(2.42)
$$\frac{\partial \mathrm{Y}_{jm}(\Omega)}{\partial\vartheta} = \tfrac{1}{2}\{\sqrt{[(j-m)(j+m+1)]}\exp(-\mathrm{i}\Lambda)\,\mathrm{Y}_{jm+1}(\Omega) - \\ - \sqrt{[(j+m)(j-m+1)]}\exp(\mathrm{i}\Lambda)\,\mathrm{Y}_{jm-1}(\Omega)\}.$$

Využijeme-li uvedených vztahů, můžeme vyjádřit podle (2.29), (2.3) a (2.15) intenzitu $\boldsymbol{g}$ pomocí sférických vektorů ve tvaru

(2.43)
$$\boldsymbol{g}(\varrho, \vartheta, \Lambda) = \frac{GM}{\varrho^2}\sum_{jm}^{\infty}\left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j A_{jm}\{(j+1)\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega) - \sqrt{[j(j+1)]}\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega)\} - \\ - \frac{GM}{\varrho^2}q\left(\frac{\varrho}{a_0}\right)^3\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\left\{\boldsymbol{Y}_{00}^{(-1)}(\Omega) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\boldsymbol{Y}_{20}^{(-1)}(\Omega) + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)}\boldsymbol{Y}_{20}^{(1)}(\Omega)\right]\right\}.$$

Vyjádříme-li tíhové zrychlení ve složkách, dostaneme

(2.44)
$$\boldsymbol{g}|_\varrho = \frac{GM}{\varrho^2}\sum_{jm}^{\infty}(j+1)\,A_{jm}\left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j \mathrm{Y}_{jm}(\Omega) - \omega^2\varrho\sin^2\vartheta,$$

(2.45)
$$\boldsymbol{g}|_\vartheta = -\frac{GM}{2\varrho^2}\sum_{jm}^{\infty}A_{jm}\left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j\{[(j-m)(j+m+1)]\exp(-\mathrm{i}\Lambda)\,\mathrm{Y}_{jm+1}(\Omega) - \\ - \sqrt{[(j+m)(j-m+1)]}\exp(\mathrm{i}\Lambda)\,\mathrm{Y}_{jm-1}(\Omega)\} + \varrho\omega^2\cos\vartheta\sin\vartheta,$$

(2.46)
$$\boldsymbol{g}|_\Lambda = -\mathrm{i}\frac{GM}{\varrho^2}\sum_{jm}mA_{jm}\left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j\frac{1}{\sin\vartheta}A_{jm}\mathrm{Y}_{jm}(\Omega).$$

Složky odstředivých zrychlení vystupující ve (2.44) a (2.45) můžeme vyjádřit pomocí sférických funkcí

$$(2.47)\qquad g_Q|_\varrho = -\omega^2\varrho\sin^2\vartheta = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\,\omega^2\varrho\left[\mathrm{Y}_{00}(\Omega) - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{Y}_{20}(\Omega)\right],$$

(2.48)

$$g_Q|_\vartheta = \omega^2\varrho\cos\vartheta\sin\vartheta = \frac{2\sqrt{(2\pi)}}{\sqrt{(3\,.\,5)}}\,\omega^2\varrho\exp(-\mathrm{i}\Lambda)\,\mathrm{Y}_{21}(\Omega) =$$

$$= \frac{GM}{\varrho^2}\,\frac{\sqrt{(2\pi)}}{\sqrt{(3\,.\,5)}}\left(\frac{\varrho}{a_0}\right)^3[\exp(-\mathrm{i}\Lambda)\,\mathrm{Y}_{21}(\Omega) - \exp(\mathrm{i}\Lambda)\,\mathrm{Y}_{2-1}(\Omega)].$$

Označíme-li $\cos\alpha_\varrho = \sin\varphi$, $\cos\alpha_\vartheta = \cos\varphi\cos\lambda$, $\cos\alpha_\Lambda = \cos\varphi\sin\lambda$ (viz 1.2) směrové kosiny normály ekvipotenciální plochy, pak platí

$$(2.49)\qquad \cos\alpha_\varrho : \cos\alpha_\vartheta : \cos\alpha_\Lambda = \boldsymbol{g}|_\varrho : \boldsymbol{g}|_\vartheta : \boldsymbol{g}|_\Lambda.$$

Sférické vektory $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$, $(\lambda = 0, \pm 1)$ nejsou ireducibilní sférické tenzory hodnosti 1, takže při otočení souřadnicové soustavy se netransformují pomocí $\boldsymbol{D}$-matic podle (2.27). Ireducibilní tenzory hodnosti 1 jsou sférické tenzory $\boldsymbol{Y}_{jm}^k(\Omega)$, $(k = j - 1, j, j + 1)$, které jsou vlastními funkcemi úhlové části Laplaceova operátoru $\Delta_\Omega$ s vlastními čísly $k(k + 1)$, tj. splňují rovnici

$$(2.50)\qquad [\Delta_\Omega + k(k + 1)]\,\boldsymbol{Y}_{jm}^k(\Omega) = 0.$$

Sférické vektory $\boldsymbol{Y}_{jm}^k(\Omega)$ se vyjadřují pomocí sférických vektorů $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$, $(\lambda = 0, \pm 1)$ takto:

$$(2.51)\qquad \boldsymbol{Y}_{jm}^{j+1}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(2j + 1)}}\,[\sqrt{(j)}\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega) - \sqrt{(j + 1)}\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega)],$$

$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{j}(\Omega) = \boldsymbol{Y}_{jm}^{(0)}(\Omega),$$

$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{j-1}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(2j + 1)}}\,[\sqrt{(j + 1)}\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(1)}(\Omega) + \sqrt{(j)}\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(-1)}(\Omega)].$$

Dosadíme-li do vzorce (2.43) pro tíhové zrychlení za vektory $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega)$ sférické vektory $\boldsymbol{Y}_{jm}^k(\Omega)$ podle obrácených vztahů (2.51), dostaneme

$$(2.52)\qquad \boldsymbol{g}(\varrho, \Omega) = -\frac{GM}{\varrho^2}\sum_{jm}\left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j\sqrt{[(j + 1)(2j + 1)]}\,A_{jm}\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{j+1}(\Omega) +$$

$$+\frac{GM}{\varrho^2}\,q\left(\frac{\varrho}{a_0}\right)^3\frac{4\sqrt{\pi}}{3}\,[\boldsymbol{Y}_{00}^1(\Omega) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{Y}_{20}^1(\Omega)].$$

Otočíme-li souřadnicovou soustavu podle Eulerových úhlů $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a označíme-li čárkou souřadnice v otočené soustavě $(\varrho = \varrho')$, můžeme psát transformační vzorce pro sférické vektory $\boldsymbol{Y}_{jm}^k(\Omega)$ takto:

$$(2.53) \qquad \boldsymbol{Y}^L_{jm}(\Omega') = \sum_{m=-j}^{j} D^j_{mM}(\alpha, \beta, \gamma)\, \boldsymbol{Y}^L_{jm}(\Omega)$$

a inverzní transformace vzhledem k unitárnosti $D$-matic zní

$$(2.54) \qquad \boldsymbol{Y}^L_{jm}(\Omega) = \sum_{M=-j}^{j} D^{j*}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma)\, \boldsymbol{Y}^L_{jM}(\Omega').$$

Speciálně máme

$$(2.55) \qquad \boldsymbol{Y}^1_{00}(\Omega) = D^{0*}_{00}(\alpha, \beta, \gamma)\, \boldsymbol{Y}^1_{00}(\Omega'),$$

$$\boldsymbol{Y}^1_{20}(\Omega) = \sum_{M=-2}^{2} D^{2*}_{0M}(\alpha, \beta, \gamma)\, \boldsymbol{Y}^1_{2M}(\Omega').$$

Pro $D$-matice speciálně platí

(2.56)

$$D^L_{00}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{P}_L(\cos\beta),$$

$$D^L_{0m}(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\left(\frac{4\pi}{2L+1}\right)}\, \mathrm{Y}_{L-m}(\beta, \gamma) = (-1)^m \sqrt{\left(\frac{4\pi}{2L+1}\right)}\, \mathrm{Y}^*_{Lm}(\beta, \gamma).$$

Dosazením za $\boldsymbol{Y}^L_{jM}(\Omega)$ podle vzorců (2.54) a (2.56) upravíme vzorec pro tíhové zrychlení v otočené soustavě

(2.57)

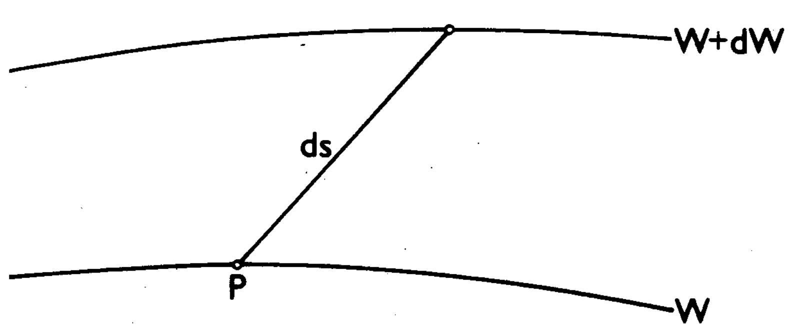
$$\boldsymbol{g}(\varrho, \Omega') = -\frac{GM}{\varrho^2} \sum_{jmM} \left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j \sqrt{[(j+1)(2j+1)]}\, A_{jm} D^{j*}_{mM}(\alpha, \beta, \gamma) \times$$

$$\times \boldsymbol{Y}^{j+1}_{jM}(\Omega') + \frac{GM}{\varrho^2}\left(\frac{\varrho}{a_0}\right)^3 \frac{4\sqrt{\pi}}{3}\, q[D^{0*}_{00}(\alpha, \beta, \gamma)\, \boldsymbol{Y}^1_{00}(\Omega') +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{M=-2}^{2} D^{2*}_{0M}(\alpha, \beta, \gamma)\, \boldsymbol{Y}^1_{20}(\Omega')] =$$

$$= -\frac{GM}{\varrho^2} \sum_{jM} \left(\frac{a_0}{\varrho}\right)^j \sqrt{[(j+1)(2j+1)]}\, A'_{jM}\, \boldsymbol{Y}^{j+1}_{jM}(\Omega') +$$

$$+ \frac{GM}{\varrho^2}\left(\frac{\varrho}{a_0}\right)^3 \frac{4\sqrt{\pi}}{3}\, q\left[\boldsymbol{Y}^1_{00}(\Omega') + \frac{\sqrt{(2\pi)}}{\sqrt{5}} \sum_{M=-2}^{2} (-1)^M \boldsymbol{Y}^1_{2M}(\Omega')\, \mathrm{Y}^*_{2M}(\beta, \gamma)\right].$$




**Obr. 2.1** Změna geopotenciálu při posuvu po dráze d$s$.

Použitím vztahů (2.51) a (2.41) můžeme vyjádřit složky tíhového zrychlení analogickým způsobem podle (2.44—2.46).

Posuvu potenciálového bodu $P$ po dráze $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ odpovídá změna geopotenciálu $\mathrm{d}W$ (obr. 2.1)

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{2.58}$$

## 2.5 Listingův geoid

### 2.5.1 Mongeův tvar geoidu

Listingův geoid je definován podle (2.18)

$$W(\varrho, \vartheta, \Lambda) = W_0 = GM/R_0, \tag{2.59}$$

což je rovnice plochy v souřadnicích $(\varrho, \vartheta, \Lambda)$. Pro některé účely je výhodné vyjádřit explicitně geocentrický průvodič bodu geoidu jako funkci úhlových souřadnic $(\vartheta, \Lambda)$, tzv. Mongeův tvar geoidu. V dalším budeme používat dvou ekvivalentních reprezentací pro geocentrický průvodič geoidu.

$$\varrho = a_1 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} E_{jm} \mathrm{Y}_{jm}(\vartheta, \Lambda), \tag{2.60}$$

resp.

$$\varrho = R_0 \left[ 1 + A_0^{(0)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (A_n^{(k)} \cos k\Lambda + B_n^{(k)} \sin k\Lambda) \mathrm{P}_n^{(k)}(\cos \vartheta) \right]. \tag{2.61}$$

**Tabulka 2.3**

Koeficienty v rozvoji průvodiče geoidu u zonálních členů

| $n$ | $A_n^{(0)}$ $[10^{-9}]$ | $R_0 A_n^{(0)}$ [m] |
|---|---|---|
| 2 | −2 241 889 | −14 266,65 |
| 3 | 2 553 | 16,25 |
| 4 | 3 117 | 19,84 |
| 5 | 228 | 1,46 |
| 6 | −553 | −3,52 |
| 7 | 369 | 2,35 |
| 8 | 211 | 1,35 |
| 9 | 119 | 0,76 |
| 10 | 247 | 1,57 |
| 11 | −234 | −1,49 |
| 12 | 200 | 1,28 |